El rol de algunas categorías del conocimiento matemático en educación superior. Una socioepistemología de la integral

Francisco Cordero Osorio[1]

RESUMEN

Los estudios socioepistemológicos han creado categorías del conocimiento matemático en educación superior. Discutimos en este artículo cómo tales categorías son evidencias de las producciones del conocimiento institucional, situación que ofrece marcos de referencias para hacer de la matemática un conocimiento funcional como finalidad didáctica. Tomamos como ejemplo al Cálculo Integral (CI), del cual estudiamos sus usos en el discurso matemático escolar, donde se resignifica al debatir entre sus funcionamientos y formas al paso de la vivencia escolar. En ese sentido, lo institucional, en esta investigación, será aquello que hace que el CI se desarrolle y se acepte como producto material social que tenemos que enseñar y aprender.

- **PALABRAS CLAVE**: Socioepistemología, categorías del conocimiento, producción del conocimiento institucional, conocimiento funcional, acumulación, predicción, resignificación, argumentación y uso del conocimiento.

ABSTRACT

The socioepistemological studies have created categories of mathematical knowledge in higher level education. In this article we discuss how these categories are evidence of the production of institutional knowledge, situation which offers frames of reference to make of mathematics a functional knowledge as a didactic result. We take as an example Integral Calculus (IC) from which we study its purpose in the school mathematical discourse where it acquires a redefinition as it debates between its functions and forms as it goes through the school experience. In this sense, *that which is institutional*, in this investigation, will be what makes IC develop and be accepted as a social material product which we have to teach and learn.

- **KEY WORDS**: Socioepistemology, categories of mathematical, production of institutional knowledge, functional knowledge, accumulation, prediction, redefinition, arguments and utility of the knowledge.

Fecha de recepción: Mayo de 2005 /Fecha de aceptación: Octubre de 2005

[1] Departamento de Matemática Educativa. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

RESUMO

Os estudos socioepistemológicos têm criado categorías de conhecimento matemático em educação superior. Discutimos neste artigo como tais categorias são evidências das produções do conhecimento institucional, situação que oferece marcos de referências para fazer da matemática um conhecimento funcional como finalidade didática. Tomamos como exemplo o Cálculo Integral (CI) e estudamos suas utilizações no discurso matemático escolar onde se resignifica ao debater entre seus funcionamentos e formas na vivência escolar. Nesse sentido, o institucional, nesta investigação, será aquilo que faz que o CI se desenvolva e se aceite como produto material social que temos que ensinar e aprender.

- **PALAVRAS CHAVES**: Socioepistemologia, categorias do conhecimento, produção do conhecimento institucional, conhecimento funcional, acumulação, predição, resignificação, argumentação e uso do conhecimento.

RÉSUMÉ

Les études socioépistémologiques ont crée des catégories de la connaissance mathématique dans l'éducation supérieure. Dans cet article nous présentons comment de telles catégories sont l'évidence des productions de la connaissance institutionnelle, situation qui nous offre un cadre de références pour notre objectif didactique, c'est-à-dire faire de la mathématique une connaissance fonctionnelle. Nous prenons comme exemple le Calcul Intégral (C.I.) duquel nous étudions ses usages dans le discours mathématique scolaire où il change de signification lorsqu'il débat entre ses fonctionnements et ses formes au cours des années scolaires. Dans ce sens, l'institutionnel dans cette recherche sera ce qui a fait que le C.I. se développe, s'accepte comme un produit matériel social que nous devons enseigner et apprendre.

- **MOTS CLÉS**: Socioépistémologie, catégories de la connaissance, production de la connaissance institutionnelle, connaissance fonctionnelle, accumulation, prédiction, resignification, argumentation et usage de la connaissance.

INTRODUCCIÓN

En este artículo discutimos la articulación de algunos elementos conceptuales que la socioepistemología ha producido para atender la problemática en educación superior, aplicándolos al *calculus*, particularmente al desarrollo conceptual de la integral.

Antes de seguir adelante, conviene establecer algunos preliminares.

El uso de la concepción matemática avanzada escolar, para nuestra discusión, tiene el propósito de distinguir entre "aquella matemática" que se discute en las escuelas y "aquella" que se discute en la ciencia. Ahora bien, el adjetivo *avanzado* matiza la noción, prevaleciente en los profesores, de la matemática que se enseña en los niveles superiores del sistema educativo. Desde tal óptica, el estatus del *Calculus* representa el contenido nuclear del currículo escolar, es decir, la matemática que se enseña previa al *Calculus* es el conocimiento necesario –y, por ende, básico– para acceder al de índole superior.

Esto conlleva a precisar, en los niveles de las acciones didácticas, que la matemática previa al *Calculus* se basa en un "modelo didáctico" –no definido claramente–, mientras que la superior en uno de carácter axiomático, a pesar de los esfuerzos por formular un "modelo didáctico". El sentido que le damos a "modelo didáctico" consiste en reconocer las afectaciones que las investigaciones de la matemática educativa han hecho en los programas curriculares. Por ejemplo, los niveles básicos han logrado desprenderse en parte del modelo axiomático, el desarrollo de las acciones didácticas va encaminado a atender al aspecto psicogenético y, en otros casos, también al epistemológico, lo cual se puede apreciar en los programas del currículo escolar y en los libros de texto, como muestran los trabajos de Poirier y Bednarz (1991), Bednarz y Dufour-Janvier (1991), Nemirovsky (1990), Nemirovsky y Tierney (1991), Flores, et al. (1992), y Flores y Cordero (2005). Sin embargo, no ocurre lo mismo en el nivel superior.

Si bien es cierto que aún no se ha logrado el "modelo didáctico" en el nivel superior, hay avances significativos al respecto. Actualmente se ha logrado identificar un eje que caracteriza a dicho nivel, el cual tendrá que confrontarse con el "modelo didáctico".

A continuación, describiremos tres aspectos principales del eje mencionado:

a)El primero es enfocado hacia la comunicación (difusión), cuya peculiaridad radica en que el modelo axiomático normó la construcción de un paradigma de la enseñanza de la matemática a través de su comunicación, principalmente la escrita. Aquí, el libro de texto juega un papel importante dentro del paradigma. Los conceptos matemáticos son considerados como conocimiento ya hecho; además, la didáctica se basa en la idea de que el conocimiento es acumulativo y con cierto carácter utilitario. Tal vez por ello resulta común encontrar en la matemática escolar, al final de un tema, una sección llamada "aplicaciones", con el propósito de justificar su "utilidad": al exhibir la aplicación del tema, se reflejaría la necesidad de aprenderlo. Esta clase de comunicación ha cautivado un discurso matemático en la enseñanza, al que nos referiremos en adelante como discurso matemático escolar (dme), en congruencia con los trabajos de Imaz (1987) y Cantoral, et al. (1990a). Un fenómeno que ha provocado el dme es que no considera al estudiante, de ahí que sea un paradigma vertical. La característica principal del dme es su invariancia ante cualquier discusión didáctica.

b)Un segundo aspecto es que en la matemática escolar no hay consideraciones sobre los significados de los objetos matemáticos, ni sobre las situaciones y actividades que pudieran favorecerlos. Se plantea, entonces, instaurar formas para consolidar los estudios sobre la identificación de patrones de construcción del conocimiento matemático y de las causas que los norman [Cantoral (2001), Cordero (2003) y Farfán (1997)].

c)El tercer aspecto consiste en la necesidad de lograr que el estudio de la enseñanza de la matemática impacte en la enseñanza, es decir, que realmente se vea un rediseño del dme. Desarrollar, tal vez, una especie de marco metodológico que relacione "tangiblemente" el estudio de la enseñanza y la enseñanza.

Ahora bien, la práctica docente, el estudio epistemológico y el quehacer científico carecen de una articulación real. Es común detectar en las nociones y las creencias de algunos profesores de matemáticas una especie de fenómeno, que convenimos en llamar "aplastamiento epistemológico", y consiste en reparar que lo que les ha permitido tener éxito en su conocimiento es haberse encontrado con un profesor particular que supo conducirlos exitosamente a ese saber.

La estructura de este trabajo se apoya en una pregunta principal: ¿Cómo enlazar los patrones de construcción identificados en la organización de los grupos humanos con los procesos enseñanza-aprendizaje en el salón de clases? Tomamos como eje organizador el empleo de elementos epistemológicos del conocimiento en las producciones y difusiones institucionales, que explicaremos en las secciones subsiguientes.

ASPECTOS DE LA SOCIOEPISTEMOLOGÍA

La socioepistemología es una aproximación teórica que incorpora de manera sistémica cuatro componentes con la intención de desarrollar el pensamiento matemático de los estudiantes. Se basa en un marco teórico que permite tratar con los fenómenos de producción y de difusión del conocimiento matemático desde una perspectiva múltiple, al incorporar el estudio de las interacciones entre la epistemología del conocimiento, la dimensión sociocultural del saber, los procesos cognitivos que le son asociados y los mecanismos de institucionalización vía la enseñanza (Cantoral y Farfán, 2004).

Su formulación abre un panorama distinto y amplio con respecto a las perspectivas epistemológicas del conocimiento tradicional. No basta con entender que el conocimiento es un sistema complejo de conceptos, sino más bien –de aquí la ampliación– habrá que entender porqué se constituyen socialmente tales sistemas. En otras palabras, ¿por qué los grupos humanos tuvieron o tienen que hacer "ciertas cosas" para haber construido o construir cierto sistema complejo de conceptos?

La socioepistemología, como aproximación teórica, considera a las prácticas sociales como "ciertas cosas" que hacen los grupos humanos para construir conocimiento. En ese sentido, la práctica social norma la construcción del conocimiento, es decir, manifiesta su constitución social (para una discusión amplia sobre el papel normativo de la práctica social ver Covián, 2005).

Bajo tal visión se ha podido entender que los conceptos matemáticos no sólo se dan en el dominio matemático, sino también ocurren en otras prácticas de referencia; este hecho es propio de la problemática en educación superior, como ya han precisado Cantoral y Farfán (2003). Es así como las investigaciones socioepistemológicas han ayudado a precisar que dicha problemática se trata de la ausencia, en matemática escolar, de marcos de referencia que permitan resignificar el conocimiento matemático (Buendía y Cordero, 2005).

Con esta problemática, nuestra investigación propone precisar otro marco de referencia enfocado a lo que pudiera ser el conocimiento institucional, el cual explique al Cálculo Integral (CI) como una manifestación de sus usos en el discurso matemático escolar, donde se resignifica al debatir entre sus funcionamientos y formas al paso de la vivencia escolar. En ese sentido, lo institucional será aquello que hace que el CI se desarrolle y se acepte como producto material social que debemos enseñar y aprender.

La hipótesis anterior implicó conocer cómo vive el CI en el discurso matemático escolar. Para ello, marcamos dos direcciones: una, evidenciar dicha hipótesis en los libros de texto escolar, tanto antiguos como aquellos de uso común en las prácticas de los docentes, al igual que en las obras originales de la Teoría de la Integral (Cauchy, Riemann, Lebesgue y Denjoy); otra, analizar las resignificaciones a partir de dos categorías de elementos: a) contextos y procedimientos y b) desarrollo de usos.

LOS CONCEPTOS MATEMÁTICOS EN LA ENSEÑANZA DEL NIVEL SUPERIOR

Como preámbulo a este apartado, queremos señalar el estatus de los conceptos del *Calculus* en la enseñanza, con relación a las investigaciones de la matemática educativa en el mundo.

A pesar de la existencia de resultados en la investigación de la matemática educativa, todavía hallamos un énfasis significativo en los aspectos formales de los conceptos del *Calculus* en los programas curriculares, que dejan de lado las dimensiones epistemológicas y cognitivas. La derivación y la integración, conceptos fundamentales, son explicados a través de las concepciones de límite y función, acompañados de sus representaciones geométricas: la recta tangente a una curva en un punto considerado y el área bajo la curva de una función positiva en un intervalo considerado.

Tal estatus genera una “cultura” en el profesor y el estudiante, donde “aprenden a decir” lo que es la derivada y la integral y a representarlas geométricamente, sin tener una comprensión que les permita estudiar fenómenos de variación continua. Por lo general, conciben al *Calculus* como una herramienta que los provee de algoritmos eficientes, a los cuales, a posteriori, se les busca alguna aplicación. Esa concepción, en el mejor de los casos, provoca de un buen desarrollo de los procedimientos analíticos de los conceptos y logra matizarlos en los dominios de las funciones; sin embargo, muchas veces se cree que aquellos procedimientos sustituyen cualquier otro tipo de procedimientos, como los intuitivos y los visuales, debido a que el estatus favorece la consideración de los conceptos matemáticos como objetos ya hechos, sin reparar en que pueden ser construidos por los estudiantes de manera funcional para que traten con distintas clases de situaciones.

En adelante, vamos a referirnos al estudio sobre la construcción de la noción de integración que aparece en Cordero (1991a, 1991b y 2003), la cual juega un papel importante en el desarrollo conceptual del *Calculus*. Dicho trabajo no sólo sería un ejemplo particular, sino también estableció las consideraciones generales que estamos exponiendo, una vez que se miró al concepto de integral como objeto de conocimiento.

Por otra parte, la investigación en la matemática educativa formula preguntas sobre qué y cómo enseñar los conceptos matemáticos, cuáles son las concepciones de los estudiantes y los profesores antes y después de una experiencia escolar, al igual que las prácticas de los grupos humanos ante el conocimiento, sus representaciones espontáneas –pero también institucionales– clasificadas en verbales, simbólicas y figurales, así como las situaciones que las favorecen.

El estatus del *Calculus* y sus investigaciones en el seno de la matemática educativa tienen en común que los conceptos matemáticos son tratados de acuerdo con el dme. Como ejemplo, mostramos a continuación un estado sobre la concepción de la integral en profesores y estudiantes después de una experiencia escolar normada por el dme.

Partimos de una expresión matemática bien conocida, que aparece en los textos de Cálculo, cuyos símbolos usuales son:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a), \text{ tal que } F' = f \text{ en } [a,b]$$

y su modelo geométrico cuando $f \leq 0$

el área bajo la curva	

En general, tanto en la expresión simbólica como en la geométrica, la función f es considerada continua. Una consecuencia de esta visión en la integral consiste en que se favorece la identificación o fabricación de un patrón, el cual se puede trazar de la siguiente manera: *Dada la función $f = F'$, reproducir la función de la cual se derivó f.*

La afirmación anterior es un patrón que resulta ser el "molde" de las aplicaciones típicas de la integración (Cordero, 1991a y 1991b). Sin embargo, las concepciones de los profesores y estudiantes creen en la importancia del "molde", lo reconocen como un instrumento eficiente para "resolver" las aplicaciones y "calcular" las integrales definidas, aunque no es del todo clara la relación entre el patrón y el "molde".

Para ahondar en las concepciones de este patrón en los profesores y estudiantes, aplicamos una encuesta cuyas preguntas más significativas trataron sobre:

a) La definición de la integral
b) El área bajo una curva
c) El cálculo de primitivas

Acerca de la primera pregunta, hallamos que tanto el profesor como el estudiante se inclinan más por describir la definición de la integral por medio de la "resta" $\int_a^b fdx = F(b) - F(a)$, en lugar de considerarla como "el límite de una suma", $\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon)\Delta x_i$. Dependiendo de la experiencia sobre este límite, algunos lo refieren sólo a $n \to \infty$, sin hacer m ención acerca de la partición del intervalo $[a,b]$, mientras que otros elaboran una explicación que considera tal aspecto y la relaciona con $n \to \infty$ y $\Delta x \to 0$. Escasamente se llega a mencionar la norma de la partición $\|P\| \to 0$.

No obstante, los que describen la definición por la "resta" no alcanzan a reconocer la relación que guardan las funciones f y F: $f = F'$, en el sentido del Teorema Fundamental del Cálculo; quienes la reconocen, la aceptan como comprobación del cálculo de la integral.

Con respecto al área bajo una curva, identificamos que los profesores y estudiantes aprenden a “decir” que la “resta” calcula el área bajo la curva, pero no pueden explicar porqué. Cuando consideran rectángulos de tal suerte que alcancen la región, se trata de un argumento visual que ambos pueden reproducir acertadamente; la dificultad se presenta con la igualdad de la “resta” ¿ $"\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon)\Delta x_i" = f(b) - F(a)$?

Y en el tercer aspecto, el cálculo de primitivas, lo entienden como un procedimiento algebraico, donde consideran que el cálculo de primitivas conlleva a dificultades algebraicas en la enseñanza y el aprendizaje (Artigue, 1998).

Un hecho relevante en las investigaciones de la matemática educativa es que ha habido una centración en el $"\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon)\Delta x_1"$ cuando se aborda el concepto de la integral (véase por ejemplo, el trabajo de Orton (1983).

Otro enfoque a estos estudios puede formularse si consideramos a los conceptos en el plano de los resignificados, donde entendemos como resignificado al uso del conocimiento de los grupos humanos en una situación específica. Sin embargo, la matemática escolar en el nivel superior margina dicho plano, lo cual conlleva a realizar investigaciones que rindan cuentas sobre el modelo que explique la adquisición de resignificados efectuada por los grupos humanos en sus prácticas institucionales (Arrieta, 2003; Buendía, 2004; Cantoral, 2001; Cordero, 2003; Farfán, 1997; Castañeda, 2004; Martínez, 2003).

Con tal propósito, las resignificaciones son estudiadas a través de los patrones de construcción de los grupos humanos y de las situaciones que los favorecen, visto como un sistema. La manera como decidimos concebir a los patrones de construcción en este trabajo es que el patrón, de algún modo, representa una idea que prevalece independientemente del contexto de la situación y será considerado en la construcción, cuando el grupo humano logra desarrollar el uso de su conocimiento. Para el análisis de las resignificaciones, establecimos dos categorías de elementos: a) contextos y procedimientos y b) desarrollo de usos.

Las dos formas anteriores requieren de explicación, y las ubicaremos con base en el estudio de la integral con el propósito de hacer ver el alcance que brinda esta perspectiva. Además, por necesidad de describirlas las hemos separado, pero para sus explicaciones es necesario considerarlas enlazadas.

CONTEXTOS Y PROCEDIMIENTOS

En este punto, importa comprender la interacción entre los procedimientos usados y las características particulares de los objetos con que se trabajan. Los contextos van a ser los entornos de situación donde se considera un hecho, mientras que los procedimientos serán las formas de organización. Sus identificaciones pueden brindar nuevas perspectivas para las acciones didácticas y la cobertura de ciertos contenidos matemáticos.

Por ello, al considerar el estudio del

desarrollo de la teoría de la integración no se preguntó sobre la evolución de su estructura, sino sobre sus procedimientos de evolución. Esto es, ¿cómo se constituyó el desarrolló la teoría de integración? El enfoque se aproxima, en definitiva, a un estudio de corte socioepistemológico.

Entonces, ¿qué habría que mirar? ¿A la resignificación del límite de la suma "$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon)\Delta x_1$" o a la de la resta $F(b) - F(a)$? Además, ¿cuál es el patrón de construcción de la teoría de integración?

Al analizar al discurso matemático escolar y a la producción científica se identifica a la resta $\int_a^b f dx = F(b) - F(a)$ como el patrón de construcción de la teoría de integración (Cordero, 2003; Muñoz, 2000). Se estudiaron los libros de textos antiguos, pero también al producto científico (en este caso, la física). El patrón aparece más explícito en este último, asociado a *una noción de acumulación de lo que fluye en una región* (Green, 1828; Maxwell, 1873, entre otros); además, se logró un desarrollo del uso del patrón. Siendo así, parece conveniente mantenerlo en el proceso de construcción de la teoría de integración.

Como el patrón es una idea básica fundamental para la construcción de la teoría de integración, en su desarrollo aparecen nuevos contextos –y, por lo tanto, nuevos procedimientos para conservar al patrón–; todo en su conjunto es una resignificación del conocimiento de la integral. Es por ello que encontramos en los textos, antes del de Cauchy (véase por ejemplo Lacroix (1837)), que la integral aparece como un concepto relativo a un diferencial dado: *"la cantidad (que cambia continuamente), que por su diferenciación (variación) produce un diferencial propuesto, se llama integral de ese diferencial"*. El contexto viene siendo la *noción de variación continua* y la manera de organizar su reconstrucción se da a través de una estructura preconcebida, cuya norma tradicionalmente genera discusión en el Cálculo Integral (Cordero, 1989 y 2003):

cantidad variable $\rightarrow$ variación $\rightarrow$ cantidad variable

En la integral en Cauchy (1882) hallamos un contexto nuevo, *función y continuidad*, donde el procedimiento que se deriva consiste en mirar el dominio de la función. Un aspecto importante es la construcción de argumentos analíticos: la definición de límite de la suma $\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon)\Delta x_1$ y la existencia de la función primitiva (una discusión más detallada puede verse en Cordero 1989; 1991a; 1991b y 2003).

En la integral de Riemann (1898), el contexto viene a ser una nueva *clase de funciones discontinuas* que provee un procedimiento para resignificar la *distribución de puntos* en el intervalo de integración donde es discontinua la función. Por el contexto y el procedimiento se da una ruptura en la estructura de la integral, un aspecto importante para el desarrollo de la teoría de integración (Cordero, 1989; 1991a; 1991b y 2003).

Con Lebesgue (1926) se subsana en parte la ruptura, el concepto de *medida cero* (nuevo contexto) cambia la manera de mirar los puntos de discontinuidad. El procedimiento determina un nuevo rumbo de la integración y del análisis matemático (Cordero, 1989; 1991a; 1991b y 2003).

Y, por último, con *las propiedades de medida y continuidad* de Luzin y con la *teoría de las totalizaciones* de Denjoy se llega a subsanar totalmente la estructura inicial de la integral (para una discusión con detalle consultar Cordero, 1988 y 2003).

En resumen, se desarrolla una teoría de integración para conservar el patrón. Al ser resignificado, adquiere nuevas $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ definiciones y conceptos, siendo los más significativos las *cantidades variables* y las *funciones* y sus formas de organización, en la *estructura de variación* y *dominio de función:*

- Cantidades variables: $x \to dx \to x$
- Funciones: dominio {densidad y medida cero

DESARROLLO DE USOS

En forma sucinta, exhibimos el desarrollo de los usos de la integral en su tradición didáctica, agrupándolos en dos clases (una discusión amplia al respecto se puede consultar en Cordero, 2003):

- Cantidades que cambian continuamente con respecto a uno o varios parámetros.
- Funciones de variable real, compleja y clase de funciones.

Cada una de ellas define su propio discurso *sui generis* de su uso.

La primera descansa en el estudio del movimiento asociado al interés por comprender el estado natural de un fenómeno. Entonces, hallamos en los textos antiguos de Cálculo que la base de su discurso está representada por cantidades que varían continuamente respecto a uno o varios parámetros, siendo éstos los que coordinan el movimiento. La forma del movimiento o variación es expresada por la relación lineal que guardan la cantidad y su parámetro: si $x \to p$,entonces $x + dx \to p + dp$, donde el último diagrama representa la forma de evolucionar la cantidad *p* una vez que varió el parámetro x.

Entonces, si se concebía una cantidad por la forma anteriormente expuesta, habría que dirigir la atención a las posiciones originales y actuales del estado del movimiento, considerado como un sistema en dos fases que recogen el estudio completo del movimiento: la estática y la dinámica. Encontramos en la primera fase el estudio comparativo de un estado inicial con sus estados vecinales, que conlleva a una clasificación importante del movimiento: los estados estacionarios. Mientras que en la segunda hallamos un estudio del cambio acompañado de una noción de *acumulación* respecto a dos estados para conocer su distribución total temporal. Una configuración de estos estudios está dada por el *elemento diferencial*, cuya integración, $\int dp = p$, ha pasado por diferentes paradigmas:

a.En la concepción newtoniana se halla la cantidad fluente de una fluxión dada

b.En la concepción leibniziana se considera a la integral como una suma; la $\int dp$ es $p \sum dp = p$, donde dp es la diferencia entre dos estados de p

c. En la concepción de los Bernoulli se interpreta a la integral de Leibniz como la inversa de la diferenciación, es decir, dada dp la integral $\int dp = Q$, donde $dQ = dp$

Sin embargo, estos paradigmas han convergido en un mismo objetivo: reconocer el estado local del proceso para conocer su estado total y algunas veces temporal. Tal objetivo ha sido aplicado a situaciones tanto geométricas como mecánicas, indicadas en—*la toma del elemento diferencial*.

Sobre la segunda clase de usos, hallamos que el objeto de estudio no está dirigido a las cantidades que varían continuamente, sino a las funciones arbitrarias como relaciones numéricas especiales. Sus propiedades se basan en el estudio local en su dominio, es decir, en el entorno de un punto en el dominio de la función. Con ello aconteciendo una investigación importante de las formas topológicas de los dominios, que también lo es en el estudio de su medida. Lo anterior lleva a establecer una base de funciones continuas y discontinuas sobre las que se define la derivación e integración con el concepto de límite.

Entonces, en los textos de Cálculo contemporáneos hallamos a la integral de Riemann como la base y, por ende, el antecedente para el desarrollo de la teoría de integración generalizada. Como consecuencia, se da la imposibilidad de sostener el "hallar una primitiva de una función dada" como la definición de integral, dado que no toda derivada de una función es Riemann integrable. Sin embargo, se restringe esta discusión con el teorema fundamental del Cálculo, considerando sólo las funciones continuas. Los patrones sobre los cuales se sigue el teorema fundamental, en el discurso matemático escolar, los presentamos de la siguiente manera:

a.Dada una función f, asignarle una nueva función f' que se obtiene a partir de f

b.Dada una función $F = f'$, reproducir la función de la cual se derivó F

c.Dada una función $F = \int f$, regresar a la función f

El contraste entre estas dos clases de usos radica fundamentalmente en dos aspectos. Por un lado, el estudio se basa en las variables, pero vistas con "movimiento", no como números, atendiendo significativamente una relación de dependencia e independencia; por otro, su estudio se basa en las funciones, en la relación numérica "arbitraria". Finalmente, se derivan dos discursos: al integrando de la integración $\int p$ siempre se le considera el diferencial de cierta cantidad preconcebida Q; entonces, $p=dQ$, mientras que en el segundo, lo que se integra, $\int f$, preserva una relación funcional, que *a priori* no necesariamente es la derivada de alguna otra función y no siempre se le puede aplicar el proceso de integración. Además, en el plano de las resignificaciones se observa que en la expresión $\int dp = p$, el diferencial dp tiene la misma naturaleza que la cantidad p, por lo cual representa el papel de elemento constitutivo; entre tanto, en la integración $\int f' = f$,la función f' tiene una dimensión menor que f, por lo cual es un elemento componente de f. Claramente se puede ver en el cálculo de un área, donde $dA = f(x)dx$ es un elemento de área $A(x)$ y $\frac{dA}{dx} f(x)dx$ es la altura del área $A(x)$.

LA IDEA DE VARIACIÓN Y EL USO DE LA INTEGRAL EN LOS PROFESORES Y ESTUDIANTES

Realizamos un estudio de casos con profesores y estudiantes en una experiencia de enseñanza controlada. Se hizo un análisis epistemológico sobre la construcción de la noción de integración, identificándose diferentes resignificaciones de la integración en una perspectiva de variación continua, que fue analizada en dos experiencias escolares: una con profesores de matemáticas, y otra con estudiantes de ingeniería. Por experiencias escolares debe entenderse a la experiencia que tiene el participante ante el conocimiento matemático, reflejada a través de sus concepciones, creencias y prácticas cotidianas escolares.

El estudio consistió en incorporar una serie de resignificaciones a temas tradicionalmente discutidos en Cálculo –en una y varias variables, variable compleja, ecuaciones diferenciales ordinarias y parciales–, con lo que se definieron las actividades escolares correspondientes para los profesores y los estudiantes. Se observó, en la primera etapa de la experiencia, el impacto de este acercamiento en el discurso generado por los participantes, tanto en sus argumentaciones ante situaciones de variación continua como en las formas de procesar la información numérica, paramétrica y gráfica ante dichas situaciones.

Las actividades escolares se ubicaron en dos sitios: el primero en la especialidad en enseñanza de las matemáticas para docentes de las Escuelas de Ingeniería de la Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo (UAEH); el segundo en algunos cursos de las licenciaturas en ingeniería del Instituto Tecnológico Autónomo de México (ITAM). El primer estudio consistió en haber diseñado un programa de especialidad en enseñanza de las matemáticas para docentes de ingeniería (Cantoral, et al. 1990b). La discusión de los temas de Cálculo estuvieron basados en la idea de variación continua, cuyo contenido matemático parte del reconocimiento de que el estudio del movimiento de un fluido es el núcleo donde se aloja el entorno del análisis matemático necesario para un docente de matemáticas en ingeniería. El segundo estudio consistió en haber diseñado situaciones de enseñanza en los cursos de cálculo sobre algunos fenómenos de variación continua en la economía y en la física, respectivamente.

Las puestas en escena de las experiencias describieron un discurso matemático escolar inusual en la tradición de la enseñanza, por lo cual conviene señalar algunos puntos que pudieran explicar los aspectos centrales de las puestas en escena.

Las situaciones de enseñanza no tuvieron como propósito tratar un cálculo con “aplicaciones” a la física o economía, sino más bien comprender y conocer la matemática en el fenómeno. Es decir, se trató un contenido matemático basado en un sistema de movimiento de un fluido, en contraparte de un sistema estructural matemático; en este sentido, resultaron relevantes las nociones y percepciones de los participantes sobre la *predicción,* la *acumulación* y la *distribución* del *fluido físico*.

El contenido temático del *Calculus*, con el marco anterior, resultó de la siguiente manera:

- *Relación de variables dependientes e independientes*
- *Variable y su variación*
- *Predicción y serie de Taylor*
- *Acumulación y distribución*
- *Sistema de movimiento en su estado estático*
- *Sistema de movimiento en su estado dinámico*

Este contenido fue distribuido en dos situaciones genéricas, llamadas fenómenos de comparación (diferenciación) y fenómenos de cambio (suma acumulada), coordinados por la noción de variación continua. Se trató al movimiento en sus formas más elementales según las acciones de los participantes, la posición y el movimiento, donde se articularon sus prácticas de adelantamiento, desplazamiento, duración, así como los cambios de posición, de acuerdo con las trayectorias en cuestión.

Esta forma de mirar el movimiento configuró una estructura matemática vinculada con la noción de predicción y prolongada al *prediciere* en la analiticidad matemática: la serie de Taylor para una función de la forma $u= F(x,y)$ [la discusión amplia al respecto aparece en Cantoral, 2001; además, se pueden consular los artículos de Cantoral, 1990 y 2001]:

$$F(x+dx, y+dy) \approx F + F_X dx + F_y dy + \text{"} a\lg o \text{"}$$

Tal configuración traza una metodología que permite comprender al fenómeno en cuestión, a partir de la diferencia

$$F(x+dx, y+dy) - F(x,y)$$

Con ello, se reconoce la *situación local* de $u= F(x,y)$:

$$F(x+dx, y+dy) - F(x,y) \approx dF$$

Y para conocer la *situación global* de $u= F(x,y)$, basta con considerar la siguiente integral:

$$\int dF = F$$

Para ser más explícitos, apoyándonos en la metodología descrita, a la que alude la resta $F(x+dx, y+dy) - F(x,y)$, diremos que el *Calculus*, en tanto objeto de conocimiento, identifica aspectos relevantes para la comprensión del movimiento, caracterizados por los procedimientos generados por las resignificaciones de la variación: *lo invariante*, *lo continuo* y *lo que se conserva.*

En ese sentido, el rol fundamental del *Calculus* ante las cantidades que varían continuamente consiste en resignificar la forma y función que interrelaciona "todas" las variables que intervienen en un sistema de movimiento $F(x,y,z,...) = U$, pero a partir del reconocimiento de la interrelación de sus variaciones locales que dependen de la situación específica del sistema, expresada por $F'(x,y,z,...,F,df,d^2F,...) = 0$. Una vez establecida la interrelación de las variaciones locales, se pueden reconstruir algunos aspectos de la relación $F(x,y,z,...) = U$ y, en el mejor de los casos, reconstruir su forma explícita.

La reconstrucción de la forma $F(x,y,z,...)=U$ y su función conlleva a la metodología anteriormente mencionada, donde la serie de Taylor, bajo una perspectiva de instrumento predictorio, juega el papel de un buen reconstructor de cantidades (Cantoral, 2001); además, de acuerdo con la naturaleza del movimiento, importa hallar un estado permanente o bien una posición primitiva representados por $F(x,y,...)=U$. El estado permanente es explicado por la serie de Fourier, instrumento que enlaza la noción de estado permanente con la noción de convergencia (para una explicación amplia véase Farfán, 1997), mientras que la posición primitiva es reconstruida a través de la toma del elemento diferencial. Esta "toma" enlaza la noción de acumulación y distribución de un fluido en cierta región o superficie con la noción de integral (para una explicación amplia véase Cordero, 2003).

En este marco, la noción de variación es favorecida. Por ejemplo, la expresión lineal de la serie de Taylor:

$$f(x+dx) \approx f(x) + f'(x)dx$$

no sólo representa una aproximación lineal a la función original o reconoce la definición de derivada de una función como el coeficiente de dx, sino más bien representa una configuración más cercana a la intuición de aventajar (delante y detrás) que a la de duración (espacio recorrido a través del tiempo). Este "aventajamiento" se articula con el desplazamiento: $f'(x)dx$ es una porción de $f(x)$ que hereda las mismas propiedades tanto físicas como geométricas de $f(x)$; la suma $f(x) + f'(x)dx$ determina un nuevo estado de la cantidad $f(x)$.

Entonces, la expresión lineal en el marco de una situación física (digamos, de cinemática) da cuenta sobre la posición y no sobre la velocidad, así como en el movimiento de un fluido da cuenta de la acumulación, no del flujo. De la misma manera, en una situación geométrica la expresión refiere la variación geométrica (porciones de área, volumen, superficie o longitud), no la derivada de estas cantidades.

Regresemos a la experiencia llevada a cabo con los profesores. Los participantes fueron 13 y el periodo de la experiencia tuvo una duración aproximada de año y medio (para una información más detallada véase Cantoral et al, 1990b). Con respecto a la otra experiencia escolar, llevada a cabo con estudiantes de ingeniería y economía, básicamente consistió en extrapolar la experiencia de la fase propedéutica a los cursos de cálculo en una y varias variables, así como a un primer curso de ecuaciones diferenciales ordinarias. El periodo de la experiencia abarcó también aproximadamente un año y medio.

La aproximación a la comprensión de la integral básicamente consistió en hallar sus resignificaciones que, en el a priori del discurso matemático escolar, es imposible hallar. Por tal motivo, fue notable estudiar situaciones locales en textos antiguos de *Calculus* para mirar la difusión del conocimiento matemático, conjuntamente con el análisis de los tratados científicos originales, para mirar las resignificaciones en otros marcos de referencia. Esta búsqueda llevó a reconocer patrones de construcción de la integración en sendas producciones.

Construido el referente, estudiamos las resignificaciones de los patrones de los participantes en tres diferentes situaciones:

- *Área de una superficie*
- *Posición a partir de una variación*
- *Movimiento de un fluido: cantidad de fluido y flujo*

ARGUMENTACIONES

Hemos denominado *argumentaciones* a las resignificaciones de los participantes en las situaciones específicas que ocurren en un sistema local, cuyas formas de producción y difusión no corresponden a una estructura axiomática, sino al frecuente uso de argumentos intuitivos y espontáneos, envueltos en la resignificación del conocimiento que manifiestan los participantes.

Para explicitar lo anterior, consideramos dos ejemplos que han resultado ser significativos en este estudio:

a) El participante reconoce el patrón a través de actividades funcionales, esto es, que el patrón le permite comprender situaciones específicas; después reflexiona sobre él, recogiendo explicaciones peculiares:

"la idea básica del patrón consiste en observar, o bien reconocer la diferencia entre un estado invariante y sus estados vecinales en el sistema de movimiento de una partícula o de un fluido continuo $\varphi(X+dX)-\varphi(X)$, donde $\varphi(X)$ *representa el estado invariante y* $\varphi(X+dX)$ *sus estados vecinales. En este sentido, la diferencia expresa la posición última de la partícula, o bien la acumulación del fluido localmente* (el participante realiza un dibujo como el de la Figura 1):

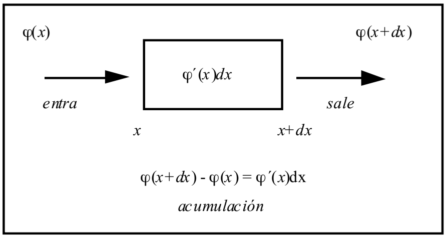


Figura 1. Acumulación del fluido localmente

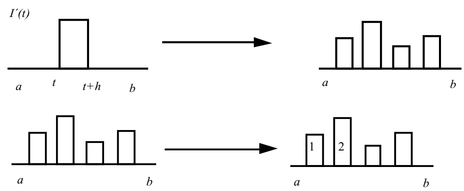
La posición última y la acumulación locales se obtienen por medio de la variación de φ *en todo el proceso del sistema que se reconoce por la diferencia* $\varphi(x+dx)-\varphi(x)$; *esta diferencia representa, por un lado, la porción de desplazamiento para alcanzar su posición última, por otro, representa la porción acumulada del fluido. Ahora bien, si juntamos o integramos estas porciones hallaremos la posición final de la partícula y análogamente la acumulación total del fluido al término del proceso. Entonces, al reconocer* $\varphi(x+dx)=\varphi(x)+\varphi'(x)dx$ *, se conoce* $\varphi(x)=\varphi(a)+\int_a^x \varphi(x)dx$ *, y al reconocer* $\varphi(x+dx)-\varphi(x)=\varphi'(x)dx$ *se conoce* $\varphi(b)-\varphi(a)=\int_a^b \varphi(x)dx$ *…"*

b)Otros participantes realizan una explicación del teorema fundamental del Cálculo *sui generis* de la situación específica:

Se le pregunta, ¿por qué una función se le puede escribir en la forma de la serie de Taylor? Él responde que la función tiene que ser continua, y enseguida explica lo que quiere decir con la condición:

"…tiene que ser continua porque si algún punto no tiene vecinos, entonces no podría medir el movimiento o comparar el movimiento respecto a sus estados vecinales. Es decir, no podría hacer la diferencia entre el estado vecinal y el estado original… Y como hemos visto que en realidad la función es la velocidad del movimiento que estamos analizando, $f(t)=I´(t)$, entonces el requisito de la función continua es en realidad el requisito de un movimiento continuo para poder describir ese movimiento.

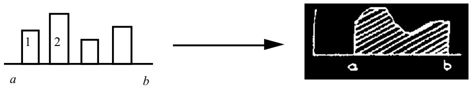
También se llega a la conclusión de que debe ser un movimiento continuo porque cuando ya se quiere encontrar la función que describe el movimiento ($I(t)=?,$) es decir, cuando se van a sumar todas las acumulaciones $\left(\sum I'(t)dt\right)$ *que pueden ser del tamaño que uno quiera.*



2.a) Acumulación = I´(t)h　　*2.b) "todas" las acumulaciones*

Figura 2. El estado vecino de las acumulaciones

Entonces, como se dice que "todas" quiere decir que hasta las acumulaciones más pequeñas, por ejemplo, entre las acumulaciones 1 y 2, existe otra acumulación más pequeña que 1 y 2 , de la palabra "todas las acumulaciones" se concluye que el movimiento debe de ser continuo, porque si faltaran algunas o una acumulación, ya no se estaría cumpliendo con lo que habíamos dicho al principio (la *la comparación se hace entre la posición inicial y sus estados vecinales para cualquier posición inicial que yo quiera escoger).*



3.a) "todas" las acumulaciones — *3.b) movimiento continuo*

Figura 3. El continuo de las acumulaciones

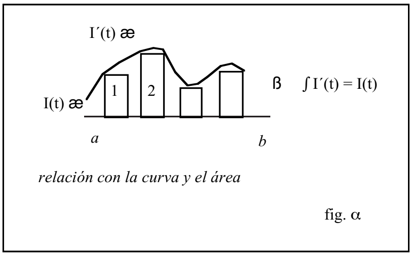


Figura 4. La acumulación con relación a la curva y el área

Si puedo comparar posición inicial y estados vecinales $(I(t+h)=I(t)+I'(t)h)$ entiendo que los estados vecinales están muy juntos con la posición inicial. Entonces, ¿cómo le hago para comparar o describir el movimiento desde $t=a$ hasta $t=b$, si $t=a$ y $t=b$ ya no son estados vecinales? Pues muy fácil, sumando esas comparaciones, y me queda:

$$I(b) = I(a) + \sum\left[I(to+h) + I(to)\right]$$
$$I(b) = I(a) + \sum\left[I(to+h) + I(to)\right]$$

Además, yo pienso que la palabra "movimiento continuo" es la que me da la clave, ya que "movimiento" me indica que hay un desplazamiento de un punto inicial a un punto final con una cierta velocidad en cada instante que es la derivada, $v = ds/dt$. Por lo tanto, como estoy analizando movimientos (si no fuera así no estaría yo en un problema de cálculo) y la serie me permite analizarlos, entonces necesito que la función sea derivable (más simple, "que exista movimiento y ya"), y la palabra continuo, pues que el movimiento sea continuo, como ya lo analizamos anteriormente…

Lo anterior le provoca una reflexión sobre el Teorema Fundamental del Cálculo, explicando lo siguiente (Figura 4):

> *"…ahora me estoy dando cuenta que, de la región formada por el movimiento continuo, cada rectángulo que la compone tiene una altura $I'(t)$, donde cada altura coincide con la curva que dibujé, entonces la curva es la función $I'(t)$, pero ésta es la derivada de $I(t)$. Creo ya entender por qué la integral de $I'(t)$ es igual a $I(t)$ y la relación con la curva y el área…"* (una discusión detallada aparece en Cordero, 2003).

Un aspecto a señalar sobre la forma de usar la integración en los profesores, y el impacto de este patrón en las actividades de los estudiantes para su resignificación, es que la discusión de integración inicia precisamente con la cantidad "desconocida" (función primitiva) que se quiere hallar, al exigir de el reconocimiento de su variación (función derivada) en un contexto o situación específica para finalmente conocer su integral (cantidad conocida). Este hecho es distinto en el discurso escolar tradicional del Cálculo Integral, donde por lo general se pregunta sobre la integración de una función arbitraria a partir de que se tiene una definición de integral. Tal hecho desemboca en un discurso matemático escolar distinto.

A MANERA DE CONCLUSIÓN

Hemos presentado el rol de la acumulación como una categoría del conocimiento de la integral en su producción (y difusión) institucional. Tal categoría, en su situación específica, ofrece un marco de referencia para hacer de esa matemática un conocimiento funcional como finalidad didáctica. Los aspectos más relevantes de la investigación fueron los siguientes:

- Pudimos hallar, en el análisis epistemológico, un patrón de construcción de la teoría de integración configurado por la expresión $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$,donde la diferencia $F(x+dx) - F(x)$ y las condiciones de una función derivada F' juegan un papel definitivo en la constitución del patrón.

- Se resignificó a la integral por medio de la noción de acumulación. Esta resignificación adquirió relevancia cuando se logró matizar dos aspectos de los fenómenos de variación continua, a través de la *suma* y de la *resta*, denominados *valor acumulado* y *acumulación*, respectivamente:

$$\varphi(x) = \varphi(a) + \int_a^x \varphi(x)dx$$
$$\varphi(b) = \varphi(a) + \int_a^b \varphi(x)dx$$

- Se lograron capturar argumentaciones de los participantes, cuya característica esencial consistió en relacionar las resignificaciones de la integral dentro de un sistema local, contrastándola con una estructura axiomática.

Los resultados de la investigación plantean, entonces, que el asirse de estas resignificaciones ayudará a apropiarse de un discurso matemático escolar que facilite la difusión del conocimiento del *Calculus*, basada en un sistema de resignificaciones producido por los profesores y estudiantes.

Todo ello sugiere situaciones de enseñanza que enfoquen más la atención en situaciones específicas de variación continua y cambio, como en la noción de acumulación, y no directamente en los conceptos de función derivada o "suma de Riemann", lo cual resulta ser un punto muy importante, ya que brinda nuevas perspectivas orientadas a la didáctica. Enfocar la atención hacia la situación de cambio permitió mirar dos operaciones elementales, *la suma* y *la resta*, reconociendo, además, que construyen en cierto sentido las ideas fundamentales del *Calculus*.

Denominamos situación de cambio (SC) a aquel fenómeno de variación que incluye un cambio de una cantidad inicial, que bajo un proceso es transformada en otra, siendo ésta el valor último en el proceso. La SC puede ser organizada por dos aspectos distintos, como ya habíamos mencionado anteriormente: *acumulación* y *valor acumulado* (para una lectura con más detalle véase Cordero, 2003).

El diagrama de categorías (operaciones elementales: suma y resta; variación discreta: suma y resta; y variación continua: diferenciación e integración) de las resignificaciones de la integral, de los participantes es el siguiente:

operaciones elementales:

suma y resta

$a + b = \boldsymbol{c}$ valor acumulado

$c - a = \boldsymbol{b}$ acumulación

↓

variación discreta:

suma y resta

$\underline{a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n}$

$\underline{d_0, d_1, d_2, \ldots, d_{n-1}}$, donde $d_i = a_i - a_{i-1}$

$a_n - a_o = \sum d_1,\ d_i = a_i - a_{i-1}$ valor acumulado

$a_n = a_o + \sum d_1,\ d_i = a_i - a_{i-1}$ acumulación

↓

variación continua:

integración y diferenciación:

$P(x) = U$

$P(x+dx) - P(x) = dP$

$P(a) + \int dP = P(b)$ valor acumulado

$P(b) - P(a) = \int dP$ acumulación

Figura 5. Diagrama de categorías

Dichas categorías aparecieron interconectadas en los usos de los participantes. Por ejemplo, muchas veces para instalarse en la última categoría acudían al modelo de la primera en una percepción de estado: la comparación de dos cantidades “sin proceso”. Otro procedimiento que se identificó fue la repetición reiterada de la primera categoría para organizar la variación discreta. La actividad propiciada por el uso de dichas categorías refleja lo que viene a ser el método del *Calculus*: reconocer la situación local para conocer la situación global del fenómeno.

Por último, nos gustaría comentar la relevancia de tres aspectos que ayudaron a coordinar las categorías anteriores en las experiencias de los participantes: área, medida y movimiento.

Se realizó una misma pregunta, presentada en tres contextos diferentes (ver Figura 6):

Figura 6. Región irregular en tres situaciones distintas

Se pidió a los participantes que calcularan el área de una región “rara” como en la Figura 6, en tres situaciones distintas: sin ejes de referencia, el segmento AB como eje de referencia y las coordenadas cartesianas x e y como referencia. La situación planteada en la entrevista consideró una región geométrica estática que, a priori, no aludía al movimiento y, por tanto, no tiene por que aludir al *Calculus*. Sin embargo, los procedimientos de los participantes arrojaron datos importantes para la resignificación de la integral:

- El área (largo por ancho o base por altura) es considerado como un patrón de medida adaptado a las tres situaciones, a pesar que ninguno de los participantes logra dar una explicación porqué este patrón es expresado como el producto base por altura.

- La estrategia para calcular el área sin ejes de referencia determina una situación de estado y no de proceso; es decir, el patrón de medida guarda una similitud con la región completa, en contraparte de describir una aproximación que alcance a la región.

- La estrategia para calcular área con un eje de referencia reconoce la relación funcional del patrón de medida, es decir, la relación de base y altura como variables. La situación de estado se conserva.

- La estrategia para calcular el área con los dos ejes de referencia hace que la relación funcional del patrón de medida sea susceptible de variar; sin embargo, la situación de estado se sigue conservando.

Los datos anteriores indican que la integral, ante la situación geométrica señalada, contiene una resignificación de estado relativa. Por una parte, admite un procedimiento sin reconocer movimiento, como el caso de sumar los patrones de medida que reconocen a la región; por otra, admite una representación con movimiento que, como fue el caso de un estudiante, tuvo que imaginarse el área como un fluido (un río corriendo bajo la curva) y calcular su acumulación. Esto pudiera significar que el área bajo de una curva como modelo geométrico de la integral, en un una ambientación de variación continua, exige mover lo estático. Tal categoría pudiera explicar porqué algunos estudiantes al usar la integral $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ en sus actividades escolares no pueden explicar porqué la expresión calcula el área bajo la curva $y=f$.

Es así como a la integral se le halló un marco de referencia para resignificarla, destacando la situación fenoménica (Freudenthal, 1977), que favorece su constitución. Todo ello en conjunto traza su producción y difusión institucional con la finalidad de organizar situaciones de cambio, que resignifican dos operaciones elementales: la suma y la resta. Hay investigaciones al respecto, donde se sostiene la existencia de la relación entre lo conceptual y lo algorítmico, su naturaleza dialéctica y su carácter relativo respecto a prácticas sociales asociadas al Cálculo Integral en un contexto sociocultural específico (Muñoz, 2003).

BIBLIOGRAFÍA

Arrieta, J. (2003). *Las prácticas de modelación como proceso de matematización en el aula*. Tesis de doctorado no publicada, Cinvestav, México.

Artigue, M (1998). Enseñanza y aprendizaje del análisis elemental: ¿qué se puede aprender de las investigaciones didácticas y los cambios curriculares? *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 1(1)*, 40-55.

Bednarz, N. y Dufour-Janvier, B. (1991). A Study of External Representations of Change Developed by Young Children. In R. Underhill (Ed.), *Proceedings of the Thirteenth Annual Meeting. North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (volume 1, pp. 140-146). Blacksburg, Virginia, USA: Virginia Tech.

Buendía, G. (2004). *Una epistemología del aspecto periódico de las funciones en un marco de prácticas sociales (Un estudio socioepistemológico).* Tesis de doctorado no publicada, Cinvestav, México.

Buendía, G. y Cordero, F. (2005). Prediction and the periodical aspect as generators of knowledge in a social practice framework. A socioepistemological study. *Educational Studies in Mathematics 58* (3), 299-333.

Cantoral, R. (1990). Unbalance and recovery: Categories related to the appropriation of a basis of meaning pertaining to the domain of physical thinking. In G. Booker, P. Cobb and T. Mendicuti. (Eds.). *Proceedings of the Fourteenth International Conference for the Psychology of Mathematics Education with the North American Chapter Twelfth PME-NA Conference* (volume. 1, pp. 19-26). Oaxtepec, México.

Cantoral, R. (2001). *Matemática educativa. Un estudio de la formación social de la analiticidad*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Cantoral, R., Cordero, F., Farfán, R. e Imaz, C. (1990a). Calculus-análisis: Una revisión de las investigaciones recientes en educación. En R. Cantoral, F. Cordero, R. Farfán y C. Imaz (Eds.). *Memorias del Segundo Simposio Internacional sobre Investigación en Educación Matemática* (pp. 55-69). Cuernavaca, Morelos, México.

Cantoral, R., Cordero, F., Farfán, R. e Imaz, C. (1990b). *Programa de la especialidad en enseñanza de las matemáticas para docentes en escuelas de ingeniería*. Universidad Autónoma de Hidalgo: PNFAPM.

Cantoral, R. y Farfán, R. (2004). La sensibilité à la contradiction: Logarithmes de nombres négatifs et origine de la variable complexe. *Recherches en Didactique des Mathématiques 24* (2-3), 137-168.

Cantoral, R. y Farfán, R. (2003). Mathematics Education: A Vision of its Evolution. *Educational Studies in Mathematics 53*, 255-270.

Castañeda, A. (2004). *Un acercamiento a la construcción social del conocimiento: estudio de la evolución didáctica del punto de inflexión*. Tesis de doctorado no publicada, Programa de Matemática Educativa, Cicata-IPN, México.

Cauchy, A. (1882). *Oeuvres complétes D'Augustin Cauchy*. Académie des Sciences (Ed.), París, France: Gauthier-Villars (II série. tome IV).

Cordero, F. (1988). La integral de Lebesgue y el concepto de función primitiva. En E. Bonilla, O. Figueras, F. Hitt y L. Radford (Eds.). *Memorias de la Segunda Reunión Centroamericana y del Caribe sobre Formación de Profesores e investigación en Matemática Educativa* (pp.387-392). Guatemala, Guatemala: Universidad de San Carlos de Guatemala.

Cordero, F. (1989). About the heritage in the Calculus textbooks: A definition of integral or the Fundamental Theorem of Calculus. In C. Maher, G. Goldin and R. Davis (Eds.), *Proceedings of the Eleventh Annual Meeting. North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 61-65). New Brunswick, New Jersey, USA: Rutgers University, Center for Mathematics, Science and Computer Education.

Cordero, F. (1991a). Taking a differential element: its formation and meaning in the Didactic Discourse of Calculus. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology 22* (6), 869-872.

Cordero, F. (1991b). Understanding the integration concept by the teacher of engineering schools. In R. Underhill (Ed.), *Proceedings of the Thirteenth Annual Meeting. North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (1), 91-97. Blacksburg, Virginia, USA: Virginia Tech.

Cordero, F. (1992). The idea of variation and the concept of the integral in engineering students: situations and strategies. In W. Geeslin and K. Graham (Eds.). *Proceedings of the Sixteenth International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (3), 153. Durham, NH, USA: University of New Hampshire.

Cordero, F. (2003). *Reconstrucción de significados del Cálculo Integral. La noción de acumulación como una argumentación*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Covián, O. (2005). *El papel del conocimiento matemático en la construcción de la vivienda tradicional: El caso de la cultura maya.* Tesis de maestría no publicada, Cinvestav, México.

Farfán, R. (1997). *Ingeniería didáctica: un estudio de la variación y el cambio*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Flores, R. y Cordero, F. (2005). El uso de las gráficas en los libros de texto. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (volumen 18, pp. 495-502). Cl*ame*.

Flores, J., Muñoz, G., Rivera, A., Villarreal, J. (1992). *Análisis de reacciones ante situaciones de cambio: Estrategias adoptadas por estudiantes de secundaria*. Trabajo de investigación, especialidad en Enseñanza de las Matemáticas, PNAFAPM-UAH.

Freudenthal, H., (1977). *Mathematics as an Educational Task*. Dordrech, Holland: Reidel Publishing Company.

Green, G., (1828). *An essay on the application of mathematical analysis to the theories of electricity and magnetism*. London: Mathematical Papers.

Imaz, C. (1987). ¿Qué es la matemática educativa? En E. Bonilla, O. Figueras y F. Hitt.(Ed.). *Memorias de la Primera Reunión Centroamericana y del Caribe sobre Formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa* (pp.267-272). Mérida, Yucatán, México: Universidad Autónoma de Yucatán, Escuela de Matemáticas.

Lacroix, S.F. (1837). *Traité Elémentaire de Calcul Différential et de Calcul Intégral*. Paris, France.

Lebesgue, H. (1926). *Lecons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives*. Paris: Gauthier-Villars.

Martínez, G. (2003). *Caracterización de la convención matemática como un mecanismo de construcción de conocimiento. El caso de su funcionamiento en los exponentes*. Tesis de doctorado no publicada, Programa de Matemática Educativa, Cicata-IPN, México.

Maxwell, J.G. (1873). *A treatise on Electricity and Magnetism*. New York: Dover Publications, 1954. (Vols. 1 y 2).

Muñoz, G. (2000). Elementos de enlace entre lo conceptual y lo algorítmico en el Cálculo Integral. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 3* (2), 131-170.

Muñoz, G. (2003). Génesis didáctica del Cálculo Integral: relación entre lo conceptual y lo algorítmico. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 16* (2), 415-421.

Nemirovsky, R., (1990). Calculus as Bridge between intuition and realistic. In G. Booker, P. Cobb and T. Mendicuti (Eds.). *Proceedings of the Fourteenth International Conference for the Psychology of Mathematics Education with the North American Chapter Twelfth PME-NA Conference* (volume 3, pp. 234). Oaxtepec, México.

Nemirovsky, R., Tierney, C. (1991). Young Children's Spontaneous Representations of Changes in Population and Speed. In R. Underhill (Ed.), *Proceedings of the Thirteenth Annual Meeting. North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (volume 2, pp. 182-188). Blacksburg, Virginia, USA: Virginia Tech.

Orton, A. (1983). Student's understanding of integration. *Educational Studies in Mathematics 14*, 1-18.

Piaget, J., García, R., (1984). *Psicogénesis e historia de la ciencia*. México: Siglo XXI Editores.

Poirier, L., Bednarz, N. (1991). Mental Models and Problem Solving: An Illustration with Complex Arithmetical Problems. In R. Underhill (Ed.), *Proceedings of the Thirteenth Annual Meeting. North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (volume 2, pp. 133-138). Blacksburg, Virginia, USA: Virginia Tech.

Riemann, B. (1898). *Oeuvres Mathámatiques Riemann*. París: Gauthier-Villars.

Francisco Cordero Osorio
Departamento de Matemática Educativa
Área Educación Superior
Cinvestav-IPN
México, DF.

Email: fcordero@cinvestav.mx