# Árboles de transiciones etiquetadas en cálculo de probabilidades

François Pluvinage*

*Al compañero Jesús Alarcón Bortolussi,*
*alias Papini, en recuerdo*

En 1997 sufrimos la pérdida de nuestro amigo mexicano Jesús Alarcón Bortolussi, alias *Papini*, quien había dedicado una parte importante de sus reflexiones a los problemas que plantea la enseñanza de las probabilidades. Es difícil imaginar una personalidad tan poco conformista y al mismo tiempo tan rigurosa como la de *Papini*. Quizá esos rasgos de carácter sólo son antinómicos en primera instancia; si bien el funcionamiento de la sociedad está basado en reglas que no siempre son racionales, y que dicha dificultad no pueda superarse tan pronto, el rigor implica un cierto no conformismo.

Un ejemplo que me impactó fue que *Papini* tenía temor a los viajes en avión y se desplazaba a través de la República Mexicana en autobús; el ahorro que lograba lo reinvertía en la compra de material pedagógico. No sé cómo le hacía para manejar los reglamentos presupuestales para llegar a ese resultado; sin embargo, pude ver aquí y allá equipos computacionales cuya fuente de financiamiento, me aseguraron, era el excedente de los gastos de viaje de *Papini*. Su tesis[1] trataba de la enseñanza de las probabilidades, pero nunca quiso admitir que había realizado grandes avances en la comprensión de aprendizajes probabilistas porque si, por ejemplo, había identificado muy bien dónde se producía el divorcio entre proporcionalidad y probabilidades en Laplace (las relaciones de los *casos favorables* con los *casos posibles*), consideraba que necesitaba de complementos sobre los conceptos frecuenciales del público interrogado.

*Fecha de recepción: Septiembre de 2004 / Fecha de aceptación: Febrero de 2005*

* IREM, Université Louis Pasteur. Strasbourg.

[1] Alarcón Bortolussi, Jesús (1982). *Appréhension de situations probabilistes par des élèves*. Thèse de 3er. Cycle. IREM-Université Louis Pasteur, Strasbourg, France.

### Dos libertades que se tomó este texto con respecto a las normas para elaborar un artículo

Una regla que merece absoluto respeto por parte de la didáctica es no fabricar matemáticas particulares para la enseñanza. No obstante, un ejemplo que muchas veces ha sido denunciado por infringir dicha norma es la presentación de una *teoría de conjuntos* que se reduce a encerrar algunos objetos mediante el trazo de una curva cerrada simple (para diseñar lo que se conoce como *patata* de conjunto). De este modo, los objetos constituyen un *conjunto* y, a partir de los *conjuntos* determinados por tal método, podemos pensar en operaciones que ensamblen, tales como la complementación, la reunión y la intersección. Pero –sin mencionar la imposibilidad de tratar así el caso de conjuntos infinitos, o sólo el de los “grandes finitos”–, esta reducción se enfrenta a dificultades evidentes cuando tenemos necesidad de considerar conjuntos cocientes, e incluso surge una verdadera contradicción cuando deseamos presentar a los ordinales Ø, {Ø}, {Ø, {Ø}}, {Ø, {Ø}, {Ø, {Ø}}}... En efecto, un ordinal dado es a su vez elemento y subconjunto del ordinal siguiente, lo cual es incompatible con la presentación demasiado rudimentaria del *encerramiento*.

En este artículo presentamos árboles para el cálculo de las probabilidades. Si bien los árboles son una herramienta para los especialistas en varios campos de las matemáticas, también podrían aplicarse en los diagramas de Venn (las *patatas* de las que hemos hablado anteriormente). Aunque pensamos introducir sólo una disciplina de empleo de los árboles y no una utilización reductora, debería de solicitarse la observación de matemáticos especialistas en las probabilidades, antes de que podamos asegurar que nuestra presentación realmente es aceptable. Mucho antes de este trabajo se desarrollaron algunos argumentos; sin embargo, no satisficieron totalmente la necesidad de justificación indicada.

Una segunda obligación muy general por cuestiones didácticas es la de apoyarse, si no en experimentos, por lo menos en observaciones de personas. Aquí recurrimos a la investigación de Jesús Colín sobre la enseñanza de las probabilidades dentro del marco de la enseñanza secundaria en México (sus resultados se pueden consultar en la página electrónica www.cofaa.ipn.mx/dedict/ESIMEZAC.htm); asimismo, a unos trabajos de grupos de los Institutes de Recherche sur l’Enseignement des Mathématiques (IREM), particularmente el de Estrasburgo. En un artículo al que se puede acceder a través de internet (http://irem2.u-strasbg.fr/spip/article_complet.php3?id_article=88) hay un experimento que se hizo en el salón de clase:

> Se partieron los estudiantes en dos grupos, A y B, cuya composición individual era desconocida del profesor. Cada estudiante del grupo A tenía que lanzar en casa una moneda cien veces y apuntar los resultados sucesivos en una hoja de papel marcada a su nombre; los del grupo B tenían que imaginar una sucesión “al azar” de los resultados de la misma experiencia, sin hacerla. Al día siguiente, a la simple vista de las hojas entregadas por los estudiantes, el profesor les dijo casi sin error quiénes pertenecían al grupo A y quiénes al B.

El experimento resulta pertinente para mostrar la eficacia de las probabilidades y ofrece al profesor la ventaja de que la regla de decisión es muy sencilla: *Si aparece en la hoja de resultados una sucesión de seis o más términos idénticos, se atribuye al grupo A; si no, al grupo B*. Para justificar tal criterio hace falta determinar la probabilidad de aparición de una sucesión de seis eventos idénticos o más, y este estudio se apoya en el diagrama de la Figura 1, derivado de árboles de probabilidad; representa los cambios de estado cuando de una sucesión de $n$ "volados" se pasa a una de $n+1$ "volados[2]".

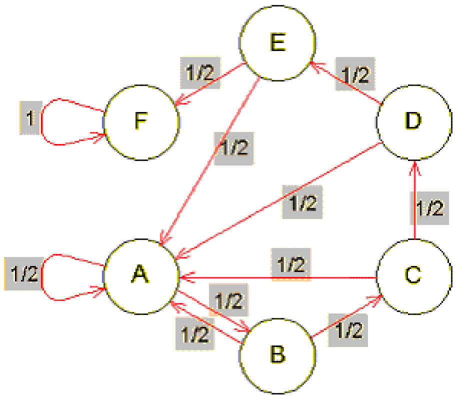



***Figura 1***

Por ejemplo, una sucesión que se ubica en el estado D acaba por cuatro resultados idénticos. Cuando se lanza la moneda otra vez, hay una probabilidad 1/2 de llegar a una sucesión acabada por cinco resultados idénticos y una probabilidad 1/2 de regresar al estado A. Los cálculos completos demuestran que la probabilidad de obtención de una sucesión de seis o más resultados idénticos después de cien "volados" sucesivos es un poco superior al 80%. La idea intuitiva del azar que tiene el ser humano le conduce a no imaginar tan largas sucesiones idénticas.

En este artículo se pretende explotar con precisión el funcionamiento de los registros de expresión que serán mostrados más adelante. Como las investigaciones nos dieron referencias sólidas en torno al interés didáctico de un procedimiento de tal índole, nos pareció posible presentar el punto actual de las reflexiones, sin poner en riesgo la derogación de la forma de rigor de nuestro amigo *Papini*.

## El particularismo frecuente de las probabilidades y su interpretación habitual

Antes de examinar un funcionamiento en registros, es conveniente señalar que la enseñanza de las probabilidades se enfrenta a un fenómeno electivo muy conocido por los profesores. Regularmente, hallamos que algunos estudiantes de preparatoria que son hábiles en áreas de las matemáticas tienen de grandes dificultades para entrar en los métodos de la probabilidad. Si bien, a fuerza de repeticiones, logran resolver los problemas que se les plantean, no se sienten realmente a gusto; de ahí que, cuando se enfrentan a alguna situación que sale de lo ordinario, ya no están seguros de sí mismos. Por el contrario,

[2] Juego de azar que consiste en tirar una moneda al aire. Cuando la moneda está aún en el aire, los participantes tienen que determinar qué lado quedará al descubierto. En algunos países a este juego se le conoce como "volada".

otros estudiantes descubren un gusto especial por las matemáticas que los problemas de áreas diferentes al cálculo de las probabilidades no les habían hecho sentir.

Por ejemplo, en un trabajo de Gerd Schubring[3] lo axiomático evoluciona en esa área paralelamente a las problemáticas encontradas. En los otros campos matemáticos, las definiciones y axiomas establecen de entrada el campo en el cual nos ponemos a trabajar; si hay un cambio es para entrar en un marco teórico muy diferente.

En el ámbito de las probabilidades, creemos que estamos trabajando dentro de un marco y, de manera brusca, nos damos cuenta de que es inadecuado, por lo cual es necesario retomar las definiciones mismas. Por ejemplo, nos acostumbramos a calcular esperanzas matemáticas como medios habituales y nos damos cuenta, al querer calcular la esperanza del número de partes de *cara o cruz* que se pone constantemente entre dos jugadores hasta que uno de los dos quede en la ruina[4] , que hay que meditar en ese punto de vista porque las partes pueden ser de duración indefinida.

## Otra interpretación en términos de funcionamiento de registros

En este artículo nos proponemos, sin rechazar completamente la hipótesis anterior, otra interpretación de ese particularismo de probabilidades, apoyándonos en las consideraciones generales que desarrolló Raymond Duval[5] sobre los tratamientos y conversiones inherentes a los registros de expresión. Mientras que los procedimientos favorecidos en otras áreas de las matemáticas son los tratamientos, es decir, las transformaciones internas en uno de los sistemas semióticos solicitados, las probabilidades (tal y como se presentan) comúnmente implantan conversiones de manera constante, esto es, transformaciones que hacen pasar de un sistema semiótico a otro.

¿Esto puede evitarse? Si la respuesta es afirmativa, ¿acaso una práctica de las probabilidades que recurra a tratamientos no sería susceptible de hacer que se moviera la situación paradigmática mencionada? Reparemos en que, si se lleva a cabo para despertar la reflexión en los alumnos a quienes les hubiera gustado el tema presentado como de costumbre, eso sería desalentador. La respuesta que podemos adelantar para la primera pregunta, efectivamente, es positiva.

Entonces, podemos aventurarnos, con prudencia, en la búsqueda de la segunda respuesta. Pero aquí es precisamente donde conviene experimentar con los alumnos, que es lo que aún queda porhacer. ¿Y qué decirle al lector que se sintiera insatisfecho? Que todavía está en libertad de considerar a este trabajo como

[3] Schubring, Gert (1989). La relation entre modelisations mathématiques et situations d'expérience pour le savoir probabiliste. *Annales de Didactique et de Sciences cognitives.* Strasbourg, France: IREM.

[4] Zaki, Moncef y Pluvinage, François (1991). Démarches de résolution et de simulation face au problème de la ruine d'un joueur. *Educational Studies in Mathematics 22* (2).

[5] Duval, Raymond (1995). *Semiosis et pensée humaine.* Peter Lang, CH-Bern.

un descriptivo de programa de investigación.

## Los árboles de probabilidades constituidos en verdadero registro

Vamos a prestar mayor atención a la representación de situaciones probabilistas con ayuda de árboles. Dicha representación, que ha sido objeto de reflexiones en el IREM de Estrasburgo[6], sirvió como base para la redacción de los programas de matemáticas concernientes al último año de preparatoria. Además de los diagramas de Venn, las representaciones en árboles al parecer pueden permitir tratamientos, a condición de que estén terminadas adecuadamente; de hecho, en lugar de mostrar conjuntos y elementos, representan *experiencias*. Sabemos, por ejemplo, que el concepto de independencia es más fácil de entender por experiencias que por eventos.

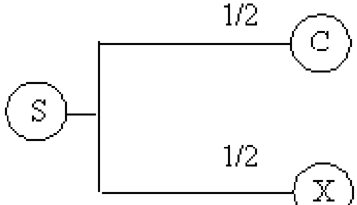
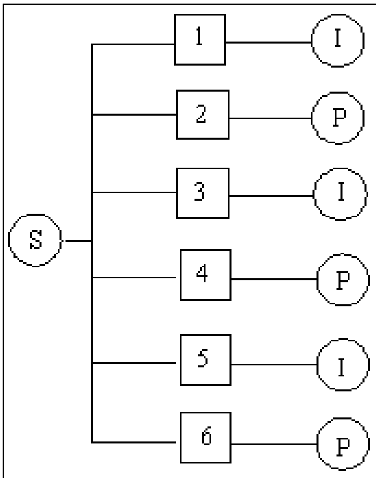



***Figura 2***

A manera de ilustración, ponemos la más simple de las experiencias que se presenta en forma de árbol: el juego de *cara o cruz*. Si se parte de la situación inicial ($S$), que se designa como evento seguro, llegamos a uno u otro de los eventos aleatorios, $C$ para **c** (cara) y $X$ para **x** (cruz), con la misma probabilidad de 1/2. Para este caso la Figura 2 es perfecta; sin embargo, ya no es verdadera para una experiencia un poco más complicada.




$$p(1) = p(2) = ... = p(6) = \frac{1}{6}$$

***Figura 3***

Consideremos la situación que plantea la Figura 3, en la cual se ha lanzado un dado y se toma la paridad del número de puntos que se obtienen. Esta situación es isomorfa a la anterior, pero su descripción precisa se da por un esquema en el cual aparecen los seis resultados posibles al lanzar el dado. Salvo que existiera una necesidad particular, evidentemente podemos reemplazarlo por un esquema idéntico al anterior, excepto por la denominación de eventos alcanzados, *P* y *I*, en lugar de *C* y *X*. Pero para hacerlo ya se habrá implantado una regla de aditividad de probabilidades. Es un tratamiento probabilista.

Según lo que menciona Raymond Duval (op. cit.) deseamos, por el contrario, contar con el medio de *separar* rigurosamente *la conversión*, es decir, la unión entre las reglas de representación utilizadas y las situaciones indicadas en la forma de una de las presentaciones usuales: enunciado, redacción, diagrama, tabla, etc., *y el tratamiento*, es decir, la aplicación de axiomas y resultados probabilistas. Por tal razón, preferimos el principio de que se introduzca a los *3* alumnos una manera más completa de *representar experiencias aleatorias,* con el riesgo de que se piense rápidamente en simplificaciones.

[6] Groupe «Probabilités», IREM de Strasbourg (1995). *Enseigner les probabilités en classe de Première*; (1996) *Enseigner les probabilités en classe de Terminale.*

Las propuestas de enseñanza que presentaron Claire Dupuis y Suzette Rousset-Bert[7] nos parecen que pueden dar lugar al desarrollo completo siguiente.

## Unidad apofántica

Para seguir respetando la terminología de Raymond Duval (op. cit., pp. 111-113), llamaremos *unidad apofántica* a la representación semiótica –considerada como completa– de una situación probabilista. Su esqueleto icónico, que aparece en la Figura 4, contiene segmentos en cuyos extremos hay discos destinados a recibir *designaciones de eventos* y, en medio de los segmentos, hay cuadrados destinados a recibir *denominaciones de segmentos*, también conocidas como *transiciones.*

El esquema quedará completo cuando se haya adjuntado, a esos eventos y transiciones, valores positivos o nulos $p_1$, $p_2$, $p_3$,... $p_n$, llamados *probabilidades* de transiciones, que están sujetas a que no pierdan sentido cuando se verifique la condición :

$$p_1 + p_2 + p_3 + ... + p_n = 1.$$

En resumen, nuestra unidad apofántica, que podemos llamar *árbol elemental completo*, está constituida de:

- Eventos o resultados
- Transiciones
- Probabilidades, sujetas a que todas sean positivas o nulas y de suma igual a 1

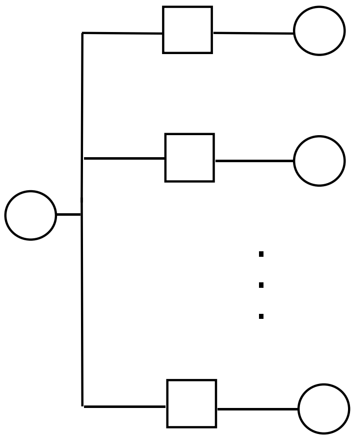


***Figura 4.*** Esqueleto icónico de representación probabilista

## Reglas de tratamiento para un solo árbol: suma e inversión

En lugar de la práctica que usualmente es propuesta por la enseñanza –aunque no se mencione–, donde se recurre a conversiones para el cálculo de probabilidades, sugerimos *tratamientos* sobre los árboles de probabilidad. A fin de ser concisos, aquí los indicamos, mas sin justificarlos con argumentos que daríamos a los alumnos, por ejemplo, respecto a un punto de vista frecuentista o laplaciano. Cabe recordar que no es lo bien fundado de las reglas el criterio de validez para los resultados, aunque sea el de su interés. Comenzamos por los tratamientos más simples, los que tienen un solo árbol.

[7] Dupois, Claire y Rousset-Bert, Suzette (1996). Arbres et tableaux de probabilités: analyse en termes de registres de représentation. *IREM 22.*

*Suma: caso general*

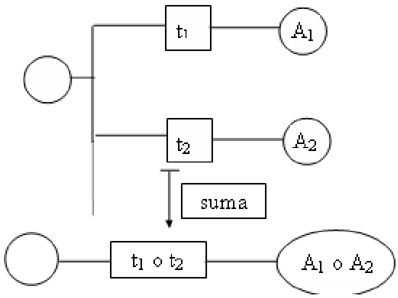
La Figura 5 ilustra la aplicación de la regla de suma de dos ramas. Para realizar la suma:

* Se reducen a una sola las dos ramas consideradas

* Se reemplazan los dos eventos $A_1$ y $A_2$ por un único evento, que llamamos «$A_1$ *o* $A_2$»

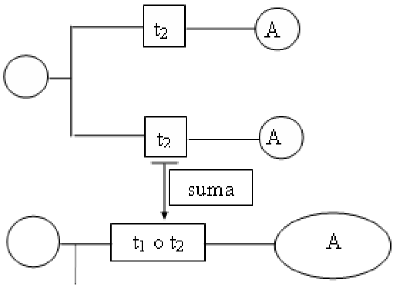
* Se reemplazan las transiciones $t_1$ y $t_2$ por una única transición llamada «$t_1$ o $t_2$»

* Si $p_1$ y $p_2$ designan a las probabilidades asignadas a $t_1$ y $t_2$, la probabilidad para asignar a «$t_1$ *o* $t_2$» es $p_1 + p_2$




$p(t_1 \text{ o } t_2) = p_1 + p_2.$

**Figura 5**




$p(t_1 \text{ o } t_2) = p_1 + p_2.$

**Figura 6**

*Caso particular*

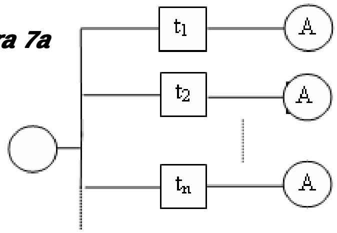
En caso de que dos ramas lleguen a un mismo evento A, no cambia nada de lo anterior, excepto el hecho de que A reemplace a $A_1$, $A_2$ y «$A_1$ o $A_2$» (Figura 6). Si $p_1$ y $p_2$ designan a las probabilidades asignadas a $t_1$ y $t_2$, la probabilidad que se asignará a «$t_1$ o $t_2$» siempre es $p_1 + p_2$.

Evidentemente, al igual que para la suma de números, podemos extender a varias ramas lo que se hizo para dos.

*Inversión*

Podemos *invertir* un árbol relativamente a un evento A, *a condición* de que se retengan *todas* las ramas que tengan por extremo a ese evento A. Eso es lo que indican la Figura 7a, que representa la situación inicial, y la 7b, que ilustra la situación después de la inversión.

**Figura 7a**

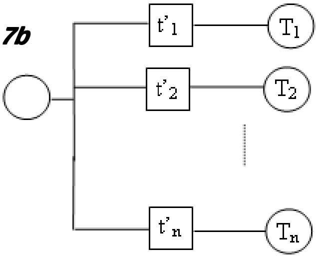



$p_1 = p(t_1),\ p_2 = p(t_2), \ldots\ p_n = p(t_n)$

En la Figura 7b, $T_i$ designa al evento que consiste en *ser pasado por $t_i$*, y se define

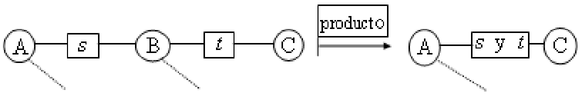
$$p(t'_i) = \frac{p_i}{p_1 + p_2 + \ldots + p_n}$$

**Figura 7b**



## Encadenamiento de árboles por concatenación: regla de producto

Cuando el punto de llegada para una experiencia se toma en cuenta como el de partida para una experiencia posterior, se habla de encadenamiento. Entonces, la regla de producto se representa de la manera que aparece en la Figura 8.




$$p(s \text{ y } t) = p(s)p(t)$$

***Figura 8***

## Un ejemplo simple de puesta en marcha

No pretendemos que en la enseñanza las reglas presentadas puedan pasar por alto las justificaciones. Ya habíamos hecho alusión a esto. Sin embargo, lo que nos interesa es que, una vez admitidas las reglas de una u otra forma, la resolución de los problemas se hace comparable a la que ocurre, por ejemplo, en álgebra. Consideremos el enunciado siguiente: *Lanzamos un dado. Si indica 1 ó 2, se tira en una primera urna que contiene 1 bola blanca y 3 negras. Si indica 3 ó más, se tira en una segunda urna que contenga 5 bolas blancas y 1 negra. Se pide determinar la probabilidad que se ha tirado en la primera urna, sabiendo que se ha sacado una bola blanca.*

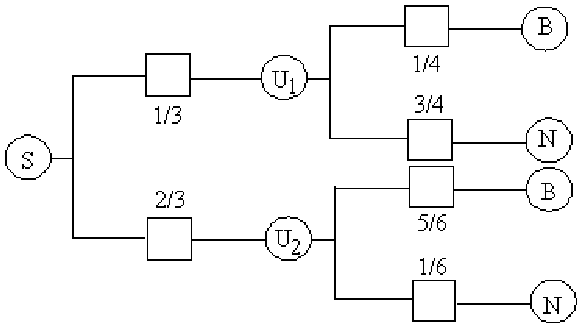



***Figura 9***. Representación de los datos de un enunciado

La Figura 9 representa la situación descrita por el enunciado. Para solucionar el problema, se trata de hallar la manera de aplicar una sucesión conveniente de reglas entre las que se han señalado, es decir, las de suma, inversión y producto. Nosotros podemos aplicar la regla de producto, ya que hay dos tiros sucesivos, mientras que la indicación de salida de una bola blanca nos invita, posteriormente, a usar la regla de inversión para ese color. De esa manera, obtenemos:

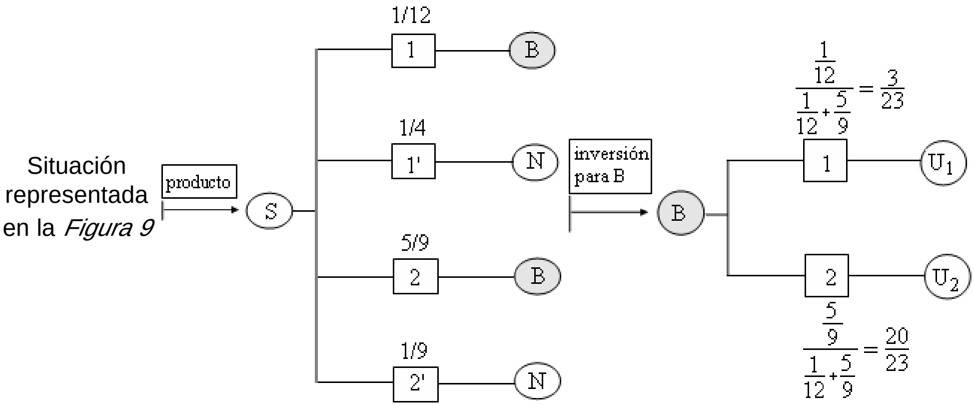



***Figura 10***

Entonces, la respuesta se obtiene directamente: $p_B(U_1) = \frac{3}{23}$. ¿Qué pensaría de esto nuestro amigo *Papini*? ¿Que es lo suficientemente o demasiado algebrizado?

## Bibliografía

Colín Miranda, Jesús (1998). El aprendizaje de los conceptos de estocásticos implicados en la distribución binomial mediante la utilización de representaciones y contextos diferentes. En http://www.cofaa.ipn.mx/dedict/ESIMEZAC.htm.

Vogel, Nicole (2003). Peut-on imiter le hasard? En http://irem2.u-strasbg.fr/spip/article_complet.php3?id_article=88.

• **Françoise Pluvinage**
Institut de Recherche sur l´Enseignement des Mathématiques
Université Louis Pasteur
Strasbourg, Francia

**E-mail** : pluvin@math.u-strasbg.fr