Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa
RELIME
ISSN 1665-2436 | eISSN 2007-6819
Vol. 28, e489

Artículo

https://doi.org/10.12802/relime.2025.28.e489

# Manifestación del pensamiento algebraico de estudiantes de primaria costarricenses: estructuras y representaciones de generalización

## Manifestation of Costa Rican elementary school students' algebraic thinking: structures and representations of generalization

*Jason Ureña*
Universidad de Costa Rica, Costa Rica.

**Resumen**

En el contexto de la reforma curricular que incorpora elementos del early algebra, se desarrolla un trabajo cualitativo con estudiantes de cuarto y sexto grado de primaria en Costa Rica, tras la pandemia. Los estudiantes responden a un cuestionario escrito que incluye una tarea de generalización que involucra la relación funcional $\boldsymbol{y = 3x + 1}$. Los objetivos se orientaron al análisis, descripción y contraste (entre niveles escolares) de las representaciones de generalización y estructuras de relaciones funcionales que exhiben. Los resultados, de una sesión de trabajo, muestran que sólo la mitad de los estudiantes generalizó. Ellos emplearon diferentes representaciones de generalización (mayormente la verbal), con matices por grado escolar. En sexto grado más alumnos representan la estructura correcta y fueron más consistentes en su uso. Se exponen otros recursos en la expresión de la generalización como ejemplos genéricos y representaciones propias de la indeterminación.

**Palabras clave:**

- *Early algebra*
- *Estructuras*
- *Representaciones de generalización*
- *Pensamiento algebraico*
- *Pensamiento funcional*

Cómo citar:

Ureña, J. (2025). Manifestación del pensamiento algebraico de estudiantes de primaria costarricenses: estructuras y representaciones de generalización. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 28*, e489. https://doi.org/10.12802/relime.2025.28.e489



Publicación oficial de investigación del Clame Comité Latinoamericano de Matemática Educativa https://relime.org

Recepción: 05/03/2025 Aceptación: 16/12/2025 Publicación: 19/12/2025

**Abstract**

Qualitative research was carried out with fourth- and sixth-grade students in Costa Rica after the pandemic in the context of a curricular reform incorporating elements of early algebra. The students completed a written questionnaire that included a generalization task based on the functional relationship $\boldsymbol{y = 3x + 1}$. The objectives were oriented toward the analysis, description, and comparison (between grade levels) of the generalization representations and the structures of functional relationships patterns exhibited by the students. The findings, from a single work session, reveal that only half of the participants were able to generalize. They employed different forms of representation (predominantly verbal), with notable variations across grade levels. In sixth grade, a greater number of students accurately represented the underlying structure and demonstrated greater consistency in its use. Additional resources were also identified in the expression of generalization, such as generic examples and representations linked to indeterminacy.



**Keywords**

– *Early algebra*
– *Structures*
– *Representations of generalization*
– *Algebraic thinking*
– *Functional thinking*



**Resumo**

No âmbito da reforma curricular que integra elementos da álgebra inicial, realizou-se um estudo qualitativo com estudantes do quarto e do sexto ano do ensino fundamental na Costa Rica, no período pós-pandemia. Os estudantes responderam a um questionário escrito que incluía uma tarefa de generalização fundamentada na relação funcional $\boldsymbol{y = 3x + 1}$. Os objetivos do estudo centraram-se na análise, descrição e contraste (entre níveis escolares) das representações de generalização e das estruturas de relações funcionais manifestadas pelos estudantes. Os resultados, de uma única sessão de trabalho, evidenciam que apenas metade dos participantes conseguiu generalizar. Foram utilizadas diferentes formas de representação (predominantemente a verbal), com variações relevantes de acordo com o ano escolar. No sexto ano, um número maior de estudantes representou corretamente a estrutura e demonstrou maior consistência em seu uso. Identificaram-se ainda outros recursos na expressão da generalização, como exemplos genéricos e representações associadas à indeterminação.



**Palavras-chave**

– *Early álgebra*
– *Estruturas*
– *Representações de generalização*
– *Pensamento algébrico*
– *Pensamento funcional*



**Résumé**

Dans le cadre de la réforme curriculaire intégrant des éléments d'algèbre précoce, une étude qualitative a été menée auprès d'élèves de quatrième et de sixième année de l'enseignement primaire au Costa Rica, dans le contexte post-pandémique. Les élèves ont répondu à un questionnaire écrit comprenant une tâche de généralisation fondée sur la relation fonctionnelle $\boldsymbol{y = 3x + 1}$. Les objectifs poursuivaient l'analyse, la description et la mise en contraste (selon le niveau scolaire) des représentations de la généralisation ainsi que des structures des relations fonctionnelles manifestées par les élèves. Les résultats, issus d'une seule séance de travail, indiquent que seule la moitié des participants a réussi à généraliser. Diverses formes de représentation ont été mobilisées (principalement verbales), avec des nuances selon le niveau scolaire. En sixième année, un plus grand nombre d'élèves a représenté correctement la structure et s'est montré plus constant dans son utilisation. D'autres ressources ont également été relevées dans l'expression de la généralisation, notamment des exemples génériques et des représentations liées à l'indétermination.



**Most Clés**

– *Early algebra*
– *Structures*
– *Représentations de la généralisation*
– *Pensée algébrique*
– *Pensée fonctionnelle.*

## 1. Introducción

En Educación Matemática, el álgebra escolar se ha convertido en un área de investigación activa y con perspectivas diversas (enfoques, alcances, logros, posibilidades) (véanse, Blanton et al., 2015; Cañadas et al., 2019; Kaput 2008; Usiskin, 1988; Radford, 2018; Ureña et al., 2023). La exploración y estudio de las capacidades algebraicas de los estudiantes de primaria ganó terreno durante los últimos años mediante la propuesta curricular y de investigación *early algebra* (Blanton et al., 2015; Cañadas et al., 2019; Kieran et al., 2016). Esta propuesta promueve, desde los primeros años escolares, el desarrollo del pensamiento algebraico y la iniciación en el aprendizaje del álgebra (Molina, 2009).

El sentido de variabilidad, la relación entre cantidades que varían conjuntamente así como la generalización y la representación de esta (Kaput, 2008; Radford, 2018; Warren et al., 2016), además de la resolución de problemas y la modelación, el reconocimiento de estructuras, conjeturar, comunicar, justificar, predecir o probar (Cai y Knuth, 2011; Kieran et al., 2016), sobresalen como elementos focales en la promoción y el desarrollo del pensamiento algebraico de los estudiantes, especialmente en las primeras etapas escolares. Entre la variedad de perspectivas para introducir al pensamiento algebraico destaca el enfoque del pensamiento funcional (i.e. enfoque funcional). Este constituye un contexto de abordaje del álgebra escolar a través de la generalización y representación de relaciones entre cantidades que covarían y el razonamiento con estas (Blanton et al., 2011).

La relevancia de la generalización y la variedad de representaciones en las que se manifiesta, sin que se restrinja al simbolismo algebraico convencional, es objeto focal en la investigación sobre el pensamiento algebraico (e.g., Carraher y Schliemann, 2020; Kaput, 2008; Radford, 2018; Ureña et al., 2023). En estrecha relación, las estructuras de relaciones funcionales que revelan los estudiantes en sus producciones, además de ser esencial como parte del pensamiento algebraico (Cai y Knuth, 2011; Hunter y Miller, 2022), informan cómo los estudiantes razonan, generalizan o establecen relaciones (Ureña et al., 2023). En este sentido, la caracterización de las estructuras de relaciones funcionales que los estudiantes exhiben es un descriptor valioso de su pensamiento algebraico. Las representaciones de generalización en correspondencia con las estructuras desde el enfoque funcional son los objetos medulares de este trabajo.

En línea con las tendencias internacionales, elementos fundamentales de la propuesta del early algebra también se incluyen en el actual currículo escolar de Costa Rica (Ministerio de Educación Pública [MEP], 2012). Desde el inicio de la formación escolar, se proponen progresivamente contenidos, conceptos y referencias al pensamiento algebraico. A partir de los primeros años de primaria se sugiere trabajar con patrones y sucesiones. En cuarto grado se presenta la representación verbal, así como el trabajo con valores numéricos progresivamente más grandes. Es en quinto grado donde se sugiere la inclusión de la representación simbólica algebraica (introduciendo letras que representan indeterminaciones) y en sexto grado la gráfica.

No obstante, diversos factores han influido en la manera en que estos aprendizajes se han desarrollado en la práctica, algunos eventos coyunturales fueron huelgas prolongadas o la pandemia asociada al COVID-19, que en el año 2020 impidieron la consolidación de gran cantidad de habilidades matemáticas (Programa Estado de La Nación [PEN], 2021). En evaluaciones recientes se reporta que la competencia matemática de los estudiantes de primaria y secundaria aún presenta importantes retos (PEN, 2025). Asimismo, después de más de diez años de implementación de los Programas de Estudio de Matemática vigentes (MEP, 2012), se reconoce en los docentes un dominio teórico del currículo escolar, aunque también una necesidad de ampliar sus estrategias pedagógicas para la enseñanza de la matemática (PEN, 2025). Villalobos Ramírez (2023) determinó que, si bien la mayoría de docentes de primaria se perciben con conocimientos disciplinares en el área de Relaciones y Álgebra (así se denomina al área de contenidos en la organización del Programa de Estudios de Matemáticas en Costa Rica), también señalan la importancia de contar con más oportunidades de formación profesional para fortalecer sus prácticas en esta área. Paralelamente, aunque en Costa Rica aún no se dispone de estudios específicos sobre el pensamiento algebraico de estudiantes de primaria, la literatura internacional sí ha documentado tanto el potencial como algunos desafíos para los niños en relación con la generalización, la representación y el uso de expresiones simbólicas (e.g., Ayala-Altamirano y Molina, 2019; Ureña et al., 2019).

En el panorama expuesto, se abre un campo de interés: describir cómo se manifiesta el pensamiento algebraico en estudiantes de primaria costarricenses al resolver tareas de generalización que involucran relaciones funcionales. Explorar estas evidencias permitiría enriquecer la discusión internacional sobre *early algebra* desde un contexto latinoamericano poco documentado, así como aportar insumos empíricos para valorar los alcances de la propuesta curricular nacional y que puedan orientar acciones de acompañamiento docente y estudiantil. La investigación se desarrolló en el marco curricular vigente y en la realidad de la postpandemia (2021–2022), cuando los estudiantes regresaban progresivamente a las clases presenciales. En este contexto, se planteó la pregunta: ¿cómo estudiantes costarricenses de educación primaria representan la generalización en tareas que involucran relaciones funcionales y qué estructuras revelan?,

Vol. 28, e489 https://doi.org/10.12802/relime.2025.28.e489

con el propósito de generar un precedente en el país y contribuir al fortalecimiento de la formación algebraica de los estudiantes. Se trabaja con estudiantes de cuarto y sexto grado, ya que según evidencia la literatura a partir de cuarto destaca la representación de generalizaciones y el pensamiento funcional (e.g., Ramírez et al., 2020; Ureña et al., 2019). Además, resulta de interés generar un contraste en las evidencias de pensamiento algebraico de estudiantes que inician el segundo ciclo de educación general básica (cuarto grado) con aquellos que la finalizan (sexto grado). Ellos trabajan la resolución de una tarea presentada en un enunciado verbal que incluye la generalización de una relación funcional subyacente, esto es, una tarea funcional de generalización (Ureña et al., 2023). Según Ramírez et al. (2020), las tareas con enunciados verbales son más accesibles a los estudiantes de cuarto grado (y, en consecuencia, en niveles escolares superiores), de forma que permiten a los estudiantes revelar de lo son capaces y manifestar pensamiento funcional.

## 2. Representaciones de generalización

Generalizar es uno de los componentes esenciales del pensamiento algebraico (Kaput, 2008) y del álgebra en general (Mason et al., 2005). A pesar de las diferentes definiciones de generalización en la literatura, esta puede ser entendida desde dos perspectivas: la primera como alguno de los procesos de reconocer la regularidad en un conjunto de casos, extender razonamientos más allá de donde estos se originan u obtener un conjunto aún más amplio de resultados partiendo de casos particulares; y la segunda como resultado de los procesos mencionados (Stephens, Ellis et al., 2017). De acuerdo con Kaput (1999) “generalizar” consiste en el proceso de extender el rango de razonamiento o comunicación más allá de los casos considerados, manifestar la regularidad entre estos o llevar el razonamiento a otro nivel en que la atención supera los casos hacia los patrones, estructuras, procedimientos y relaciones entre los mismos. Desde el enfoque funcional, este trabajo parte de la concepción de generalización tanto como proceso (Kaput, 1999) y como el producto, en que el estudiante evidencia su generalización mediante la expresión de la misma usando diferentes representaciones y estructuras.

Es clara la relación entre la generalización y su representación (Kaput, 2008; Ureña et al., 2023). Desde el enfoque funcional, en correspondencia con la generalización, las representaciones ofrecen un recurso rico para comunicar, justificar, explicar, comprender y predecir cómo se interrelacionan las variables (Pinto y Cañadas, 2021). De acuerdo con Mason et al. (2005), el álgebra es lenguaje de expresión en cuanto los estudiantes distinguen y expresan la generalización. Expresar la generalización consiste en manifestarla a través de

Vol. 28, e489 https://doi.org/10.12802/relime.2025.28.e489

algún lenguaje, según el nivel en que se encuentran los estudiantes (Kaput, 1999). En este trabajo, se entiende representar la generalización como evidenciarla y expresarla externamente, sin una restricción al simbolismo algebraico convencional (Ureña et al. 2023).

La investigación revela matices sobre la "representación o expresión" de la generalización por estudiantes de primaria cuando expresan sus generalizaciones de relaciones funcionales lineales. Por ejemplo, Blanton et al. (2015) y Stephens, Fonger et al. (2017) determinan que estudiantes de primaria articulan y generalizan relaciones funcionales lineales, y piensan de forma sofisticada, a la vez que exhiben progreso en el uso de representaciones, incluso la simbólica algebraica, no obstante, sus estudios se realizaron en espacios de instrucción longitudinal enfocados en la promoción del pensamiento algebraico.

En otros contextos de exploración de capacidades algebraicas, los resultados varían, y muestran que estudiantes en primaria usan principalmente la representación verbal mientras que conforme avanzan en los grados escolares, usan el simbolismo algebraico. Por ejemplo, Torres et al. (2019) expone que en segundo grado (7-8 años) los estudiantes usaron la representación numérica y verbal en sus producciones, sin lograr una generalización. Por su parte, Pinto y Cañadas (2017, 2019) reconocen que los estudiantes de tercero (8-9 años), pero principalmente los de quinto grado (10-11 años), expresan la generalización de relaciones funcionales principalmente de forma verbal. Mientras que, Pinto et al. (2021) reportan que estudiantes de tercer grado al plantear relaciones funcionales, además de usar la representación verbal y numérica, también combinan ambas representaciones. Ureña et al. (2019) revelan que estudiantes de cuarto grado (9-10 años) representan generalizaciones de forma numérica, verbal, simbólica e incluso usando ejemplos genéricos.

Por otro lado, Ayala-Altamirano y Molina (2019) muestran que estudiantes de tercero de primaria (8-9 años) atribuyen con mayor frecuencia significados estáticos (como etiquetas o abreviaciones) a representaciones simbólicas de cantidades indeterminadas (letras), en lugar de concebirlas como variables. Al respecto, Ureña et al. (2023) encuentran que la mayoría de estudiantes de sexto grado de primaria a segundo grado de secundaria (de aproximadamente 11 a 14 años) que generalizan usan una estrategia funcional, sin embargo, difieren en las representaciones de generalización que utilizan. Además, reconocen que conforme aumenta el grado escolar mayor es la flexibilidad en el uso de variedad de representaciones desde los numéricas hasta lo simbólicos y combinaciones de estas; sin embargo, especialmente en sexto grado los estudiantes se inclinan más hacia la representación verbal (Ureña et al., 2022). Estos autores operacionalizan una clasificación de representaciones de generalización (verbal, simbólica, múltiple) útil para describir el pensamiento algebraico en tareas funcionales de generalización, presentadas de forma escrita en cuestionarios, a estudiantes de primaria.

Las investigaciones mencionadas anteriormente muestran que estudiantes de primaria pueden expresar generalizaciones de relaciones funcionales mediante diversas representaciones, y que el uso y la flexibilidad de estas tiende a variar según el grado escolar y las oportunidades de aprendizaje a las que han sido expuestos. Sin embargo, buena parte de esta evidencia proviene de estudios desarrollados en contextos educativos específicos, principalmente en Europa y Norteamérica, y en muchos casos en el marco de intervenciones didácticas o trayectorias de instrucción diseñadas explícitamente para promover el early algebra. En consecuencia, aún es limitada la evidencia acerca de cómo estas formas de generalización se manifiestan en contextos escolares ordinarios y en otros sistemas educativos. Asimismo, aunque distintos estudios han descrito las representaciones que utilizan los estudiantes al expresar generalizaciones, existe menor evidencia sobre cómo estas representaciones se articulan con las estructuras de relaciones funcionales que los estudiantes identifican o construyen al resolver tareas de generalización. Desde esta perspectiva, el presente estudio busca aportar evidencias sobre el pensamiento algebraico de estudiantes costarricenses de educación primaria, analizando las representaciones de generalización que emplean y las estructuras de relaciones funcionales que emergen en sus producciones al resolver una tarea funcional de generalización.

## 3. Estructuras de relaciones funcionales

En correspondencia con la generalización y su representación, las estructuras de las relaciones funcionales que revelan los estudiantes brindan información valiosa sobre su pensamiento algebraico (e.g., qué variables reconocen, procesos y conceptos matemáticos movilizados, cómo relacionan las variables, qué regularidades y equivalencias identifican) (Kieran y Martínez-Hernández, 2022; Ramírez et al., 2022; Ureña et al., 2023; Wilkie y Clarke, 2016). El estudio de las estructuras permite profundizar en la comprensión del pensamiento funcional de los estudiantes (Torres González et al., 2024). El concepto de estructura a nivel algebraico puede entenderse desde diferentes aristas. Desde una mirada amplia, expresan relaciones entre y a través de cantidades, propiedades de y entre las operaciones (Warren, 2003). En el enfoque funcional las estructuras, de relaciones funcionales, refieren a cómo se organiza y expresa la relación entre variables (Pinto y Cañadas, 2017), o bien cómo, los valores numéricos operan cuando se usan o representan en la regularidad. Estas pueden ser reconocidas en las representaciones externas de los estudiantes, particularmente en las representaciones de generalización.

Desde el estudio del pensamiento algebraico en primaria, en los últimos años se ha prestado más atención a las estructuras que plantean los alumnos y cómo las expresan. En un contexto funcional Torres et al. (2019) reconocen que estudiantes de segundo grado (7-8 años) fueron capaces de identificar relaciones entre cantidades cuando estas eran específicas, sin embargo, no llegaron a generalizar al trabajar con tareas de generalización. Por su parte, Pinto y Cañadas (2017, 2019) reportan que estudiantes de tercer grado (8-9 años), y principalmente de quinto grado (10-11años) generalizaron relaciones funcionales; llama la atención que los estudiantes de quinto usaron menos estructuras, pero más útiles para generalizar. Mientras que, Torres González et al. (2024) encontraron que estudiantes de segundo grado (7-8 años) identificaron las estructuras involucradas en problemas verbales que implicaron el uso de relaciones funcionales lineales directas e inversas, pero una mayoría generaliza y representa más la relación inversa que la directa.

En los últimos grados de primaria, Wilkie y Clarke (2016) informan una limitación en general para reconocer y representar de formas distintas pero equivalentes la estructura implicada durante la generalización de patrones geométricos en los que subyacían relaciones funcionales. En la misma línea, Kieran y Martínez-Hernández (2022) encuentran que estudiantes de 10 a 12 años tienden a justificar equivalencias desde un nivel superficial (reduciendo a resultados iguales) y solo algunos logran transitar hacia un nivel de equivalencias más invisibles (igualdad justificada por propiedades estructurales). Al contrastar producciones entre estudiantes de último curso de primaria con los primeros años de secundaria, Ureña et al. (2023) también reconocen que los estudiantes de sexto grado revelaron no sólo menos estructuras que los estudiantes de secundaria, sino también menos complejas.

Dada la articulación natural entre las representaciones de generalización y las estructuras que los estudiantes reconocen, usan o evidencian, son objeto focal de este estudio. Como se reconoce en la literatura, revelan cómo los estudiantes trabajan las tareas propuestas y la coherencia en su acercamiento (Torres González et al. 2024).

A partir del marco expuesto y la justificación de la investigación, se definieron los objetivos de investigación: 1) analizar las representaciones de generalización que exhiben estudiantes de primaria en contextos funcionales, 2) describir las estructuras de las relaciones funcionales que estudiantes de primaria costarricenses identifican o usan al

Vol. 28, e489 https://doi.org/10.12802/relime.2025.28.e489

resolver tareas funcionales de generalización y finalmente 3) comparar, entre estudiantes de cuarto y sexto grado de primaria, las representaciones de generalización y las estructuras de relaciones funcionales manifestadas al resolver tareas funcionales de generalización.

## 4. Metodología

Se lleva a cabo un estudio exploratorio de carácter cualitativo con un grupo de estudiantes de cuarto grado (n=20) y sexto grado (n=31) de un centro educativo público de una zona rural ubicada en la provincia de San José, Costa Rica. Es bien sabido que los centros educativos rurales suelen sufrir más los embates de la realidad (PEN, 2025), de ahí la importancia de reportar resultados empíricos de estos espacios. El estudio es de corte descriptivo en cuanto se analizan las producciones de los estudiantes en términos de las representaciones de generalización que manifiestan y las estructuras de relaciones funcional que plasman. A su vez, es un trabajo pionero en Costa Rica en el estudio de las habilidades algebraicas de los estudiantes en el marco del *early algebra*, en un contexto escolar de un currículo vigente que sigue las tendencias internacionales y en la realidad postpandemia.

Los estudiantes participaron de un diagnóstico para reconocer el grado de aceptación y comprensión de tareas funcionales, y dos sesiones de trabajo (de aproximadamente 80 minutos) orientadas a la exploración de su pensamiento algebraico a través del tratamiento de una tarea funcional de generalización. En estas sesiones el instrumento de recolección de información fue un cuestionario escrito. Las sesiones de trabajo se ejecutan con una distancia de una semana y media entre ellas. Finalmente se entrevistan seis estudiantes de cada grado escolar, dos de cada nivel académico: bajo, medio y alto, según la valoración de sus respectivas docentes. Las entrevistas semiestructuradas se llevan a cabo para profundizar en las explicaciones de los estudiantes y caracterizar sus razonamientos y producciones con mayor precisión. Todas estas actividades se realizaron de forma presencial. Por otro lado, los estudiantes no recibieron instrucción previa vinculada con el contenido de las sesiones.

El contexto de ambas sesiones es igual: “el cumpleaños de Isabel” (ver Figura 1). Este involucró la relación funcional $y = 3x + 1$ que relaciona el número de personas que va a la fiesta (variable independiente $x$) con el total de globos que se necesitan (variable dependiente $y$). La tarea sigue una organización inductiva como sugieren otros trabajos que exploran la capacidad de estudiantes de primaria para generalizar (e.g., Ramírez et al., 2020; Ureña et al., 2019). La primera sesión de trabajo solicita determinar la cantidad de globos partiendo de casos particulares de invitados (3, 7, 72, 230) a casos generales: una cantidad “desconocida de invitados” y “R invitados”. El cuestionario constó entonces de seis

Vol. 28, e489 https://doi.org/10.12802/relime.2025.28.e489

preguntas en las que se solicitó explícitamente anotar todos los procedimientos o explicaciones para obtener la respuesta. La tarea se adaptó de Ramírez et al. (2020) en cuanto a la redacción del enunciado y las cantidades involucradas, para que fuera más comprensible a los participantes. En este trabajo se describen los resultados obtenidos de la primera sesión.

**Figura 1**

*Contexto de la tarea propuesta*

Isabel va a cumplir años y le organizaron una fiesta. En su cumpleaños necesitarán globos. A cada invitado le regalarán tres globos y colocarán también un globo en la puerta para avisar que es la casa del cumpleaños.

En cuarto grado la recolección de información se llevó a cabo en la segunda mitad del año 2021 en un contexto postpandemia en que se combinan clases presenciales y virtuales. Los estudiantes de sexto grado participan en el primer semestre del año 2022.

La unidad de análisis fue la respuesta completa de los estudiantes a todo el cuestionario escrito. Según los objetivos de investigación propuestos y la literatura consultada, se siguieron dos categorías de análisis: representaciones de generalización y estructuras de las relaciones funcionales. Para analizar las representaciones de generalización presentes en las producciones de los estudiantes, se utilizó como referencia la clasificación propuesta por Ureña et al. (2023), quienes distinguen entre representaciones verbales, simbólicas y múltiples. Estas categorías se emplearon como marco analítico para codificar las respuestas escritas y las explicaciones de los estudiantes, permitiendo identificar las formas en que expresan sus generalizaciones en las tareas funcionales propuestas. Para las categorías de representaciones de generalización se tiene:

- Verbal (V): la regularidad reconocida es expresada a través de lenguaje natural mediante el que se mencionan las cantidades indeterminadas en cuestión y su interrelación.
- Simbólica (S): la regularidad detectada es expresada con simbolismo algebraico que involucra las cantidades indeterminadas y su relación.
- Múltiple (M): la regularidad identificada es representada usando una combinación de las representaciones anteriores.

Adicionalmente se considera como recurso para la representación de generalizaciones el uso de ejemplos genéricos (G) que engloban la regularidad y su comportamiento (Ureña et al., 2019).

En el análisis de las estructuras de las relaciones funcionales manifestadas, se describe la relación entre variables que plantean los alumnos en sus producciones. Vale rescatar que las estructuras que se presentan no son necesariamente las formas explícitas de sus respuestas. Son la representación simbólica simplificada de la organización de la relación funcional empleada. Es decir, los estudiantes pudieron haber utilizado otras representaciones en sus resultados de las cuales se extraen las estructuras que aquí se plantean. Por ejemplo, en una respuesta verbal escrita de la forma "la cantidad de invitados por 3 más el globo de la puerta" para determinar la cantidad de globos requeridos por la tarea, se reconoce la estructura $3 \cdot n + 1$ que relaciona la cantidad de globos $(3 \cdot n + 1)$ con la cantidad n de invitados.

Las representaciones de generalización identificadas y las estructuras de relaciones funcionales expresadas por los estudiantes se analizan considerando el grado escolar (cuarto y sexto) y se exploran también posibles diferencias entre los niveles escolares.

## 5. Discusión de resultados

Este trabajo se interesó en la descripción de las representaciones de generalización y las estructuras que estudiantes de primaria de cuarto y sexto grado evidencian en un contexto funcional de generalización. También establece un contraste en sus aproximaciones. En el análisis de los datos y descripción de los resultados los estudiantes son nombrados con la letra E seguido por un número del 1 al 31, así como un subíndice que indica el grado en que se encontraba el estudiante (4= cuarto grado, 6= sexto grado), la persona entrevistadora se nombra con la letra D.

En correspondencia con los objetivos planteados, se presentan y discuten los principales resultados de la sesión 1. Estos a su vez, son complementados con datos de las entrevistas a los estudiantes que dieron respuestas diversas no vinculadas con la respuesta estándar ($E2_4$, $E23_4$, $E2_6$, $E24_6$, $E6_4$, $E11_4$, $E6_6$, $E27_6$), ya que los demás respondieron acertadamente a la tarea tanto en las sesiones como en la entrevista. Por grado escolar se describen las estructuras y representaciones de generalización de los estudiantes que exhibieron haber generalizado una regularidad en sus soluciones, estas también son comparadas entre los niveles educativos. No se consideran en los resultados resoluciones ambiguas, poco claras o que no permiten reconocer y describir el proceso que desarrolla el estudiante. En estos

Vol. 28, e489 https://doi.org/10.12802/relime.2025.28.e489

casos no se asume que el alumno no generaliza, sino que su respuesta no puede ser analizada por falta de información.

En el contexto funcional de generalización en que se enmarca el trabajo, la generalización implicó identificar, evidenciar y representar la regularidad subyacente a la situación con que se trabaja (Kaput, 1999), particularmente relacionando las cantidades implicadas. En la Tabla 1 se muestra por grado la distribución de estudiantes que generalizaron y representaron la generalización en los casos finales de la tarea propuesta. Los resultados que se detallan posteriormente corresponden a los de estos estudiantes.

**Tabla 1**

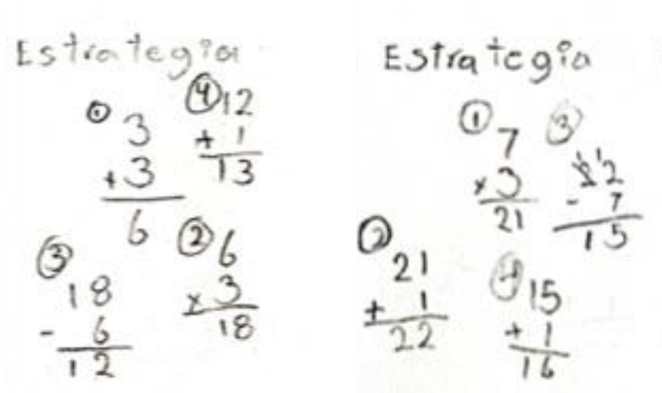
*Estudiantes que evidencian generalizar*

| Grado | Cuarto | Sexto |
|---|---|---|
| | $E2_4$, $E3_4$, $E4_4$, $E7_4$, $E11_4$, $E12_4$, $E14_4$, $E15_4$, $E16_4$, $E17_4$ | $E3_6$, $E4_6$, $E6_6$, $E7_6$, $E11_6$, $E12_6$, $E14_6$, $E15_6$, $E18_6$, $E19_6$, $E20_6$, $E21_6$, $E22_6$, $E25_6$, $E26_6$, $E27_6$ |
| Total | 10 (50%) | 16 (51,6%) |

Nótese que, del total de estudiantes, aproximadamente la mitad en cada grado no evidenció el reconocimiento y expresión de una regularidad. Ejemplo de esto se aprecia en la producción de estudiantes como $E9_6$ o $E16_6$. En los tres primeros casos específicos (3, 7 y 72) $E9_6$ responde utilizando implícitamente la estructura $3n + 1$. Esto se reconoce en respuestas como "Isabel va a invitar a 7 personas va a necesitar 22 glovos [sic] porque si va a invitar a 7 personas y les va a dar 3 a cada uno mas [sic] el glovo [sic] en la puerta". Sin embargo, no responde al caso 230 ni a los dos casos finales generales de la tarea. En este sentido, no se puede determinar si el razonamiento aplicado antes se extendió a más casos, particularmente a aquellos que invitaban a expresar de forma general una regularidad. Por otro lado, $E16_6$ sigue un proceso de operaciones que dista de la situación propuesta, como se aprecia en la Figura 2.

**Figura 2**

*Respuestas de E16$_6$ a los casos 3 y 7 respectivamente*




En los dos casos de la Figura 2, E16$_6$ finaliza respondiendo que se necesitan 13 y 16 globos respectivamente (contando el de la puerta). Mientras que en los dos casos finales responde directamente que se necesitan 72 y 103 globos, siendo obtenidos estos valores de otros casos previos.

La otra mitad de los estudiantes sí evidenció reconocer y expresar una regularidad. En los siguientes apartados se describen sus resultados independientemente de si las respuestas son o no correctas. Estos se organizan en: las estructuras evidenciadas en sus producciones y las representaciones de generalización exhibidas.

## 5.1. Estructuras de las relaciones funcionales

Como se planteó antes, las estructuras juegan un rol esencial en el desarrollo del pensamiento algebraico de los estudiantes (Hunter y Miller, 2022; Kieran y Martínez-Hernández, 2022; Ureña et al., 2023). Estas son una herramienta para describir las aproximaciones de los estudiantes, reveladas en las relaciones funcionales usadas.

En la Tabla 2 se presentan, por estudiante y por casos, las estructuras en las producciones en las que se reconocen generalizaciones. Para la expresión general de estas estructuras se ha representado la indeterminación en la cantidad de personas con $n$. Por otro lado, para evitar ambigüedades, en las estructuras se omite el signo $\times$ (de multiplicación, que sí emplearon los estudiantes en sus respuestas). A su vez, las estructuras en los casos particulares son agrupadas por casos: 3 y 7, y 72 y 230, ya que en esos bloques de casos usaron la misma estructura. Cuando usan más de una estructura también se especifica en la Tabla 2.

Vol. 28, e489 https://doi.org/10.12802/relime.2025.28.e489

**Tabla 2**

*Estructuras evidenciadas por los estudiantes que generalizan*

| | Casos | | | |
|---|---|---|---|---|
| Cuarto grado | Casos 3 y 7 | Casos 72 y 230 | Cantidad desconocida | Caso R |
| $E2_4$ | $n+n+n+1$<br>$3n+1$ | $3n$ | $3n$ | $3n$ |
| $E3_4$ | $3n$ | $3n$ | $3n$ | $n \cdot n = n$ |
| $E4_4$ | $n+n+n+1$<br>$3n+1$ | $3n+1$ | $3n$ | $3n$ |
| $E7_4$ | $4n$ | $4n$ | X | $4n$ |
| $E11_4$ | $3n+1$ | $3n+1$ | $3n$ | $n$ |
| $E12_4$ | $3n+1$ | $3n+1$ | X | $3n+1$ |
| $E14_4$ | $3n$ | $3n$ | X | $3n$ |
| $E15_4$ | $3n+1$<br>$3n$ | $3n$ | $3n+1$ | $3n+1$ |
| $E16_4$ | $n+n+n$<br>$3n$ | $3n$ | $3n$ | $3n$ |
| $E17_4$ | $3n+1$ | $3n+1$ | $3n+1$ | $3n$ |
| Sexto grado | | | | |
| $E3_6$ | $3n+1$ | $3n+1$ | $3n+1$ | $3n+1$ |
| $E4_6$ | $3n$ | $3n$ | $3n$ | X |
| $E6_6$ | $n+n+n+1$<br>$3n+1$ | $n+n+n+1$<br>$3n+1$ | $3n+1$ | X |
| $E7_6$ | $3n$ | $3n$ | $3n$ | $3n$ |
| $E11_6$ | $3n+1$ | $3n+1$ | $3n+1$ | $3n+1$ |
| $E12_6$ | $3n+1$ | $3n+1$ | $3n+1$ | $3n+1$ |
| $E14_6$ | $3n+1$ | $3n+1$ | $3n+1$ | $3n+1$ |
| $E15_6$ | $3n$ | $3n$ | NR | $3n$ |
| $E18_6$ | $3n+1$ | $3n+1$ | $3n+1$ | $3n+1$ |
| $E19_6$ | $n+n+n$ | $n+n+n$ | $n+n+n$ | $n+n+n$ |
| $E20_6$ | $3n+1$ | $3n+1$ | $3n+1$ | $3n+1$ |
| $E21_6$ | $3n+1$ | $3n+1$ | $3n+1$ | $3n+1$ |
| $E22_6$ | $3n+1$ | $3n+1$ | $3n+1$ | $3n+1$ |
| $E25_6$ | $3n$ | $3n$ | $3n$ | $3n$ |
| $E26_6$ | $3n+1$ | $3n+1$ | $3n+1$ | $3n+1$ |
| $E27_6$ | $n+n+n+1$ | $3n+1$ | $3n+1$ | $3n+1$ |

*Nota.* La sigla X significa que el estudiante responde, pero no se puede determinar con claridad la estructura; la sigla NR significa que el estudiante no responde al caso.

Complementando la Tabla 2, la Tabla 3 presenta la frecuencia de uso de cada estructura por casos involucrados según el grado escolar.

**Tabla 3**

*Frecuencia de uso de cada estructura en la sesión 1*

| Estructura | Casos | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 3 y 7 | 72 y 230 | Cantidad desconocida | Caso R |
| $3n$ | (4,4) | (5,4) | (5,3) | (5,3) |
| $n+n+n$ | (1,1) | (0,1) | (0,1) | (0,1) |
| $3n+1$ | (6,10) | (4,11) | (2,11) | (2,10) |
| $n+n+n+1$ | (2,2) | (0,1) | (0,0) | (0,0) |
| $4n$ | (1,0) | (1,0) | (0,0) | (1,0) |
| Otra | (0,0) | (0,0) | (0,0) | (2,0) |

*Nota*. En los paréntesis el primer valor refiere a la frecuencia en cuarto grado y el segundo a la frecuencia en sexto grado.

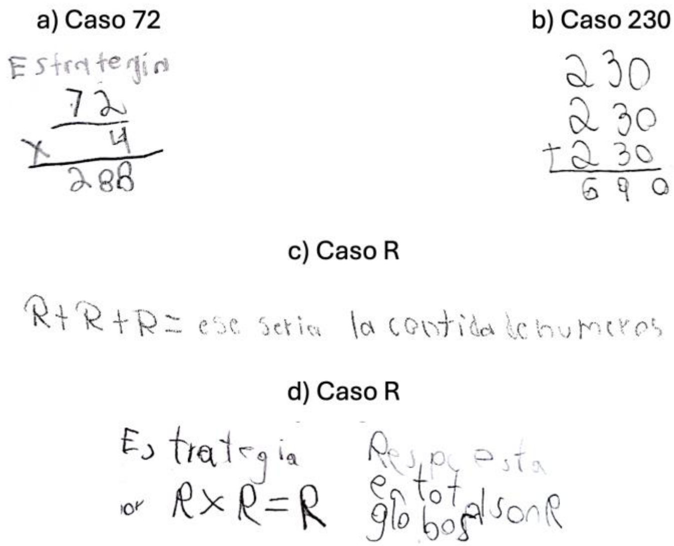
De acuerdo con la Tabla 3, entre las estructuras menos frecuentes se encuentran: $4n$ (ejemplo E$7_4$, ver Figura 3a) reconocida sólo en cuarto grado, o $n+n+n$ principalmente mantenida en sexto grado (ejemplo E$19_6$, ver Figura 3b y Figura 3c). La entrevista a E$2_4$ muestra una posible malinterpretación aritmética (además de otros errores o limitaciones, también aritméticas) en que no se reconoce una prioridad en la realización de las operaciones [5] que deriva en la estructura $4n$.

| | | |
|---|---|---|
| [1] | E$2_4$ | Yo lo hice así: yo multipliqué 230 por 4...cuatro por cero es cero, cuatro por tres es doce, entonces puse aquí el doce y luego cuatro por tres igual 12 (el estudiante escribe en la hoja 330x4=01212). Y después, eso fue lo que me dio el resultado (señala el resultado en la hoja). |
| [2] | D | Ok ok, y, ¿por qué por 4? |
| [3] | E$2_4$ | Porque a como me acuerdo de las multiplicaciones se pone lo que se dice por el total da el resultado. Entonces así fue como lo multipliqué. |
| [4] | D | No, perdón, es que creo que me expliqué mal. Que por qué multiplicó trescien...eh doscien...ah es que puso trecientos treinta. Bueno sí, ¿el número por qué lo multiplicó por 4? |
| [5] | E$2_4$ | Porque 4 son de si llega una persona se agarran 3, más el de la puerta. |

Otras estructuras, expresadas simbólicamente, en cuarto grado como como $n$ (E$11_4$) o $n \cdot n = n$ (E$3_4$, Figura 3d) revelan más que la generalización de una estructura, un tratamiento de la indeterminación. En concordancia con Ayala-Altamirano y Molina (2019), en este caso los estudiantes han dado significados variados a las letras que distan de su interpretación como cantidades que varían y repercuten en el planteamiento de una estructura coherente. Estos resultados también pudieron deberse a una limitada experiencia escolar previa con patrones o con el uso de la representación simbólica algebraica.

**Figura 3**

*Ejemplos de producciones de los estudiantes*

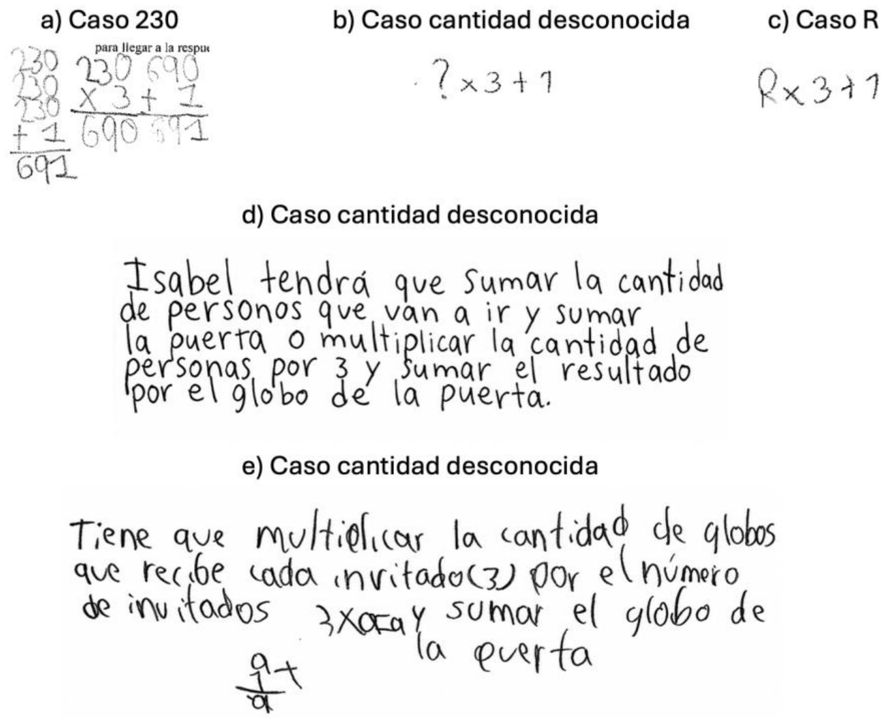



*Nota*. a) Respuesta de $E7_4$; b) y c) Respuesta de $E19_6$; d) Respuesta de $E3_4$.

Las estructuras más frecuentes varían según el grado escolar y el caso implicado. La estructura correcta $3n + 1$ es la más frecuente en todos los casos para los estudiantes de sexto grado (ver Figura 4) que evidenciaron una generalización (Tabla 2 y Tabla 3).

**Figura 4**

*Evidencia de la estructura $3n + 1$ en sexto grado*




*Nota.* a) Respuesta de $E6_6$; b) y c) Respuesta de $E20_6$; d) Respuesta de $E6_6$; e) Respuesta de $E26_6$.

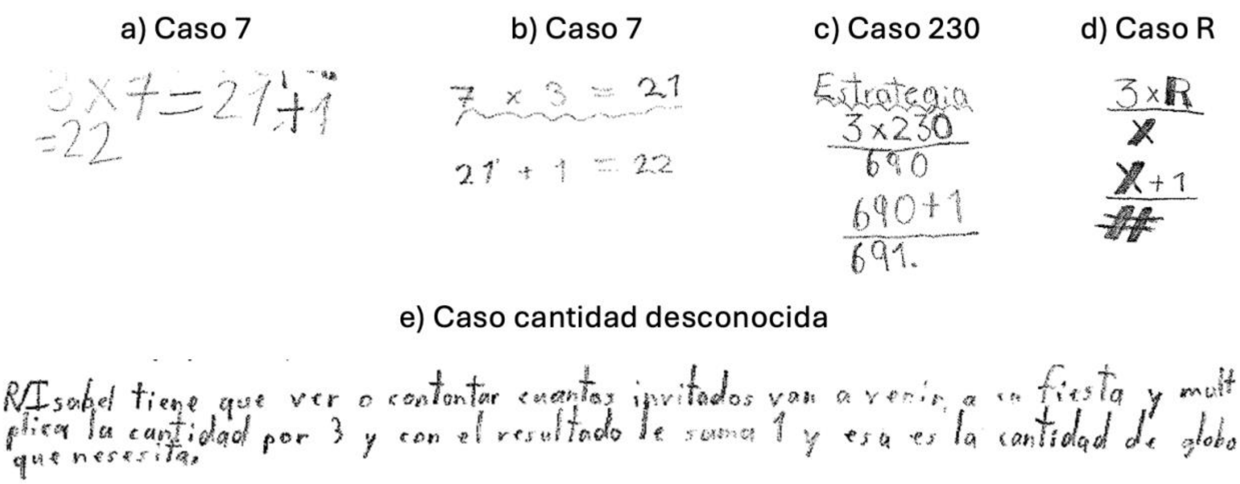
En cuarto grado, por otro lado, el uso de la estructura $3n + 1$ (Figura 5) se diluye conforme se avanza hacia los casos generales (ver Tabla 3), cambiando en los casos generales por otras estructuras más frecuentes como $3n$. Esto es apreciable en producciones como las de $E4_4$, $E11_4$ y $E17_4$. Esta estructura es de las más comunes en ambos grados escolares, principalmente en cuarto grado. Llama la atención que se usa mayormente en los casos particulares más lejanos y los generales. El principal cambio se da al pasar de usar la estructura $3n + 1$ a $3n$ (e.g., $E4_4$, $E11_4$ y $E17_4$, ver Tabla 2). El uso de la estructura $3n$, según las entrevistas pudo deberse a razones como el despiste, esto es, olvidar o no considerar parte del enunciado de la tarea, por ejemplo, el globo que se coloca en la puerta como revela $E6_4$ [15] cuando el entrevistador le aclara [14] que en la primera sesión respondió que para tres personas se necesitaban nueve globos.

[6] E64 Primero, a una persona le van a dar tres.
[7] D Sí
[8] E64 Escribe en la hoja: 3 por persona (se queda un largo rato sin decir nada)
[9] D ¿Cómo lo piensa?
[10] E64 3 por 3
[11] D ¿y con eso que obtiene?
[12] E64 Más el de la puerta, sería 10.
[13] D Si quiere lo escribe, para verlo más fácil
[14] E64 Escribe en la hoja: 3x3 = 9 +1 = 10
[15] D Ah ok ok, ya le entiendo. Es que resulta esta fue su respuesta en la primera sesión, 3 x 3 = 9, entonces en la respuesta puso: Se necesitan en 9 globos.
[16] E64 Ah, es que no conté el de la puerta.

En contraposición, en sexto grado los estudiantes que evidenciaron generalizaciones usaron una misma estructura. En esta línea, al igual que lo reportado en Ureña et al. (2023), conforme mayor es el grado académico de los estudiantes mayor es la consistencia de las estructuras que emplean.

**Figura 5**

*Evidencia de la estructura* $3n + 1$ *en cuarto grado*




*Nota*. a) Respuesta de $E2_4$; b) Respuesta de $E11_4$; c) y d) Respuesta de $E12_4$; e) Respuesta de $E15_4$.

A partir de Figura 4 y Figura 5 se pueden determinar diferentes formas en que estudiantes organizaron la información al emplear implícitamente la estructura $3n + 1$, a la vez que revelan formas en que la expresan. Esto es reconocible en las distintas representaciones de generalización empleadas (verbal, simbólica, etc., que se profundizan en el siguiente

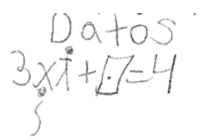
Vol. 28, e489 https://doi.org/10.12802/relime.2025.28.e489

apartado). Una diferencia clave se observa en el tratamiento de la igualdad. En sexto grado se reconocieron equivalencias entre estructuras de relaciones funcionales. Por ejemplo, $E6_6$ expresa la igualdad $3n + 1 = n + n + n + 1$ (ver Figura 4a). En cuarto grado, por otro lado, algunos estudiantes concatenaron resultados bajo el signo "=", sin reconocer que no representaban equivalencias (ejemplo, Figura 5a). Este comportamiento podría justificarse por un tratamiento operacional de la igualdad mediante el cual siempre se da un resultado cerrado y generalmente se acepta una única cantidad como verdadera (Ribeiro et al., 2023). Ejemplo de esto es la organización y representación de la información por $E13_4$ y $E2_4$ (ver Figura 6) o bien el uso de la estructura $4n$. Este comportamiento se alinea con la distinción establecida por Kieran y Martínez-Hernández (2022), quienes identifican "similitudes visibles e invisibles". En cuarto grado predominó el uso de la "similitud visible" centrada en el resultado numérico inmediato mientras que en sexto se reconocen casos de "similitud invisible", en los que se reconocen equivalencias estructurales.

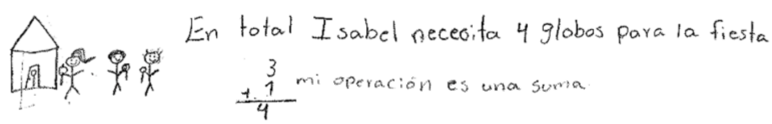
**Figura 6**

*Ejemplos de tratamiento de la igualdad*

a) Caso 230




b) Caso 3




Nota. a) Respuesta de $E2_4$; b) de respuesta de $E13_4$.

En todas las estructuras más frecuentemente usadas, resalta el reconocimiento y planteamiento de una parte de la regularidad: $3n$. Es decir, se manifiesta el rasgo de la regularidad más distintivo. En este sentido, de acuerdo con Ureña et al. (2023), el hallazgo podría suponer el planteamiento de una regularidad parcial por parte de los estudiantes. Es en cuarto grado donde se nota más frecuentemente un tránsito desde estructuras más completas a parciales. Este resultado contribuye a cuestionar por qué se presenta sólo esa parte de la regularidad discriminándose otros datos de la situación que la completan.

### 5.2. Representaciones de generalización

Distintas fueron las representaciones de generalización manifestadas por los estudiantes. Estas variaron según el caso al que dan respuesta. La Tabla 4 revela las representaciones empleadas por los estudiantes en los casos generales ("cantidad desconocida" y "caso R") para expresar sus representaciones.

Vol. 28, e489 https://doi.org/10.12802/relime.2025.28.e489

**Tabla 4**

*Representaciones de generalización*

| Grado | Casos | |
|---|---|---|
| Cuarto | Cantidad desconocida | Caso R |
| $E2_4$ | G | G |
| $E3_4$ | G | X |
| $E4_4$ | V | V |
| $E7_4$ | X | G |
| $E11_4$ | V | S |
| $E12_4$ | X | S |
| $E14_4$ | X | G |
| $E15_4$ | V | G |
| $E16_4$ | V | V |
| $E17_4$ | S | G |
| Sexto | | |
| $E3_6$ | V | V |
| $E4_6$ | V | X |
| $E6_6$ | V | X |
| $E7_6$ | G | G |
| $E11_6$ | G | G |
| $E12_6$ | V | V |
| $E14_6$ | V | V |
| $E15_6$ | NR | V |
| $E18_6$ | V | V |
| $E19_6$ | V | S |
| $E20_6$ | S | S |
| $E21_6$ | V | M |
| $E22_6$ | V | S |
| $E25_6$ | V | V |
| $E26_6$ | M | S |
| $E27_6$ | G | G |

*Nota*. La sigla X significa que el estudiante responde, pero no se puede analizar con claridad su respuesta; la sigla NR significa que el estudiante no responde al caso.

La Tabla 4 revela qué representaciones de generalización son las más y menos usadas, y cómo cambian las representaciones entre los casos a los que se da respuesta. La Tabla 5 condensa la frecuencia de uso de cada representación de generalización en alguno de los dos casos finales propuestos. En sexto grado es donde más estudiantes representan la generalización además de mantener la consistencia en la estructura de la relación funcional generalizada.

**Tabla 5**

*Cantidad de estudiantes que evidencian el uso de representaciones de generalización en alguno de los casos "cantidad desconocida" o caso R*

| Grado | Representaciones de generalización | | | |
|---|---|---|---|---|
| | G | V | S | M |
| Cuarto | 6 | 4 | 3 | 0 |
| Sexto | 3 | 11 | 4 | 2 |

*Nota*. Puede que los estudiantes usen más de una representación de generalización. Estos datos se contabilizaron en todas las representaciones de generalización evidenciadas.

Al igual que en otros trabajos que involucran estudiantes de primaria en contextos funcionales (e.g., Pinto y Cañadas 2017, 2019; Torres et al., 2019; Ureña et al., 2022) la representación más empleada es la verbal. Sin embargo, diferencia el uso de ejemplos genéricos para expresar la regularidad reconocida (Tabla 4). En cuarto grado la representación verbal queda manifestada principalmente en expresiones del tipo "la cantidad de invitados por 3" como muestra $E11_4$ (que en casos previos usó la estructura $3n+1$). En la entrevista cuando se le pregunta sobre el significado de tal expresión verbal, la defiende como correcta. Es decir, no se cuestiona su exactitud hasta que el entrevistador se lo plantea. En este sentido, si bien, la representación verbal es familiar y natural a los estudiantes, queda patente la ambigüedad que esta alberga como expone Molina (2014) y como recalcan Ureña et al. (2022) al reconocer comportamientos similares con esta representación.

Más en sexto que en cuarto grado, son reconocidas otras expresiones verbales que describen con mayor precisión la estructura empleada. Por ejemplo, $E15_4$ en el caso "cantidad desconocida" escribe "Isabel debe contar los invitados y multiplicar por 3 y sumarle 1 al resultado y ese será la cantidad de globos". En este caso usa la estructura $3n$ +1 que se aprecia con claridad en el caso R al usar ejemplos genéricos al escribir que se necesitan $3\cdot 3+1=10$ globos. Ureña et al. (2023) cuando contrastan resultados de estudiantes de sexto con primeros años de secundaria, reconocen que los primeros son quienes más usan la representación verbal y de forma más inexacta. Se confirma que conforme aumenta el nivel escolar más se precisa el uso de esta representación.

Aunado a lo anterior, resalta en sexto grado, a diferencia de cuarto, un uso de la representación simbólica de la generalización en los dos casos finales, como revela $E20_6$

Vol. 28, e489 https://doi.org/10.12802/relime.2025.28.e489

(ver Figura 4b y 4c). Nótese que en el caso “cantidad desconocida” incluso genera una representación simbólica propia para la indeterminación que luego cambia a R cuando se le propone esa letra. También $E12_4$ hace un tratamiento similar de la representación simbólica de la generalización (ver Figura 5d). Wilkie y Clarke (2016) también reportan resultados similares para representar variables, que luego pudieron transferir al simbolismo algebraico cuando lo aprendieron. Este resultado podría mostrar un paso previo en la progresión hacia el simbolismo algebraico convencional, como sugiere Kaput (2008). Este hallazgo constituiría una tendencia intuitiva para representar de forma flexible y natural las indeterminaciones, que a su vez puede ser promovido en las clases como oportunidad de formación.

Por otro lado, cambian de representación de generalización al cambiar de caso, tres estudiantes en cuarto grado y cuatro en sexto. En cuarto se reconoce principalmente un cambio al uso de ejemplos genéricos en el caso R mientras que en sexto grado predomina el cambio a la representación simbólica de la generalización para este mismo caso. El uso de ejemplos genéricos también es reconocido en cuarto grado por Ureña et al. (2019) como herramienta de expresión de ideas matemáticas. Resulta interesante que Ramírez et al. (2020) reconocen el uso de esta representación en coordinación con la verbal, al igual que el presente trabajo. En contraposición Ureña et al. (2023) no reconocen su uso en primaria ni en secundaria. Aunque Ureña et al. (2023) reconocen en menor medida el uso de la representación simbólica en sexto grado, se expone que conforme se da el acercamiento a la escuela secundaria, mayor es el uso de esta.

En sexto grado dos estudiantes usan la representación múltiple ($E26_6$, $E21_6$), resultado que no es observable en cuarto grado. En esta representación los estudiantes hacen uso de la representación verbal y simbólica para expresar sus generalizaciones. $E26_6$ (ver Figura 4e), por ejemplo, usa una letra $a$ para representar los invitados y la expresión simbólica algebraica $3 \cdot a = a$ para los globos que les corresponde (aunque no distingue que el resultado no puede ser $a$, revela que reconoce que este es indeterminado). Finalmente usando la representación verbal describe que al resultado anterior debe sumar 1, exponiendo el resultado simbólico $a + 1 = a$, en el que subyace la relación funcional $3n + 1$. En el caso R responde de forma consistente. Este resultado refuerza los hallazgos de Ureña et al. (2023) que reconoce el uso de este tipo de representación con estudiantes de sexto grado. Los autores exponen su uso como un precedente a la representación simbólica e incluso una representación semi-simbólica.

En relación con las estructuras evidenciadas, cabe destacar que en la mayoría de los casos las representaciones de la generalización múltiple, simbólica o el uso de ejemplos

Vol. 28, e489 https://doi.org/10.12802/relime.2025.28.e489

genéricos fueron de apoyo en la evidencia de una estructura clara y permitieron mantener una consistencia en su uso. Tal como reconocen Radford (2018) y Ureña et al. (2022), estas representaciones revelan con mayor fidelidad y claridad las relaciones entre variables. La representación verbal, por otro lado, en algunos casos implicó mostrar una estructura distinta (principalmente $3n$) a la seguida en otros casos, principalmente reconocible en cuarto grado.

También, mediante los resultados y la metodología llevada a cabo, llama la atención que las entrevistas retomaron dificultades evidenciadas durante las sesiones en el tratamiento de casos particulares más lejanos (como fue el caso 230) o los casos generales que involucraron la indeterminación en el número de personas. Estas dejaron entrever limitaciones de diversa naturaleza. Por un lado, barreras aritméticas como una tendencia a forzar el cierre de resultados que conlleva a errores conceptuales o la explicación del uso de la estructura $4n$ (ejemplo, ver Figura 5a y Figura 6). Otras dificultades aritméticas se asociaron a la aplicación de operaciones inadecuadas para dar respuesta a los enunciados, muestra de esto se reconoce en Figura 2 o Figura 6. También es reconocible una dificultad en el tratamiento de la indeterminación. Incluso estudiantes le asignan un valor específico (nuevo o usado antes) como muestra $E24_6$ en el siguiente extracto de la entrevista [18], resultado que podría asociarse a la dificultad matemática que envuelve el significado de "cualquiera" (Mason y Pimm, 1989), y por el desconocimiento en cómo tratar la indeterminación (e.g., Ayala-Altamirano y Molina, 2019; Ureña et al., 2019).

| | | |
|---|---|---|
| [17] | D | Si fueran R, ¿qué le diría usted a Isabel: Isabel haga esto? |
| [18] | $E24_6$ | Yo le diría que invite a 230 invitados |
| [19] | D | ¿Y por qué a 230? |
| [20] | $E24_6$ | Porque invitara 15 o 7 invitados |

Adicionalmente, la solicitud de argumentaciones como componente esencial del pensamiento algebraico (Blanton et al., 2011), fue central la tarea para obtener insumos sobre los razonamientos de los estudiantes. Durante las entrevistas, también la mediación que lleva a cabo el entrevistador cumplió un rol en la orientación de sus razonamientos mediante acciones como clarificar o repetir, replantear la información, corregir, reafirmar o sugerir procesos (e.g., [9], [11], [14], [2], [19]) (Mata Pereira y Da Ponte, 2017; Ureña et al., 2019).

En la interacción de los estudiantes con el entrevistador, algunos estudiantes afianzaron sus respuestas y procedimientos, otros se cuestionaron la validez de resultados que habían determinado en las sesiones anteriores. Por ejemplo, $E24_6$ reconoce errores cometidos en las sesiones y los corrige ([24], [26], [28]).

| | | |
|---|---|---|
| [21] | D | Ah ok ok. Era para entender eso, por ejemplo, porque este 9 con el 10 que acaba de encontrar usted. Por ejemplo, aquí cuando Carlos nos dice que son 10 globos. Por ejemplo, tenemos que era falso. ¿Por qué? |
| [22] | $E24_6$ | Ujum |
| [23] | D | ¿O ha cambiado de respuesta? |
| [24] | $E24_6$ | Yo creo que yo también estaba mal. |
| [25] | D | Ve, sí entendemos la respuesta. Precisamente por eso. Entonces, ¿cuál sería la respuesta? ¿Está de acuerdo con Carlos? ¿Cambiaría la respuesta? |
| [26] | $E24_6$ | No estoy de acuerdo conmigo ni con Carlos. |
| [27] | D | ¿Por qué no está de acuerdo con usted? |
| [28] | $E24_6$ | Porque en la primera respuesta me dio 9, por haber multiplicado los que iba a necesitar por invitado, y los invitados, que en total eran 3. Entonces, 3x3 me dio 9, ¿cómo es posible que me dio 6 aquí? |

Otros estudiantes más bien aclaran procedimientos para ellos mismos y superan dificultades enfrentadas en las sesiones o que emergieron durante la entrevista.

| | | |
|---|---|---|
| [29] | D | ¿Qué número podían ser esas letras? |
| [30] | $E23_4$ | Hmmm |
| [31] | D | ¿Era para algún número específico? |
| [32] | $E23_4$ | El número de la cantidad de invitados |
| [33] | D | Exactamente, y era cualquier número. El número de cantidad de personas. Exactamente, esa era la pregunta. ¿Cómo podía calcular usted $E23_4$ el resultado? Más que el resultado, ¿qué estrategia le hubiera dicho usted a Isabel si ella invitaba R personas? |
| [34] | $E23_4$ | Que multiplicara R personas por la cantidad de globos y le sumara uno el de la puerta. |
| [35] | D | Exactamente. ¿Y cómo escribiría eso? |
| [36] | $E23_4$ | (empieza a escribir en la hoja blanca) R personas por 3 globos [escribe Rx3] y después le sumo 1. |
| [37] | D | ¿Cómo le sumaría el 1? |
| [38] | $E23_4$ | A la cantidad que Rx3, lo que sería le sumo el uno después. |
| [39] | D | ¿Y no lo puede sumar aquí? (Señalando el espacio siguiente al Rx3) |
| [40] | $E23_4$ | Sí [al Rx3 le agrega +1. Completa la expresión como Rx3+1] |

En línea con lo anterior, por ejemplo, $E23_4$ tras tener problemas determinando la respuesta correcta al caso 230 (por dificultades como reconocer la operación a realizarse), en los casos que involucran la indeterminación el estudiante verbaliza la estructura correcta [34] para luego, tras mediaciones del entrevistador ([35], [37]), escribir simbólicamente la estructura correcta $3n + 1$ [40]. Cuando se le vuelve a cuestionar cuántos globos necesita para Z personas, el estudiante escribe $Z \times 3 + 1$. Finalmente, el entrevistador vuelve a retomar el caso 230 y el estudiante aplica la misma estructura que antes simbolizó.

Vol. 28, e489 https://doi.org/10.12802/relime.2025.28.e489

## 6. Conclusiones

Los resultados de este estudio aportan evidencias de manifestaciones de pensamiento algebraico en estudiantes de primaria en el sistema educativo costarricense, particularmente tras más de una década de implementación de un currículo que promueve el desarrollo del pensamiento algebraico desde los primeros años escolares. Asimismo, el estudio se desarrolla en un escenario educativo reciente marcado por diversas interrupciones, como la pandemia, lo que permite ofrecer una mirada situada sobre las capacidades algebraicas de los estudiantes en un contexto escolar ordinario, distanciándose de estudios basados en intervenciones longitudinales controladas (como los de Blanton et al., 2015). En este sentido, la investigación contribuye a la literatura sobre *early algebra* al articular dos dimensiones centrales en la expresión de la generalización en contextos funcionales: las representaciones de generalización y las estructuras de relaciones funcionales que los estudiantes manifiestan. Esta articulación permite ampliar la comprensión de formas de expresión del pensamiento algebraico y, al mismo tiempo, ofrece insumos diagnósticos relevantes para orientar la toma de decisiones con implicaciones para la instrucción y la operacionalización del currículo escolar.

El contraste entre los niveles escolares analizados permite identificar una evolución en la precisión con que los estudiantes reconocen y representan la estructura de la relación funcional. Mientras que en cuarto grado la generalización suele apoyarse en regularidades parciales, en sexto grado se observa una mayor consistencia en la identificación y representación de la estructura completa de la relación funcional. Este hallazgo sugiere un aporte del estudio en cuanto identifica una brecha en la cual la mediación pedagógica podría intervenir para transitar de la observación y expresión de patrones aislados a la atención a toda la regla de correspondencia entre variables. El uso de estructuras como $3n$ y $4n$ también sugiere la atención a la integración de elementos que son abordados desde la aritmética como diferentes usos y significados de la igualdad como equivalencia, relacional u operacional (Kieran, 1981), o la significación de las operaciones y su uso. En este sentido, los resultados refuerzan la idea de que la noción relacional de igualdad continúa siendo una de las principales barreras en la transición hacia el pensamiento algebraico, lo que sugiere la necesidad de intervenciones didácticas que aborden explícitamente este aspecto desde los primeros niveles de escolaridad. Como señalan Cai y Knuth (2005), el desarrollo de habilidades aritméticas puede coexistir y fortalecerse mediante experiencias que promuevan el razonamiento algebraico, lo cual plantea interrogantes relevantes sobre a qué elementos de las tareas de generalización prestan atención los estudiantes y cómo se favorece el reconocimiento de elementos focales del pensamiento algebraico en la formación escolar.

En relación con las representaciones de generalización, los resultados refuerzan la importancia de la representación verbal como medio primario y más accesible en la expresión de generalizaciones, en concordancia con lo reportado en estudios previos (e.g. Ureña et al., 2022). Sin embargo, como implicación para la instrucción, se recoge la necesidad de una atención más rigurosa a cómo se usa esta representación en el planteamiento de ideas matemáticas. Es claro que conforme los estudiantes se acercan a la secundaria, tienen mayor fluidez y flexibilidad para usar el simbolismo algebraico. No obstante, resulta esencial organizar experiencias que articulen representaciones diversas (Carraher y Schliemann, 2022). Como otros trabajos en el marco del early algebra (e.g., Ayala-Altamiraro y Molina, 2019; Ureña et al., 2019) los estudiantes presentan dificultades para trabajar y comprender las indeterminaciones y su representación (principalmente en cuarto grado). Sin embargo, pueden ser mitigadas con un cercamiento temprano y la familiarización con tareas con diferentes exigencias, que integren representaciones y tratamientos de las indeterminaciones (e.g., Blanton et al., 2015; Stephens, Fonger et al., 2017).

El estudio también destaca como aporte a la investigación, el uso de ejemplos genéricos y de formas emergentes de simbolización de la indeterminación como recursos valiosos en la expresión de generalidades. Estos recursos, situados entre la representación verbal de la generalización y el uso de simbolismo algebraico convencional, evidencian que los estudiantes disponen de múltiples formas de manifestar el pensamiento algebraico antes de dominar plenamente el lenguaje simbólico formal. Por otra parte, resulta llamativo que, al igual que en lo reportado por Ureña et al. (2022), pocos estudiantes recurrieran a representaciones pictóricas o al uso de material concreto (cromos recortados) como apoyo para el razonamiento. Este resultado podría sugerir una tendencia hacia una aproximación a las tareas matemáticas centrada en el cálculo y la obtención de respuestas, más que en la exploración de procesos de representación. En este sentido, los hallazgos invitan a profundizar en la relación entre las situaciones planteadas a los estudiantes y las oportunidades que estas ofrecen para desarrollar y articular diferentes representaciones matemáticas desde los primeros niveles escolares, elemento que puede incidir en la construcción del sentido matemático.

Finalmente, en el contexto costarricense, diversos informes recientes (Villalobos, 2023; PEN, 2025) han señalado que, si bien el currículo nacional incorpora componentes orientados al desarrollo del pensamiento algebraico desde la educación primaria (MEP, 2012), su implementación requiere una operacionalización significativa que permita traducir estas orientaciones en experiencias de aprendizaje profundas para los estudiantes. Esto requiere atención al pensamiento algebraico en educación primaria no sólo desde los estudiantes sino también desde los docentes que los atienden. Ellos demandan también oportunidades de formación, que pueden resultar útiles para profundizar los componentes matemáticos y didácticos del pensamiento algebraico (Ribeiro et al., 2023). Como se evidencia también, la mediación sobre los estudiantes repercute en sus razonamientos.

Para finalizar es importante mencionar algunas limitaciones. A pesar de la solicitud de argumentaciones, las respuestas escritas no reflejan necesariamente todos los razonamientos de los estudiantes. Por otro lado, puede que el planteamiento de las preguntas incidiera en el uso de la estructura $3n$ al interpretarse que se solicitaba la cantidad de globos para las personas y discriminar el resto de información. Finalmente, si bien, el estudio no pretende ser representativo a todo el territorio nacional, la cantidad de estudiantes participantes es reducida.

## Financiamiento

Este trabajo se desarrolla en el marco del Proyecto C1366. Pensamiento algebraico de estudiantes de primaria en el contexto costarricense desde el enfoque funcional del álgebra escolar del Centro de Investigaciones en Matemática y Metamatemática de la Universidad de Costa Rica.

## Referencias

Ayala-Altamirano, C. y Molina, M. (2019). Meanings attributed to letters in functional contexts by primary school students. *International Journal of Science and Mathematics Education 18* (7), 1271–1291. https://doi.org/10.1007/s10763-019-10012-5

Blanton, M. L., Brizuela, B. M., Gardiner, A., Sawrey, K. y Newman-Owens, A. (2015). A learning trajectory in 6-year-olds' thinking about generalizing functional relationships. *Journal for Research Mathematics Education*, *46*(5), 511–558. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.46.5.0511

Blanton, M. L., Levi, L., Crites, T. y Dougherty, B. J. (2011). Developing essential understanding of algebraic thinking for teaching mathematics in grades 3-5. National Council of Teachers of Mathematics.

Cai., J. y Knuth, E. (2011). Introduction. A global dialogue about early algebraization from multiple perspectives. En J. Cai y E. Knuth (Eds.), *Early algebraization: a global dialogue* *from multiple perspectives* (pp. vii–xi). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-642-17735-4

Cañadas, M. C., Blanton, M. L. y Brizuela, B. M. (2019). Special issue on early algebraic thinking / Número especial sobre el pensamiento algebraico temprano. *Infancia y Aprendizaje / Journal for the Study of Education and Development*, *42*(3), 469-478. https://doi.org/10.1080/02103702.2019.1638569

Carraher, D. y Schliemann, A. (2020). Early algebra teaching and learning, En S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education*, (193–196). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0_54

Hunter, J. y Miller, J. (2022). The use of cultural contexts for patterning tasks: supporting young diverse students to identify structures and generalise, *ZDM Mathematics Education*, *54*, 1349-1362. https://doi.org/10.1007/s11858-022-01386-y

Kaput, J. J. (1999). Teaching and learning a new algebra. En E. Fennema y T. A. Romberg (Eds.), *Mathematics classrooms that promote understanding* (pp.133-155). Lawrence Erlbaum Associates. https://doi.org/10.4324/9781410602619

Kaput, J. J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? En J. J. Kaput, D. W. Carraher y M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 5-17). Lawrence Erlbaum Associates. https://doi.org/10.4324/9781315097435

Kieran, C. y Martínez-Hernández, C. (2022). Coordinating invisible and visible sameness within equivalence transformations of numerical equalities by 10- to 12 year-olds in their movement from computational to structural approaches. *ZDM Mathematics Education*. *54*, 1215–1227. https://doi.org/10.1007/s11858-022-01355-5

Kieran, C., Pang, J., Schifter, D. y Ng, S. F. (2016). Survey of the state of the art. En *Early Algebra. Research into its nature, its learning, its teaching* (ICME-13 Topical Surveys) (pp. 3-42). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-32258-2_2

Kieran, C. (1981). Concepts associated with the equality symbol. *Educational Studies in Mathematics*, *12*(3), 317-326. https://doi.org/10.1007/BF00311062

Mason, J., Graham, A. y Johnston-Wilder, S. (2005). *Developing thinking in algebra*. The Open University y Paul Chapman Publishing.

Ministerio de Educación Pública de Costa Rica. (2012). *Programas de Estudio de Matemáticas*.

Molina, M. (2009). Una propuesta de cambio curricular: integración del pensamiento algebraico en educación primaria. *PNA Revista en Didáctica de las Matemáticas*, *3*(3), 135-156. https://doi.org/10.30827/pna.v3i3.6186

Molina, M. (2014). Traducción del simbolismo algebraico al lenguaje verbal: indagando en la comprensión de estudiantes de diferentes niveles educativos. *La Gaceta de la RSME*, *17*(3), 559-579. https://gaceta.rsme.es/abrir.php?id=1222

Pinto, E. y Cañadas, M. C. (2017). Estructuras y generalización de estudiantes de tercero y quinto de primaria: un estudio comparativo. En J. M. Muñoz-Escolamo, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M. L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 407-416). SEIEM.

Pinto, E. y Cañadas, M. C. (2021). Generalizations of third and fifth graders within a functional approach to early algebra. *Mathematics Education Research Journal 33*(1), 113-134. https://doi.org/10.1007/s13394-019-00300-2

Programa Estado de La Nación (2021). *Octavo estado de la educación 2021*. Consejo Nacional de Rectores/Programa Estado de la Nación. https://estadonacion.or.cr/wp-content/uploads/2021/09/Educacion_WEB.pdf

Programa Estado de La Nación (2025). *Decimo estado de la educación 2021*. Consejo Nacional de Rectores/Programa Estado de la Nación. https://estadonacion.or.cr/wp-content/uploads/2025/08/PEN_Decimo_Informe_estado_educacion_IEE_2025.pdf

Radford, L. (2018). The emergence of symbolic algebraic thinking in primary school. En C. Kieran (Ed.), *Teaching and learning algebraic thinking with 5- to 12-year-olds* (pp. 3-25). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-68351-5_1

Ramírez, R., Brizuela, B. M. y Ayala-Altamirano, C. (2020). Word problems associated with the use of functional strategies among grade 4 students. *Mathematics Education Research Journal 34*(2), 317-341. https://doi.org/10.1007/s13394-020-00346-7

Ramírez, R., Cañadas, M. C. y Damián, A. (2022). Structures and representations used by 6th graders when working with quadratic functions. *ZDM Mathematics Education*, *54*(6), 1393-1406. https://doi.org/10.1007/s11858-022-01423-w

Ribeiro, A. J., Aguiar, M., Trevisan, A. L. y Elias, H. R. (2023). Exploring learning opportunities for primary teachers: the case of knowledge for teaching early algebra. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *26*(3), 327-356. https://doi.org/10.12802/relime.23.2633

Stephens, A., Ellis, A., Blanton, M. L. y Brizuela, B. M. (2017). Algebraic thinking in the elementary and middle grades. En J. Cai (Ed.), *Compendium for research in mathematics education* (pp. 386–420). National Council of Teachers of Mathematics.

Stephens, A., Fonger, N. L., Strachota, S., Isler, I., Blanton, M. L., Knuth, E. y Murphy Gardiner, A. (2017). A learning progression for elementary students' functional thinking. *Mathematical Thinking and Learning*, 19(3), 143-166. https://doi.org/10.1080/10986065.2017.1328636

Torres, M. D., Cañadas, M. C. y Moreno, A. (2019). Estructuras y representaciones de alumnos de 2º de primaria en una aproximación funcional del pensamiento algebraico. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano y Á. Alsina (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIII* (pp. 573–582). SEIEM.

Torres González, M. D., Cañadas, M. C. y Moreno, A. (2024). Structure recognition and generalization by second-graders in direct and inverse forms of a linear function. *Mathematical Thinking and Learning*, *27*(3), 323–341. https://doi.org/10.1080/10986065.2024.2324492

Ureña, J., Ramírez, R. y Molina, M. (2019). Representations of the generalization of a functional relationship and the relation with the interviewer's mediation/Representaciones de la generalización de una relación funcional y el vínculo con la mediación del entrevistador. *Journal for the Study of Education and Development: Infancia y Aprendizaje*, 42(3), 570-614. https://doi.org/10.1080/02103702.2019.1604020

Ureña, J., Ramírez-Uclés, R., Cañadas, M. C. y Molina, M. (2022). Generalization strategies and representations used by final-year elementary school students. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 55*(1), 23-43. https://doi.org/10.1080/0020739X.2022.2058429

Ureña, J., Ramírez-Uclés, R., Molina, M. y Cañadas. M.C. (2023). Generalization: strategies and representations used by sixth to eighth graders in a functional context. *Mathematics Education Research Journal, 36*(3), 519-545. https://doi.org/10.1007/s13394-023-00458-w

Usiskin, Z. (1988). Conceptions of school algebra and uses of variables. En A. Coxford (Ed.), *The ideas of algebra K–12* (pp. 8-19). National Council of Teachers of Mathematics.

Villalobos Ramírez, J. L. (2023). La enseñanza de las Matemáticas: una aproximación al abordaje en la mediación pedagógica en I y II ciclos de la educación General Básica, experiencias exitosas y retos. Ministerio de Educación Pública.

Vol. 28, e489 https://doi.org/10.12802/relime.2025.28.e489

https://www.mep.go.cr/sites/default/files/2024-02/Informe%20final%20Matematica%20Primaria%20Nov%202023%20JVR.pdf

Warren, E. (2003). The role of arithmetic structure in the transition from arithmetic to algebra. *Mathematics Education Research Journal, 15*(2), 122-137. https://doi.org/10.1007/BF03217374

Warren, E., Trigueros, M. y Ursini, S. (2016). Research on the learning and teaching of algebra. En Á. Gutierrez, G. C. Leder y P. Boero (Eds.), *The second handbook of research on the psychology of mathematics education* (pp. 73-108). Sense Publishers. https://doi.org/10.1007/978-94-6300-561-6_3

Wilkie, K. J., y Clarke, D. M. (2016). Developing students' functional thinking in algebra through different visualisations of a growing pattern's structure. *Mathematics Education Research Journal 28*(2), 223-243. https://doi.org/10.1007/s13394-015-0146-y