

Introducción

Semiótica y Educación Matemática

Luis Radford ¹

El creciente interés suscitado por la semiótica en el campo de la educación matemática en los últimos años se debe nos parece a razones de diferente índole.

Por un lado, ha habido una toma de conciencia progresiva del hecho de que, dada la generalidad de los objetos matemáticos, la actividad matemática es, esencialmente, una actividad simbólica (D'Amore, 2001; Duval, 1998; Godino y Batanero, 1999; Otte, 2003; Radford, 2004; Steinbring, 2005).

Por otro lado, el interés que suscitó en los años 1990 la comprensión de la comunicación en el salón de clase puso en evidencia la importancia que tiene, tanto para el investigador como para el maestro, comprender la naturaleza del discurso matemático (Cobb, Yackel, y McClain, 2000; Steinbring, Bartolini Bussi, y Sierpinska, 1998). La semiótica, con su arsenal de métodos y conceptos, aparece como teoría apropiada para intentar dar cuenta de la complejidad discursiva.

Otra razón parece ser el uso cada vez mayor de artefactos tecnológicos en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (Arzarello, 2004; Borba y Villareal, 2006; Guzmán y Kieran, 2002; Kaput y Hegedus, 2004; Kieran y Saldanha, 2005). La semiótica, de nuevo, parece ofrecer conceptos capaces de ayudar al didáctico en su tarea de entender el papel cognitivo que desempeñan los artefactos.

Mencionemos, por último, el hecho de que los artefactos y los signos son portadores de convenciones y formas culturales de significación que hacen a la semiótica un campo muy bien situado para entender las relaciones entre los signos a través de los cuales piensan los individuos y el contexto cultural (Radford, en prensa-1).

La semiótica se presenta con un amplio y ambicioso espectro de aplicaciones. Esto no debe, sin embargo, dar la impresión de que la semiótica es una teoría nueva, unificada por una serie de principios comunes. Hay, por lo menos, tres tradiciones semióticas claramente diferenciadas. (1) La tradición Saussureana, iniciada por el suizo Ferdinand de Saussure (1857-1913) en una serie de cursos dictados entre 1907 y 1911, tradición que emplea el término *semiología*; (2) la tradición Peirceana, iniciada por el estadounidense Charles Sanders Peirce (1839-1914) quien acuñó el término semiótica; (3); la Vygotskiana, iniciada por el psicólogo ruso Lev S. Vygotski (1896-1934). Cada una de esas tradiciones emergió y fue desarrollada dentro de problemáticas precisas y diferentes.

¹ École des sciences de l'éducation. Université Laurentienne, Ontario, Canada.

La tradición Saussureana

El problema principal para Saussure era el de la comprensión de la lengua, que él distinguía del lenguaje y de la palabra, una distinción que reposa en la oposición entre lo social y lo subjetivo. Para Saussure, la palabra es de orden subjetivo, mientras que la lengua es de orden social. “La lengua”, decía Saussure, “es un sistema de signos que expresan ideas, comparable a la escritura, al alfabeto de los sordomudos, a los ritos simbólicos, a las formas de cortesía, a las señales militares, etc. etc.” (Saussure, 1995, p. 33)². Para Saussure, la lengua no solamente se asemeja a esos sistemas de signos, sino que es el más importante de ellos. Fue en este contexto que Saussure propuso una nueva ciencia, que englobaría la lingüística y cuyo objetivo sería el estudio general de los signos:

Podemos concebir, pues, *una ciencia que estudie la vida de los signos en el seno de la vida social*; ésta sería parte de la psicología social y, por consiguiente, de la psicología general; la llamaremos *semiología* (del griego *semeïon*, “signo”). Ella nos enseñará en qué consisten los signos (y) cuáles son las leyes que los rigen. (Saussure, — *op. cit.* p. 33; énfasis en el original).

Para Saussure, los signos no son simples marcas que representan cosas en el mundo. Esta idea, dice Saussure, reduce el papel de los signos a una mera nomenclatura. El signo, Saussure sugiere, es la unión indisoluble de dos elementos de naturaleza psíquica: el concepto (*signifié*, significado) y la imagen acústica

asociada (*signifiant*, significante). El lingüista suizo nos invita a imaginar a alguien que nos habla en una lengua desconocida: “Cuando escuchamos una lengua desconocida, estamos en la imposibilidad de decir cómo los sonidos que siguen deben ser analizados” (*op. cit.* p. 145). Lo que aparece ante nosotros es una cadena de sonidos sin significados. “Pero cuando sabemos qué sentido y qué papel hay que atribuir a cada parte de la cadena, entonces vemos esas partes desprenderse de las otras y esa cinta (auditiva) amorfa dividirse en fragmentos” o signos con pleno sentido (*op. cit.* p. 145).

Como lo sugiere este ejemplo, los signos significan en la medida en que son miembros de un sistema. Esto es, el signo tiene significado cuando está relacionado con otros signos. Es gracias a este sistema que el signo es signo. Saussure ofrece la analogía con el juego de ajedrez. El caballo, por ejemplo, no representa nada, en tanto que pieza material: “En su materialidad pura, fuera de su casilla y de las otras condiciones del juego, el caballo no representa nada para el jugador” (*op. cit.* p. 153). Esta pieza material no se convierte en elemento real y concreto, sino hasta cuando reviste el valor que le otorgan las reglas del juego. Lo mismo ocurre con los signos.

En la aproximación estructuralista de Saussure, la manera de significar de los signos reposa en su oposición diferencial. Esta idea fue continuada, entre otros, por (Hjelmslev, 1969) y luego por (Eco, 1976).

² Excepto en los casos de obras mencionadas en español, en la lista de referencias, las traducciones al español son nuestras.

La tradición Peirceana

Charles Sanders Peirce, matemático dedicado a la lógica, concibió la semiótica como la “doctrina formal de los signos”. La orientación de su pragmatismo (diferente de simple practicalismo como algunos lo han interpretado) no fue la investigación de cómo los signos significan en el seno de la vida social, como fue el caso de Saussure, sino la manera en que un individuo genérico utiliza signos para formar nuevas ideas y nuevos conceptos para alcanzar la verdad. Su teoría de pragmatismo (es decir, la lógica de abducción) es la base de su semiótica. Por esa razón, la semiótica Peirceana se mueve cerca de las esferas de la lógica, sin reducirse solamente a ésta.

En tanto que buen discípulo de Kant, Peirce había notado, contra las ideas de los racionalistas de la antigüedad y del siglo XVII, que el pensamiento humano no puede ser comprendido a la luz de la teoría de la inferencia o de la lógica formal. Como Kant, Peirce se propuso modificar las categorías aristotélicas y abandonó, como lo haría Piaget unos años más tarde, el apriorismo Kantiano. Para ello, Peirce adoptó una postura ontológica alineada con el Realismo escolástico, y elaboró una fenomenología en la cual la manera de conocer pasa por tres experiencias distintas (*Firstness*, *Secondness* and *Thirdness*).

Peirce definió el signo como algo que, para alguien, toma lugar de otra cosa (el objeto del signo), no en todos los aspectos de esta cosa, sino solamente de acuerdo con cierta forma o capacidad (ver CP 2.228³). En

efecto, según Peirce, el objeto (*Secondness*) del signo es aprehendido según cierta cualidad (*Firstness*) de manera tal que un nuevo signo es producido: el *interpretant* (interpretante) (*Thirdness*). Siguiendo el mismo proceso, este interpretante puede convertirse en objeto de otro nuevo signo y así indefinidamente (ver CP 1.339).

Este proceso que va de signo en signo o semiosis ilimitada, como la llaman Eco y otros peirceanos, constituye la esencia del pensamiento, pues como dice Peirce en otras partes, “todo pensamiento es un signo” (CP 1.538, 2.253, 5.314, 5.470). El problema es, pues, para Peirce, encontrar el método “correcto” para pensar:

si podemos encontrar el método para pensar y si podemos seguirlo el método correcto de transformación de signos entonces la verdad puede ser ni más ni menos que el último resultado al cual el método del seguimiento de signos nos conduciría ultimadamente” (Peirce, CP 5.553).

El éxito de la empresa de Peirce reposa, sin embargo, en la adopción de dos hipótesis fundamentales, cuyo precio puede parecer muy elevado: primero, la hipótesis de una adecuación entre el mundo real y el mundo de las ideas, esto es entre *ordo rerum* y *ordo idearum*; segundo, la confianza en el razonamiento científico como modelo metodológico de raciocinio (Radford, 2006).

Respecto a la primera hipótesis, señalemos, brevemente, que Peirce supone que, desde el punto de vista ontológico, la naturaleza es gobernada por

³ Siguiendo la tradición, en adelante indicaremos los Collected Papers de Peirce (1931-1958) con las siglas CP. El número 2.228 significa el libro 2, entrada 228. En general, CP a.b significa los Collected Papers, libro a, entrada b).

leyes. Además, desde el punto de vista epistemológico, Peirce supone que esta naturaleza es *inteligible*.

Respecto a la segunda hipótesis, la mencionada adecuación entre *ordo rerum* y *ordo idearum*, sostenida por el extremo realismo escolástico Peirceano (ver Parker, 1994, p. 67), es suplementada por una idea racionalista de verdad. El resultado es que la actividad cognitiva del individuo encuentra un aliado incondicional en la naturaleza. Los signos de la naturaleza y el pensamiento humano caminan juntos, tomados de la mano. Es por eso que Peirce puede decir con confianza que “El solo inmediato propósito del pensamiento es volver las cosas inteligibles” (CP 1.405). Es gracias a esta idea racionalista de verdad que funciona como idea reguladora que, según Peirce, podemos estar seguros contra la opinión de Kant y el constructivismo al que el éste dio origen de que en nuestras disquisiciones no estamos corriendo detrás de fantasmas, objetos nominales o simples invenciones subjetivas o ideas “viables” como ha dicho Glaserfeld (1995): al contrario, el “correcto” uso de signos, regulados por esa verdad trascendental que se expresa en los signos de la naturaleza y que nos revela el método científico, asegura el final feliz de la semiosis ilimitada (Nesher, 1997; Radford, en prensa-2).

No obstante el precio a pagar por las hipótesis anteriores, la semiótica de Peirce ofrece ricas topologías de signos que pueden ser muy útiles en la comprensión de fenómenos didácticos (Otte, en prensa; Presmeg, 2005; Sáenz-Ludlow, 2003, 2004, 2006). Una de las vías actualmente exploradas dentro de la tradición peirceana es la del razonamiento diagramático

(Dörfler, 2005; Hoffmann, 2002, 2005; Stjernfelt, 2000).

La tradición Vygotskiana ⁴

La semiótica Vygotskiana fue elaborada como respuesta al problema del estudio del pensamiento y de su desarrollo. Amparado en la corriente Marxista de su época, Vygotski propuso una teoría del desarrollo cognitivo en la cual los conceptos de labor y de herramientas desempeñan un papel primordial. En una conferencia dictada en 1930 en la Academia de la educación comunista, Vygotski llamó la atención sobre el hecho de que el comportamiento humano está inmerso en una serie de dispositivos artificiales (artefactos). Una de las novedades de la teoría vygotskiana fue la de mostrar que en vez de ser simples ayudas, estos dispositivos alteran el curso del desarrollo natural de los procesos psíquicos. Dichos dispositivos se convierten en *instrumentos psicológicos* y sirven de base a la aparición de las funciones psíquicas superiores, funciones que distinguen el reino humano del reino animal. Refiriéndose a los instrumentos psicológicos, dice Vygotski:

Los instrumentos psicológicos son creaciones artificiales; estructuralmente son dispositivos sociales y no orgánicos o individuales; están dirigidos al dominio de los procesos propios o ajenos, lo mismo que la técnica lo está al dominio de los procesos de la naturaleza. (Vygotski, 1991, p. 65)

Para Vygotski y la escuela histórico-cultural de psicología, el problema del desarrollo intelectual es planteado como problema

⁴ La transliteración del nombre de Vygotski se escribe diferentemente, según el idioma empleado. En inglés la traducción es Vygotsky.

cultural. De acuerdo con la “ley genética de desarrollo cultural” que propone Vygotski,

En el desarrollo cultural del niño, toda función aparece dos veces: primero, a nivel social, y más tarde, a nivel individual; primero *entre* personas (*interpsicológicamente*), y después, en el *interior* del propio niño (*intrapsicológicamente*). Esto puede aplicarse igualmente a la atención voluntaria, a la memoria lógica y a la formación de conceptos. Todas las funciones superiores se originan como relaciones entre seres humanos. (Vygotski, 1988, p. 94; cursivas en el original).

El signo desempeña una función mediadora entre el individuo y su contexto, y permite, además, ese pasaje entre lo interpsicológico y lo intrapsicológico que asegura la reconstrucción interna de la acción, esto es, de su *internalización*. Vygotski da como ejemplo la aparición del gesto:

Al principio, este ademán no es más que un intento fallido de alcanzar algo, un movimiento dirigido hacia cierto objeto que designa la actividad futura... Cuando acude la madre en ayuda del pequeño y se da cuenta de que su movimiento está indicando algo más, la situación cambia radicalmente. El hecho de señalar se convierte en un gesto para los demás... Únicamente más tarde, cuando el niño es capaz de relacionar su fallido movimiento de agarrar con la situación objetiva como un todo, comienza a interpretar dicho movimiento como acto de señalar... Como consecuencia de este cambio, el movimiento mismo queda

simplificado, y lo que de él resulta es la forma de señalar que llamamos gesto. (Vygotski, 1988, pp. 92-93)

La descripción que hace Vygotski de la aparición del gesto indicativo pone en evidencia el papel de lo social en la génesis de la significación. El gesto está primero dirigido hacia alguien (plano intersubjetivo) y se convierte en gesto para sí mismo (plano intrasubjetivo) solamente más tarde, en ese proceso de internalización que es mediado por el cuerpo mismo. Más tarde, la actividad gestual se vuelve más compleja con la aparición de otras formas indicativas, como las lingüísticas (por ejemplo con las expresiones “aquí” “allí”, etc.) en las que el signo se mueve en una capa de significación auditiva o escrita, dando lugar a una deixis compleja (ver Bühler, 1979; Radford, 2002).

A pesar de una orientación literaria, mostrada, sobre todo, en los primeros trabajos, como *La psicología del arte* (Vygotsky, 1971), publicado inicialmente en 1925, Vygotski, como Peirce, adoptó una ontología realista y, como éste, vio en la ciencia y la tecnología la forma por excelencia de alcance del conocimiento. No obstante esto, la idea del signo como objeto cognitivo, inspirado de la idea de herramienta laboral, es, sin duda, una idea interesante. Con ella, Vygotski rompió el esquema tradicional del idealismo y del racionalismo. El signo no es simplemente pieza diferencial de un sistema de estructuras (Saussure) ni mero medio de pensamiento y de formación de ideas (Peirce), sino, sobre todo, medio de *transformación* de las funciones psíquicas del individuo.

La analogía del signo como herramienta tiene, sin embargo, sus limitaciones. Así, van der Veer y Valsiner han sugerido que

dicha concepción del signo da a la psicología de Vygotski un aspecto demasiado técnico y la convierte en una especie de “psicotecnología” (van der Veer y Valsiner, 1991, p. 221). Vygotski parece haberse dado cuenta de esta limitación. En una serie de notas tomadas por A. N. Leontiev durante un seminario interno llevado a cabo en 1933 al que participaron, como de costumbre, los colaboradores cercanos de Vygotski y algunos psicólogos jóvenes que trabajaban bajo su dirección, seminario en el que Vygotski expuso ciertas tesis sobre el problema de la conciencia, leemos:

En los primeros trabajos ignorábamos que el significado es propio del signo (...) Partíamos del principio de la constancia del significado (...) Si antes nuestra tarea era mostrar lo común entre el “nudo” y la memoria lógica, ahora consiste en mostrar la diferencia que existe entre ellos. (cf. Vygotski, 1991, p. 121).

En las notas tomadas en la misma reunión durante la reacción de Vygotski al reporte preparado por otro de sus colaboradores, A. R. Luria, leemos: “Para nosotros lo principal es (ahora) el movimiento del sentido.” (cf. Vygotski, 1991, p. 125).

Es claro, pues, que al final de su vida, Vygotski vio la necesidad de continuar la reflexión sobre los signos del lado de la significación. Vygotski vio en el estudio de los significados verbales la pauta para ampliar dicho problema. Más tarde, Leontiev sugirió que la evolución de los

significados (verbales y otros) debe ser vista no solamente a la luz de la interacción humana, sino bajo el prisma de las relaciones siempre en movimiento de los individuos y de la naturaleza, bajo la emergencia y desarrollo del trabajo y de las relaciones sociales (van der Veer, 1996, p. 259), ideas que desembocaron en su *Teoría de la Actividad* (Leontiev, 1993).

Entre los trabajos de investigación conducidos dentro del paradigma vygotskiano, se pueden mencionar los de Bartolini Bussi y Mariotti (1999), Bartolini Bussi y Maschietto (2006), Berger (2005), Boero, Pedemonte y Robotti (1997).



Piaget y la semiótica

En sus trabajos sobre el papel del símbolo en el desarrollo cognitivo, Piaget introdujo el concepto de *función semiótica*, tratando de dar respuesta a la pregunta siguiente: ¿es posible que el pensamiento sea un resultado del lenguaje?⁵

Para Piaget, que solía plantear las preguntas en términos lógicos, el lenguaje era una condición necesaria, pero no suficiente del pensamiento. Un tanto irritado por la posición del positivismo de la primera parte del siglo XX, que reducía todo al lenguaje, Piaget sostuvo que: “El lenguaje puede constituir una condición necesaria de la terminación de las operaciones lógico-matemáticas sin ser, sin embargo, una condición suficiente de su formación.” (Piaget, 1978 p. 130). Para

⁵ La vigencia contemporánea de la pregunta de Piaget aparece claramente en una crónica periodística reciente sobre el trabajo antropológico realizado sobre los Pirahã, una pequeña tribu brasileña con un lenguaje sin cláusulas subordinadas. Una de las preguntas que los lingüistas se están haciendo es si es posible tener pensamientos para los cuales no hay palabras en la lengua (ver Bredow, 2006). Estoy en deuda con Heinz Steinbring por llamar mi atención sobre este artículo.

Piaget, era importante resolver el problema genético que consiste en saber si las raíces de las operaciones lógico-matemáticas se encuentran en el campo mismo del lenguaje o, si por el contrario, son anteriores a éste. La pregunta fundamental era saber “si la formación del pensamiento está relacionada con la adquisición del lenguaje como tal o con la función simbólica en general” (*op. cit.*, p. 131). En resumen, según Piaget, había que investigar

si la transmisión verbal es suficiente para constituir en el espíritu del niño estructuras operatorias o si esta transmisión es eficaz solamente a condición de ser asimilada gracias a estructuras de naturaleza más profunda (coordinación de acciones), no transmitidas por el lenguaje. (Piaget, *op. cit.* p. 131)

Dentro de esta problemática, uno de los resultados más relevantes alcanzados por Piaget fue la puesta en evidencia de una *inteligencia práctica* previa a la aparición del lenguaje en el niño. “Conviene insistir”, decía Piaget, aludiendo a los resultados experimentales de la escuela de Ginebra, “en el hecho de que las operaciones, en cuanto resultado de la interiorización de las acciones y de sus coordinaciones, permanecen durante mucho tiempo relativamente independientes del lenguaje.” (*op. cit.* p. 134). En su libro *Epistemología Genética*, Piaget regresa sobre el mismo problema y arguye que

El lenguaje no es ciertamente el medio exclusivo de representación. Éste es solamente un aspecto de la función muy general que Head ha llamado la función simbólica. Yo prefiero utilizar el término lingüístico: función semiótica. Esta función consiste en la habilidad de

representar algo a través de un signo o un símbolo o cualquier objeto (Piaget 1970, p. 45)

En su libro “*La formation du symbole chez l'enfant*” [La formación del símbolo en el niño] Piaget sostuvo que el símbolo resulta de un esquematismo no simbólico. Al principio del libro Piaget dice: “Vamos a intentar mostrar cómo la [emergencia del] símbolo es preparada por el esquematismo no simbólico” (Piaget 1968, p. 8), esto es, un esquematismo armado de significantes sensorimotrices “índices” o “señales”, a los cuales hace falta todavía la independencia respecto al objeto significado.

Según Piaget, la función semiótica empieza precisamente cuando hay una diferenciación entre significado y significante, diferenciación que provee al significado (*signifié*) con una permanencia espacio-temporal y abre la posibilidad de que un mismo significante pueda referir a varios significados. Para Piaget, la función semiótica incluye la imitación diferida, el juego simbólico, la imagen mental, los gestos y el lenguaje natural (Piaget en: Piattelli-Palmarini, 1982, p. 58).

La semiótica Piagetiana, que se enmarca dentro de la tradición Saussureana mencionada anteriormente, reposa en la idea de una continuidad entre los significantes sensorimotrices y la emergencia de los primeros símbolos en los niños. En otras palabras, la semiótica Piagetiana se apoya en un postulado según el cual la inteligencia sensorimotriz se prolonga, a través del signo, en representación conceptual (Piaget 1968, pp. 68-69).

La solución que propuso Piaget al acertijo del desarrollo de la inteligencia fue, como en el caso de Peirce, un intento serio de esquivar el apriorismo Kantiano. En el

fondo, la solución Piagetiana es una tematización sofisticada del compromiso que hace la filosofía del Siglo de las Luces entre el racionalismo y el empirismo. Piaget retoma la posición epistemológica que Kant otorga al individuo en el acto del conocimiento y la lleva a sus máximas conclusiones. En lugar de contentarse con la deducción Kantiana de las categorías escolásticas, deducción que limitaba al individuo a un uso racionalista de la facultad de entendimiento, Piaget propuso un proceso genético que se eleva de lo sensual a lo conceptual a través del efecto de una razón que se reconstruye, pacientemente, en cada individuo, independiente de su ubicación histórica y geográfica. La razón renace y se reconstruye en el curso de la actividad del individuo y llega, inevitablemente, atraída como el metal por el imán, a ese punto culminante que es la Razón Occidental. En definitiva, la epistemología genética de Piaget es una de las expresiones más modernas de la sensibilidad intelectual heredada del Siglo de las Luces.

Semiótica y Educación

Los trabajos incluidos en este número especial de la Revista Latinoamericana de Matemática Educativa prolongan el interés por la semiótica mostrado previamente en nuestro campo de investigación por otros colegas. Varios han sido, en efecto, los educadores y los psicólogos que empezaron a mostrar o sugerir hace varios años el potencial de la semiótica en las reflexiones didácticas. Así, la importancia de los signos matemáticos fue puesta en evidencia por Freudenthal al final de los años 1960 (Freudenthal, 1968). En los años 1980, Filloy y Rojano (1984) mostraron el potencial del análisis semiótico en la comprensión del desarrollo del lenguaje algebraico. Más tarde, Laborde, Puig y

Nunes (1996), entre otros, discutieron ciertos aspectos ligados al lenguaje. Siguiendo otro camino, Jean-Blaise Grize, un colaborador de Piaget, había también llamado la atención sobre los problemas del lenguaje en el pensamiento lógico (Grize, 1996).

Los trabajos que constituyen este número especial han sido agrupados en dos categorías. En la primera, el lector encontrará artículos de corte teórico.

En el primer artículo, Michael Otte aborda el tema de la demostración matemática y argumenta que es inútil buscar el sentido de los objetos matemáticos en una especie de estrato fundamental conceptual. Tomando una actitud *anti-mentalista*, que es compartida por varios autores del presente número, Otte argumenta que es inútil seguir creyendo que el significado (*meaning*) de las cosas yace en nuestras cabezas y que es igualmente inútil seguir pensando que el saber (*knowledge*) es una especie de experiencia mental. Siguiendo ciertas ideas de Peirce, Otte sugiere que no hay separación entre idea y símbolo. Explicar, Otte sostiene, es exhibir el sentido de alguna cosa a través de signos y sentido vistos como procesos.

Raymond Duval discute el problema de la heterogeneidad semiótica, heterogeneidad en que subyace una de las dificultades mayores del aprendizaje de las matemáticas, esto es, pasar de un tipo de representación a otro. Duval arguye que el análisis de las producciones matemáticas exige herramientas de análisis semiótico complejas y adaptadas a los procesos cognitivos movilizados en toda actividad matemática y enuncia tres preguntas cruciales, las cuales son discutidas en el texto: una sobre la pertinencia de la distinción entre significativo y significado (que nos recuerda

la distinción introducida por Saussure), otra en torno a la clasificación de los signos, y, finalmente, otra referente a la comparación entre un análisis funcional y un análisis estructural de los signos.

En el tercer artículo, Cantoral y colaboradores presentan ciertos elementos de la socioepistemología, una teoría que pretende ubicar la actividad matemática en el contexto de la práctica social. El concepto de práctica social hace referencia a aquello que viene a normar la actividad matemática. En su artículo, los autores estudian algunas actividades como medir, predecir, modelar y convenir, y muestran, haciendo referencia a la historia de las matemáticas, escenarios sociales claves de construcción social del conocimiento matemático.

En el cuarto artículo, Radford presenta ciertos elementos de una teoría cultural de la objetivación, una teoría de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas que se inspira de escuelas antropológicas e histórico-culturales del conocimiento. Dicha teoría se apoya en una epistemología y una ontología no racionalistas que dan lugar, por un lado, a una concepción antropológica del pensamiento y, por el otro, a una concepción esencialmente social del aprendizaje. De acuerdo con la teoría, lo que caracteriza al pensamiento no es solamente su naturaleza semióticamente mediatizada, sino sobre todo su modo de ser en tanto que *praxis reflexiva*.

En el quinto artículo, un artículo de transición entre los artículos de corte teórico y los de corte aplicado, Godino y colaboradores presentan una aplicación del enfoque ontosemiótico al análisis de textos. Los autores buscan ilustrar la técnica de análisis de textos matemáticos propuesta por el enfoque ontosemiótico de

la cognición matemática e identificar criterios de idoneidad de unidades didácticas (en particular la *idoneidad epistémica* y la *cognitiva*) para el estudio de las estructuras aditivas en la educación primaria.

En el sexto artículo, Koukhoufis y Williams aplican ciertos conceptos de la teoría de la objetivación para estudiar la manera en que jóvenes alumnos generalizan, en el aprendizaje de la aritmética, ciertas relaciones numéricas. Los autores examinan en detalle el papel que desempeña el ábaco como artefacto de mediación y efectúan un análisis fino del papel del lenguaje y los gestos en procesos de *reificación* (en el sentido de Sfard, 1994), procesos que preparan el camino a conceptualizaciones numéricas claves en las operaciones con números enteros.

En el séptimo artículo, D'Amore discute el problema de la ontología y conocimiento de los objetos matemáticos, centrándose en particular en el problema de la representación del objeto y su sentido. En la primera parte, D'Amore sintetiza algunas investigaciones recientes en torno al problema de la ontología y el conocimiento; en la segunda parte, el autor analiza un ejemplo concreto para poner en evidencia las dificultades de cambio de sentido cuando cambia la representación del objeto.

En el octavo artículo, Gagatsis y colaboradores presentan el fruto de varios trabajos de investigación sobre el problema de cambios de representación de objetos relacionados con el concepto de función. El artículo torna alrededor del problema de la compartimentación de diferentes registros de representación, así como de las dificultades que, generalmente, encuentran los alumnos

para utilizar representaciones adecuadas en contextos de resolución de problemas. Los autores sugieren pistas que pueden ayudar a resolver el problema de la compartimentación.

En el noveno artículo, inspirándose de la semiótica de Peirce, Adalira Sáenz-Ludlow sugiere la existencia de una relación triangular entre interpretación, objetivación, y generalización. Luego de argumentar cómo el discurso matemático es un medio potente en la objetivación semiótica, la autora discute la manera en que el discurso matemático en el salón de clase media el aumento del valor de lo que ella llama “la riqueza matemática del alumno”. En la última parte, Sáenz-Ludlow discute cómo maestros, con diferentes perspectivas teóricas, influyen en la dirección del discurso matemático en el salón de clase y, en consecuencia, en el crecimiento de la riqueza matemática de sus estudiantes.

En el décimo artículo, Giorgio Bagni examina cómo alumnos de 15 a 16 años tratan de dar sentido a una frase inspirada de un ejemplo célebre introducido por Russell, y de un aserto expresado en lenguaje matemático. Luego de discutir en la primera parte del artículo las posiciones tomadas por matemáticos, filósofos y epistemólogos, como Frege, Russell, Quine y Brandom respecto al problema de la referencia y el significado, Bagni ofrece un análisis de datos experimentales que se aparta de los conceptos clásicos de realidad y de racionalidad, y propone una reflexión en la que la idea de práctica de la justificación es vista en el interior de una comunidad comunicativa, al estilo de J. Habermas.

En el onceavo artículo, Ferdinando Arzarello presenta una discusión del paradigma multimodal y encarnado (embodied) que ha emergido en los últimos

años dentro del marco de investigaciones realizadas en el campo de la psicolingüística y la neurociencia. Luego de analizar los gestos desde una perspectiva semiótica, Arzarello introduce la noción de *semiotic bundle*, el cual es ejemplificado a través de un estudio de casos.

Este número especial de la Revista Latinoamericana de Matemática Educativa se encuentra en la línea de esfuerzos hechos por otros colegas en intentar mostrar a la comunidad de educadores matemáticos las posibilidades (y las limitaciones) de las aproximaciones semióticas. Este número continúa, de manera más modesta, cierto, las discusiones sobre la representación (Hitt, 2002; Janvier, 1987), la semiótica y la educación (Anderson, Sáenz-Ludlow, Zellweger, y Cifarelli, 2003), el número especial *Representations and the psychology of mathematics education* del *Journal of Mathematical Behavior* (1998, Vol. 17(1) y 17(2)), editado por Gerald Goldin y Claude Janvier, el libro *Activity and sign* (2005) editado por Michael Hoffmann, Johannes Lenhard and Falk Seeger, así como el reciente número especial *Semiotic perspectives on epistemology and teaching and learning of mathematics* de la revista *Educational Studies in Mathematics*, (2006, vol. 61(1-2)), editado por Adalira Sáenz-Ludlow y Norma Presmeg.

Este número especial de la Revista Latinoamericana de Matemática Educativa ha sido posible gracias a la colaboración de muchas personas. Queremos agradecer en particular a su editora, Rosa María Farfán. Queremos igualmente agradecer a José Guzmán Hernández (Centro de Investigación y de Estudios Avanzados [Cinvestav], México), Heather Empey (McGill University, Canadá),

Chantal Chivot (Laurentian University, Canadá) por su ayuda en la preparación de los textos.

También agradecemos al Social Sciences

and Humanities Research Council of Canada / Le Conseil de recherches en sciences humaines du Canada (SSHRC/CRSH) por la subvención que hizo posible en parte esta publicación.

Referencias

Anderson, M., Sáenz-Ludlow, A., Zellweger, S., y Cifarelli, V. (Eds.). (2003). *Educational Perspectives on Mathematics as Semiosis: From Thinking to Interpreting to Knowing*. Ottawa: Legas.

Arzarello, F. (2004). *Mathematical landscapes and their inhabitants: perceptions, languages, theories*. Plenary Lecture delivered at the ICME 10 Conference. Copenhagen, Denmark. July 4-11, 2004.

Bartolini Bussi, M. G., y Mariotti, M., A. (1999). Semiotic Mediation: from History to the Mathematics Classroom. *For the Learning of Mathematics*, 19(2), 27-35.

Bartolini Bussi, M., y Maschietto, M. (2006). *Macchine matematiche: dalla storia alla scuola*. Milano: Springer.

Berger, M. (2005). Vygotsky's theory of concept formation and mathematics education. *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Bergen, Norway*, 2, 153-160.

Boero, P., Pedemonte, B., y Robotti, E. (1997). Approaching theoretical knowledge through voices and echoes: a Vygotskian perspective. *Proceedings of the XXI International Conference for the Psychology of Mathematics Education*. Lahti, Finland, 2, 81-88.

Borba, M., y Villareal, M. (2006). *Humans-with-Media and the Reorganization of Mathematical Thinking*. New York: Springer.

Bredow, R. v. (2006). Living without Numbers or Time. *Speigel on line*, May 3 2006 (<http://service.spiegel.de/cache/international/spiegel/0,1518,414291,00.html>).

Bühler, K. (1979). *Teoría del lenguaje. Traducido del alemán por Julián Marías*. Madrid: Alianza Editorial.

Cobb, P., Yackel, E., y McClain, K. (Eds.). (2000). *Symbolizing and Communicating in Mathematics Classrooms*. Mahwah, NJ: Laurence Erlbaum.

D'Amore, B. (2001). Une contribution au débat sur les concepts et les objets mathématiques: la position «naïve» dans une théorie «réaliste» contre le modèle «anthropologique» dans une théorie «pragmatique». En A. Gagatsis (Ed.), *Learning in Mathematics and Science and Educational Technology* (Vol. 1, pp. 131-162).

- Dörfler, W. (2005). Diagrammatic Thinking. Affordances and Constraints. En M. H. G. Hoffmann, J. Lenhard y F. Seeger (Eds.), *Activity and Sign: Grounding Mathematics Education* (pp. 57-66). New York: Springer.
- Duval, R. (1998). Signe et objet, I et II. *Annales de didactique et de sciences cognitives, IREM de Strasbourg*, 6, 139-196.
- Eco, U. (1976). *A theory of Semiotics*. Indiana: Indiana University Press.
- Fillooy, E., y Rojano, T. (1984). La aparición del lenguaje Aritmético-Algebraico. *L'Educazione Matematica*, 5(3), 278-306.
- Freudenthal, H. (1968). Notation Mathématique. *Encyclopedia Universalis*, 338-344.
- Glaserfeld von, E. (1995). *Radical Constructivism: A Way of Knowing and Learning*. London, Wasington, D.C: The Falmer Press.
- Godino, J. D., y Batanero, C. (1999). *The meaning of mathematical objects as analysis units for didactic of mathematics*. Paper presented at the Proceedings of the First Conference of the European Society for Research Mathematics Education.
- Goldin, G. y Janvier, C. (Eds.) (1998). *Representations and the psychology of mathematics education* del *Journal of Mathematical Behavior*, Vol. 17(1) y 17(2).
- Grize, J.-B. (1996). *Logique naturelle et communications*. Paris: Presses Universitaires de France.
- Guzmán, J., y Kieran, C. (2002). The role of calculators in instrumental genesis: The case of Nicolas and factors and divisors. En A. D. Cockburn y E. Nardi (Eds.), *Proceedings of the 26th International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Norwich, UK, 3, 41-48.
- Hitt, F. (Ed.). (2002). *Representations and Mathematics Visualization*. Mexico: Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN.
- Hjelmslev, L. (1969). *Prolegomena to a Theory of Language*. Wisconsin: The University of Wisconsin Press.
- Hoffmann, M. H. G. (2002). Peirce's «Diagrammatic Reasoning» as a Solution of the Learning Paradox. En G. Debrock (Ed.), *The Quiet Revolution: Essays on Process Pragmatism* (pp. 147-174). Amsterdam et al: Rodopi Press.
- Hoffmann, M. H. G., Lenhard J. y Seeger, F. (Eds.) (2005). *Activity and Sign: Grounding Mathematics Education*. New York: Springer.
- Hoffmann, M. H. G. (2005). Signs as Means for Discoveries. Peirce and His Concepts of «Diagrammatic Reasoning», «Theorematic Deduction», «Hypostatic Abstraction», and

«Theoric Transformation». En M. H. G. Hoffmann, J. Lenhard y F. Seeger (Eds.), *Activity and Sign: Grounding Mathematics Education* (pp. 45-56). New York: Springer.

Janvier, C. (Ed.). (1987). *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Kaput, J., y Hegedus, S. (2004). An introduction to the profound potential of connected algebra activities: Issues of representation, engagement and pedagogy. *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Bergen, Norway, 3*, 129-136.

Kieran, C., y Saldanha, L. (2005). Computer algebra systems (CAS) as a tool for coaxing the emergence of reasoning about equivalence of algebraic expressions. *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Melbourne, Australia, 3*, 193-200.

Laborde, C., Puig, L., y Nunes, T. (1996). Language in Mathematics Education. En L. P. a. A. Gutiérrez (Ed.), *Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. University of Valencia, Valencia, Spain, 1, 53-84.

Leontiev, A. N. (1993). *Actividad, conciencia y personalidad*. México: ASBE Editorial.

Nesher, D. (1997). Peircean Realism: Truth as the Meaning of Cognitive Signs Representing External Reality. *Transactions of the Charles S. Peirce Society*, 33(1), 201-257.

Otte, M. (2003). *Does mathematics have objects ? In what sense ?* *Synthese*, 134 (1-2), 181-216.

Otte, M. (en prensa). *A = B: a Peircean View*. En Lafayette de Moraes and Joao Queiroz. Brazil: Catholic University of Sao Paulo.

Parker, K. (1994). Peirce's Semeiotic and Ontology. *Transactions of the Charles S. Peirce Society*, 30(1), 51-75.

Peirce, C. S. (1931-1958). *Collected Papers, vol. I-VIII*. Cambridge, Mass: Harvard University Press.

Piaget, J. (1968). *La formation du symbole chez l'enfant*. Neuchatel: Delachaux et Niestlé.

Piaget, J. (1970). *Genetic Epistemology*. New York: W. W. Norton.

Piaget, J. (1978). *Problemas de psicología genética*. Barcelona: Ariel.

Piattelli-Palmarini, M. (Ed.). (1982). *Théories du langage, théories de l'apprentissage : le débat entre Jean Piaget et Noam Chomsky*. Paris: Seuil.

Presmeg, N. C. (2005). Metaphor and Metonymy in Processes of Semiosis in Mathematics Education. En M. H. G. Hoffmann, J. Lenhard y F. Seeger (Eds.), *Activity and Sign: Grounding Mathematics Education* (pp. 105-115). New York: Springer.

Radford, L. (2002). The seen, the spoken and the written. A semiotic approach to the problem of objectification of mathematical knowledge. *For the Learning of Mathematics*, 22(2), 14-23.

Radford, L. (2004). Cose sensibili, essenze, oggetti matematici ed altre ambiguità [Sensible Things, Essences, Mathematical Objects and other ambiguities] (English version available at: <http://laurentian.ca/educ/lradford/essences.pdf>). *La Matematica e la sua didattica*, 1, 4-23.

Radford, L. (2006). The Anthropology of Meaning. En A. Sáenz-Ludlow, y N. Presmeg (Eds.), *Semiotic perspectives on epistemology and teaching and learning of mathematics, Special Issue, Educational Studies in Mathematics*, 61, 39-65.

Radford, L. (en prensa-1). Semiótica cultural y cognición. En R. Cantoral y O. Covián (Eds.), *Investigación en Matemática Educativa en Latinoamérica*. Mexico.

Radford, L. (en prensa-2). Rescuing Perception: Diagrams in Peirce's theory of cognitive activity. En Lafayette de Moraes and Joao Queiroz (Eds.), *C.S. Peirce's Diagrammatic Logic*. Catholic University of Sao Paulo, Brazil.

Sáenz-Ludlow, A. (2003). A collective chain of signification in conceptualizing fractions. *Journal of Mathematical Behavior*, 22, 181-211.

Sáenz-Ludlow, A. (2004). Metaphor and numerical diagrams in the arithmetical activity of a fourth-grade class. *Journal for Research in Mathematics Education*, 1(35), 34-56.

Sáenz-Ludlow, A. (2006). Classroom interpreting games with an illustration. En A. Sáenz-Ludlow, y N. Presmeg (Eds.), *Semiotic perspectives on epistemology and teaching and learning of mathematics, Special Issue, Educational Studies in Mathematics*, 61, 183-218.

Saussure, F. (1995). *Cours de linguistique générale*. Paris: Payot. (Primera edición, 1916).

Sfard, A. (1994). Reification as the birth of metaphor. *For the Learning of Mathematics*, 14(1), 44-55.

Steinbring, H. (2005). Do Mathematical Symbols Serve to Describe or Construct «Reality»? En M. H. G. Hoffmann, J. Lenhard y F. Seeger (Eds.), *Activity and Sign: Grounding Mathematics Education* (pp. 91-104). New York: Springer.

Steinbring, H., Bartolini Bussi, M., y Sierpinska, A. (1998). *Language and Communication*

in the Mathematics Classroom. Reston, Virginia: National Council of Teachers of Mathematics.

Stjernfelt, F. (2000). Diagrams as Centerpiece of a Perican Epistemology. *Transactions of the Charles S. Peirce Society*, 36(3), 357-384.

Van der Veer, R. (1996). The concept of culture in Vygotsky's Thinking. *Culture and Psychology*, 2, 247-263.

Van der Veer, R., y Valsiner, J. (1991). *Understanding Vygotsky*. Oxford Uk and Cambridge USA: Blackwell.

Vygotsky, L. S. (1971). *The Psychology of Art*. Cambridge and London: The M.I.T. Press (First published in 1925).

Vygotski, L. S. (1988). *El desarrollo de los procesos psicológicos superiores*. Barcelona: Grijalbo.

Vygotski, L. S. (1991). *Obras Escogidas*, Vol. 1 (Segunda edición, 1997). Madrid: Visor.



● **Luis Radford**
École des sciences de l'éducation
Université Laurentienne
Canada

E-mail: lradford@laurentian.ca