Los procesos de convención matemática como generadores de conocimiento•

Gustavo Martínez *

RESUMEN

En este artículo se presenta una articulación teórica de la noción de "convención matemática" como proceso de generación de conocimiento en el marco de la aproximación socioepistemológica en Matemática Educativa. Para lograr esto primero se hace una breve descripción de los que a nuestro parecer son las nociones básicas de la aproximación socioepistemológica y se presentan las evidencias básicas que permiten interpretar a la "convención matemática" como generadora de conocimiento desde este marco. Después se bosquejan algunos ejemplos que dan evidencias del funcionamiento de la noción como proceso constituyente en la construcción del conocimiento matemático.

- **PALABRAS CLAVE**: Convención matemática, socioepistemología, construcción social de conocimiento, práctica social.

ABSTRACT

In this paper is presented a theoretical articulation of the notion of "mathematical convention" as knowledge generation process in the framework of the socioepistemologic approximation in Mathematics Education. To achieve this, is done a brief description of the basic notions of the socioepistemologic approximation and are presented the basic evidences that allow to interpret the "mathematical convention" as a generator of knowledge in this framework. Later we are sketched some examples that give evidences of the operation of this notion as constituent process in the construction of the mathematical knowledge.

- **KEY WORDS:** Mathematical convention, socioepistemology, social construction of the knowledge, social practice.

Fecha de recepción: Noviembre de 2004 / Fecha de aceptación: Marzo de 2005

• Este trabajo forma parte del proyecto financiado por el Fondo Mixto CONACYT-Gobierno del Estado de Guerrero. Clave GUE-2002-C01-7626.

* Centro de Investigación en Matemática Educativa. Facultad de Matemáticas. Universidad Autónoma de Guerrero, México

RESUMO

Neste artigo apresenta-se uma articulação teórica da noção de “convenção matemática” como processo de geração de conhecimento no marco da aproximação sócio - epistemológica em Matemática Educativa. Para obter isto primeiro faz-se uma breve descrição do que a nosso parecer são as noções básicas da aproximação sócio – epistemológica e apresentam-se as evidencias básicas que permitem interpretar a “convenção matemática” como geradora de conhecimento desde este marco. Depois bosquejam-se alguns exemplos que dão evidencias do funcionamento da noção como processo constituinte na construção do conhecimento matemático.

- **PALAVRAS CHAVES:** Sócioepistemología, prática social, convenção matemática, construção social do conhecimento.

RÉSUMÉ

Dans cet article, nous présentons une articulation théorique de la notion de “convention mathématique” comme processus générateur de la connaissance dans le cadre de l’approximation socioépistémologique en Mathématique Educative. Et pour ce faire, nous faisons tout d’abord une brève description de ce qui, nous semble-t-il, sont les notions de base de l’approximation socioépistémologique et nous présentons les évidences de base permettant d’interpréter la “convention mathématique” comme génératrice de la connaissance à partir de ce cadre-ci. On brosse ensuite quelques exemples qui mettent en évidence le fonctionnement de la notion comme processus constituant et entrant dans la construction de la connaissance mathématique.

- **MOTS CLÉS:** socioépistémologie, pratique sociale, convention mathématique, construction sociale de la connaissance.

1. Introducción

Este artículo parte de la idea de que unos de los principales objetivos de la matemática educativa es explicar cómo se construye conocimiento matemático. Dentro de nuestro grupo de investigación existen diversas líneas que persiguen este objetivo (Buendía 2004; Arrieta 2003). Éstas se aproximan a la problemática de la explicación del conocimiento de maneras diversas, pero todas ellas exploran el papel de “lo social” en la construcción de conocimiento. Estos acercamientos posibilitan hacer énfasis no sólo en los aspectos cognitivos y epistemológicos, que por supuesto son de suma importancia, y amplían la explicación clásica del conocimiento.

Al respecto, para Cantoral (2002, p. 35), por ejemplo, "el término socioepistemología, pretende plantear una distinción de origen con las perspectivas epistemológicas tradicionales". La epistemología tradicional asume que el conocimiento es el resultado de la adaptación de las explicaciones teóricas con las evidencias empíricas. De esta manera el ser humano era considerado como un "científico activo" que construía hipótesis sobre el mundo, que reflexionaba sobres sus experiencias, que interactuaba con su entorno físico y que elaboraba estructuras de pensamiento cada vez más elaboradas. En el plano del conocimiento matemático esta explicación se ve reflejada en diversas investigaciones basadas en la epistemología genética piagetiana; que da cuenta de la construcción de conocimiento matemático a través de los procesos de "abstracción reflexiva" (Piaget y García, 1991).

Sin abandonar los resultados de la epistemología tradicional, hoy es cada vez más claro el papel que los escenarios históricos, culturales e institucionales deben desempeñar en una explicación de conocimiento desde la Matemática Educativa. Por ejemplo, dentro de la teoría de situaciones didácticas, la introducción de la noción de *contrato didáctico* ha permitido incluir el papel del contexto escolar y nos ha permitido abandonar el ideal de "pureza científica" en que se basan las aproximaciones epistemológicas tradicionales. En el mismo sentido en la teoría antropológica de lo didáctico se pone de manifiesto el papel de las instituciones; ya que "sitúa la actividad matemática, y en consecuencia la actividad del estudio en matemáticas, en el conjunto de actividades humanas y de instituciones sociales" (Chevallard, 1997a).

En el marco de las investigaciones que nos son más cercanas se ha demostrado la debilidad de la epistemología tradicional para la matemática educativa. Por ejemplo en Cantoral y Farfán (2003) se concluye lo siguiente con respecto a la investigación reportada por Farfán (1997): "En síntesis el tipo de estudio epistemológico que realizamos nos proporcionó la explicación que niega, parcialmente, nuestra hipótesis de partida, a saber, si bien es cierto que el concepto [de convergencia de series] surgió en el ámbito de la determinación del estado estacionario; éste no resulta propicio para recrearse en el aula pues resulta ser mas complejo que aquél que deseamos introducir. Esto último nos indujo al estudio socioepistemológico en las diversas formaciones profesionales de nuestro sistema de educación superior" (p. 265).

En el contexto señalado anteriormente, en el presente escrito se presenta una articulación teórica de la noción de "convención matemática" con la aproximación socioepistemológica en Matemática Educativa. Esta articulación será realizada tomando en cuenta las nociones teóricas básicas de la socioepistemología que tratan de dar cuenta de "lo social" en la construcción del conocimiento. De esta manera se defenderá la tesis de que los procesos de convención matemática son procesos sociales de construcción de conocimiento.

2. Aproximación socioepistemológica en Matemática Educativa

2.1. Panorama global

La presente investigación se enmarca dentro de los esfuerzos de un grupo de investigadores mexicanos que se han dado a la tarea de caracterizar los procesos de construcción social del conocimiento matemático. Algunos de los trabajos representativos de este grupo están representados por Cantoral y Farfán (2003, 2004), Arrieta (2003), Buendía (2003), Buendía y Cordero (en prensa) y Ferrari y Farfán (2004).

Dentro de este grupo partimos del supuesto de que los saberes matemáticos son un bien cultural y que son producto de la actividad humana en su práctica de modificar y construir su realidad, tanto natural como social. Trabajamos con la hipótesis del origen social del conocimiento, asumiendo que los procesos de construcción y de creación humana son procesos de síntesis[1] de los objetos y herramientas culturales presentes en una sociedad o un grupo específico. Desde este punto de vista los "nuevos" conocimientos serían aquellos que surgen emergentes en los procesos de síntesis de "viejos" conocimientos.

Así, consideramos que el pensamiento matemático es una forma de pensar particular que permite al ser humano transformarse a si mismo y a su realidad. Nuestro interés básico, como matemáticos educativos, consiste, entonces, en contribuir a entender el desarrollo del pensamiento matemático en situación escolar; para que los conocimientos construidos en su seno formen parte "viva" de la manera de pensar de las personas; es decir que sean conocimientos funcionales. Este tipo de conocimientos serían los elementos constituyentes del pensamiento matemático.

De esta manera, nuestros esfuerzos de investigación se encaminan a determinar bajo qué condiciones las personas son capaces de poner en funcionamiento los conocimientos matemáticos ante situaciones problemáticas que lo requieren. Nuestra apuesta teórica consiste en formular la hipótesis de que son las circunstancias de construcción de conocimiento las que determinan/ condicionan la emergencia del conocimiento funcional. Es por ello que nuestras investigaciones se inscriben dentro de la problemática general que busca entender las circunstancias en la cuales son llevados a cabo los procesos de construcción de conocimiento. Entender estas circunstancias es interpretada como la elaboración de una teoría que los describa, explique y prediga los procesos de construcción de conocimiento.

Dentro de la perspectiva socioepistemológica en Matemática Educativa se considera que al menos cuatro grandes circunstancias condicionan/determinan la construcción del conocimiento matemático en las personas: las cognitivas, las didácticas, las sociales y las epistemológicas. Las didácticas son aquellas propias de la conformación de los diferentes sistemas didácticos, las cognitivas son propias del funcionamiento mental, las epistemológicas son propias de la naturaleza y significados del conocimiento matemático y las sociales. Nuestro interés es el estudio sistémico de todas las circunstancias.

2.2. Nociones teóricas básicas

De acuerdo con Cantoral (2002) la socioepistemología se plantea el examen

[1] En este escrito se entenderá por síntesis o integración al proceso de interrelación de algunas "partes" para conformar un "todo". Una propiedad *emergente* sería aquella presente en el "todo" y no presente en las "partes".

del conocimiento situado, aquel que atiende a las circunstancias y escenarios particulares. El conocimiento en este caso, se asume como el fruto de la interacción entre la epistemología y factores sociales. Esta consideración general plantea al programa socioepistemológico problemas teóricos y empíricos para explicar la construcción del conocimiento. El principal problema consiste en llevar a la práctica la postura sistémica para analizar las interacciones entre la epistemología del conocimiento, su dimensión sociocultural, los procesos cognitivos que le son asociados y sus mecanismos de su institucionalización vía la enseñanza. La solución clásica a este problema es a través del establecimiento de *unidades de análisis*, cada una de las cuales retiene en forma simple las propiedades significativas de todo el sistema[2]. En matemática educativa podemos encontrar diversas nociones teóricas que desempeñan este papel. Por ejemplo, dentro de la metáfora del aprendizaje por adaptación al medio, contenida en la teoría de situaciones didácticas, las nociones de *contrato didáctico* y *obstáculo epistemológico* juegan este papel en relación al sistema didáctico. La primera da cuenta de la complejidad del sistema didáctico (constituido por el saber, aquél quién aprende y el quién enseña en un medio determinado); ya que el contrato son las cláusulas, mayoritariamente implícitas, que regulan las relaciones entre el profesor y el alumno respecto a un conocimiento matemático. Mientras que la segunda da cuenta de las relaciones entre la cognición y la epistemología; ya que un obstáculo epistemológico es un conocimiento adecuado para un amplio dominio de situaciones, de ahí su resistencia a ser abandonado, que fuera de éste resulta inadecuado. Para algunos investigadores la noción de obstáculo epistemológico es el “corazón” de una situación didáctica; es decir, motor de la evolución del sistema didáctico.

A nuestro parecer algunas nociones acuñadas en la perspectiva socioepistemológica tienen la característica de ser unidades de análisis para explorar el origen social del conocimiento. De entre ellas retomamos tres que aparecen fundamentales: *actividad humana, resignificación y práctica social*.

La noción de *actividad humana* surge con la intención de contrastar la noción de actividad matemática descrita por la epistemología tradicional (que ofrece una explicación del conocimiento a través de la adaptación de una teoría con el material empírico). De acuerdo con Cordero (2001) las epistemologías basadas en la actividad matemática explican construcciones a través de la manipulación de los objetos matemáticos, mientras que una epistemología de la actividad humana explicaría el conocimiento en términos de herramientas[3] que usa el hombre para hacer matemáticas. Desde este punto de vista es posible explicar, por ejemplo, por qué la noción de función fue *usada* antes de ser un concepto central en la síntesis euleriana del Cálculo.

La noción de *resignificación* busca hacer una distinción de origen con respecto a la idea platónica que establece la

---

2 Hemos tomado ésta caracterización de unidad de análisis de Vigotsky (1996), cuando establece, para su explicación de las relaciones entre pensamiento y lenguaje, como tal a la “significación de la palabra”.

3 El concepto “herramienta” lo utilizaremos según las aproximaciones socioculturales en las cuales se destaca su papel crucial como instrumentos mediadores; de esta manera la acción se considera siempre mediada por herramientas (Wertsch, 1993).

preexistencia[4] de los objetos y procesos matemáticos y que implica considerar la unicidad de sus significados. La noción de resignificación emerge, entonces, como elemento para dar cuenta de que el conocimiento tiene significados propios, contextos, historia e intención; lo que señala la posibilidad de enriquecer el significado de los conocimientos en el marco de los grupos humanos. En este marco explicativo es posible plantearse, por ejemplo, resignificar la derivada a través de la linealidad de los polinomios[5] (Rosado, 2004).

La noción de *práctica social* es quizá la parte medular de la perspectiva socioepistemológica. Se entiende por práctica social a aquellas acciones intencionales de los grupos humanos para transformar su realidad social y material. Por ejemplo, Arrieta (2003), Buendía (2004), Buendía y Cordero (en prensa) y Ferrari y Farfán (2004) sostienen que son las prácticas sociales las que generan conocimiento. Respectivamente para estos autores las prácticas generadoras de conocimiento son: las de "modelación", en el sentido de actividad con la intención de comprender y transformar la naturaleza, es considerada como fuente que desarrolla procesos de matematización, la de "predicción" para la emergencia de lo periódico y la de "multiplicar sumando" para la emergencia de la variación logarítmica.

3. La noción de convención matemática cómo practica social de integración sistémica de conocimientos

La noción de "convención" usualmente es considerada dentro de la cultura escolar como preestablecida e inmóvil. Se le concibe como una norma a la que hay que atender. En los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas las convenciones ocupan una parte del amplio espectro de aquellos objetos y procesos matemáticos (como definiciones, axiomas y algoritmos) que dentro del funcionamiento didáctico del conocimiento se considera como necesario ser memorizados por estudiantes y profesores. Dentro de una perspectiva teórica, la socioepistemología, que busca explicar la construcción de conocimiento situado, aquel que atiende a las circunstancias y escenarios socioculturales particulares, nos preguntamos en qué contribuye el manejo escolar de las convenciones al desarrollo del pensamiento matemático de los estudiantes. Para abordar este problema general, nos dimos a la tarea de construir nuestro objeto de estudio relacionado con noción general de convención. Utilizando como unidad de análisis la construcción de significados relacionadas con los exponentes no naturales elaboramos la caracterización de la noción de "convención matemática"; entendida esta como un proceso de construcción de conocimiento que posibilita, por ejemplo, establecer la igualdad $2^0=1$.

Para ello, en el plano de la construcción del conocimiento matemático, utilizamos la noción de *convención matemática* con la intención de cuestionar la idea de validez universal del conocimiento matemático e invitar a preguntarse las condiciones sociales de dicha validez convencional. En principio seguimos a Poincaré (*La science et l'hipothése* 1902 Cap. III, tomado de Poincaré 1984, p. 160) cuando al

[4] En si misma esta es idea a-social, debido a que se considera al conocimiento como independiente del ser humano.

[5] En el contexto gráfico-analítico se tiene que la parte lineal de un polinomio $P(x)$ es la recta tangente a su grafica en el punto (0, P(0)).

reflexionar acerca de la geometría no euclidiana, insiste que tales construcciones tienen que ser descritas como <convenciones libres>, es decir; son principios científicos que no son ni evidencias, ni generalizaciones experimentales, ni hipótesis planteadas a manera de conjetura con la intención de se verificación. Al referirse a los axiomas en geometría señala (Las cursivas son nuestras):

> "Los axiomas geométricos no son, por tanto, ni juicios sintéticos a priori ni hechos experimentales. Son *convenciones*: nuestra elección entre todas las convenciones posibles es guiada por la experimentación, pero permanece *libre*, y sólo responde a la necesidad de evitar cualquier contradicción […] .Una geometría no puede ser más verdadera que otra; solamente puede ser *más cómoda.* " (Poincaré, 1984).

Por nuestro lado la acepción que utilizamos para convención es la que señala aquello que es conveniente para algún fin específico; entonces una convención matemática es una conveniencia para las matemáticas (evitar contradicciones o dar unidad, por ejemplo). Al respecto el análisis epistemológico del desarrollo del concepto de exponente no natural muestra la presencia de una manera común de generar significados, presente en las distintas formulaciones que se han podido determinar (Martínez, 2003) a lo largo de la historia de las ideas entre los siglos XIV y XVIII. Se puede resumir que: *el significado de los exponentes no naturales es* convenido *para posibilitar la construcción de cuerpos unificados y coherentes de conocimiento* matemático *(es decir para la integración sistémica de conocimientos)*. Es por ello que de manera sintética designamos a esa manera de construir conocimiento con la expresión: *convención matemática*. Las formas o realizaciones de este mecanismo pueden ser una definición, un axioma, una interpretación, o una restricción, entre otras. La elección de la forma depende de los objetivos teóricos específicos.

En el sentido anterior entonces, un proceso de convención matemática puede ser entendido como un proceso de búsqueda de consensos al seno de la comunidad que trabaja en dar unidad y coherencia a un conjunto de conocimientos. La producción consensos es posible debido a que en esta comunidad existe la práctica de integración sistémica de los conocimientos; es decir existe la actividad intencional de relacionar diversos conocimientos y articularlos en un todo coherente e interrelacionado. Por su naturaleza esta práctica se encuentra en el plano de la teorización matemática, entendiendo por esto a la elaboración de conceptos interrelacionados que intentan describir, explicar un objeto de estudio, el cuál es, en este caso el sistema de conocimientos aceptados. Este proceso de síntesis conlleva al surgimiento de propiedades emergentes no previstas por los conocimientos anteriores. Las convenciones matemáticas serían una parte de las propiedades emergentes.

Dos ejemplos en relación a los exponentes, extraídos de la historia de las ideas, servirán para precisar nuestro planteamiento del "principio de conveniencia" en el que descansa nuestra caracterización de convención matemática (primer ejemplo) y su carácter relativo al conjunto de conocimientos de referencia (segundo ejemplo).

Primer ejemplo. Hacia finales del Siglo XVI se sabía que las curvas $y = kx^n$ ($n = 1, 2, 3, 4,\ldots$), llamadas de índice n, tenían una propiedad que era llamada su "razón característica". Este conocimiento era parte general de la problemática fundamental de la época referente al cálculo de áreas determinadas por distintas curvas, tanto mecánicas como algebraicas (Bos, 1975), y a los significados que las áreas guardan en contextos de variación[6]. Tomando como ejemplo la curva $y = x^2$ se decía que tiene razón característica igual a 1/3; ya que si tomamos un punto **C** arbitrario de la curva (Figura 1) el área de **AECBA** guarda una proporción de 1:3 con respecto al área del rectángulo **ABCD** o lo que el mismo que la proporción entre el área de **AECBA** y el área **AECDA** es de 1:2. En general se sabía de que la razón característica de la curva de índice n es $1/(n+1)$ para todos los enteros positivos n[7].

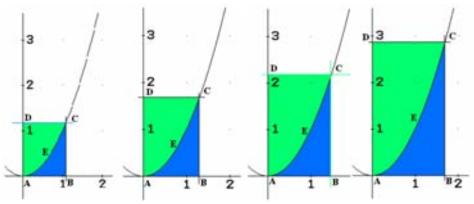


Figura 1. Razón Característica de la curva $y = x^2$

En sus investigaciones acerca de la cuadratura de las curvas John Wallis (Struik, 1986) utilizó lo anterior para hacer el siguiente razonamiento, que en el fondo es una manera de convenir que el índice de $y = \sqrt[2]{x}$ debe ser igual a 1/2 con el objetivo de unificar la noción de razón característica con la noción de índice (aquí presentamos una reconstrucción posible del razonamiento):

'Como la curva $y = x^2$ tiene una razón característica de 1/3, la curva $y = \sqrt[2]{x}$ también debe poseer una razón característica y debe ser igual a 2/3 (baste observar que las áreas debajo de ambas curvas se complementan para formar el rectángulo). Además, como la curva de índice 2 posee razón característica es de suponer que una curva que posea razón característica también posea un índice, entonces ¿Qué índice debe tener la curva $y = \sqrt[2]{x}$? Como 2/3=1/(1+1/2) el índice debe ser 1/2'

A continuación Wallis afirma (Confrey y Dennis, 2000) que el índice apropiado de $y = \sqrt[q]{x^p}$ debe ser p/q y que su razón característica es $1/(1+p/q)$; pero al no tener manera de verificar directamente la razón característica de tales índices, por ejemplo de $y = \sqrt[3]{x^2}$, Wallis retoma el principio de *interpolación* el cual afirma que cuando se puede discernir un patrón de cualquier tipo en una sucesión de ejemplos, uno tiene el derecho de aplicar ese patrón para cualesquiera valores intermedios. En el caso que interesa, él hace la siguiente tabla de razones características conocidas [R(i/j) denota la razón característica, desconocida, de índice i/j]:

6 Por ejemplo es bien conocida la forma en que Galileo estableció su ley de caída de los cuerpos a través de entender el área determinada por una gráfica velocidad-tiempo como la distancia recorrida por el cuerpo.

7 En términos modernos la noción de razón característica se apoya en que (an> 0) $\left(\int_0^a x^n dx\right) : a^{n+1} = 1:(n+1)$

q/p	0	1	2	3	4	5	6	7
1	1=1/1	1/2	1/3	1/4	1/5	1/6	1/7	1/8
2	1=2/2	2/3	2/4	**R(3/2)**	1/3=2/6	**R(5/2)**	1/4=2/8	**R(7/2)**
3	1=3/3	3/4	**R(2/3)**	1/2=3/6	**R(4/3)**	**R(5/3)**	1/3=3/9	**R(7/3)**
4	1=4/4	4/5	2/3=4/6	**R(3/4)**	1/2=4/8	**R(5/4)**	**R(3/2)**	**R(7/4)**
5	1=5/5	5/6	**R(2/5)**	**R(3/5)**	**R(4/5)**	1/2=5/10	**R(6/5)**	**R(7/5)**
6	1=6/6	6/7	3/4=6/8	2/3=6/9	**R(2/3)**	**R(5/6)**	1/2=6/12	**R(7/6)**
7	1=7/7	7/8	**R(2/7)**	**R(3/7)**	**R(4/7)**	**R(5/7)**	**R(6/7)**	1/2=7/14
8	1=8/8	8/9	4/5=8/10	**R(3/8)**	2/3=8/12	**R(5/8)**	**R(3/4)**	**(7/8)**
9	1=9/9	9/10	**R(2/9)**	3/4=9/12	**R(4/9)**	**R(5/9)**	**R(2/3)**	**R(7/9)**

Al aplicar el principio de interpolación sobre la fila 5 se puede conjeturar, por ejemplo, que R(3,5)=5/8 y sobre la columna 3 que R(3,5)=5/8. Razonamiento semejante se puede hacer sobre la fila 10 para establecer que R(3,5)=10/16 y sobre la columna 6 que R(3,5)=10/16.

Segundo ejemplo. Wallis también interpreta a los números negativos como índices[8]. Define el índice de $1/x$ como -1, el índice de $1/x^2$ como -2, etc. A continuación el intenta dar coherencia a estos índices y a la noción de razón característica (Confrey y Dennis, 2000). En el caso de la curva $y = 1/x$ la razón característica debe ser $\frac{1}{-1+1} = \frac{1}{0} = \infty$ [9].

Wallis aceptó este cociente como razonable debido a que el área bajo la curva 1/*x* diverge; el cual, al parecer, era un hecho conocido en la época. Lo anterior puede ser interpretado como que la proporción entre el área de **ABCEFA** (Figura 2) y el área del rectángulo **ABCD** es de 1:0. Cuando la curva es $y = 1/x^2$ la razón característica debe ser 1/(-2+1)=1/-1. Aquí, la concepción de Wallis sobre la razón difiere de la aritmética moderna de números negativos. Él no utiliza la igualdad 1/-1 = -1, más bien él construye una coherencia entre diversas representaciones; que es en esencia una convención matemática. Debido a que el área sombreada bajo la curva $y = 1/x^2$ es más grande que el área bajo la curva $1/x$, concluye que la razón 1/-1 es mayor que infinito (*ratio plusquam infinita*). Continúa concluyendo que 1/-2 es incluso más grande. Esto explica el plural en el título de su tratado *Arithmetica Infinitorum*, de la cual, la traducción más adecuada sería La Aritmética de los Infinitos.

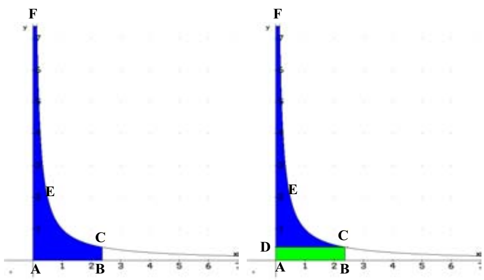


Figura 2. Razón Característica de la curva $y = 1/x$

8 Deseamos aclarar que a través de la literatura consultada no fue posible determinar claramente los motivos que tuvo Wallis para realizar hacer tales definiciones; pero es de suponer que fueron tomadas de las convenciones de los exponentes que ya se trabajaban en esa época en el contexto algebraico (Martínez, 2003).

9 Lo que hoy se entiende por fracciones, en la época de Wallis se concebía como proporcionalidad por lo que 1 es 0 (nada) como ∞ es a 1.

Lo anterior motiva a centrar nuestra atención en los procesos de integración sistémica de un conjunto de conocimientos. Teóricamente, desde un principio, esta búsqueda de integración, que es una búsqueda de relaciones, puede tener dos salidas: 1) La *ruptura* ocasionada por dejar a un lado un significado por otro que eventualmente es construido para la tarea de integración; es decir cambiar la centración de significado y 2) La *continuidad* al conservar un significado en la tarea de integración. Entonces la convención matemática, en tanto producto, puede ser interpretada como una propiedad emergente para establecer una relación de continuidad o de ruptura de significados.

En nuestros ejemplos respecto a las formulaciones de Wallis, la búsqueda de coherencia entre la noción de índice y de razón característica (en donde la razón/ proporción posee significados específicos que difiere de considerarla como número) provoca dos convencionalismos: el índice de $y = \sqrt[2]{x}$ como 1/2 y diversos tipos de infinito representados por 1/0, 1/-1, 1/-2, etc. Esto señala el carácter *conveniente y relativo* de la convención matemática respecto a la integración de las nociones de índice y razón característica y las representaciones algebraicas y gráficas. Hoy en día la convención de considerar a las proporciones 1/0, 1/-1, 1/-2 como diversos tipos de infinitos no es coherente con la interpretación numérica de las proporciones como números.

Lo anterior da cuenta de un “estatus metamatemático” (la convención matemática) no considerado en otras investigaciones. Citemos, por ejemplo, los diferente niveles de nociones que Yves Chevallard establece en su Teoría de la Transposición Didáctica (Chevallard, 1997b) y los argumentos, presentes en los libros de texto, para establecer la igualdad $2^0=1$. De acuerdo a nuestra aproximación al aula tales argumentos no son objeto de estudio por lo que no son nociones matemáticas, tampoco son reconocidos y designados por lo que tampoco son nociones paramatemáticas y además nunca son utilizados en la práctica de ninguna de las tareas algebraicas por lo que no son nociones protomatemáticas. Dentro de nuestra elaboración teórica construimos la idea de la existencia de nociones metamatemáticas, cuando funcionan como organizadoras de las nociones protomatemáticas, paramatemáticas y matemáticas. Señalamos que esta organización no es un proceso lógico sino producto de otras necesidades; como por ejemplo la organización teórica de, por ejemplo, la definición formal del límite o la función unificadora de los exponentes no naturales.

4. La práctica de integración sistémica de los conocimientos: continuidad y ruptura de significados

Se ha dicho que la convención matemática, en tanto producto, puede ser interpretada como una propiedad emergente para establecer una relación de continuidad o de ruptura de significados. Es por ello que de manera específica la convención matemática ha resultado útil para describir y explicar los fenómenos de continuidad y ruptura de significados en el contexto escolar. En particular mostraremos aquellos relacionados con el tratamiento escolar de los exponentes y que interpretamos como parte de la práctica social de integración sistémica de conocimientos.

El discurso matemático escolar tradicional asume que el significado de los exponentes no naturales es un problema de extensión numérica del exponente en una expresión de la forma a^x. Esto emana de la concepción moderna de la construcción de los números reales en tanto, también, problema de extensión del tipo:

Naturales $\rightarrow$ cero $\rightarrow$ enteros negativo $\rightarrow$ racionales $\rightarrow$ irracionales.

Lo anterior señala que la vida escolar de los exponentes puede ser descrita a través de los *momentos escolares del tratamiento de los exponentes*, que son:

- MMR: El momento del exponente como multiplicación reiterada.
- MEC: El momento del exponente cero.
- MEN: El momento del exponente negativo.
- MEF: El momento del exponente fraccionario.

El análisis del contenido de los libros revela que la introducción de exponentes no naturales se basa en la consideración de extensión de las Leyes de los Exponentes para los Naturales (LEN): 1) $A^nA^m=A^{n+m}$, 2) $A^n/A^m=A^{n-m}$ con $n>m$ y 3) $(A^n)^m=A^{nm}$. Más precisamente, los argumentos centran la atención en la estructura operativa de las LEN para construir el significado de los exponentes no naturales. La Tabla 1 proporciona dos ejemplos del tipo de argumentos utilizados.

Libro	Argumento para introducir exponentes no naturales	Argumento para introducir el exponente cero
Wentworth y Smith (1985). *Elementos de álgebra*.	*"Los exponentes fraccionarios (negativos) deben interpretarse de manera tal que a ellos se apliquen todas las leyes que se aplican a los exponentes enteros positivos"* $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	*"Para que el símbolo a^0 obedezca las leyes generales de las otras potencias, debe tenerse: $a^0 \cdot a^m = a^{0+m} = a^m$; o, lo que es lo mismo, $a^0 \cdot a^m = 1 \cdot a^m$; y por tanto, $a^0 = 1$. Así pues,* **Toda cantidad elevada a la cero es igual a 1"**
Rees et al. (1982). *Álgebra contemporánea*.	Para el caso de los exponentes negativos que se cumpla la *ley de los exponentes para la división* $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, \quad m > n$ Para el caso de los exponentes de la forma $\frac{1}{n}$ que se cumpla la *ley de la potencia de una potencia.*	*"ley de los exponentes para la división:* $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}, \quad m > n$ *Se demostrará más adelante que esta ley se cumple si* $m < n$ *pero aquí se considerará el caso particular cuando* $m = n$ *.En este caso, se obtiene* $\frac{a^n}{a^n} = a^{n-n} = a^0$ *La definición es válida únicamente para el caso en que n sea un entero positivo por lo que* a^0 *no tiene sentido; sin embargo,* $\frac{a^n}{a^n} = 1$ *de donde es lógico definir a* a^0 *como el número 1".*

Tabla 1. *Argumentos en los textos para introducir exponentes no naturales*

En la Tabla 2 se presenta un resumen de los distintos argumentos, basadas en las LEN, que hemos encontrado en diversos libros de texto.

		LEN en que se apoya el argumento		
		$A^n A^m = A^{n+m}$	$A^n / A^m = A^{n-m}$	$(A^n)^m = A^{n\,m}$
EXPONENTE	Cero	$A^0 A^2 = A^2$ $\Rightarrow$ $A^0 = 1$	$1 = A^4 / A^4 = A^{4-4} = A^0$ $\Rightarrow$ $A^0 = 1$	No hay argumentos
	Negativo	$A^{-2} A^2 = A^{-2+2} = A^0 = 1$ $\Rightarrow$ $A^{-2} = 1/A^2$	$1/A^2 = A^4 / A^6 = A^{4-6} = A^{-2}$ $\Rightarrow$ $1/A^2 = A^{-2}$	No hay argumentos
	Fraccionario	$A^{1/2} A^{1/2} = A^{1/2+1/2} = A^1 = A$ $\Rightarrow$ $(A^{1/2})^2 = A$ $\Rightarrow$ $A^{1/2} = \sqrt{A}$	No hay argumentos	$(A^{1/2})^2 = A^1 = A$ $\Rightarrow$ $A^{1/2} = \sqrt{A}$

***Tabla 2**. Libros de texto y argumentos apoyados en las LEN*

Así, desde el punto de vista anterior, el único significado posible para los exponentes no naturales es aquel determinado por su operatividad como números y su relación con las LEN. Los significados son construidos como extensión de una función que satisface alguna de las propiedades: $f(x)f(y)=f(x+y)$, $f(x)/f(y)=f(x-y)$ o $(f(x))^n=f(xn)$, en donde sólo la primera es capaz de proporcionar argumentos para todos los tipos de exponentes.

Por otra parte, de nuestro estudio con grupo de 18 profesores[10] podemos establecer dos posibles escenarios escolares en torno a las argumentaciones para establecer el significado de los exponentes no naturales:

- Donde todas las igualdades sean tratadas como leyes ("leyes de los exponentes").
- Donde los argumentos tienen un alcance parcial: 1) Ninguno de los profesores que contestaron el cuestionario estableció argumentos para las igualdades que involucraban exponentes fraccionarios, 2) Algunos profesores sólo argumentaban el exponente cero.

La lectura de los argumentos nos muestra que los profesores consideran que la noción de exponente cero y negativo es una noción matemática que se puede "demostrar" (a través de algún argumento que involucra una "ley de los exponentes"), ninguno de los profesores menciona, por

10 La mayoría de los profesores (16) que contestaron el cuestionario laboran en bachillerato y todos han impartido al menos un curso de álgebra

ejemplo, que su introducción obedece a la necesidad (en el contexto algebraico) de uniformizar dichas leyes y no estrictamente como consecuencia de ellas. Dicho en otras palabras: los profesores asumen, implícitamente, que el significado de los exponentes cero y negativo son una noción matemática y no una convención matemática (noción metamatemática). Veamos un ejemplo que resume todo lo anterior (para más detalles véase el Anexo B de (Martínez, 2000)):

« La forma de argumentación podría ser la siguiente:

1. $2^3/2^3 = 2*2*2/2*2*2 = 2^3/2^3 = 2^{3-3} = 2^0 = 1$

2. $2^3/2^5 = 2*2*2/2*2*2*2*2 = 2^{3-5} = 2^{-2} =$
$\cancel{2}*\cancel{2}*\cancel{2}/\cancel{2}*\cancel{2}*\cancel{2}*2*2 = 1 / 4$
$2^{-2} = 1/2^2 = 1 / 4$

3. $2^{1/2} = 2^{n/m} = {}^{m}\sqrt{2^n} = {}^{2}\sqrt{2^1} = {}^{2}\sqrt{2}$

La concepción de que la noción de exponente no natural es una noción matemática que se puede "demostrar" también puede explicar la falta de argumentos para establecer una igualdad que involucre los exponentes fraccionarios; ya que "demostrarlas" (en el sentido de usar una "ley de los exponentes" como hace el profesor anterior) requiere suponer su existencia y no deducirla. Aclaremos este punto. Para "demostrar" que $2^0=1$ se utiliza la "ley de los exponentes" para la división de la siguiente manera: $1=2^2/2^2=2^0$ entonces $2^0=1$, es decir que su valor se *deduce*. En cambio para "demostrar" que $2^{1/2}=\sqrt{2}$ se podría utilizar la "ley de los exponentes" para la multiplicación de la siguiente manera: $2^{1/2}2^{1/2}=2^1=2=(2^{1/2})^2$ entonces $2^{1/2}=\sqrt{2}$, es decir que en este argumento se debe suponer la existencia de $2^{1/2}$, lo cual puede no considerarse una deducción en el estricto sentido del término. Creemos que esta suposición de existencia es lo que impide a los profesores dar estos argumentos. Lo anterior también muestra que la igualdad $2^0=1$ no se puede demostrar sino se *debe convenir.*

Un hecho a resaltar dentro del contexto anterior es que los significados que escolarmente son asociados a los diferentes tipos de números no son considerados. Por ejemplo, el cero sólo representa al número que es el neutro aditivo y ya no aquel que representa la "ausencia" o el punto de referencia. Aquí es donde encontramos la primera ruptura de los significados; pero el hecho de interés para esta investigación consiste en observar una tendencia a la continuidad de los significados ocasionada por la práctica de la integración sistémica de conocimientos.

El primer ejemplo al respecto lo encontramos en los diversos tipos de razonamientos de estudiantes al momento de ser cuestionados con respecto a igualdades que involucran exponentes no naturales. En diversos niveles escolares, pero particularmente en el nivel secundario (alumnos de 12-15 años) y en medio superior (alumnos de 15-18 años), podemos encontrar argumentos como los siguientes (Martínez, 2002, 2003):

Argumento *A*. $2^0= 0$ ya que 'el 2 no se multiplica ninguna vez y queda nada'.

Argumento *B*. $2^0 = 2$ ya 'el 2 no se multiplica ninguna vez por lo que queda un 2'.

En otras investigaciones (Sierpinska, 1994) la concepción anterior, el cero como "nada", ha sido catalogada como un obstáculo epistemológico en relación a la construcción de su significado como exponente. Nuestro interés aquí consiste en dar cuenta el origen social de estas respuestas, que descansa en la existencia de una práctica de integración de conocimientos y que se expresa al integrar el significado del exponente como multiplicación reiterada y el significado del cero como 'nada'. Al respecto, puede encontrase en algunos argumentos que se han encontrado en libros de texto y en las explicaciones de profesores en servicio. En primera instancia presentamos tres argumentos que intentan rescatar el significado de multiplicación reiterada para el caso del exponente cero en relación al significado de cero como representante de la «nada» o de la «ausencia". Al segundo y al tercer argumentos los hemos clasificado como argumentos *ad hoc* debido a que en realidad ya se sabe que $2^0=1$ y se construye un argumento adecuado para llegar a esto.

- *Álgebra de Phillips* (1985): «Supongamos que a^0 significa multiplicar cero veces a la base a, entonces el producto de a^0 por a^n será multiplicar a $(n+0)$-veces [es decir n veces] y el único número que deja invariable a un número por multiplicación es el uno por lo que $a^0=1$».

- *Un profesor de bachillerato:* «Si $2^3=2*2*2*1$; $2^2=2*2*1$; $2^1=2*1$; $2^0=1$; el exponente cero indica cuantas veces se multiplica el 2 por la unidad».

- *Un profesor de bachillerato: «*Tenemos que $2^3=\frac{2\times2\times2\times2}{2}$; $2^2=\frac{2\times2\times2}{2}$; $2^1=\frac{2\times2}{2}$; $2^0=\frac{2}{2}=1$ ».

En el mismo sentido que el anterior existen tratamientos que son la respuesta por conciliar el MMR y otros significados de los números negativos, como lo es cierta noción de *negatividad* como "proceso inverso" y "estar a la izquierda" al momento de reforzar la explicación. Como representantes de esto tenemos:

- *Curso propedéutico. Física y Matemáticas* (Conalep-Sep, 1988)(los subrayados son nuestros, negritas en el original)

  «Los ejemplos anteriores representan potencias con exponentes positivos: 10^2, 10^3, 10^4, etc. Pero ¿qué significa una potencia con exponente negativo? 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}, etc.

  El <u>inverso</u> de un número es el cociente de dividir 1 entre ese número. El <u>inverso</u> de 84 es 1/84; El <u>inverso</u> de 100 es 1/100; 10^2 es una potencia de 10 y el inverso se esta potencia es 1/ 10^2.

  Esto se puede representar así:
  Con una base y un exponente: 10^{-2};
  Como un producto: $\frac{1}{10}\times\frac{1}{10}$ por su valor efectuado: $\frac{1}{100}=0.01$

  El signo - (menos) colocado delante del exponente de una potencia <u>representa el inverso</u> de esa potencia. $10^{-2}=\frac{1}{10^2}$ [...]

- *Un profesor de bachillerato* «Según entiendo 2 elevado a la potencia 2, se interpreta como 2*2, 2 elevado a la potencia 3, se interpreta como 2*2*2, etc., según el documento debemos diseñar una situación en la cual la multiplicación reiterada no puede ser mantenida fuera de los casos 2, 3, 4, ... aunque me permito afirmar lo siguiente:

El número 2 elevado a la potencia –2, se interpreta como $^1/_2 * ^1/_2$, el numero 2 elevado a la potencia –3, se interpreta como $^1/_2 * ^1/_2 * ^1/_2$, etc., en consecuencia afirmo que la multiplicación reiterada si puede ser mantenida fuera de los casos 2,3,4, ...

Según mi experiencia docente 2 elevado a la potencia n, es multiplicar 2 n – veces, aquí debemos entender que estamos multiplicando reiteradamente la base (2).

Para el caso 2 elevado a la potencia $-n$, se debe entender que la base ya no es el 2, sino que la base es $^1/_2$, en consecuencia se debe ser cuidadoso con las bases cuando se esta usando la multiplicación reiterada, todo lo anterior puede ser generalizado para cualesquier base x, con x distinto de cero y por tanto creo que si puede ser mantenida la multiplicación reiterada fuera de los casos 2, 3,4,...".

Caso semejante ocurre con los números fraccionarios. Un ejemplo al respecto es el siguiente:

Curso de Álgebra. (Anfossi y Meyer, 1985). "En toda extracción de raíz de un monomio, debe dividirse el exponente de cada literal entre el índice de la raíz […]. Si el cociente no es un número entero, sólo se indica la división, y resulta un exponente fraccionario. […] Nota: Según se ha visto en (No. 9), un exponente indica el producto de tantos factores iguales a la base como unidades tiene dicho exponente ¿Tiene significado análogo un exponente fraccionario? […] En general: $a^{n/m}$ indica el producto de n factores iguales a $a^{1/m}$, es decir, un exponente fraccionario tiene un significado análogo al del exponente entero".

5. Algunos procesos de convención matemática.

Dentro de nuestras investigaciones que se encuentran en desarrollo, el primer paso ha sido la búsqueda de procesos de construcción de conocimiento que puedan ser explicados a través de los elementos constituyentes de nuestra caracterización del mecanismo de convención matemática. Los primeros ejemplos son extraídos de la historia de las ideas, mientras que en los siguientes ponemos a consideración la descripción de procesos de construcción de conocimiento que plantean una resignificación de diversos contenidos matemáticos vía la conformación de escenarios en donde está presente la "práctica social" de integración sistémica de conocimientos matemáticos, que es la que posibilita la presencia de procesos de convención matemática y por ende la generación de conocimiento.

5.1. El carácter convencional de la emergencia del neutro multiplicativo en la matemática de las variables

Dentro de la tradición euclidiana el producto de dos longitudes es interpretada como la superficie de un rectángulo construido sobre las dos longitudes que hacen la multiplicación (Primera definición, Libro II, Elementos de Euclides). A su vez la multiplicación de tres longitudes puede ser interpretada como el volumen de un prisma rectangular construido sobre las tres longitudes que hacen la multiplicación. Ya dentro de la tradición euclidiana Diofanto utilizó el producto de hasta cinco cantidades; sin embargo estas ideas fueron parte marginal del pensamiento de su época, debido seguramente al la falta de significados geométricos. Debido a lo anterior, dentro de la tradición euclidiana, el producto de cuatro o más longitudes no tenía sentido. ¿Qué hizo posible la construcción de la idea de que es posible multiplicar más de tres cantidades? Una respuesta en este sentido puede ser entendida como el funcionamiento de un proceso de convención matemática ante la necesidad de unificar diferentes campos de conocimiento. Los ejemplos que aquí se consideran son los de la unificación de la sintaxis algebraica de las variables y la construcción de la representación grafica de las variables.

Hasta donde sabemos el uso de la multiplicación de más de tres cantidades aparece con el surgimiento de aparato simbólico algebraico; lo que en la época medieval se conocía como el estudio de las "cosas". Sin embargo, este tipo de productos fueron parte marginal de la ciencia de la época y no es sino hasta el uso de los sistemas de referencia gráficos que tales productos son parte fundamental de la matemática[11].

En cuanto al pensamiento algebraico, en Martínez (2003) se ha explicado el proceso de convención matemática que estuvo presente en una construcción de las nociones de exponente no natural (cero y negativo). Ahí se describe de manera amplia la manera en que Chuquet (s. XIV) utilizó la noción de exponente cero utilizando el significado de "ausencia" que este tiene. De esta manera Chuquet estableció, por definición, el siguiente uso para los exponentes: $2^2 := 2x^2$, $2^1 := 2x$, $2^0 := 2$ ya que no tiene ninguna x. El punto de interés dentro del marco de las sintaxis algebraicas resulta de la consideración de que los convencionalismos tienen por finalidad el incluir nuevos objetos algebraicos a la estructura operativa conformada por los diferentes caracteres *cósicos*[12]. En cuanto a la multiplicación, la regla de Aurel (s. XVI) se basa en el comportamiento especial de las sucesiones: la relación entre la progresión aritmética y progresión geométrica (relación PA-PG)[13]. Con este marco de referencia se determinan los convencionalismos para incluir al *número* en la estructura operativa del conjunto $\{x, x^2, x^3, x^4, x^5, ...\}$, que en la notación de Marco Aurel (Meavilla, 1993) corresponde al conjunto $\{\varphi, \chi, \xi, \zeta, \xi\xi, \beta, \xi\zeta, b\beta, \xi\xi\xi, \zeta\zeta, ...\}$. De esta manera el número 5 es representado como 5φ y es multiplicado con los demás a través de una nueva tabla de caracteres cósicos que tienen la misma

11 Baste recordar el papel protagónico que tuvieron las ecuaciones polinomiales, y en particular $y = x^p$ (p entero positivo), en la construcción de ideas y métodos del cálculo infinitesimal.

12 En el lenguaje moderno se puede identificar estos caracteres cósicos con la segunda potencia, la tercera potencia… de la incógnita.

13 Es decir, si se coloca la progresión aritmética que representa el número de multiplicaciones de la base y la progresión geométrica que representa las potencias, se tiene que la adición (resta) en la parte superior (la serie aritmética) corresponde a la multiplicación (división) de la serie de abajo (geométrica):

2,	3,	4,	5,	6,
4,	8,	16,	32,	64,

A la relación expresada en el enunciado anterior la abreviaremos, en lo sucesivo, como *la relación entre la progresión aritmética y geométrica* (relación PA-PG).

regla operativa referente a la relación entre la progresión aritmética y geométrica. Lo anterior está expresada en los siguientes términos (Meavilla, 1993, p.72) (se conserva el español original):

> "Y cuando tu querras multiplicar vna dignidad, grado, o carácter con otro, mira lo que esta encima de cada uno y junta lo simplemente, y aquello que verna, mira encima de qual carácter estara: tal diras que procede de tal multiplicacion".

Así al utilizar la Tabla 3 se pueden hacer, por ejemplo, las multiplicaciones contenidas la Tabla 4.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
φ	χ	ξ	ζ	ξξ	β	ξζ	*b*β	ξξξ	ζζ

Tabla 3. *Caracteres cósicos de Aurel y la relación PA-PG*

Notación de Aurel	
8ξ 2χ ——— 16ζ	23β 4φ ——— 92β
13ξξ 2ξξ ——— 26ξξξ	50φ 6ξ ——— 300ξ

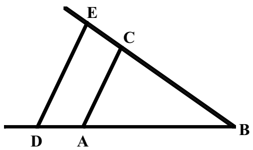
Tabla 4. *Multiplicaciones en la notación de Aurel*

El ejemplo de Marco Aurel señala la necesidad, para incluir a los números dentro de la operatividad de los caracteres cósicos, de convenir la existencia de un neutro multiplicativo que ahí no es identificado con el número uno.

En el marco de la representación gráfica de las variables algo semejante a lo anterior fue construido por Descartes en su *Géométrie* (1637). Ahí, por ejemplo, el producto de dos longitudes aparece como una longitud y ya no más, según la tradición euclidiana, como una superficie. En la interpretación de Descartes se encuentra lo que podríamos llamar la "linealización" de la aritmética (Dhombres, 2000); ya que se establecía la correspondencia que existe entre longitudes geométricas y números. La necesidad básica es que la correspondencia fuera operatoria, es decir que las operaciones sobre los números (la adición, la sustracción, la multiplicación, la división y la extracción de raíces son las operaciones enumeradas por Descartes) correspondan con operaciones con longitudes geométricas (representadas por longitudes en el plano).

Para que esta correspondencia pueda ejercerse es necesario que las operaciones con los segmentos sea cerrada (que el producto de dos segmentos sea otro segmento, por ejemplo). La elección de Descartes consiste en usar la construcción de la cuarta proporcional y la identificación, como convención, de una longitud unitaria con el número 1; así el referencial se muestra por la unidad algebraica del cálculo; el elemento neutro de la multiplicación – como se le llamaría más tarde – proporciona el referencial que requiere la razón (Descartes, 1997/1637):

> “Como la Aritmética consiste sólo en cuatro o cinco operaciones, a saber, suma, resta, multiplicación, división y la extracción de raíces, que puede interpretarse como una especie de división, de manera que, en la Geometría, para encontrar las líneas requeridas es meramente necesario sumar o restar otras líneas; o de otra forma, tomando una línea que llamare unidad para relacionarla tanto como se pueda a números, y que, en general, puede escogerse arbitrariamente, y habiendo dado dos líneas más, encontrar una cuarta que será a una de las líneas dadas como la otra es a la unidad (que es lo mismo que la multiplicación) […] Por ejemplo, tómese AB como unidad, y sea requerida para multiplicar BD por BC. Sólo tengo que unir los puntos A y C, y trazar DE paralela a CA; entonces BE es el producto de BD y BC”. (p. 13).



Es interesante señalar el papel de la unidad cuando los números fueron considerados como fundamentales en las matemáticas. Euler por ejemplo, en sus *Elements of Algebra* (1984 /1770) sentencia:

> “4. Entonces la determinación, o la medida de todos los tipos de magnitud, se reduce a lo siguiente: se fija a placer una cantidad conocida de la misma especie que se busca determinar y se considera a esta como la *medida* (*measure*) o *unidad* (*unit*); entonces se determina la proporción de la magnitud propuesta con esta medida. Esta proporción siempre puede ser representada por números, y los números no son otra cosa que la proporción de una magnitud arbitrariamente asumida como unidad” (p. 2).

5.2. Unificación del cálculo según Leibniz

Es significativo hacer una somera revisión de los avances de Leibniz para *unificar* el cálculo diferencial e integral. La idea central está basada en la observación de algunas analogías con respecto a los operadores d y $\int$ y las reglas operativas de los exponentes al convenir la interpretación de la integral como la diferencia *menos uno*.

En una carta dirigida a L´Hospital en 1695 (Leibniz, 1971) se expresa de la siguiente manera en relación al libro de L´Hospital (traducción libre del francés original): “La base del Método de Diferencias de su escrito, produce, Monsieur, virtualmente el Método de las Sumas, ya que en efecto yo no distingo los dos cálculos. De esta manera su escrito será una introducción a ambos cálculos en donde uno se considera el recíproco del otro”. La idea en que se basó Leibniz fue precisamente en la operatividad del álgebra de las potencias de las variables. Así, por ejemplo, él notó la similitud del desarrollo del binomio a la n-ésima potencia con el cálculo de de n-ésima diferencial del producto de dos variables (Leibniz, 1971), conocida en nuestros días como el desarrollo de Leibniz, que se muestra en la Tabla 5.

$p^0\overline{x+y}$	$p^0x.p^0y$	1
$p^1\overline{x+y}$	$1.p^0xp^1y+1.p^1xp^0y$	$1y+1x$
$p^2\overline{x+y}$	$1.p^0xp^2y+2.p^1xp^1y+1.p^2xp^0y$	$1y^2+2xy+1x^2$
$p^3\overline{x+y}$	$1.p^0xp^3y+3.p^1xp^2y+3.p^2xp^1y+1.p^3xp^0y$	$1y^3+3xy^2+3x^2y+1x^3$

d^0xy	$d^0x.d^0y$	xy
d^1xy	$1.d^0xd^1y+1.d^1xd^0y$	$1xdy+1ydx$
d^2xy	$1.d^0xd^2y+2.d^1xd^1y+1.d^2xd^0y$	$1xddy+2dxdy+ddxy$
d^3xy	$1.d^0xd^3y+3.d^1xd^2y+3.d^2xd^1y+1.d^3xd^0y$	$1xd^3y+3dxddy+3ddxdy+1d^3xy$

Tabla 5. Analogía n-ésima diferencial del producto vs. n-ésima potencia de la suma

A partir de esta analogía uso el binomio de Newton para establecer la siguiente serie que ya había sido construida, por otras técnicas, por él y Bernoullí (*series universalissima*) (Leibniz, 1971):

> Ya que de otra forma esta carta quedaría incompleta, ahora haré algunos señalamientos sobre la analogía entre las potencias y las diferencias, por ejemplo, $p^{-1}\overline{x+y} = \frac{1}{x+y} = \frac{1}{x} - \frac{y}{xx} + \frac{yy}{x^3} - \frac{y^3}{x^4}$ etc. $=$
>
> $p^{-1}x.p^0y - p^{-2}x.p^1y + p^{-3}x.p^2y - p^{-4}x.p^3y$ etc. De este modo
>
> $\int\overline{xy} = d^{-1}\overline{xy} = d^{-1}x.d^0y - d^{-2}x.d^1y + d^{-3}x.d^2y - d^{-4}x.d^3y$ etc.
>
> Ahora en lugar de la letra x ponemos dx y en vez se $d^{-\cdot\cdot}$ ... $d^{-\cdot\cdot}$ ponemos $\int^{\cdot\cdot}$ tenemos que:
>
> $\int\overline{ydx} = yx - dy\int x + d^2y\int\int x - d^2y\int^3 x$ etc.

Es útil señalar, que si bien la interpretación anterior no es adecuada desde el punto de vista de los operadores univaluados (entendidos estos como funciones que toma por argumentos otras funciones) debido a que la integral indefinida de una función es una familia de funciones, ésta fue usada para explorar problemas (y por tanto puede ser considerado un conocimiento funcional), como por ejemplo en la solución de ecuaciones diferenciales. Tomemos el caso de la ecuación diferencial $y' + y = x^2$. Utilizando la notación con operadores la ecuación queda como $(D+1)y = x^2$ Ahora “despejando” y “desarrollando” en serie de potencias tenemos que:

$$y = \frac{1}{1+D}(x^2) = (1 - D + D^2 - D^3 + D^4 - \ldots)(x^2) = x^2 - 2x + 2$$

La cuál es efectivamente una solución[14].

---

[14] Queda claro que la limitante de este método es aquel relativo la convergencia de series de funciones.

5.3. Orden y operatividad de números negativos vía la variación

Dentro de la organización axiomática de las matemáticas la operatividad de los números queda establecida a través de los axiomas de campo. A partir de esos axiomas y algunas definiciones es posible demostrar, por ejemplo, que $(-a)(-b)=ab$ o que $(a/b)+(c/d)=(ad+bc)/(bd)$. Esta perspectiva es producto de la aritmetización de las matemáticas; es decir considerar la axiomatización de los números reales para fundamentar las matemáticas.

Desde la perspectiva de construcción de conocimiento que aquí se presenta cabe preguntarse cómo es posible construir la operatividad de los números. Está reflexión nos ha llevado a construir hipótesis de construcción de conocimiento en relación a procesos de convención matemática y otras nociones como la de variación. Al respecto tenemos el siguiente marco que plantea la posibilidad de una *resignificación* del orden y operatividad de números con signo a través de la variación.

Orden: ¿Por qué -3>-4?

- 4>3
- Se desea que la relación de orden de los números se cumpla cuando se resta en cada miembro de la relación.
- 4-7>3-7
- Entonces se debe convenir que -3>-4

Operatividad: ¿Por qué -3(-2)=6?

- y = 15-2(x)
- Evaluando construimos una tabla para tomando x = 1,2,3,4,5

x	1	2	3	4	5
y	13	11	9	7	5

- Notando que Δx=1 y Δy=2 , es posible continuar la tabla sin evaluar de la siguiente manera:

x	-2	-1	0	1	2
y	19	17	15	13	11

- Sustituyendo en la fórmula los valores encontrados por la variación tenemos: 19 = 15 -2(-3) -3(-2)=6.
- Para que la variación se conserve es necesario convenir que -3(-2)=6.

5.4. Construcción de las convenciones de los exponentes vía la variación

- ¿Por qué $2^0=1$?
- $y=2^n$
- Evaluando construimos una tabla para tomando $n=1,2,3,4,5$

n	1	2	3	4	5
y	2	4	8	16	32

•Notando que Δx=1 y $y_{final}/y_{inicial}$= 2, es posible continuar la tabla sin evaluar de la siguiente manera:

x	-2	-1	0	1	2
y	1/4	1/2	1	2	4

•Sustituyendo en la fórmula los valores encontrados por la variación tenemos que $2^0=1$.

•Para que la variación se conserve es necesario convenir que $2^0=1$.

6. A manera de conclusión

En este escrito se ha proporcionado una articulación de la noción de convención matemática, en tanto proceso de construcción de conocimiento, con la aproximación socioepistemológica en Matemática Educativa. Se ha explicado el origen de este proceso a través de la práctica social de integración sistémica de conocimientos. Por su naturaleza esta práctica se encuentra en el plano de la teorización matemática, entendiendo por esto a la elaboración de conceptos interrelacionados que intentan describir y explicar un objeto de estudio, el cuál es, en este caso el sistema de conocimientos aceptados. En particular se ha descrito un mecanismo que construye los significados y funcionalidad de los convencionalismos relativos a los exponentes y se han presentado otros ejemplos que dan evidencias del funcionamiento del proceso como constituyente en la construcción de conocimiento matemático. Con respecto a éstos últimos citemos, por ejemplo, la identificación cartesiana de la unidad de medida con el neutro multiplicativo con el objetivo de "linealizar" las operaciones entre magnitudes geométricas.

De esta manera, en este artículo se proporcionan evidencias que dan cuenta de un "estatus metamatemático" (la convención matemática) no considerado en otras investigaciones. Al respecto recordemos, por ejemplo, nuestra afirmación de que la igualdad $2^0=1$ *no se puede demostrar* sino se *debe convenir.* Así, nuestra investigación muestra la presencia de conocimientos, dentro de la matemática escolar, que poseen la complejidad propia de tal estatus y que es la fuente de diversos fenómenos en los niveles cognitivo (concepciones de estudiantes y profesores), didáctico (diversas explicaciones en clase y en libros de texto) y epistemológico (ejemplos de construcción de conocimiento). Es por ello que la investigación contribuye al entendimiento del funcionamiento del conocimiento matemático desde la perspectiva socioepistemológica.

Como vimos en este artículo, nuestro análisis socioepistemológico produce ideas para la conformación de escenarios de resignificación de algunos contenidos matemáticos y por tanto proporciona elementos para el rediseño del discurso matemático escolar. Los ejemplos aquí presentados, referentes a la variación, son muestra de ellos y señalan el camino de investigaciones futuras que busquen indagar aspectos convencionales presentes en la construcción de conocimiento matemático.

Bibliografía

Anfossi, A. y Meyer, F. (1985). *Curso de álgebra*. México: Editorial Progreso.

Arrieta, J. (2003). *Las prácticas de modelación como proceso de matematización en el aula.* Tesis de doctorado. México: Cinvestav-IPN.

Bos, H. J. M. (1975). Differentials, Higher-Order Differentials and the derivative in the Leibnizian Calculus. *Archive for History of Exact Sciences. 14*, 1-90.

Buendía, G. (2003). *Una epistemología del aspecto periódico de las funciones en un marco de prácticas sociales (Un estudio socioepistemológico).* Tesis de doctorado. México: Cinvestav-IPN.

Buendía, G. y Cordero, F. (en prensa). Prediction and the periodical aspect as generators of knowledge in a social practice framework. A socioepistemological study. *Educational Studies in Mathematics.*

Cantoral, R. (2002). La sensibilidad a la contradicción: Un estudio sobre la noción de logaritmo de números negativos y el origen de la variable compleja. En C. R. Crespo (Ed.). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. Volumen XV (pp. 35-42)*. México: Editorial Iberoamérica.

Cantoral, R. y Farfán, R. (2003). Mathematics Education: An vision of its evolution. *Educational Studies in Mathematics 53* (3), 255 – 270.

Cantoral, R. y Farfán, R. (2004). La sensibilité à la contradiction : logarithmes de nombres négatifs et origine de la variable complexe. *Recherches en Didactique des Mathématiques 24* (2.3), 137 - 168.

Conalep-Sep. (1988). *Curso propedéutico. Física y Matemáticas* (Vol. II). México: Colegio Nacional de Educación Profesional Técnica.

Cordero (2001).La distinción entre construcciones del Cálculo. Una epistemología a través de la actividad humana. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 4*(2), 103-128.

Chevallard, Y. (1997a). L'analyse des practiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques 19*(2), 221-266.

Chevallard, Y., (1997b). *La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado.* Argentina: Editorial Aique.

Confrey, J. y Dennis, D. (2000). La Creación de Exponentes Continuos: un estudio sobre los métodos y la epistemología de John Wallis. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 3*(1), 5-31.

Descartes, R. (1997). *La Géométrie*. (edición facsimilar) Colección Clásicos de la Ciencia. México: IPN-Limusa. (Trabajo original publicado en 1637)

Dhombres, J. (2000). La banalidad del referencial cartesiano. En C. Álvarez y R. Martínez (Coord.) *Descartes y la ciencia del siglo XVII (pp. 69 – 98)*. México: UNAM-Siglo XXI Editores.

Euler, L. (1984). *Elements of Algebra.* EEUU: Springer-Verlag. Trad. de por John Hewlett (Trabajo original publicado en 1770, Vollständige Anleitung zur Algebra)

Farfán, R. (1997). *Ingeniería Didáctica: Un estudio de la variación y el cambio*. México: Editorial Iberoamérica.

Ferrari, M. y Farfán, R. M. (2004). La covariación de progresiones en la resignificación de funciones. En L. Díaz (Ed.). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa Vol. XVII.* (pp. 145 -149).

Leibniz, I. (1971). L´Hospital und Leibniz. En C. I. Gerhart (Comp.) *Leibniz Mathematishce Shriften* (Vol. II, pp. 269-280). Alemania, Hildesheim: Georg Olms Verlag.

Martínez, G. (2000). *Hacia una explicación sistémica de los fenómenos didácticos. El caso de las convenciones en el tratamiento de los exponentes no naturales*. Tesis de Maestría. México: Cinvestav-IPN.

Martínez, G. (2002). Explicación sistémica de fenómenos didácticos ligados a las convenciones de los exponentes. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 5*(1), 45-78.

Martínez, G. (2003). *Caracterización de la convención matemática como mecanismo de construcción de conocimiento. El caso de su funcionamiento en los exponentes*. Tesis de doctorado. México: CICATA-IPN.

Meavilla, V. (1993). Una aproximación al “Libro primero de arithmetica algebratica” de Marco Aurel. En T. Rojano y L. Puig (Eds.), *Memorias del tercer simposio internacional sobre investigación en educación matemática. Historia de las ideas algebraicas. Valencia, España 1991.* (pp. 65-95). México: Departamento de la didáctica de la matemática Universitat de Valencia –PNFAMP-México.

Piaget, J. y Garcia, R. (1991). *Psicogénesis e historia de la ciencia*. México: Siglo XXI.

Poincaré, H. (1984). *Filosofía de la ciencia*. Serie Nuestros Clásicos No. 32. México: Universidad Nacional Autónoma de México.

Rees, P. K., Sparks, F. W. y Sparks Rees C.(1982). *Álgebra contemporánea*. México: McGraw-Hill.

Rosado, P. (2004). *Una resignificación de la derivada. El caso de la linealidad del polinomio en la aproximación socioepistemológica.* Tesis de Maestría. México: Cinvestav-IPN.

Sierpinska, A. (1994). *Understanding in Mathematics.* Londres: Falmer Press.

Struik, D. J. (1986). *A source book in mathematics 1200-1800*. EEUU: Princeton University Press.

Vigotsky, L . S. (1996). *Pensamiento y lenguaje*. México: Ediciones Quinto Sol.

Wentworth, J y Smith, D. E.(1985). *Elementos de álgebra*. México: Editorial Porrúa.

Wertsch, J. (1993) *Voces de la Mente*. España: Visor Distribuciones, S.A

Dr. Gustavo Martínez
Centro de Investigación en Matemática Educativa
Facultad de Matemáticas
Universidad Autónoma de Guerrero
México

Email: gmartinez@cimateuagro.org