Sara Pascual Pizarro

UNA SECUENCIA DIDÁCTICA PARA LA ENSEÑANZA DE LA TRANSFORMACIÓN LINEAL: UNIFICACIÓN DE MÉTODOS Y PROBLEMAS, MODELIZACIÓN Y EXPLICITACIÓN DEL APRENDIZAJE

A Didactic Sequence in the Teaching of Linear Transformation: Unification of Methods and Problems, Modeling and Explanation of Learning

RESUMEN

Este trabajo contribuye, por un lado, a determinar las implicaciones didácticas de un análisis epistemológico sobre la generalidad de métodos económicos y análogos en la resolución de problemas de carácter lineal y, por otro lado, a construir y evaluar una secuencia didáctica que haga entender mejor por los estudiantes el significado de un concepto unificador y ayudar a la movilización espontánea de sus propiedades por la exposición a una serie de problemas que recurren a diferentes marcos matemáticos (numérico, geométrico, físico y analítico). La articulación teórica concierne a la Modelización y la Dualidad proceso/objeto en la formación del concepto. Nos inspiramos en una ingeniería didáctica para presentar una parte de los resultados de nuestra investigación. Estos resultados se refieren a los niveles de explicitación y a las competencias desarrolladas en el uso de las habilidades técnicas y métodos matemáticos que ayudan a explicitar el proceso de formación de la noción.

PALABRAS CLAVE:

- *Ingeniería didáctica*
- *Secuencia didáctica*
- *Modelo unificador*
- *Competencias de modelización*
- *Niveles de explicitación*

ABSTRACT

This work contributes, on the one hand, to determine the didactic implications of an epistemological analysis on the generality of economic and analogous methods in the resolution of problems of linear carácter. On the other hand, to construct and to evaluate a didactic sequence that makes the students understand better the meaning of a unifying concept and to help to the spontaneous mobilization of its properties by the exposure to a series of problems that resort to different mathematical frameworks (numerical, geometric, physical

KEY WORDS:

- *Didactical engineering*
- *Didactic sequence*
- *Unifying model*
- *Competencies in modeling*
- *Levels of communication*

Recepción: Agosto 19, 2019 / Aceptación: Noviembre 17, 2020. DOI: 10.12802/relime.20.2331

and analytical). The theoretical articulation concerns the Modelling and process/object duality in the formation of the concept. We are inspire by a didactic engineering to present a part of the results of our research. These results refer to the levels of explicitness and to the competences developed in the use of technical skills and mathematical methods that help to make explicit the process of formation of the notion.

RESUMO

Este trabalho contribui, por um lado, para determinar as implicações didácticas de uma análise epistemológica sobre a generalidade dos métodos económicos e análogos na resolução de problemas de carácter linear e, por outro lado, para construir e avaliar uma sequência didáctica que faça compreender melhor pelos estudantes o significado de um conceito unificador e ajuda a mobilização espontânea das suas propriedades através da exposição a uma série de problemas que recorrem a diferentes quadros matemáticos (numérico, geométrico, físico e analítico). A articulação teórica concerne à Modelização e à Dualidade de processo/objeto na formação do conceito. Somos inspirados por uma engenharia didáctica para apresentar uma parte dos resultados da nossa investigação. Estes resultados se referem aos níveis de explicitação e às competências desenvolvidas na utilização de habilidades técnicas e métodos matemáticos que ajudam a tornar explícito o processo de formação da noção.

PALAVRAS CHAVE:

- *Engenharia didática*
- *Sequência didática*
- *Modelo unificador*
- *Competências de modelização*
- *Níveis de explicitação*

RÉSUMÉ

Ce travail contribue, d'une part, à déterminer les implications didactiques d'une analyse épistémologique sur la généralité des méthodes économiques et analogues dans la résolution de problèmes de caractère linéaire et, d'autre part, à construire et à évaluer une séquence didactique qui fait mieux comprendre aux élèves la signification d'un concept unificateur et aide à la mobilisation spontanée de ses propriétés par l'exposition à une série de problèmes qui font appel à différents cadres mathématiques (numérique, géométrique, physique et analytique). L'articulation théorique concerne la modélisation et la dualité processus/objet dans la formation du concept. Nous nous inspirons d'une ingénierie didactique pour présenter une partie des résultats de nos recherches. Ces résultats font référence aux niveaux d'explicitation et aux compétences développées dans l'utilisation des aptitudes techniques et des méthodes mathématiques qui contribuent à rendre explicite le processus de formation de la notion.

MOTS CLÉS:

- *Ingénierie didactique*
- *Séquence didactique*
- *Modèle unificateur*
- *Compétences de modélisation*
- *Niveaux d'explicitation*

1. INTRODUCCIÓN

Como otros conceptos del álgebra lineal, la enseñanza de la Transformación Lineal (TL) opera más centrada sobre la aplicación directa del algoritmo de resolución que el uso de su funcionamiento implícito. Esto, debido a un contrato explícito de modelizar el problema lineal con la ecuación "general" $T_{(u)}=v$ como un modelo inicial, privilegiado y estudiado de forma continua, donde los esfuerzos empleados contribuyen sólo al aprendizaje de técnicas asociadas a la resolución de problemas tratables en R^n. Según los estudios (Dorier, 2000a; Harel, 2000; Hillel, 2000; Sierpinska, 2000) se trataría de una enseñanza de matemáticas que no contempla una abstracción de los objetos ya abstraídos con la TL. En efecto, Chevallard (1998) nos advierte de este fenómeno de algoritmización, que se hace visible cuando se pretende aumentar la eficacia y promover la transparencia del nuevo objeto enseñado; introducido y justificado por ideas que según los profesores consideran ser tan simples. Dorier (2000a,b) advierte que la enseñanza del álgebra lineal universalmente es reconocida como difícil. El profesor que tiene que enseñar algebra lineal, pero, para los estudiantes los conceptos funcionan de manera parcial y diferentes según los dominios (físico, geométrico, numérico, grafico, analítico u otros). Por consiguiente, las integraciones están incompletas, lo han demostrado Legrand (2003) como Dorier, Robert, Robinet, Rogalski (Dorier, & al., 2000) a propósito del álgebra lineal (Dorier, 2000a,b) y Bloch (2006). Según estos autores, las situaciones para conceptos unificadores están poco presentes en los manuales y en la enseñanza, y, por lo tanto, tienen un carácter inédito que les confiere una cierta complejidad (Brousseau, 2010). Esta constatación nos ha llevado a preguntarnos sobre el rol unificador de la TL[1] de su uso eficaz y simplificador en variados dominios, internos y externos al álgebra lineal, donde su aplicación puede ser creadora de desequilibrios de la generalidad que se trata de compensar. El rol unificador de este concepto lo comprendemos en el mismo sentido que Dorier, Robert, Robinet, Rogalski (Dorier, & al., 2000), esto es que la TL unifica los métodos de resolución aplicados en su forma primitiva, en un modelo general.

[1] Banach (1932) destacó el interés de un enfoque sintético de los espacios funcionales siendo una de las razones esenciales de la explicitación de la estructura algebraica de estos espacios. Impuso el enfoque axiomático en el análisis funcional y en la introducción de su libro "Teoría de operadores lineales", justifica el interés del enfoque adoptado por la ganancia que aporta el aspecto unificador de la estructura algebraica y de los operadores lineales: establecer teoremas en un marco general, luego especificarlos para cada espacio vectoriales y de funciones que verifican algunos axiomas. Este aspecto unificador, permitió a Banach resolver nuevos problemas que no podrían haberse abordado en el marco analítico.

Desarrollamos este trabajo en el marco de un proyecto de tesis doctoral cuyo objetivo es estudiar una nueva manera de enseñar la transformación lineal, para que la noción adquirida por los estudiantes sea utilizada con sentido y propiedades propias y en conexión con otros dominios y conceptos matemáticos (Pascual, 2013). Para conseguir esto, proponemos desarrollar y evaluar otra manera factible de enseñar la TL, pensando en una secuencia de tareas que hagan emerger el rol unificador de la transformación lineal.

2. Marco Teórico

2.1. *Análisis histórico de la transformación lineal*

El nacimiento y la evolución del concepto de la transformación lineal puede ser asociado, inicialmente al de transformaciones de figuras geométricas o de curvas. Sin embargo, durante mucho tiempo la única transformación lineal conocida fue la *proyección*. Euler (1770)[2] amplia este estudio geométrico con un cambio de ejes ortogonales en dos y tres coordenadas cuyos resultados fueron los primeros sobre transformaciones ortogonales, y lo generaliza a un número cualquiera de coordenadas. A posterior, Lagrange (1773)[2] interesado en los números naturales que pueden ser representados por una forma cuadrática de dos variables con coeficientes enteros, le lleva a examinar los cambios de coordenadas (llamadas a la época *sustituciones lineales)* para la transformación de formas cuadráticas de dos variables, con sustituciones lineales de las variables. En su interés por estas sustituciones, observa que las sustituciones necesariamente deben ser lineales para que el resultado de la transformación sea una forma cuadrática y además deje invariantes ciertas propiedades de la forma cuadrática original.

En consecuencia, lo que determina las analogías se basa más bien en los problemas que hay que resolver por sobre un enfoque teórico estructural entre objetos o conjuntos. Analogía, que motivó a establecer una clasificación de problemas, lo que se traducía en la búsqueda de invariantes Así, encontramos que, el nivel más simple de búsqueda de invariantes es hacer intervenir la linealidad sobre las variables por medio de sustituciones lineales en el cuadro algebraico.

Luego, Gauss (1795)[2], en *Disquisitiones Arithmeticae,* utilizando sustituciones lineales generaliza los trabajos de Lagrange a formas cuadráticas de tres variables. Fue el primero en introducir una notación en forma de "arreglo rectangular" de las formas cuadráticas que se asemeja a la actual notación matricial de las formas cuadráticas, notación que también utiliza para las sustituciones lineales, y que Euler generaliza para sustituciones lineales de *n* coordenadas.

En el mismo año, Gauss y Euler (Euler, 1798, pp. 306-309)[2] realizan notables trabajos en contribución al estudio de sustituciones lineales. Lo novedoso es el sentido operatorio que les dan a las sustituciones lineales al establecer que la compuesta de dos sustituciones lineales es todavía una sustitución lineal, donde la operación de compuesta en la actualidad corresponde al producto de matrices.

Posteriormente, Eisenstein en su memoria (1844-1845)[2] sobre formas cúbicas de tres variables con coeficientes enteros, introduce una representación que llamó *sistemas* para las sustituciones lineales, cuya notación es casi idéntica a la notación actual de matriz y profundiza la operacionalidad de estos sistemas. Al igual que Lagrange y Gauss, el interés por la aritmética lo lleva a interesarse por los *sistemas* de determinante 1 y utiliza la expresión de la compuesta de dos sistemas, que corresponde a la expresión de la compuesta de TL (o en términos matriciales, al producto matricial), y observa que este producto o compuesta no es conmutativo. Además, utiliza un *sistema inverso* de un sistema de determinante igual a 1 y observa que este sistema inverso tiene coeficientes enteros (por el hecho que el determinante es 1) y utiliza la notación $\frac{1}{S}$ para designar el sistema inverso del sistema S de determinante 1. Este sistema inverso es lo que actualmente corresponde a la inversa de una matriz de determinante 1. Con estos resultados él escribe nuevas expresiones algebraicas que contienen sustituciones lineales y multiplicación (lo que era innovador a la época). Utiliza métodos algebraicos para resolver la ecuación $S{\times}X{=}S'$, con S y S' sustituciones lineales, que corresponde a los sistemas de ecuaciones lineales de determinante 1.

En un plano paralelo se encuentran las ecuaciones diferenciales lineales, ambas materias de sistemas de ecuaciones lineales y ecuaciones diferenciales lineales serían un motor principal en el avance de la teoría de determinantes y de la teoría lineal. La solución general de la ecuación diferencial lineal se obtiene como la suma de una solución particular y la solución general de la ecuación diferencial homogénea asociada, guardando la misma expresión que la solución general de un sistema de ecuaciones lineales numéricas. Esta representación, de la solución general de sistemas lineales, numéricos o diferenciales, se inscribe en un modelo lineal, que en términos actuales, se expresa como $T_{(u)}=v$ con T una transformación lineal.

En 1858, Cayley[2] reúne todos estos resultados sobre matrices cuadradas y rectangulares que define como *arreglos cuadrados de cantidades*, precisando la suma, la multiplicación por un número y el producto de matrices cuadradas, y describe las principales propiedades que, actualmente, corresponde a la estructura algebraica de *álgebra* del conjunto de las matrices cuadradas del mismo orden.

2 Dorier, J. L. (Ed.). (2000a).

Además, podemos considerar que el concepto transformación lineal es una concepción que integra distintos contextos lineales, sacados de dominios aritméticos, algébricos o geométricos, pero también de problemas físicos que conducen al estudio de resolución de sistemas de ecuaciones diferenciales (cuerdas vibrantes, problemas de amortiguación, etc.).

2.2. *La modelización matemática y la unificación de problemas y métodos: la TL como herramienta unificadora*

La modelización matemática permite el pasaje del problema contextualizado a una forma manipulable por las herramientas matemáticas, llamada modelo matemático. Lo que típicamente implica, pero no exclusivamente, una definición de las variables, de los parámetros, y una puesta en ecuaciones. En la trilogía de Astolfi y Drouin (1992), según Dupin (1996), el modelo que resulta de la modelización matemática retiene en primer lugar la dimensión formal.

Chevallard (1989) habla de “matematizado” para designar el sistema matemático que se va a modelizar y de “matemático” para hablar del modelo que se fabrica. El matematizado hace entonces la función del objeto de estudio, siendo la matemática la herramienta de estudio.

Si pensamos en la teoría del álgebra lineal, en la transformación lineal cuyo objeto de estudio es conocido sustancialmente desde el colegio, y cuyas herramientas de estudio recurren a los dominios más avanzados de la matemática, veremos, por, sobre todo, que la distinción del matematizado y de la matemática constituye de forma práctica la articulación procedural/estructural (Sfard, 1991). Debe comenzar por distinguir los métodos, herramientas y objetos que ella unificara dialécticamente. Tal sustitución, es una modelización de problemas concretos que demanda una capacidad inicial disponible: saber hacerse la pregunta del carácter lineal en relación con una variable de una función (de los términos que dependen de las operaciones lineales: valor en un punto, rotación, vectores, áreas de regiones, integrales). Como en algunos casos, la transformación lineal toma aspectos concretos, en particular, cuando matematizado y matemática pertenecen a sectores de los cuales son vistos como diferentes de la matemática, deberá entonces saber identificar la transformación, hacer corresponder las analogías, la eficacia, la economía del nuevo enfoque, lo que le conducirá a hacer elecciones para ganar en simplicidad y en fiabilidad.

En la figura (Figura 1) ilustramos el trabajo de la modelización sobre problemas específicos que aporta a la adquisición del significado abstracto de la TL

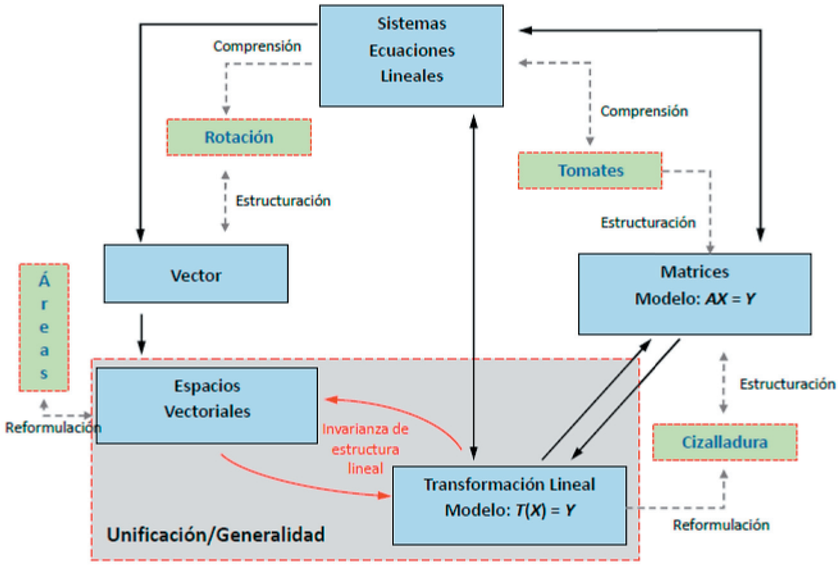


Figura 1. La unificación de la TL
Fuente: Pascual (2013)

Con este enfoque, la nueva estructura viene a ampliar el campo de conocimientos para tipos de problemas (simetrías, invariantes algebraicos y geométricos, etc.) a dar una nueva significación a las propiedades del objeto inicial, luego validado como realización particular de una teoría general (Dupin, 1996). Una tal modelización supone una capacidad disponible de métodos y herramientas ya estudiados (Dorier, 2000).

2.3. *Las competencias solicitadas en la modelización*

En el marco de sus investigaciones De Terssac (2015) agrupó tres tipos de competencias que pueden ser proyectada sobre los diferentes modos de utilización del saber matemático:

Las *competencias de explicitación o clarificación* (los "saber-decir") para traducir lo que es, lo que hay que hacer y lo que se hizo.

Las *competencias de intervención* (los "saber-intervenir") para actuar poniendo en situación los conocimientos disponibles y transformando las situaciones encontradas con conocimientos reutilizables en otros contextos.

Las *competencias de evaluación* (los "saber-situarse") para identificar, legitimar y validar todo lo que se compromete en la acción.

Estos tres tipos de competencias se solicitan en distintos grados según la fase en que se sitúa en la modelización matemática. Se recurre, en primer lugar, a las *competencias de explicitación* para leer sobre la situación e interactuar con las herramientas disponibles, así como a las *competencias de evaluación* para extraer lo esencial del accesorio en función de los objetivos que se han propuestos. La matematización de la solución se basa a la vez sobre las *competencias de evaluación*, para identificar los conceptos matemáticos y las herramientas existentes para describir el problema, y sobre las *competencias de explicitación* para expresar una tal descripción en lenguaje matemático.

El tratamiento matemático recurre obviamente a las técnicas matemáticas de las que se dispone, asociables a las *competencias de intervención*, y estas técnicas se basan invariablemente en uno o más formas de lenguaje, tradicionalmente simbólica o gráfica. El análisis de los resultados solicita por una parte las *competencias de evaluación*, para juzgar el valor de los resultados producidos por las técnicas, y por otra parte las *competencias de intervención* para prever de nuevas técnicas que podrían ser invocadas si los resultados no son enteramente satisfactorios. En la interpretación, la validación y la separación de la solución respecto de las exigencias de la situación inicial, las *competencias de evaluación* y *explicitación* son fuertemente solicitadas.

2.4. *Los niveles de explicitación en el aprendizaje*

Poniendo en relación las estrategias de aprendizaje privilegiadas con las competencias matemáticas demostradas, Caron (2004) destaca la importancia de la explicitación en la apropiación de los conceptos y en el ejercicio de la práctica matemática.

Tratando de memorizar fórmulas, reconocer enunciados de problemas para identificar el método que hay que aplicar, y fiándose exclusivamente en las respuestas proporcionadas para validar su enfoque, se observan los estudiantes que trabajan casi exclusivamente en un nivel de *asociación* en la explicitación.

> *Nivel de asociación:* se puede leer, reconocer, memorizar y reproducir una expresión, una figura, una definición o un enunciado.

La *comprensión* del sentido de un concepto matemático implica necesariamente la identificación de vínculos.

> *Nivel de comprensión:* la búsqueda del sentido detrás de la forma lingüística, la utilidad de las relaciones y el cuestionamiento sobre las razones que hacen emerger las relaciones entre las diferentes representaciones mostradas.

En un nivel superior, se encuentran los que prefieren proceder en un trabajo de *estructuración* sobre el plano de los conceptos para minimizar lo que tendrá que memorizar.

> *Nivel de estructuración:* se trata de organizar y, eventualmente, sintetizar los conceptos en función de su generalidad y la naturaleza de las relaciones que las vinculan (equivalencia, orden, jerarquía, causalidad, etc.).

Si se busca redefinir espontáneamente, de acuerdo con las estructuras desplegadas de los conceptos aprendidos, los aprendizajes conexos y los nuevos problemas que hay que resolver, diremos entonces que hay paso al último nivel, el de la *reformulación.*

> *Nivel de reformulación:* encontramos un mayor grado de conceptualización para redefinir de acuerdo con las estructuras establecidas sobre los conceptos aprendidos.

Utilizando los niveles de explicitación también podemos situar a un estudiante y su práctica a la abstracción (Sierpinska 2000; Oktaç, 2018) gracias a las representaciones matemáticas articuladas. Y comparar el avance del aprendizaje en función de las articulaciones de un contexto a otro.

3. Metodología. la ingeniería didáctica

El experimento se organizó en una universidad de Chile en un curso de algebra lineal (segundo año de la carrera ingeniería civil, 17 estudiantes entre 20 y 21 años) por el profesor del curso. Entre los participantes, seis estudiantes fueron elegidos para contribuir en el plano cualitativo del estudio (en grupos de dos). Fueron seleccionados sobre la base de sus respuestas en el cuestionario de entrada que caracteriza su formación, intereses y percepciones y niveles de explicitación, en la medida en que sus producciones estaban disponibles. Complementamos los datos con una entrevista de explicitación (Vermersch, 1994). El estudio sobre terreno se llevó a cabo durante seis sesiones de clases (de 45 minutos de duración cada una) y se integró la investigación de manera natural en el progreso de los contenidos en el momento en que el profesor comenzaba recién el capítulo sobre las transformaciones lineales. El proyecto evolucionó de manera coherente con el tiempo de la clase, en función de los estudiantes, y las elecciones pedagógicas del profesor.

3.1. *Análisis a priori*

3.1.1. *La noción de ingeniería didáctica*

La ingeniería didáctica constituye un método para organizar la confrontación de las propuestas teóricas en la clase. Además de permitirnos a acceder al control y a la observación de determinados fenómenos específicos, nos permite dar cuenta de nuestras situaciones problemas.

Como metodología de investigación, la ingeniería didáctica se diferencia de otras metodologías con validación externa basadas en la confrontación estadística entre grupos experimental y de control. Muy por el contrario, su esquema de experimentación está más próximo al estudio de casos. Su método de validación es interno y está basado en la confrontación entre el análisis *a priori* en el cual se encuentran comprometidas las hipótesis, y un análisis *a posteriori* que se apoya en los datos surgidos de la realización práctica efectiva (Artigue, 2002).

Es importante observar que los fundamentos de esta metodología provienen de sus relaciones con la Teoría de las Situaciones Didácticas, donde sus vínculos se expresan especialmente en la concepción y en el análisis *a priori* de la ingeniería. Sin embargo, estas ambiciones se vuelven más difíciles de satisfacer en el desarrollo de la investigación en niveles de enseñanza superior (Artigue, 2002; Barquero & Bosch, 2015). Sobre todo, cuando se trata de enseñar conceptos que unifican y generalizan diferentes métodos, herramientas y objetos, mismos que existen previamente en una variedad de escenarios. Es *difícil de encontrar situaciones fundamentales enseñables*, esta hipótesis ha sido presentada y discutida por Dorier, Robert, Robinet, Rogalski, Siepinska, etc. (Dorier, 2000a) y Bloch (2006) para su análisis.

3.1.2. *Situación 1: En busca de un modelo (Anexo B)*

De acuerdo con las conclusiones de Markovits et al. (1985) y evocados en Sfard (1991) se puede esperar que los estudiantes tienden a asociar una tabla de valores con funciones lineales a partir de la regla "*a mayor cantidad de kilogramos, mayor precio*". Esta distribución es respetada en la tabla de precios de la situación 1. Sin embargo, la comparación de los valores produce las complejidades. Así, por ejemplo, si 2 kg cuestan $ 470 entonces 4 kg deberían costar el doble, pero en la tabla está asignado un precio de $ 850. Comparación asociada a una regla de proporcionalidad (directa) que no es el caso acá, pues la elección de los valores que hemos realizado hace imposible un recurso de la regla de tres para que dé cuenta de un coeficiente de proporcionalidad uniforme a todos estos valores.

Está entonces la tendencia de colocar los valores en relación proporcional utilizando combinaciones lineales. Luego, en consideración de los diferentes valores, para el precio de 10 kg, los estudiantes están obligados a establecer un valor promedio como una manera coherente y eficaz de un precio único. Es posible que realicen una representación gráfica de los valores para pronunciarse respecto de la colinealidad con el origen (0,0) y para justificar el resultado "*por no llevar tomates, no se debe pagar*". Este resultado, "dejar fijo al vector cero" es una consecuencia de estructura lineal de una TL. Un modelo por tramos poligonales puede responder a este resultado simplemente por imposición.

Hay que generar entonces un procedimiento general que se corresponda con los valores de la tabla. En este desafío, los estudiantes consideran modelos no lineales de variable continua que incluyan los valores discretos de la tabla. Sus estrategias se centran en un modelo lineal afín (ajuste lineal) o por tramos poligonales para satisfacer el requerimiento del precio de 14 kg y 24 kg. Aunque la adecuación del modelo a la tabla de valores que se estudia no se satisface con la relación "*si el precio de x y x′ es p y p′ respectivamente entonces el precio de x+x′ debería ser p+p′",* el examen comparativo que hace de en el momento de proporcionar un precio único y coherente aporta la lección de lo *que* definiría una abstracción del método. Por su estabilización de precios y la articulación de los registros numéricos y gráficos, accede a la aparición intuitiva de métodos y procedimientos lineales.

3.1.3. *Situación 2: Rotación del plano (Anexo B)*

Este tipo de situación es conocida por los estudiantes como una actividad de cambio de coordenadas en el plano afín R^2. Es fácil para ellos aplicar identidades trigonométricas para determinar una expresión algebraica de las coordenadas del punto $Q=R_\theta(P)$ pues se trata de contenidos anteriores de geometría analítica y trigonometría. Por el contrario, podemos esperar que tengan grandes dificultades respecto a las propiedades lineales intrínsecas a la rotación, debido a una representación falsa de "rotado" que es vinculada a un uso físico. De hecho, la concepción de la rotación como una aplicación del plano afín R^2 o vectorialmente del espacio vectorial euclidiano subyacente R^2, no es completamente comprendido por los estudiantes, más aún por el tratamiento a nivel de las coordenadas de los puntos del plano afín. En efecto, los estudiantes tienen dificultades en lograr establecer una demostración de la relación que vincula linealmente $R_\theta(P)$ con $R_\theta(A)$ y $R_\theta(B)$ para todos los puntos $P(x,y)$. Las dificultades previas como la distinción entre punto y vector geométrico y el concepto de combinación lineal, producen desorientaciones para una visión general sobre la rotación como parte de un concepto más abstracto. Podemos pensar entonces que los estudiantes tendrán los siguientes comportamientos:

- Reconocer la linealidad en la diagonal de un paralelogramo rotado,
- Transferir la "relación de Chasles" de un espacio afín, y deducir el sentido de linealidad.
- Bosquejar un inicio de demostración, escribiendo: $P=xA+yB$ como combinación lineal

Para acercar a los estudiantes a la estructura vectorial y en especial a las relaciones lineales invariantes por la rotación, hemos elegido una base de R^2 en particular la base canónica por su simplicidad en el cálculo vectorial. Cuando los estudiantes establezcan la combinación lineal entre A, B y C con $C(1,1)$ (relación de Chasles), existen muchas posibilidades que conjeturen la relación lineal análoga entre las imágenes. Además, el cálculo de $R_\theta(xA+yB)$ como combinación lineal de $R_\theta(A)$ y $R_\theta(B)$ los lleva a constatar la simplificación de las expresiones algebraicas, la estructura vectorial sobre los coeficientes x e y de $xA+yB$ que permanecen invariantes por R_θ, valorando la economía del modelo lineal para los siguientes cálculos.

Pero también, por las identidades trigonométricas se podría esperar que los estudiantes calculen $R_\theta(xA+yB)$ sin la estructura vectorial de R^2, por ejemplo, con el método geométrico-trigonométrico pueden muy bien evitar las expresiones de combinación lineal para determinar la posición de $R_\theta(G)$ en términos de coordenadas.

Como la escritura en combinación lineal refleja más funcionalmente el carácter lineal de la rotación el cual es invariante por un cambio de base, posiblemente, el estudiante lo asocie a un cambio de coordenadas (lineales) en el plano afín, haciendo lo que Euler, Lagrange, Gauss, entre otros, llamaban sustituciones lineales. Este método sitúa a la rotación como parte de un concepto más general y abstracto.

3.1.4. *Situación 3: Cizalladura (Anexo B)*

Esta modelización es dada, para llevar a los estudiantes a formalizar la idea intuitiva que tienen de la linealidad, no necesariamente con una herramienta geométrica o un listado de valores proporcionales, si no también, con una herramienta física. Por ejemplo, en física, el esfuerzo en la deformación producida por la acción de una fuerza tangencial en un cuerpo, como el caso de un cuerpo paralelepípedo y la fuerza tangencial aplicada sobre la cara superior, se produce un deslizamiento de esta cara que deja fija la cara inferior deformando el paralelepípedo. Este esfuerzo se llama cizalladura horizontal, y su acción se matematiza sobre dos componentes vectoriales; una, perpendicular a la superficie de incidencia y la otra, paralela (tangencial) a la superficie. Estas dos componentes forman el sistema ortogonal (base ortogonal $\{u,u_\perp\}$) de la cizalladura y el estudiante debe advertir que la cizalladura está únicamente determinada por su acción en los vectores de la base $\{u,u_\perp\}$. A diferencia de la rotación, donde el estudiante tiene la opción de un método alternativo (geométrico-trigonométrico) para ejercer la acción sobre vectores no basales y validar sus resultados, la cizalladura le obliga el uso de las propiedades lineales. En ese sentido el estudiante se encuentra en un escenario más formal y abstracto que exige el dominio de las propiedades de un espacio vectorial.

El cálculo de la cizalladura sobre los vectores *v, i, j* está propuesto para dar cuenta de una comprensión intuitiva que ellos tienen de la cizalladura sobre el plano vectorial y dar ideas para las demostraciones de su invariancia lineal, y comparar la acción respecto a ambas bases: la canónica $\{i, j\}$ (plano vectorial euclidiano) cuyo comportamiento es más familiar para los estudiantes y la base que exige la definición de cizalladura.

Sabemos que resolver ecuaciones matriciales respecto a una base dada los estudiantes tienen muchas dificultades en su interpretación. Ellos resuelven ecuaciones lineales, usan bases, etc., sin percibir demasiado el significado del trabajo en un espacio vectorial (Dorier, Robert, Robinet, & Rogalski, 2000). Debido a que la acción de la matriz da directamente ecuaciones cartesianas, pero no otorga una comprensión intuitiva de la transformación lineal. Lo que nos lleva a generar un cambio de sistema ortogonal (de la base ortogonal de la cizalladura a la base canónica) que contribuya a formar la idea de la deformación con una cizalladura horizontal conforme ahora a la base canónica. Luego, para que el estudiante realice esta acción debe asegurar la invariancia de la ortogonalidad, es decir, utilizar una rotación que es la transformación lineal más adecuada para conservar esta propiedad; similar a la búsqueda de Lagrange (1773)[3] con sustituciones lineales de dejar invariantes algunas propiedades de la forma cuadrática inicial.

Para las representaciones en términos de coordenadas, la cizalladura tiene su propio sistema ortogonal donde su acción es simple ya sea como función o matriz asociada. La alternativa es el sistema canónico que es más familiar al estudiante, sin embargo, la simplicidad de la acción de la cizalladura y su representación matricial puede ser más compleja en la base canónica.

[3] Dorier, J. L. (Ed.). (2000a).

Además, el formalismo vectorial en que se plantea la situación sabemos que producirá dificultades y obstáculos, por ejemplo, el uso de combinaciones lineales para el cálculo de la cizalladura en cualquier vector. Pero, al mismo tiempo, este nuevo formalismo permitirá renovar los conceptos ya trabajados en las dos situaciones anteriores, en particular la rotación. El estudiante podrá así adaptar los conocimientos aprendidos y trabajar en el nuevo sistema ortogonal.

3.1.5. *Situación 4: Área entre curvas (Anexo B)*

Esta situación está destinada para saber cuáles son las competencias de los estudiantes cuando ellos manejan la definición formal de la noción transformación lineal. La explicitación formal es impuesta por el cálculo de integrales definidas cuyas primitivas no pueden ser expresadas como funciones elementales y por el cálculo de áreas de regiones acotadas.

Sabemos que los resultados por aproximaciones de figuras simples no serán excelentes en la determinación de áreas de regiones. En efecto, hay una dificultad formal en el tratamiento del principio de superposición de la integral, esta dificultad ha sido localizada con el uso de los métodos habituales de integración, y una mera presentación de las integrales de Riemann contribuyen a inducir esta dificultad (Artigue, 2003).

En el problema 1c), se solicita interpretar la expresión I de integrales en base a la figura, pero no se precisa las relaciones, luego el rescurso a la figura será solo para estimar el cáculo del área, pero sin precisión numérica. Se puede prever que mayoritariamente el comportamiento de los estudiantes será la utilización de la integral en el sentido de Riemann-Darboux, y es posible que asuman que “la integral es un área…”. Para responder a la pregunta de asociar el área por una figura geométrica sencilla es posible que los estudiantes se den la tarea de calcular el valor numérico del área mediante el cálculo de las primitivas. Pero, de las expresiones de las funciones es posible que renuncien a ese cálculo. Por la propiedad de simetría de la integral y linealidad, el estudiante debería reunir la expresión de I en una sola integral y constatar que, en esta nueva presentación de I el cálculo se simplifica. Visualizar estas propiedades lineales en el contexto geométrico, es posible que tenga dificultades.

Similarmente, hemos agregado una situación de comparación para la interpretación de una integral y el área de una región, integral que, aplicando propiedades de linealidad, el cálculo se simplifica. Distinguiendo y aplicando correctamente estas propiedades puede inducir al estudiante a validar sus resultados que, en principio, podría ser erróneos, esto por el hecho de asumir que *"la integral es un área..."*. En particular, resultados numéricos negativos derivados del cálculo integral en el contexto del área que responden más bien a sus propias adaptaciones: *"como es área, no puede ser negativa, entonces se cambia el signo"*

Esta utilización intenta conciliar el marco geométrico y el marco analítico (Douady, 1986; 1993) en el sentido en que el cálculo del área deberá ser consecuente con la estructura lineal que plantea, esencialmente para predecir o estimar el área de regiones limitadas por curvas simples.

3.2. *Análisis a posteriori*

3.2.1. *Caracterización de los estudiantes*

Procurando distribuir los sujetos en el plano Pensamiento *Práctico-Teórico* de las nociones matemáticas, retuvimos participantes representativos del curso interesándonos en el estudio de casos particulares. Para hacerlo, tomamos en cuenta los elementos de análisis del cuestionario (intereses matemáticos expresados, cursos preferidos, formación que reciben) y del análisis *a priori* en el avance de la secuencia (los conocimientos y habilidades matemáticas mostradas) que se había trabajado hasta ese momento. Lo que nos encaminó en la elección de los sujetos para el *análisis a posteriori* agregando a los datos recogidos un análisis didáctico de las producciones con la entrevista de explicitación.

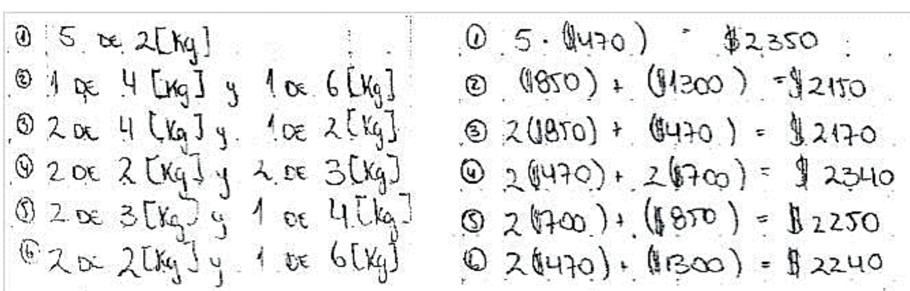
Procedimos entonces a hacer tres reagrupaciones posibles (según nivel de explicitación o según el tipo de competencia, o, según las tendencias) (De Serres & Groleau, 1997) de los sujetos que íbamos a entrevistar. Primeramente, privilegiamos el equipo con mayor esfuerzo en la ejecución de las tareas, que hemos llamado el *equipo típico.* Ellos son sensibles a la cohesión de las matemáticas, les gusta descubrirla tanto por la aplicación en otras disciplinas como por un método general aplicable a todos los casos. Según ellos, conocen las posibilidades de aplicación en los cursos de Cálculo I y II como una sucesión de problemas para hacer comprender la teoría, y atribuyen a estos cursos un encadenamiento progresivo de conceptos, del más simple al más complejo. Luego elegimos el *equipo con* más *dificultades*, aquellos que les gusta simplificar expresiones mediante manipulaciones algebraicas y confirmar el resultado por un método matemático ya enseñado. Describen el curso favorito como el de los conceptos, teoremas y demostraciones proporcionadas por el profesor. Y finalmente concluimos con el *equipo atípico* con relación a los otros, a los que les gusta reutilizar los métodos matemáticos, aprecian la forma de estudio estructural en la compresión de un nuevo concepto y se resisten al aprendizaje de fórmulas y métodos sin vínculos con la teoría.

Realizamos la puesta en relación de las producciones de los estudiantes con las competencias matemáticas requeridas para referirnos a los niveles de explicitación de los equipos que acuden en la noción de la TL. A partir del análisis *a priori* construimos una matriz de las competencias de modelización por niveles de explicitación en el aprendizaje de la TL.

Daremos algunos ejemplos de los procedimientos observados en confrontación con los procedimientos previstos del análisis a priori para ilustrar algunos de los resultados obtenidos.

3.2.2. *Situación 1: En busca de un modelo*

Los equipos ensayan formas de combinaciones apoyados en un modelo de tipo proporcional y dejan entrever implícitamente un sentido lineal de la correspondencia "peso-precio". Podemos observar que hacen formas de "combinar los paquetes" y no de combinar el "peso de los paquetes.



① 5 de 2[Kg]	① 5 · ($470) = $2350
② 1 de 4 [Kg] y 1 de 6 [Kg]	② ($850) + ($1300) = $2150
③ 2 de 4 [Kg] y 1 de 2 [Kg]	③ 2($850) + ($470) = $2170
④ 2 de 2 [Kg] y 2 de 3 [Kg]	④ 2($470) + 2($700) = $2340
⑤ 2 de 3 [Kg] y 1 de 4 [Kg]	⑤ 2($700) + ($850) = $2250
⑥ 2 de 2 [Kg] y 1 de 6 [Kg]	⑥ 2($470) + ($1300) = $2240

Figura 2. Combina métodos y/o cálculos particulares (equipo típico)

> "Ese fenómeno difícil sería explicarlo, tiene que ver con las combinaciones lineales, eso sería yo creo, que hay distintas combinaciones lineales para un valor de 10 kilogramos"

El propio fenómeno da una idea general de la actividad: un modelo que organice y ponga en proporción los valores de la tabla:

> "Después en la b) dice que establezca un modelo, entonces como 10 kilogramos son $ 2.500, un 1 kilogramo iba a ser $ 250, entonces del valor más alto que da el de 24 kilogramos $ 5.300 que iba decreciendo a una razón de $ 250, entonces hasta al llegar al valor de 10 kilogramos que me dio

$ 1.800, no corresponde al valor que me había dado anterior que era de $ 2.500. Lo que quiere decir que no va variando en una razón, no tiene una tasa de cambio ascendente o descendente que sea la misma. Después comprobé si es que el valor de 10 kilogramos, con esa razón de cambio, era lo mismo que sumar 2 paquetes más pequeños que sumaran 10 kilogramos, y volví a sumar el de 4 con el de 6 y sus valores $ 800 y $ 300 sumaban $ 1.100. Y no era lo mismo que el del paquete de 10 kilogramos entonces no, al mantener fijos esos valores de 14 kg y 24 kg, o a lo menos uno de ellos, no hay una tasa de cambio que diera valores exactos y que después al combinarlos diera otro de uno mayor"

Reconocen que no se corresponden a una situación de proporcionalidad; no hay un sistema de variación de la naturaleza del coeficiente (precio unitario). Enseguida, trazan los segmentos que unen los puntos, lo que permitió extender la gráfica pasando por el punto (0,0), y establecen como hipótesis la propiedad "por 0 kg, un costo 0", que es una característica intrínseca de la TL.

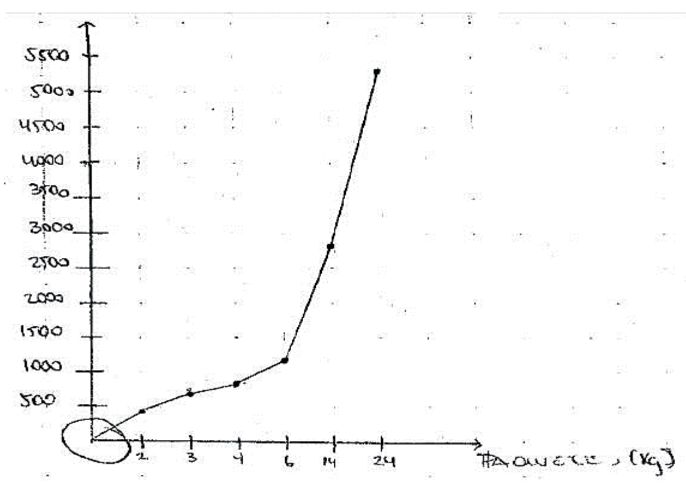


Figura 3. Estima un resultado expresando representaciones gráficas, numéricas (equipo típico)

"Es que, si no vende no cobra, la función, o sea, que la gráfica fue dada por una función, esta función al evaluarla en 0 daría 0, por así decirlo, como gráfica"

Proponen entonces un modelo definido por recurrencia de tipo aritmético que consiste en una parte (discreta) del modelo afín $g(x) = 250x – 700$.

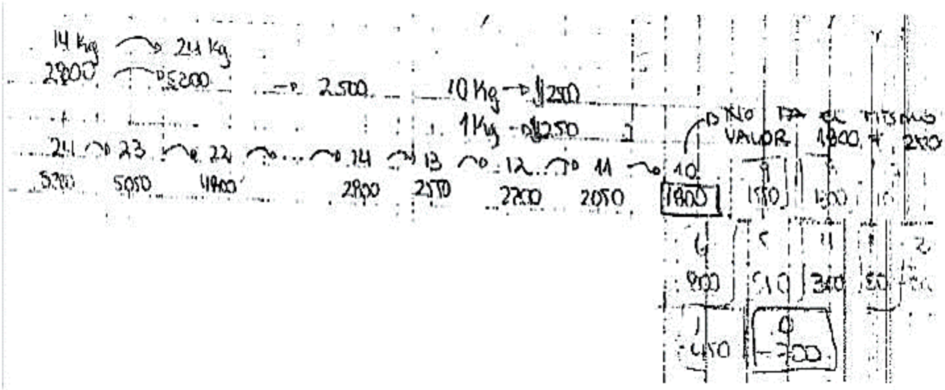


Figura 4. Interpreta enunciados (equipo típico)

> "En esta función que modele en el cambio de 250, el valor de 0 kilogramos me daba negativo porque en 3 kilogramos desde el de 24 restando 250, en 3 kilogramos era $ 50 entonces de ahí hacia abajo iban a ser negativos y no puede ser así"

Podemos observar que el equipo típico organiza y valida los diferentes modelos (por recurrencia, afín,) con relación a la proporcionalidad, pasan de un marco a otro comparan una parte respecto a un todo (pasaje por la unidad) o bien una parte respecto de otra (precios y cantidades).

3.2.3. *Situación 2: Rotación del plano*

> "…calculé la rotación de *C* con la fórmula que había despejado antes [modelo geométrico - trigonométrico] y me dio esa expresión de sus coordenadas ahí, entonces… la rotación de *C* era la suma de la rotación de *A* más rotación de *B*"

En la rotación comienzan a trabajar con coordenadas explícitas como pares ordenados, recurren a los procedimientos que ya conocen de geometría analítica. En el caso del problema general para $P(x, y)$, demuestran la igualdad de la relación vectorial por la ley del paralelogramo aplicando el mismo principio anterior:

> "… el *P* vendría siendo igual como el rotado de *C* lo único que en *C* ya sabíamos el valor inicial que tenía antes de ser rotado, pero el de *P* no, y como se llama… ehh… si esos dos cumplen que son igual combinación lineal, también se tiene que cumplir para el punto *P* rotado, también tienen que ser igual combinación lineal"

> "…luego, la rotación de un vector que estaba compuesto por otros vectores [vectores basales] era lo mismo que rotar esos otros dos…"

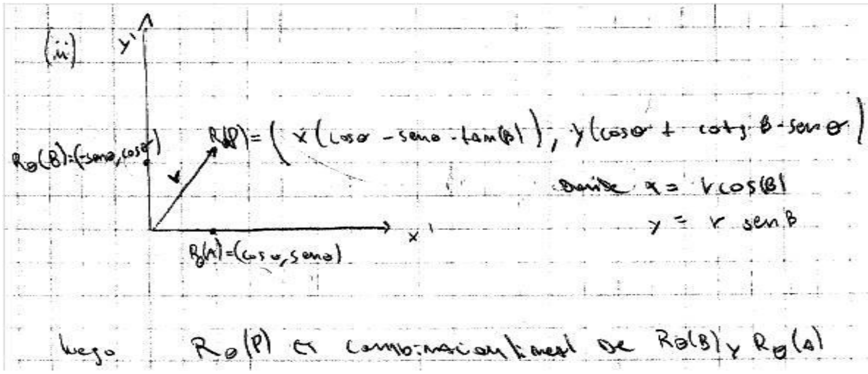


Figura 5. Conservación de la combinación lineal (equipo típico)

Habla de "rotado" sin hacer referencia a la base del sistema que modeliza, es decir, sin prestar atención en torno a que se gira y en qué dirección se gira.

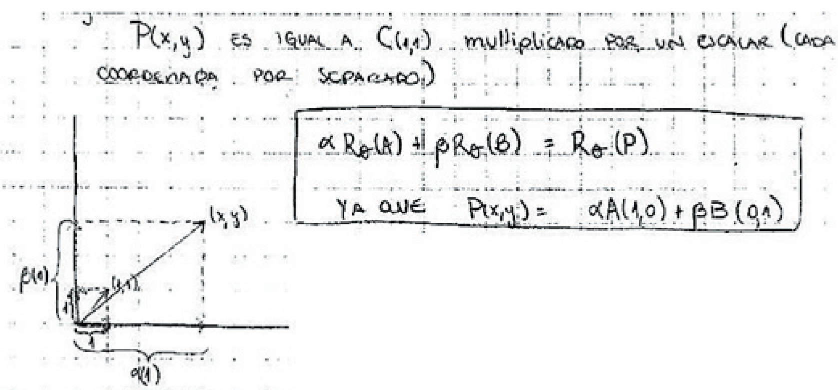


Figura 6. Establece y justifica una propiedad o un resultado (equipo típico)

Tratan de explicitar $R_\theta(x,y)=xR_\theta(1,0)+yR_\theta(0,1)$, lo que parece intuir la propiedad lineal, pero no hay un vínculo directo con la rotación $R_\theta\big(x(1,0)+y(0,1)\big)$ para expresar la igualdad de la lineal aditiva, no se sabe realmente si utilizan la maestría de la TL en esa relación.

> "…pensé que la rotación de *P* era lo mismo que rotar solo las componentes de *P*, o sea, la rotación de *A* y la rotación de *B* estaban multiplicadas por un escalar que hacían como un caso general de la rotación de las componentes canónicas. Entonces alfa veces la rotación de *A* más beta veces la rotación de *B* iba a ser la rotación del punto *P*, porque *P* era combinación lineal de alfa veces *A* y beta veces *B*."

Sin embargo, el mismo equipo calcula $R_\theta(G)$ aplicando la propiedad multiplicativa para ganar en potencia de ejecución, más adecuado para *una distancia* $98{\times}10^{200}$ *del origen*, y gana a la vez en economía del hecho que controla mejor sus cálculos.

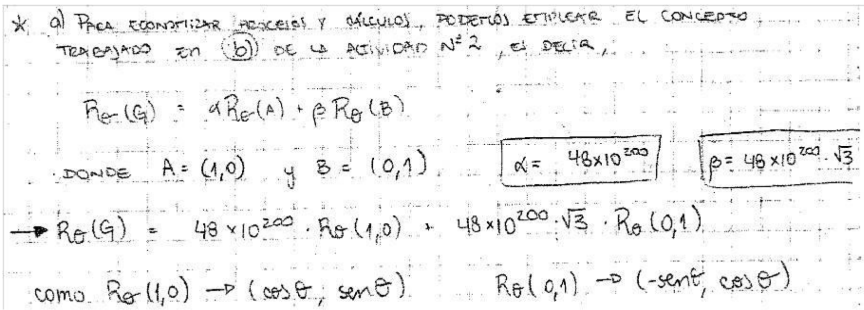


Figura 7. Reconoce la economía del modelo vectorial (equipo típico)

> "Es que, si se está en un plano y se tiene un vector, poder separarlos en sus componentes y hacer operatorias con esas componentes es más fácil, que la operatoria sobre un vector"

Identifican las características lineales esenciales que definen el modelo abstracto de la TL, pero no son explícitos en la definición.

Por otro lado, comprobamos sin sorpresa el enfoque procesal del equipo con dificultad que se limita en su trabajo a la búsqueda fórmulas conocidas para aplicar a nivel de las coordenadas, evitando así las combinaciones lineales vectoriales.

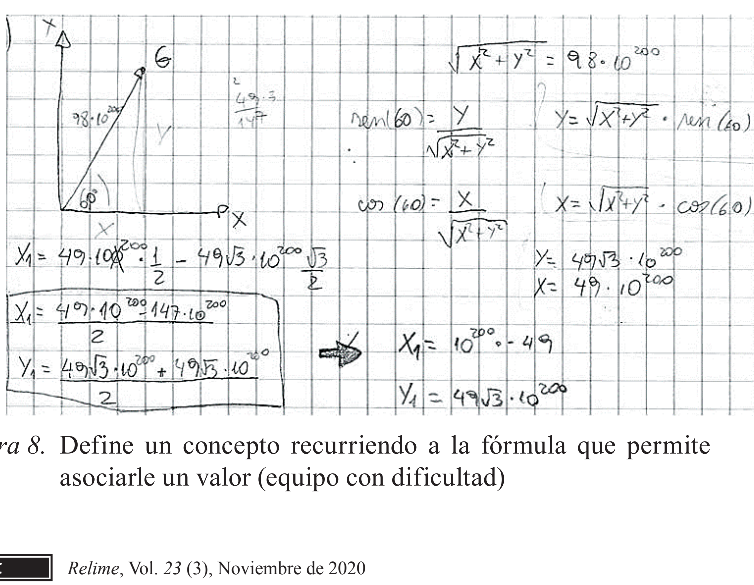
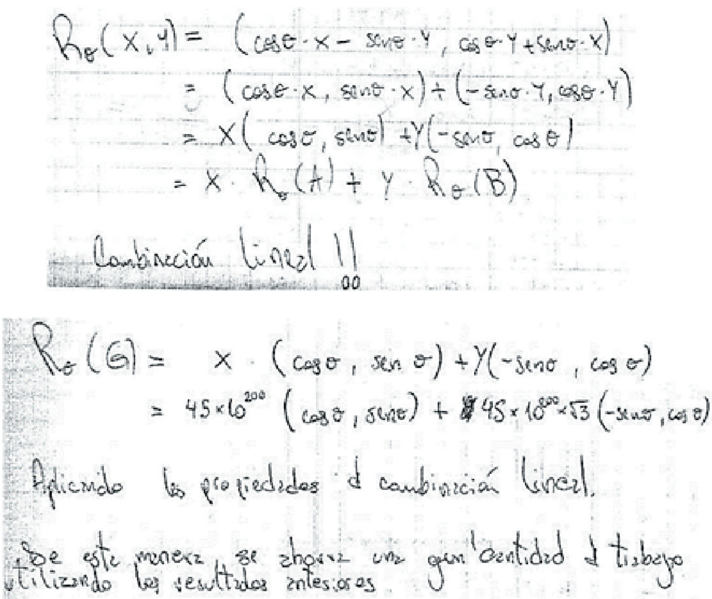


Figura 8. Define un concepto recurriendo a la fórmula que permite asociarle un valor (equipo con dificultad)

> “Pero para sacar eso [$R_\theta(G)$] se supone que necesitaba un ángulo que era el 60° y puedo reemplazarlo ahí, y ya con el seno de 60° y el coseno de 60° ya ahí se pueden encontrar valores numéricos”

Dan sentido al concepto utilizando la formulación analítica sobre el plano cartesiano R^2.

En el otro extremo está el equipo atípico que resuelve $R_\theta(G)$ expresan un lenguaje y un enfoque general en sus formulaciones:



$$R_\theta(x,y) = (\cos\theta\cdot x - \operatorname{sen}\theta\cdot y,\ \cos\theta\cdot y + \operatorname{sen}\theta\cdot x)$$
$$= (\cos\theta\cdot x,\ \operatorname{sen}\theta\cdot x) + (-\operatorname{sen}\theta\cdot y,\ \cos\theta\cdot y)$$
$$= x(\cos\theta,\ \operatorname{sen}\theta) + y(-\operatorname{sen}\theta,\ \cos\theta)$$
$$= x\cdot R_\theta(A) + y\cdot R_\theta(B)$$

Combinación lineal !!

$$R_\theta(G) = x\cdot(\cos\theta,\ \operatorname{sen}\theta) + y(-\operatorname{sen}\theta,\ \cos\theta)$$
$$= 45\times 10^{200}(\cos\theta,\ \operatorname{sen}\theta) + 45\times 10^{200}\times\sqrt{3}\,(-\operatorname{sen}\theta,\ \cos\theta)$$

Aplicando las propiedades d combinación lineal.

De esta manera, se ahorra una gran cantidad d trabajo utilizando los resultados anteriores

Figura 9. Utiliza la linealidad de la rotación como método de resolución económico (equipo atípico)

Conjeturan la relación lineal análoga entre A, B y C con $C(1,1)$ de $R_\theta(xA+yB)$ como combinación lineal de $R_\theta(A)$ y $R_\theta(B)$, lo que los lleva a constatar la simplificación con las expresiones algebraicas.

Estructuran sobre el procedimiento de las coordenadas más bien que sobre la técnica de la TL, se podría pensar en las mismas influencias asociadas a la forma de la técnica. Se observa un falso sentimiento de prueba, que no se da cuenta que eso hubiera funcionado con cualquier matriz.

> “No, sino, que… las mismas transformaciones que se aplicaban sobre algo podían aplicarse por separado, podían aplicarse de distintas formas y siempre la transformación general iba a ser lo mismo”

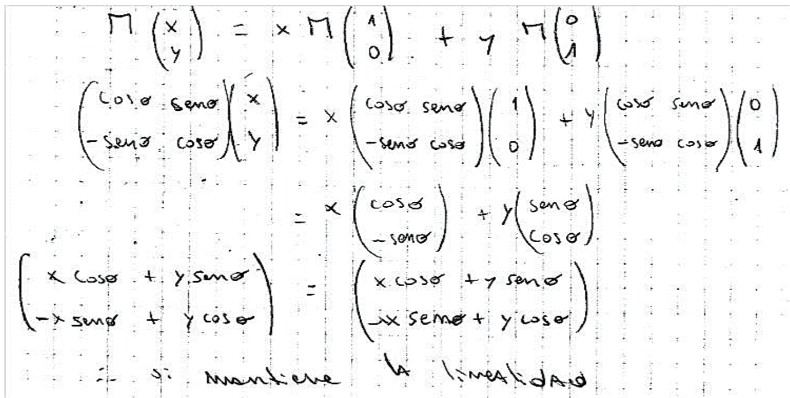


Figura 10. Establece la acción de la rotación como el producto matricial *MX* (equipo con dificultad)

3.2.4. *Situación 3: Cizalladura*

¿En qué me sentí más perdido?

"En la lectura del ejercicio en la definición de cizalladura, ahí me perdí… al ser algo desconocido y al no tener ejemplos como concretos…"

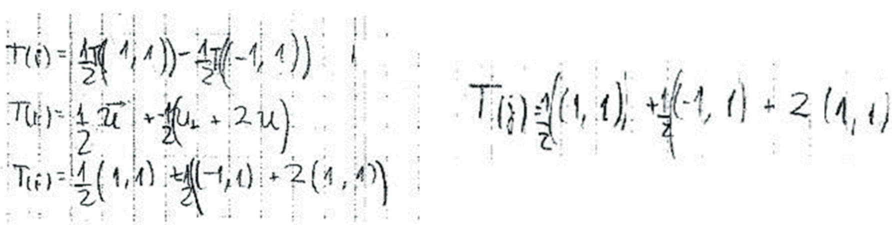


Figura 11. Aplicación de la TL por efecto del contrato (equipo con dificultad)

El nivel de formalismo (el simbolismo asociado) que caracteriza la aplicación como combinación lineal constituye en sí un obstáculo para poner en funcionamiento el modelo lineal, ya que privilegian trabajar a nivel de coordenadas para dar sentido a la transformación.

Otros reformulan la cizalladura identificando los elementos necesarios (base ortogonal $\{u, u_\perp\}$) para aplicar las propiedades lineales en las imágenes de los vectores $\vec{v}$, $\vec{i}$ y $\vec{j}$:

"Es que rotar $3\vec{u}$ sería lo mismo que rotar, o sea, no. Hacer esa transformación en $\vec{u}$, en $3\vec{u}$ sería lo mismo que hacerlo en $\vec{u}$ y, paréntesis, 3 veces"

Aplican la transformación *de factor 2 en la dirección* $\vec{u}=\vec{i}+\vec{j}$ como una idea de movimiento de "rotación local" en el sentido procedural de Sfard (1991) que tienen de la cizalladura. Hacen coincidir la imagen del vector perpendicular $\vec{u}_{\perp}$ a nivel de las coordenadas (–1,1) con el punto (0,1).

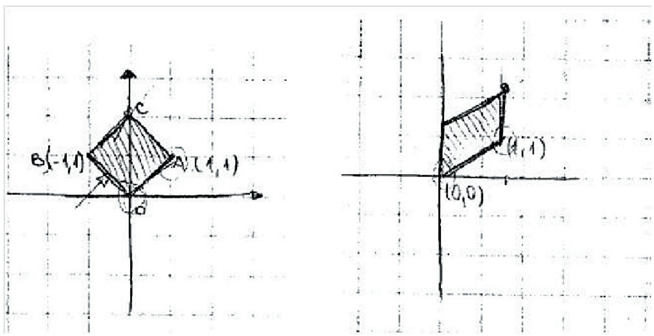


Figura 12. Utiliza los conceptos en estudio como puntos de apoyo (equipo típico)

> "Si le aplico una cizalladura así… lo único que va a variar va a ser el (1, 1) que es el valor de *B* que va a variar en un ángulo [el de la rotación] y le va a dar nuevas coordenadas para *B* y *C*, los puntos en la base se van a mantener iguales"

Se resiste a cambiar su resultado geométrico. De esta manera se percibe una falta de coordinación entre representaciones gráfica y algebraica, dificultad que puede ser vista en un nivel de dificultad al cual no habían sido acostumbrados, pues, la cizalladura no es una isometría.

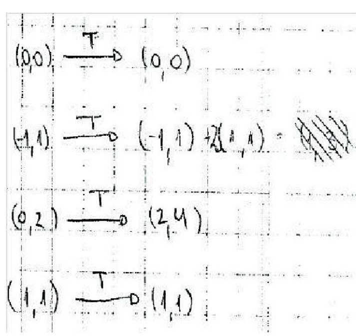


Figura 13. No concilia su trabajo con la cizalladura (equipo típico).

Redefinen una estrategia de resolución combinando métodos y propiedades lineales, pero sin respetar las condiciones algebraicas de la cizalladura.

El equipo atípico procede en un trabajo de estructuración y simplificación:

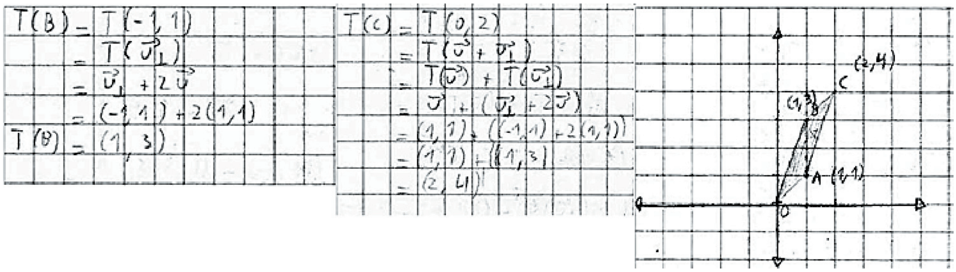


Figura 14. Articula entre el marco geométrico y algebraico (equipo atípico).

Y verifican las respuestas aplicando las dos matrices respecto de las bases canónicas y ortogonal de la cizalladura al vector $\vec{v}=3\vec{u}+4\vec{u}_{\perp}$

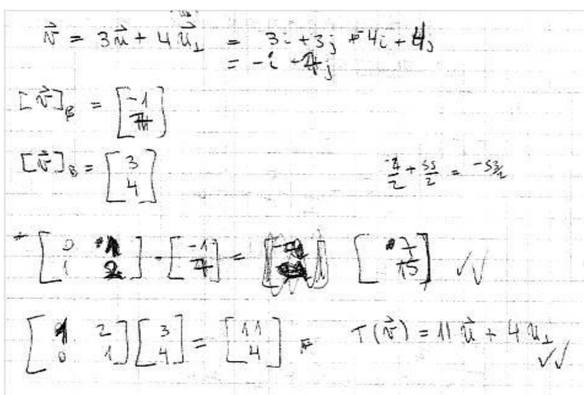


Figura 15. Verificación de la representación matricial (equipo atípico)

Establecen las representaciones matriciales de las transformaciones geométricas y comprueba que el resultado es la misma representación matricial que la cizalladura original.

3.2.5. *Situación 4: Área entre curvas*

En el análisis del resultado de la integral *I* ellos reúnen la expresión de *I* en una sola integral. Constatan que en esta nueva presentación de *I* el cálculo se simplifica. Como asumen que la integral es un área, no validan el resultado con el área de un rectángulo de base π y altura $\frac{1}{2}$ para ver por sí mismos la solución correcta. Recurren más bien a contenidos que constituyen un contrato claro de los procedimientos de áreas por aplicaciones de las sumas de Darboux-Riemann, asociando al rectángulo solo la figura que ven entre las curvas:

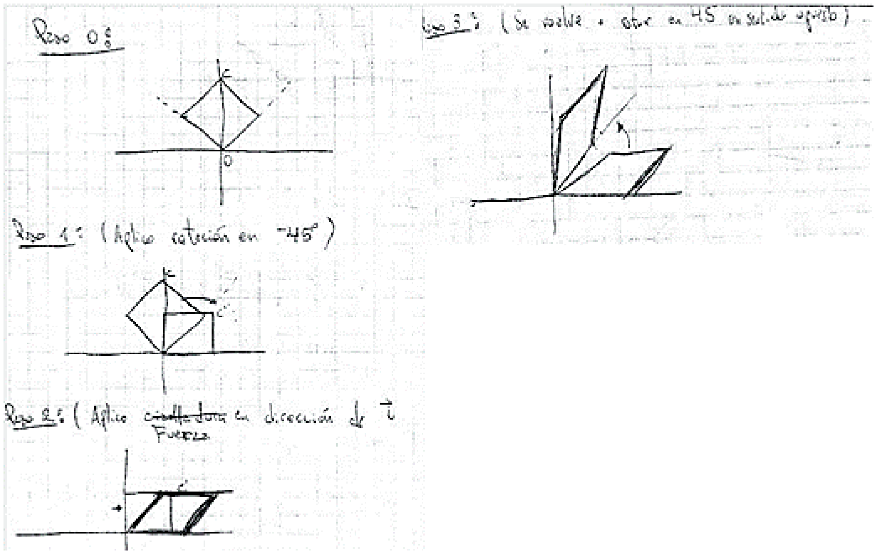


Figura 16. Utiliza una rotación para producir la cizalladura horizontal (equipo atípico)

> "Es que, en la definición de la integral siempre nos dijeron que era el área bajo esa curva y como aquí tengo otra, bajo esa..., entonces el área limitada por esas dos curvas sería la que estaba entremedio y como se calcula esa..., era con alguna figura geométrica que cayera ahí y que pudiéramos calcular su área lo más fácil posible. Entonces el rectángulo era una de las figuras más fáciles con su base y altura"

Calculan el valor numérico del área de la región mediante primitivas utilizando propiedades lineales de la integral en el sentido de Riemann-Darboux.

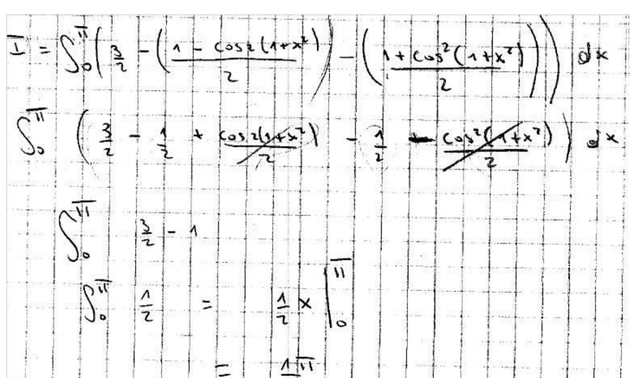


Figura 17. Simplificación de la integral I (equipo típico)

La propiedad lineal de la integral es conocida por los estudiantes así que el sistema presentado esta previamente estudiado. Entonces descomponen en una suma de integrales más simples y explicitan sus propiedades.

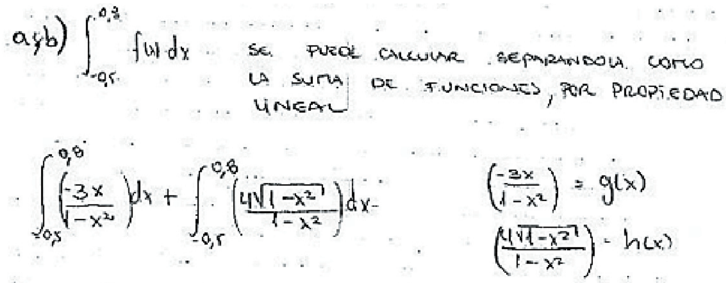


Figura 18. Explicita la propiedad lineal que hace el cálculo (equipo típico)

> "La integral de la función la separé por propiedad lineal, eso más eso ahí está, y también lo separé por intervalos, entonces llamé $g(x)$ a esa función y $h(x)$ a esa función y en el gráfico están así, y esa era la original $f(x)$ antes de separarlas. Entonces, al como buscar la relación que había entre las que separé y la original [Ω], esa que entre ciertos intervalos ambas áreas, que ya habíamos calculado, se sumaban para completar eso, y acá también"

Los conocimientos previos se revelan necesarios, pero no suficientes para estimar el área de Ω. Se percibe incoherencia lineal para resolver geométricamente el cálculo del área por el método analítico que disponen. De las gráficas de la figura aparecen resultados numéricos negativos derivados del cálculo integral que más bien responde al siguiente teorema en acto: *"como es área, no puede ser negativa, entonces se cambia el signo"*

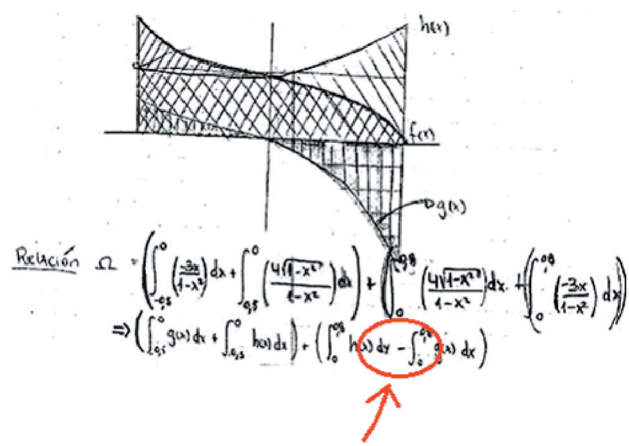


Figura 19. Ausencia del modelo lineal en el sistema geométrico (equipo típico)

“Se resta a toda... esta complicada... se le resta esta parte y da eso. Es lo mismo que sumarla esa [$g(x)$], *como esta negativa al sumarla esa que está negativa, se resta”*

Observamos en su expresión integral un “signo menos” que contradice la acción lineal de la integral, deciden anteponer un signo menos a $g(x)$ porque es negativo.

La propiedad lineal aditiva en el marco geométrico fue percibida por el equipo atípico; de los gráficos de las curvas y de las regiones acotadas observamos su modelización gráfica:

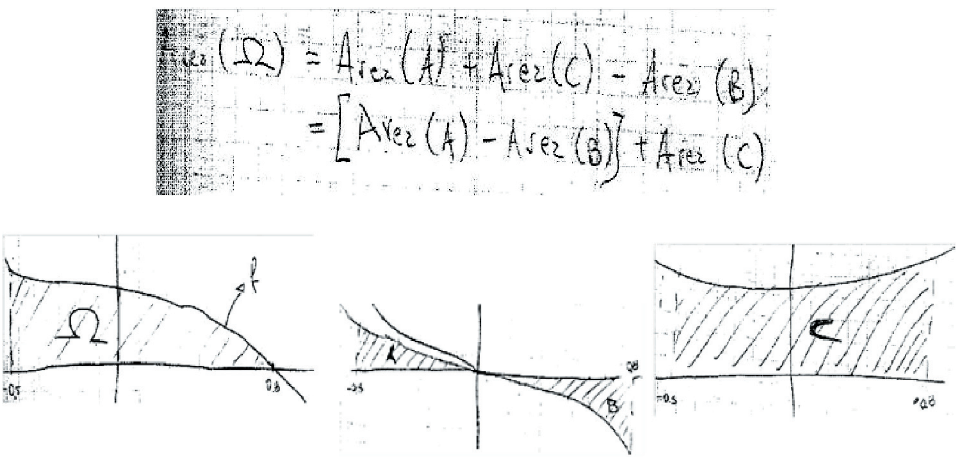


Figura 20. Visualiza la propiedad lineal en el contexto geométrico (equipo atípico)

Sobre el aspecto unificador del saber se refieren a una forma diferente de resolver los problemas que ya conocían; más simple de operar y resolver los mismos problemas que ya conocian:

“Por ejemplo en Física, cuando trabajamos con poleas móviles, había que cambiar el ángulo en que ejercía la fuerza de la tensión, entonces ese cambio de ángulo era una rotación, lo que nos explicaba la profesora, pero no nos explicó, no entró a detallar, cómo se calculaba, porque era mucho más fácil trabajar las componentes separadas. Hacía esos cambios y luego al final las juntaba, porque eran varias operaciones, a una sola. Entonces, si lo separaba eran operaciones por coordenadas que era mucho más fácil, tal vez era mucho más largo, pero más fácil que calcularlas así … como un todo”

4. Resultados

4.1. *Evolución de aprendizaje de la TL por los estudiantes*

Las medidas y relaciones que aparecen en esta gráfica y que nos hace darle una forma aproximada, han sido identificadas por una gestión exploratoria e inductiva, a partir de los datos recolectados del cuestionario de entrada (S_0) (Anexo A), las observaciones y el análisis de las competencias requeridas y las entrevistas de explicitación.

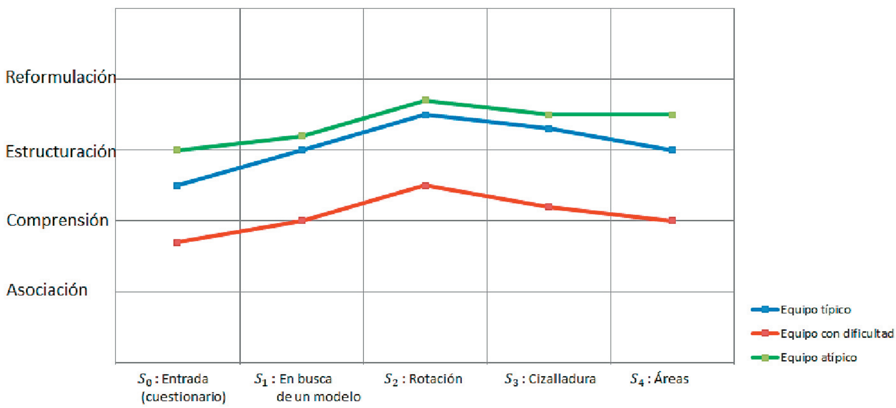


Figura 21. La progresión del aprendizaje de la TL
Fuente: Pascual (2013)

En el nivel de comprensión, luchando por una estructuración, se encuentra el *equipo típico* que busca regularidades de representaciones graficas, numéricas y de medidas para comprender y establecer un modelo general. Se basan en la construcción de modelos simples (relaciones de recurrencia, afines) como un medio de explicitación sobre la coherencia de sus resultados, acuden al sentido del concepto de "razón de cambio" para validar su propuesta de modelo. En el caso de la rotación, estructuran el concepto en función las combinaciones lineales invariantes, reconocinedo el modelo general lineal como una manera más económica y eficaz para calcular. Procuran una actitud de cuestionamiento y utilizan el razonamiento para seleccionar los elementos de eficacia del problema hacia soluciones más generales. Esta utilidad es bien valorada con la rotación y la cizalladura donde redefinen una estrategia de resolución combinando métodos y propiedades lineales, pero sin establecer las condiciones de aplicación del modelo (no realizan el pasaje geométrico - algebraico). La formalidad de la definición de la cizalladura constituye más bien un obstáculo al trabajo de validación que confiere la articulación entre los dos marcos. Mismo fenómeno ocurre con el problema del área, donde la puesta en acción de la TL en el marco geométrico se revela desestabilizadora para los estudiantes, que no han sido confrontados a cálculos de áreas por aproximaciones de figuras simples. Las formulaciones hechas de la TL en el marco geométrico revelan un falso conocimiento de la integral, quedando a nivel de estructuración sin reformular el concepto.

En el nivel de asociación instruido por la comprensión, está el equipo con dificultad que se dejan llevar por el contrato didáctico habitual. Se inclinan por un enfoque procedural con la voluntad de vincular las propiedades lineales. Muestran un pensamiento pragmático y no entran en consideraciones estructurales sobre las propiedades del modelo, suponen un modelo proporcional sin establecer las condiciones de aplicación en el contexto del real. En la rotación hacen funcionar el concepto a nivel de coordenadas cartesianas y se apoyan en la herramienta de sistemas de ecuaciones lineales. Perciben una idea de la acción geométrica de la cizalladura que no es coherente con su definición, ya que, el sentido lineal de la definición les resulta complicado al no reconocer el tipo de enunciado del problema. Aunque reconocen las propiedades lineales para la reformulación del área, y establecen las relaciones en el marco geométrico en coherencia, no utilizan el área de polígonos simples para aproximar el área de la región como una forma de validar el valor total del área. Se quedan en un nivel de comprensión de muy poca estructuración.

En el nivel de estructuración, encontramos al *equipo atípico* que buscan transferir por la reformulación el concepto de un contexto a otro. Muestran un nivel de explicitación superior vinculado al uso del concepto cuando organizan, validan y justifican sus resultados en cada etapa de su desarrollo. En la rotación, transfieren la "relación de Chasles" y deducen el sentido de linealidad en coherencia al desarrollar sus resoluciones en el contexto algebraico. En la cizalladura, analizan en profundidad la noción haciendo una revisión consecuente de la estructura con la articulación de diferentes representaciones (geométrica, algebraica, matricial), generalizando tambien el enfoque con la utilización de otros conceptos unificadores. Proceden por analogía y deducción en el problema de cálculo de área, logrando el pasaje del marco algebraico al geométrico (utilización que los otros equipos no pudieron hacer) que es más exigente que el acostumbrado, porque exige interpretaciones sobre las condiciones de aplicación de la TL más allá del nivel técnico.

5. Conclusiones

Este articulo ha pretendido proponer una nueva forma de enseñar la TL en relación con el rol unificador del concepto TL, como una abstracción unificadora de varios objetos de los cuales fue abstraído (Dorier, 2000), para una comprensión profunda y su puesta en funcionamiento en otras ramas de la matemática. Nuestro trabajo consistió en implementar una secuencia didáctica en el contexto de las actividades normales del curso de algebra lineal.

Teniendo en cuenta la dimensión epistemológica de la TL y a partir de resultados de trabajos de didácticas de las ciencias y didácticas de las matemáticas (Dupin, 1996; Sfard, 1991) hemos podido elaborar una secuencia didáctica basándonos en elementos de modelización en la articulación de las dos formas de concebir el objeto: "procedural" y "estructural", para acercarnos un poco a la historia del concepto (Dorier, 2000a). El análisis histórico nos animó a encontrar un equilibrio entre la enseñanza directa de la TL como estructura única y general y formas en las cuales se manifestó sin seguir exactamente la cronología del desarrollo del concepto. Este análisis resulta ser una componente esencial en el proceso de aprendizaje para la unificación de los problemas, principalmente, en encontrar un método general que permita resolverlos con la misma herramienta lineal (Dorier, 2000a). De manera que el diseño de las situaciones problemas más bien está ligado a aspectos funcionales del modelo general que a su complejidad estructural (Dupin, 1996; Brousseau, 2003).

Revelar este aspecto funcional constituye en sí todo un desafío, para favorecer la devolución y tratar de evitar que los saberes que están incluidos en la secuencia no se instauren en obstáculo para la abstracción del concepto. Por un lado, las situaciones deben comprender competencias de modelización que permitan explicitar el aprendizaje, y, por otro lado, la noción debe jugar un rol transversal al proceso de resolución de problemas donde debe aparecer como el medio más convincente de comprender y proporcionar sentido a las soluciones. En este sentido, la secuencia pone atención a los cambios de marcos, a las representaciones y lenguajes matemáticos, colocando en evidencia procedimientos y métodos que permitan encontrar el medio de resolución más económico y reutilizable de la noción.

La secuencia permite que los estudiantes se refieran de manera espontánea a la utilidad de los conceptos lineales en contextos distintos del álgebra lineal, mueve de un marco al otro y hace que los estudiantes saquen el carácter unificador pasando a niveles más abstractos de explicitación; utilizando la estructura para llegar a reformulaciones más eficaces de los problemas que tienen que resolver. Sin embargo, ciertos procesos atados a la enseñanza pueden actuar a veces como obstáculo a la abstracción de los conceptos ya abstraídos, puede hacer volver al punto de partida y el papel de la TL resulta más "revelar" un conocimiento parcial que "conducir" el proceso de la resolución.

Referencias bibliográficas

Artigue, M. (2002). Ingénierie didactique: que rôle dans la recherche didactique aujourd´hui? *Les dossiers des Sciences de l´Éducation***,** *Toulouse, 8*, 59-72. DOI : https://doi.org/10.3406/dsedu.2002.1010

Artigue, M. (2003). ¿Qué se puede aprender de la investigación educativa en el nivel universitario. *Boletín de la asociación matemática venezolana*, *10*(2), 117-134.

Astolfi, J. P. et Drouin, A.M. (1992). La modélisation à l'école élémentaire. En *Enseignement et apprentissage de la modélisation en classe*, Paris, Institut National de Recherche Pédagogique (INRP).

Banach, S. (1932). *Théorie des opérateurs linéaires*, Warsaw: Funduszu Kultury Narodowej.

Barquero, B., Bosch, M. (2015). Didactic engineering as a research methodology: From fundamental situations to study and research paths. In Task design in mathematics education. Springer, Cham, 249-272. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-319-09629-2_8

Bloch, I. (2006). *Quelques apports de la théorie des situations à la didactique des mathématiques dans l'enseignement secondaire et supérieur: Contribution à l'étude et à l'évolution de quelques concepts issus de la théorie des situations didactiques en didactique des mathématiques.* Note de synthèse pour une habilitation à diriger des recherches (HDR). IREM Paris7, Paris. https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00012153

Brousseau, G. (2003). Quels Type de Savoirs Mathématiques utilise-t-on dans la Modélisation. Comité Scientifique des IREM. *La Modelisation. Paris: IREM de Paris*, *7*, 13-17.

Brousseau, G. (2010). Glossaire de quelques concepts de la théorie des situations didactiques en mathématiques. *Consulté à l'adresse http://guy-brousseau.com/biographie/glossaires/*

Caron, F. (2004). Niveaux d'explicitation en mathématiques chez des étudiants universitaires. *Revue des sciences de l'éducation*, *30*(2), 279-301. https://doi.org/10.7202/012670ar

Chevallard, Y. (1989). Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège. *Petit x*, *19*, 43-72.

Chevallard, Y. (1998), *La transposición didáctica. Del Saber Sabio al Saber Enseñado.* Aique Grupo Editor S.A., Buenos Aires.

De Serres, M. et Groleau, J. D. (1997). *Mathématiques et langages.* Collège Jean-de-Brébeuf, Montréal. Canadá. http://eduq.info/xmlui/handle/11515/29894

De Terssac, G. (2015). Savoirs, compétences et travail. En J-M. Barbier (Ed.), *Savoirs théoriques et savoirs d'action* (pp. 223-247). Presses universitaires de France.

Dorier, J. L. (Ed.). (2000a). *On the teaching of linear algebra* (Vol. 23). Springer Science & Business Media. https://doi.org/10.1007/0-306-47231-7_24

Dorier, J. L. (2000b). Use of history in a research work on the teaching of linear algebra. Using history to teach mathematic–An international perspective, 99-110. https://archive-ouverte.unige.ch/unige:16850

Dorier, J. L., Robert, A., Robinet, J., Rogalski, M. (2000). The meta lever. In *On the teaching of linear algebra*. Springer, Dordrecht, 151-176. https://doi.org/10.1007/0-306-47224-4_5

Douady, R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en didactique des mathématiques*, *7*(2), 5-31. http://pascal-francis.inist.fr/vibad/index.php?action=getRecordDetail&idt=11892330

Douady, R. (1993). *L'ingénierie didactique : un moyen pour l'enseignant d'organiser les rapports entre l'enseignement et l'apprentissage.* Cahier DIDIREM 19.1. Institut de recherche pour l'enseignement des mathématiques, Université Paris VII. hal.archives-ouvertes.fr/hal-02140855

Dupin, J. J. (1996) Modèles et modélisation dans l'enseignement. Quelques contraintes didactiques. En *Actes de la VIIIe École d'été de didactique des mathématiques*, (coord. R. Noirfalise et M. J. Perrin-Glorian), Édition IREM de Clermont-Ferrand.

Harel, G. (2000). Three Principles of Learning and Teaching Mathematics. In J-L Dorier (Ed.), *On the teaching of linear algebra*. Springer, Dordrecht, 177-189. https://doi.org/10.1007/0-306-47224-4_6

Hillel, J. (2000). Modes of Description and the Problem of Representation in Linear Algebra. In J-L Dorier (Ed.), *On the teaching of linear algebra*. Springer, Dordrecht, 191-207. https://doi.org/10.1007/0-306-47224-4_7

Legrand M. (2003). Différents types de modélisation dans l'enseignement. Irem de Grenoble. Comité Scientifique des IREM. La Modélisation. 26 Novembre 2003, 34-35.

Markovits, Z., Eylon, B. S., Bruckheimer, M. (1986). Functions today and yesterday. *For the learning of mathematics*, *6*(2), 18-28. https://www.jstor.org/stable/40247808

Oktaç, A. (2018). Understanding and visualizing linear transformations. *In Invited Lectures from the 13th International Congress on Mathematical Education*. Springer, Cham, 463-481. https://doi.org/10.1007/978-3-319-72170-5_26

Pascual, S. (2013). *Una secuencia didáctica para un concepto unificador en un curso de álgebra lineal de un programa de formación a la ingeniería*. (Thèse Ph.D. en didactique). Université de Montréal, Montréal, Canada. Disponible en: http://hdl.handle.net/1866/9726

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational studies in mathematics*, *22*(1), 1-36. https://doi.org/10.1007/BF00302715

Sierpinska, A. (2000). On some aspects of students' thinking in linear algebra. In J.-L. Dorier (Ed.), *On the teaching of linear algebra*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 209-246. https://doi.org/10.1007/0-306-47224-4_8

Vermersch, P. (1994). *L'entretien d'explicitation*, Paris, ESF – Collection Pédagogies. DOI: 10.14375/NP.9782710127055

Autora

Sara Pascual Pizarro. Universidad del Bío-Bío, Chile. spascual@ubiobio.cl

Anexo A

1. ¿Cuál es el curso de matemáticas (o de otra disciplina) es el que *más le ha contribuido* para su comprensión de las matemáticas?

____

¿Cuál(es) enunciado(s), entre aquellos que figuran en la pregunta 2, lo describiría mejor?
_____________________ (*máximo de 4 enunciados*)

2. ¿Cuál es el curso de matemáticas que *menos le ha aportado*?

____

¿Cuál(es) enunciado(s) entre los que figuran a continuación lo describiría mejor?
_____________________ (*máximo de 4 enunciados*)

A. Una sucesión de puzles
B. Una sucesión de problemas difíciles sin vínculo evidente con la teoría
C. Una sucesión de problemas para hacer comprender la teoría
D. Un encadenamiento progresivo de conceptos, del más simple al más complejo
E. Un estudio formal de espacios abstractos y de estructuras matemáticas
F. Una sucesión de definiciones de objetos y de sus propiedades
G. Una sucesión de teoremas y de demostraciones dadas por el profesor
H. Una serie de ejercicios para aplicar las fórmulas enseñadas
I. Un conjunto de técnicas de cálculo con sus condiciones de utilización
J. Una voluntad de hacer descubrir la teoría por el estudiante
K. Una apertura sobre el desarrollo del razonamiento y del sentido de la demostración
L. Una focalización sobre el desarrollo del razonamiento y del sentido de la demostración
M. Una apertura sobre las posibilidades de aplicación de los conceptos enseñados
N. Una focalización sobre las posibilidades de aplicación de los conceptos enseñados
O. Una apertura sobre la exploración y la experimentación
P. Una focalización sobre la exploración y la experimentación
Q. Una apertura sobre la tecnología (calculadora, software o programación)
R. Una focalización sobre la tecnología (calculadora, software o programación)

---

3. ¿Cuál(es) enunciado(s) entre los indicados más arriba resumiría mejor el *conjunto de la formación que usted recibió* en matemáticas?

____________________ (*máximo de 4 enunciados*)

4. ¿Qué es lo que le da más *satisfacción* en matemáticas? Por favor, elija uno o dos enunciados entre los que se indican a continuación.

____________________ (*máximo de 4 enunciados*)

A. El conocimiento de una fórmula o de un método general aplicable a todos los casos

B. La reutilización en otras disciplinas de conceptos o de métodos vistos en matemáticas

C. La búsqueda fructuosa (o exitosa) de un enfoque de resolución a un problema matemático complejo

D. La comprensión de un nuevo concepto formal que hace pensar de otro modo

E. La experimentación y la visualización con la ayuda del computador de fenómenos matemáticos

F. La simplificación de una expresión compleja mediante manipulaciones algebraicas

G. La confirmación por el modelo de corrección de su control de un concepto o de un método matemático

H. El diseño acertado de un programa o de un procedimiento de software para resolver un problema

I. El descubrimiento de una demostración elegante

ANEXO B
SITUACIONES PROBLEMAS

Situación 1. *En busca de un modelo*

Un comerciante dispone para la venta una oferta de tomates envasados en paquetes de 2, 3, 4, 6, 14 y 24 kilogramos. Los precios de estos paquetes son los siguientes:

Paquetes (kg.)	*Precio ($)*
2	470
3	700
4	850
6	1300
14	2800
24	5300

Con estos valores, un comprador se interroga por el precio que debería pagar para 10 kilos.

1. Sin deshacer los paquetes, utilizar diferentes combinaciones que le permitirían determinar el valor de 10 kg. ¿Qué se observa aquí? ¿Lo puede explicar usted?
2. Haga una representación gráfica del precio en función del peso del paquete. ¿Cuál es el paquete más económico?
3. El vendedor está dispuesto a cambiar sus tarifas, pero quiere mantener los precios de los paquetes de 14 kg y 24 kg a lo que son actualmente.

   a) ¿Cuál sería el precio de 10 kg en este contexto?

   b) Establecer un modelo que no sea definido por tramos y que entregue el precio para una cantidad x de kg.

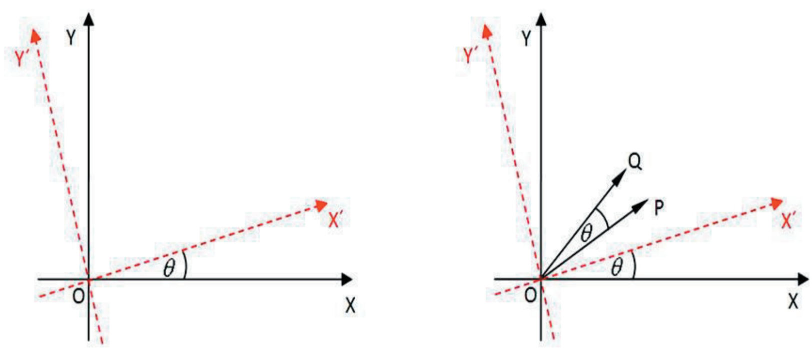
   c) ¿Funciona su modelo para una cantidad de 10 kg? ¿y de 0 kg?

   d) ¿Qué propiedades tendría que tener el modelo para que proporcione un precio único y coherente para cualquier cantidad de tomates?

   e) ¿Se puede utilizar este modelo y cumplir al mismo tiempo el deseo del vendedor?

Situación 2. *Rotación del plano*

Según la figura, se aplica al plano cartesiano R^2 una transformación llamada rotación de un ángulo θ (sentido anti reloj) la que denotaremos por R_θ. La transformación R_θ sitúa al punto P de coordenadas (x, y) del sistema de ejes XY en un punto Q de coordenadas (x_1, y_1) del mismo sistema de ejes XY.



Con el fin de calcular las coordenadas de $R_\theta(P)$ en el sistema de ejes coordenados XY nos preguntamos si la rotación aplicada al plano R^2 mantiene la posición relativa del punto P a lo largo de los ejes coordenados X e Y con el fin de calcular $R_\theta(x, y)$ para (x, y) cualquier punto de R^2.

Para responder a este cuestionamiento resolver entonces:

1. Especificar con la ayuda de un método geométrico-trigonométrico la posición del punto $R_\theta(P)$ con $P(x, y)$.

2. Especificar con la ayuda de un método geométrico-trigonométrico la posición del punto $R_\theta(A)$ y $R_\theta(B)$ con $A(1,0)$ y $B(0,1)$.

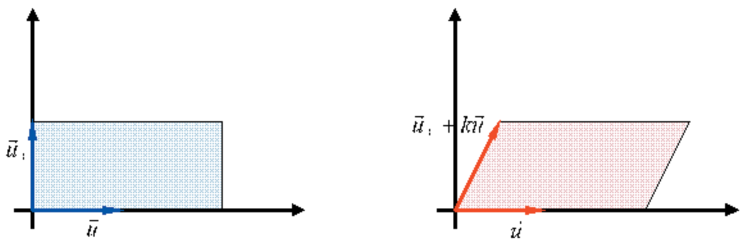
   a) ¿Qué tipo de relación parece existir entre $R_\theta(A)$, $R_\theta(B)$ y $R_\theta(C)$ con $C(1,1)$?
   b) ¿Qué tipo de relación parece existir entre $R_\theta(A)$, $R_\theta(B)$ y $R_\theta(P)$ con $P(x, y)$?
   c) ¿Lo puede usted justificar?

3. Si un punto G se encuentra a una distancia 98×10^{200} del origen y su vector posición tiene una dirección de 60°. ¿Cuál sería la posición de $R_\theta(G)$?

   a) Represente R_θ por una matriz.
   b) Verifique que esta representación matricial mantiene la linealidad de la transformación R_θ.

Situación 3. *Cizalladura*

Cuando la fuerza F que actúa sobre el cuerpo (paralelepípedo) en dirección paralela a una de las caras mientras que la otra cara permanece fija, se presenta una deformación denominada "cizalladura". La sección transversal del paralelepípedo es un rectángulo el cual la cizalladura deforma en un paralelogramo.



Si la dirección de la fuerza F se representa por el vector no nulo $\vec{u}$ y denotamos por $\vec{u}_\perp$ el ortogonal (en sentido positivo) a $\vec{u}$, la cizalladura es la TL que deja fijo a la dirección $\vec{u}$ y transforma $\vec{u}_\perp$ en $\vec{u}_\perp + k\vec{u}$ con k un escalar. Denominaremos esta cizalladura de factor k y dirección $\vec{u}$.

1. Considere la cizalladura de factor 2 en la dirección $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j}$. Si definimos $\vec{u}_\perp$ como el vector perpendicular a $\vec{u}$ de misma norma y en el segundo cuadrante.

   a) Determine donde se ubican las imágenes de los vectores siguientes:

      i. $\vec{v} = 3\vec{u} + 4\vec{u}_\perp$

      ii. $\vec{i} = \frac{1}{2}\vec{u} - \frac{1}{2}\vec{u}_\perp$

      iii. $\vec{j}$

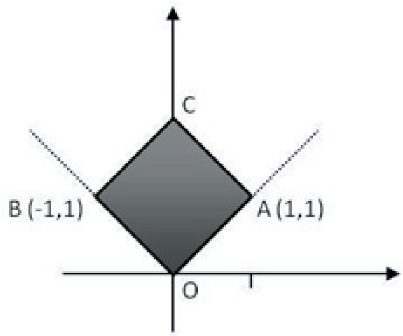
   b) Deduzca la representación matricial de la cizalladura respecto

      i. de la base canónica

      ii. de la base $B = \{\vec{u}, \vec{u}_\perp\}$.

   c) Verifique las respuestas dadas en *b)* aplicando las dos matrices al vector $\vec{v} = 3\vec{u} + 4\vec{u}_\perp$

   d) ¿Cómo resultará la estructura cuadrada siguiente si se le aplica esta cizalladura? (Consejo: considere aplicar la transformación a cada uno de los vértices).



e) Verifique que la respuesta dada en *d)* para el vértice *C* se puede obtener con ambas matrices (respecto a sus bases asociadas).

2. La cizalladura descrita en el punto 1. podría ser descrita más directamente si se rotase el sistema de coordenadas para que la fuerza sea aplicada en la dirección de uno de los vectores de la base canónica. Una alternativa que nos permite mantener el mismo sistema de coordenadas es considerar una combinación de transformaciones geométricas que se aplican a la figura. En primer lugar, se imagina que se hace una rotación (en – 45°) de la estructura para que la fuerza sea aplicada en la dirección de $\vec{i}$. Se aplica entonces la fuerza que deforma al cuadrado en un paralelogramo por la cizalladura (de factor 2) en la dirección de $\vec{i}$. Finalmente se vuelve a rotar (en 45°) en sentido opuesto.

   a) Esboce una secuencia de dibujos que ilustre esta secuencia de transformaciones geométricas.

   b) Represente cada etapa de esta secuencia con la matriz adecuada, respecto de la base canónica.

   c) Verifique que un producto de estas matrices nos hace volver a la matriz de la cizalladura (calculada en 1-*b*) -*i*)).

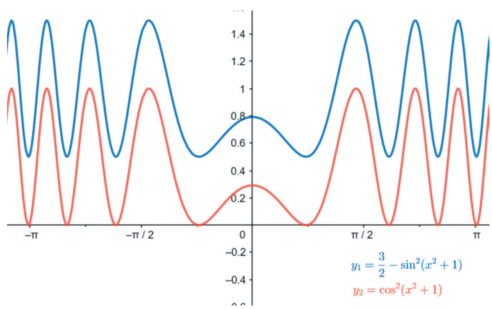
Situación 4. *Área entre curvas*

1. Considerar la siguiente expresión para I

$$I = \int_{0}^{\pi} \left(\tfrac{3}{2} - \operatorname{sen}^2 (1+x^2)\right)dx - \int_{-\pi}^{\pi} \tfrac{1}{2}\left(\cos^2 (1+x^2)\right)dx$$

   a) Explicitar qué propiedad lineal de la integral se utiliza al realizar el cambio de $\int_{-\pi}^{\pi} \tfrac{1}{2}\left(\cos^2 (1+x^2)\right)dx$ por $\int_{0}^{\pi} \cos^2 (1+x^2)\, dx$.

   b) Establecer una expresión equivalente a I que permita determinar fácilmente su valor numérico y explicitar la relación en términos de las propiedades lineales de la integral.

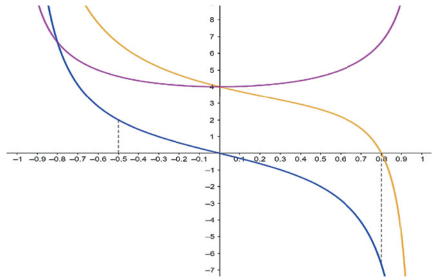


   c) Utilizando el gráfico de la figura ¿cómo se podría interpretar el resultado de la integral I visualizando las dos integrales? ¿A qué figura geométrica sencilla se podría asociar el área entre estas dos curvas?

2. Se define la función f por $f(x) = \dfrac{-3x + 4\sqrt{1-x^2}}{1-x^2}$ en el intervalo abierto $]-1,1[$ y Ω la región limitada por el gráfico de la función f y las rectas $y=0$, $x=-0.5$, $x=0.8$.

   a) Ya se sabe que para calcular el valor de $\int_{-0.5}^{0.8} f(x)\,dx$ se puede utilizar propiedades lineales de la integral. Explicitar las propiedades que permitan hacer este cálculo.

   b) De las gráficas de la figura identificar cada función y establecer una relación entre las regiones para medir el área de Ω como el área de la región acotada por el gráfico de estas funciones.



c) Verificar la relación entre el área de Ω y las áreas de las regiones aproximando por áreas de polígonos

---

Autor

Sara Pascual Pizarro. Universidad de Bio Bio, Chile. spascual@ubiobio.cl

