Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa
Vol. 7, Núm.3, noviembre, 2004, pp. 195-218.

Acerca del análisis de funciones a través de sus gráficas: Concepciones alternativas de estudiantes de bachillerato[1]

Crisólogo Dolores Flores[2]

RESUMEN

Este artículo centra su atención en concepciones alternativas de estudiantes de bachillerato, las cuales fueron reveladas mediante un cuestionario en el que se plantearon preguntas sobre el análisis de funciones a través de sus gráficas cartesianas. Las preguntas se refirieron a la determinación de intervalos de crecimiento, decrecimiento, puntos de estabilización y coordinación de propiedades de ubicación y comportamiento. En la investigación participaron 40 alumnos de bachillerato, a quienes se les aplicó el cuestionario después de que habían estudiado el tema de graficación, sin usar derivadas. Las concepciones alternativas detectadas indican que una parte significativa de los estudiantes consideran que una función tiene imágenes positivas si su gráfica tiene abscisas positivas, sin importarles el signo de sus ordenadas; tales ideas análogas se hallaron para las funciones con imágenes negativas. Así, suponen que una función tiene puntos estacionarios donde la gráfica corta al eje x, o bien cuando sus abscisas son equivalentes a cero. También se identificó una relación fuerte de concomitancia, por un lado, entre la función creciente y con imágenes positivas, por otro, entre la función decreciente y con imágenes negativas.

PALABRAS CLAVE: Análisis de funciones, gráficas, concepciones alternativas, pensamiento variacional.

On the analysis of functions through its graphs: alternative conceptions of secondary level students

ABSTRACT

This article is focused to center the alternative conceptions of students at a secondary level which are found in answers to questions of a questionnaire about the analysis of functions trough its Cartesians graphics. The proposed questions consist on the determination of areas or increasing intervals, decrease, stabilization and coordination of the simultaneous properties, so much on the plan location or the behavior itse1f. This research was carried out with forty students at the secondary level, just after they have studied the topics of graphics and analysis of functions without using derivatives. The alternatives conceptions found show us that an important part of the students consider that a function is positive if its graphic has positive

**Fecha de recepción: octubre de 2003.*

[1] Este artículo es uno de los resultados del Proyecto GUE-2002-CO-7626, financiado por el Fondo Mixto Conacyt - Gobierno del Estado de Guerrero, México.

[2] Centro de Investigación en Matemática Educativa, Universidad Autónoma de Guerrero, México.

abscissas, no matter the signs of its ordinates, analogous conceptions were found for negative functions, they considered that a function has *station points* where the graphics cut the x axis, or when has abscissas equal to zero. Moreover we noted that, on the one hand there is a strong relationship of concomitance between the increasing function and the positive function, on the other hand between decreasing function and negative function.

KEY WORDS: Analysis of functions, graphics, alternatives conceptions, variational thinking

Análise de funçoes por meio de seus gráficos: concepçoes alternativas de estudantes de ensino médio

RESUMO

Este artigo centra sua atençáo nas concepçoes alternativas de estudantes de ensino médio, as quais foram reveladas mediante um questionário em que se apresentaram questões sobre a análise de funções por meio de seus gráficos cartesianos. As questões se referiam à determinação de intervalos de crescimento, decrescimento, pontos de estabilização e coordenação de propriedades de localização e comportamento. Na pesquisa participanim 40 alunos de ensino niédio. 0 questionário foi aplicado depois que haviam estudado o tema de esboço gráfico, sem o uso de derivadas. As concepções alternativas detectadas indicam que uma parte significativa dos estudantes consideram que uma função possui imagens positivas se seu gráfico possui abscissas positivas, sem prestar a atenção no sinal suas ordenadas. Tais idéias análogas se encontraram para as funções com imagens negativas. Assim, supõem que uma função possui pontos estacionários onde o gráfico corta o eixo x, oxi quando suas abscissas são equivalentes a zero. Também se identificou uma relação forte de concomitância, por um lado, entre a função crescente e com imagens positivas, por outro, entre a função decrescente e com imagens negativas.

PALAVRAS CHAVE: Análise de funções, gráficos, concepções alternativas, pensamento variacional.

À propos de 1'analyse des fonctions moyennant ses graphiques: conceptions alternatives d'étudiants du Lycée

RÉSUMÉ

Cet article centre 1' attention dans les conceptions alternatives d' étudiants du lycée, les quelles ont été révélées moyennant un questionnaire où ont été versées des questions sur l' analyse des fonctions à travers ses représentations graphiques cartésiennes. Les questions versaient à la détermination des intervalles de croissances, points d' stabilisation et coordination des propriétés de repère et comportement. Dans la recherche ont participé 40 élèves du lycée aux quels le questionnaire fut appliqué après ils avaient étudié les représentations graphiques, dérivées exclues. Les conceptions alternatives détectées indiquent qu' une proportion significative des élèves considèrent qu'une fonction a des images positives si son graphique a des abscisses positives sans importer le signe des ses ordonnées ; telles analogies ont été trouvées pour les fonctions avec des images négatives. Ainsi, ils supposent qu' une fonction a des points stationnaires où la graphique coupe l' axe des *x*, où bien quand ses abscisses sont équivalentes à zéro. Aussi on a identifié une relation de forte concomitance, par un coté, entre la fonction croissante et avec des images positives, par l' autre coté entre la fonction décroissante et avec des images négatives.

MOTS CLÉS: Analyse des fonctions, graphiques, conceptions alternatives, pensée variationelle.

1. Introducción

El análisis de funciones es un tema que abarca el currículum matemático del preuniversitario. Así se puede constatar en Howson (1991) ; IBERCIMA (1992); NCM (2000) y SEP, SEIT, DEGTI y COSNET (1988). Dicho tema generalmente es abordado por los jóvenes mexicanos de bachillerato en el curso de Cálculo Diferencial[3], inclusive hasta con las herramientas que proveen los procesos infinitos, como el límite y la derivada. ¿Pero qué sucede con las concepciones de los alumnos durante el proceso de análisis de funciones?

A lo largo de los últimos tres años nos hemos dedicado a investigar esas concepciones entre estudiantes de bachillerato y principiantes universitarios, así como entre profesores de matemáticas (Dolores y Guerrero, 2002), de Física y futuros maestros de esta asignatura. Asumimos de entrada que poder analizar el comportamiento de funciones es una de las habilidades básicas para el desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional, que precisa -como señalan Cantoral y Farfán (200%- de procesos temporalmente prolongados, a juzgar por los tiempos didácticos habituales. Supone, por ejemplo, del dominio de la matemática básica y de los procesos del pensamiento asociados, pero exige simultáneamente de diversas rupturas con los estilos del pensamiento prevariacional, como el algebraico.

Esa ruptura, además, no puede ser sostenida exclusivamente al seno de lo educativo con base en un nuevo paradigma de rigor que se induce simplemente de la construcción de los números reales como fundamento de la aritmetización del análisis, ni tampoco puede sustentarse sólo en la idea de aproximación, sino que debe ayudar también a la matematización de la predicción de los fenómenos de cambio. Para acceder al pensamiento y lenguaje variacional se requiere, entre otras cosas, del manejo de un universo de formas gráficas extenso y rico en significados por parte del que aprende. Luego entonces, comprender los procesos de interpretación de las gráficas de funciones puede contribuir al esclarecimiento del desarrollo de esta forma de pensamiento entre los estudiantes.

2. Planteamiento del problema

Varias investigaciones han reportado las dificultades y errores que cometen los estudiantes al construir, comunicar o extraer información de las gráficas (Wainer, 1992; Fabra y Deulofeu 2000; Acuña, 2001) para articular diferentes representaciones ligadas al concepto de función (Hitt, 1988). Una cla-

[3] El cálculo diferencial se estudia en el segundo semestre del grado 11, o en algún semestre del grado 12 de escolaridad, que en el sistema educativo mexicano corresponden al bachillerato.

sificación de los problemas en la comprensión gráfica (Leinhardt et al., 1990) toma en cuenta las confusiones entre pendiente y altura y entre intervalo y punto, al igual que la consideración de la gráfica como un *dibujo y* la idea de que está construida por un conjunto discreto de puntos.

Por nuestra parte (Dolores, 1998), hemos encontrado algunas dificultades parecidas a las anteriores. Las tres cuartas partes de 112 estudiantes de bachillerato que habían concluido su curso de Cálculo Diferencial, cuando se les preguntó por la velocidad de un cuerpo que cae por acción de la gravedad, dieron $f(t_0)$ en vez de $f'(t_0)$: ofrecieron como respuesta la magnitud de la ordenada para t_0 en vez de la pendiente de la curva en el punto $(t_0,\ f'(t_0))$. Azcárate (1993), al investigar los esquemas conceptuales asociados con el concepto de pendiente, ya había notado que la mayoría de los alumnos caracterizados con perfil geométrico vinculan el ángulo de inclinación de la recta con la pendiente y, en algunos casos, con la magnitud de la ordenada al origen o con el punto donde la recta corta al eje de las *y.* Otros estudios sugieren que muchos estudiantes tratan con las funciones de una forma puntual; es decir, pueden trazar y leer puntos, pero no reflexionan sobre el comportamiento de la función en intervalos definidos o en forma global (Bell y Janvier, 1981).

Las situaciones son parecidas con las representaciones gráficas de variables tiempo-distancia de fenómenos físicos. Un trabajo amplio sobre las concepciones alternativas que afloran en la lectura de gráficas cartesianas del movimiento físico –realizado entre profesores de física y estudiantes de varios niveles- se reporta en Dolores, Alarcón y Bello (2002). En él, se detectó que los estudiantes conciben la condición *mayor velocidad media,* por un lado, como asociada con la representación gráfica de la ordenada de mayor altura o el intervalo al que le corresponden las ordenadas de mayor altura, por otro, con el segmento rectilíneo de mayor longitud de la gráfica. Cuando hacen *estimaciones de la velocidad media* en una gráfica *constituida* por un segmento rectilíneo paralelo al eje de las *t,* las concepciones alternativas haIladas se vinculan con la magnitud de la ordenada, mientras que otros operan con los extremos o el medio del intervalo de tiempo con su respectiva ordenada constante (los multiplican o dividen).

Respecto a la *mayor velocidad inicial,* se nota una tendencia muy marcada entre los estudiantes, que disminuye en los profesores, a elegir la gráfica que parte del origen, pero con ordenada mayor que cero. En cuanto a la *velocidad negativa,* los estudiantes y profesores la asocian mayoritariamente con la gráfica cuyas ordenadas son negativas, y pocos con gráficas de rectas con ~ente negativa: algo parecido ocurre cuando se les pide la menor rapidez. La gran mayoría de los cuestionados relacionan la gráfica cartesiana que se asemeja a la *trayectoria* para el caso de la caída libre de los cuerpos; esta concepción equipara el recorrido del movimiento físico con su gráfica cartesiana.

La interpretación de gráficas requiere necesariamente de procesos agudos de visualización; sin embargo, muchos estudiantes se muestran reticentes a utilizar el pensamiento visual (Einsemberg y Dreyfus, 1991). Prefieren el trabajo algorítmico debido a que el pensamiento visual implica procesos cognitivos superiores a los que demanda aquél. No obstante las dificultades y las resistencias por el desarrollo de un pensamiento visual, la lectura de gráficas constituye una actividad necesaria para la comprensión de los procesos de variación. En este sentido, afirma Even (1998), quienes utilizan con facilidad y libremente el análisis global de los cambios en las representaciones gráficas tienen una mejor y poderosa comprensión de las relaciones en tre ellas que la gente que prefiere restringirlo a las características locales y específicas. Nosotros, al igual que Mosclikovich, Schoenfeld y Arcabi (1993), pensamos que la utilización coordinada de ambas formas de análisis puede contribuir de mejor manera a desarrollar la habilidad de análisis de funciones a través de sus gráficas.

La lectura e interpretación del comportamiento de las funciones a través de sus gráficas provoca muchos conflictos cognitivos en los estudiantes; sin embargo, si se quiere progresar es necesario abordar estos temas en términos de obstáculos (Bachelard, 1988), considerando los conocimientos previos de los alumnos (Ausubel et al., 1995). El desarrollo del pensamiento variacional implica cambios y rupturas conceptuales con conocimientos previos o espontáneos; por ello, nuestro principal problema en este trabajo consiste en investigar qué concepciones alternativas poseen los estudiantes cuando se les plantean tareas de análisis de funciones. Esto puede ayudar a conocer más esas ideas para poder orientar futuros trabajos hacia el cambio conceptual intencional en pro del desarrollo del conocimiento, en particular de aquel que denominamos pensamiento y lenguaje variacional.

3. Concepciones alternativas y visualización

La visualización se caracteriza por complejos procesos de interacción entre las representaciones pictóricas externas (gráficas, figuras, etcétera) y la formación de imágenes mentales en el individuo. Ahora bien, la capacidad para visualizar cualquier concepto matemático o problema requiere de la habilidad de interpretar y entender la información figurativa sobre el concepto mismo, manipularla mentalmente y expresarla mediante un soporte material (Castro y Castro, 1997). Desde el punto de vista de la educación matemática, la visualización incluye dos direcciones: la interpretación y comprensión de modelos visuales y la habilidad para traducir en imágenes visuales la información que es dada en forma simbólica (Dreyfus, 1993).

Sobre tal base, el presente trabajo emplea las gráficas y el lenguaje verbal escrito como medios para indagar en las concepciones e interpretaciones de los estudiantes acerca de los conceptos y relaciones matemáticas en tomo al comportamiento de funciones. Llama la atención que, con frecuencia, las interpretaciones de los estudiantes, producto de la visualización que hacen de las gráficas y los significados que les atribuyen, no son congruentes con los significados aceptados en la matemática, generando la aparición de errores y concepciones alternativas.

Los estudiantes desarrollan ideas de su mundo, significados para palabras usadas en la ciencia y estrategias para obtener explicaciones acerca de cómo y por qué las cosas se comportan de tal o cual manera. A estas categorías de creencias, teorías, significados y explicaciones se les denomina con el término *concepciones de los estudiantes* (Osborne y Wittrock, 1983).

Cuando esas concepciones entran en conflicto con los significados aceptados emergen las *concepciones erróneas*, los *errores sistemáticos*, *preconceptos* y *concepciones alternativas* (Conftey, 1990). Dichos térrninos tienen diferente connotación en la educación matemática y, por tanto, reflejan perspectivas distintas acerca de cómo se concibe el conocimiento de los estudiantes. Mevarech y Kramarsky (1997) hacen una diferenciación de estos conceptos: mientras las nociones equivocadas y los errores sistemáticos describen rasgos incorrectos de los conocimientos de los alumnos que son repetibles y explícitos, los preconceptos y las concepciones alternativas tienen una connotación más neutral, pues enfatizan el cambio desde los errores de los jóvenes hasta las diferentes maneras en que ellos entienden las tareas dadas.

Dentro de la práctica escolar tradicional, los profesores esperamos que los estudiantes contesten nuestros cuestionamientos de la misma manera como se los enseñarnos; cuando sus respuestas son diferentes, no las aceptamos como válidas. Las concepciones alternativas son propias de los estudiantes y, una vez expresadas verbalmente o por escrito, nos permiten conocer rasgos importantes de su pensamiento.

En este trabajo usamos los términos *concepciones de los estudiantes* para denotar los conocimientos de los alumnos que están de acuerdo con los significados aceptados y *concepciones alternativas* para describir conocimientos que difieren de los que se plantean para ser aprendidos, ya que enfatizan lo que los estudiantes saben e inducen al observar los procesos de aprendizaje desde su punto de vista.

4. Método

Este trabajo tiene carácter exploratorio, en el sentido que indican Hernández et al. (1977), ya que busca las concepciones alternativas de los estudiantes cuando responden a preguntas específicas sobre el comportamiento global y la ubicación de las funciones por medio de sus gráficas cartesianas. Para ello, se diseñó y validó un cuestionario que permitiera extraer información de sus ideas al analizar el comportamiento de funciones a través de sus gráficas.

Tal planteamiento se basa en una de las tesis de Duval (1998), la cual afirma que no hay *noesis* sin *semiosis.* Mientras que esta última es la aprehensión o producción de una representación semiótica, la *noesis* consiste en la aprehensión conceptual de un objeto. Estos procesos son inseparables y, de hecho, la paradoja cognitiva del pensamiento matemático y las dificultades para desarrollarlo se deben a la unidad dialéctica entre *noesis y semiosis;* sin embargo, en la actividad matemática es esencial, ya sea para poder movilizar varios registros de representación o para escoger uno en lugar de otro.

El cuestionario de exploración favoreció la utilización de los registros de representación gráfico y el verbal-escrito para describir o identificar las propiedades de ubicación o comportamiento. Se plantearon dos tipos de preguntas. Al primer tipo correspondieron aquellas que indagaron por separado las propiedades de ubicación o comportamiento; al segundo, las que examinaron simultánearnente estas cualidades. Las propiedades de ubicación se refieren al signo de las coordenadas cartesianas de las gráficas, mientras que las de comportamiento al crecimiento, decrecimiento y puntos de estabilización.

Las preguntas fueron diseñadas bajo la modalidad de opción múltiple; las alternativas expresaron las propiedades de las funciones por medio de descripciones escritas en el cuestionario. No se empleó lenguaje analítico para evitar interferencias relativas a los significados atribuibles a la simbología matemática.

El cuestionario se circunscribió a 40 estudiantes de entre 17 y 18 años, quienes cursaban el bachillerato orientado hacia las ciencias computacionales y la contabilidad. Su aplicación fue en el intermedio del curso de Matemáticas IV, cuyos contenidos atañen al cálculo diferencial: relaciones, funciones, intervalos, clasificación de funciones, graficación y análisis de funciones; límites, propiedades y cálculo de límites; continuidad, continuidad puntual y global; derivadas, interpretación geométrica, obtención de derivadas y análisis de funciones utilizando derivadas.

Dicho instrumento de exploración fue aplicado justo cuando los estudiantes habían estudiado ya el primer tema, relativo a las funciones. A juzgar por sus notas de clase, trabajaron de manera amplia la graficación de funciones (principalmente por medio de tabulación) y el análisis de sus gráficas; por tanto, tenían información previa sobre la temática explorada. El investigador fue ajeno a la planificación, ejecución y evaluación del curso en el cual estaban inmersos los alumnos. La valoración de sus respuestas se hizo bajo la perspectiva cualitativa, pues se pretendía indagar en las concepciones altemativas.

5. Signo de las coordenadas de la gráfica

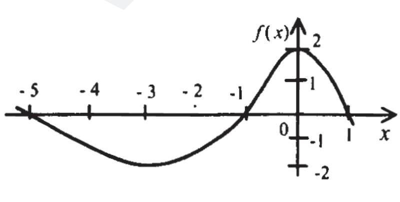
Una función puede ser representada mediante una gráfica cartesiana, cuya ubicación puede estar en alguno de los cuatro cuadrantes del plano, superpuesta a los ejes o bien cortarlos en puntos determinados. Si las coordenadas de la gráfica $(x, f(x))$ se localizan en el primer y el segundo cuadrante, entonces se cumple que sus ordenadas son tales que $f(x) > 0$, para todo x, excepto en los puntos de corte de la gráfica con el eje x. Análogamente, si los pares ordenados están situados en el tercer o cuarto cuadrante, ahí se satisface que $f(x) < 0$, con abscisas negativas y positivas, respectivamente. En el primer caso sus imágenes son positivas; en el segundo, negativas.

A fin de explorar las concepciones alternativas sobre el signo de $f(x)$ y $g(x)$, se presentaron las gráficas 1A y 1B como medios para contestar la pregunta: ¿Para qué x las imágenes de las funciones $f(x)$ y $g(x)$ son positivas?

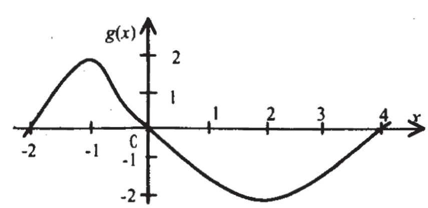
Se les proporcionaron varias opciones de respuesta a los estudiantes, las cuales aparecen en la Tabla 1.

Respecto a la gráfica de $f(x)$, las respuestas indicaron que más de la mitad de estudiantes (62.5%) tiene una concepción aceptable, ya que las imágenes de $f(x)$ en el intervalo $0 < x < 1$ son efectivamente positivas. No obstante que las imágenes de $f(x)$ son positivas también en el intervalo $-1 < x < 1$ (que incluye al anterior), sólo fue elegido por el 20%. Como se puede notar, los alumnos mayoritariamente seleccionaron el intervalo donde las imágenes de la función poseen signo positivo, pero prefirieron el intervalo donde sus abscisas y ordenadas son positivas a la vez. En el caso de la gráfica de $g(x)$, el 47.5% de los estudiantes dijo que la función tiene imágenes positivas en el intervalo $0 < x < 4$ (nótese que aquí la gráfica se ubica en el cuarto cuadrante) y más del 37% eligió el intervalo $-2 < x < 0$, donde las abscisas son negativas y las ordenadas son efectivamente positivas.

Una visión de conjunto sobre las respuestas permite inferir que más de la mitad de los estudiantes cuestionados conciben a una función con imágenes positivas si su gráfica está ubicada en la región donde las x son positivas, sin importar que los puntos de la gráfica estén en el primer o cuarto cuadrante. Parecen sólo atender al signo de las abscisas y



Gráfica 1A



Gráfica 1B

TABLA 1			
PREGUNTAS	OPCIONES	RESPUESTAS	PORCENTAJE
¿Para qué x las imágenes de la función $f(x)$ son positivas?	De O a 1	25	62.5
	De -3 a 0	0	0
	De -1 a 1	8	20
	De -5 a 0	1	2.5
	De -5 a -l	3	7.5
	Otras	1	2.5
	No contestó	2	5
¿Para qué x las imágenes de la función $g(x)$ son positivas?	De -2 a 0	15	37.5
	De O a 4	19	47.5
	De 2 a 4	2	5
	De -l a 2	2	5
	De -2 a -l	1	2.5
	Otras	0	0
	No contestó	1	2.5

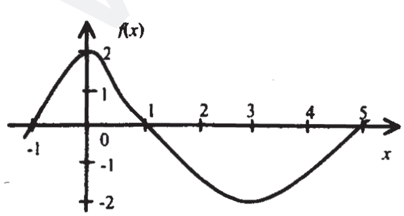
desatender el de las ordenadas para tomar tal decisión.

Al plantearles las mismas gráficas, pero ahora con la pregunta sobre dónde las imágenes de $f(x)$ o $g(x)$ son negativas, respondieron como se muestra en la Tabla 2.

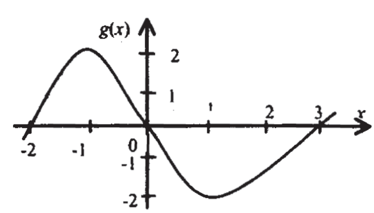
Para el caso de la gráfica de $f(x)$, casi el 48% de los alumnos señaló que la función tiene imágenes negativas en el intervalo $-1 < x < 0$, a pesar de que la gráfica está localizada en el segundo cuadrante; en realidad, $f(x)$ incluye imágenes positivas en el intervalo $-1 < x < 1$ (que incluye al anterior). Destaca que el 15% seleccionó este último intervalo, donde las imágenes de la función son positivas para x negativas y positivas, incluido $x = 0$: la mayoría se inclinó por el intervalo en el que sólo las x son negativas. Respecto a la gráfica de $g(x)$, el 47.5% optó por el intervalo $-2 < x < 0$, donde la gráfica se sitúa en el segundo cuadrante; allí $g(x)$ tiene imágenes positivas y sólo sus abscisas son negativas (parece que tal condición fue la que más peso tuvo en la toma de esta decisión). El 35.5% marcó el intervalo $0 < x < 3$, donde efectivamente $g(x)$ entraña imágenes negativas.

6. Función creciente o decreciente

En matemáticas, se dice que una función es *creciente* cuando a un mayor valor del argu-



Gráfica 2A



Gráfica 2B

TABLA 2

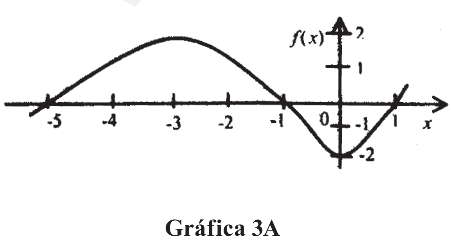
PREGUNTAS	OPCIONES	RESPUESTAS	PORCENTAJE
¿Para qué x las imágenes de la función $f(x)$ son negativas?	De -1 a 0	19	47.5
	De O a 3	0	0
	De -l a 1	6	15
	De O a 5	3	7.5
	De l a 5	13	32.5
	Otras	1	2.5
	No contestó	0	0
¿Para qué x las imágenes de la función $g(x)$ son negativas?	De -2 a 0	19	47.5
	De O a 3	15	35.5
	De -l a 1	1	2.5
	De -2 a-1	4	10
	De l a 3	1	2.5
	Otras	0	0
	No contestó	0	0

mento x corresponde un mayor valor de la función. Dicho en símbolos, si $f(x_2) > f(x_1)$ para $x_2 > x_1$, entonces en $f(x)$ es creciente el intervalo (x_1, x_2). Por el contrario, si $f(x_2) < f(x_1)$ para $x_2 > x_1$, $f(x)$ es *decreciente* en ese mismo intervalo. Intuitivamente, se puede decir que una función crece si su gráfica nos a medida *que x aumenta; si baja* cuando *x aumenta,* es decreciente. Pero las concepciones de los estudiantes apuntan hacia otras direcciones, como se pudo constatar en las siguientes gráficas que se les plantearon con el fin de indagar sus concepciones sobre el crecimiento o decrecimiento de funciones.

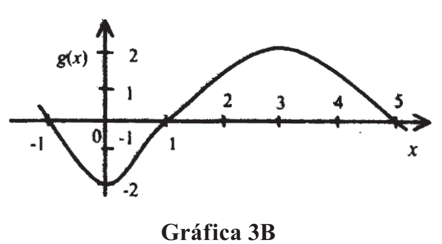
Aquí se preguntó por los intervalos donde $f(x)$ y $g(x)$ son crecientes. Las respuestas aparecen en la Tabla 3.

Con respecto a la gráfica de la función $f(x)$, una cantidad significativa de los estudiantes (32.5%) optó por el intervalo $-5 < x < -1$. Allí, la gráfica está en el segundo cuadrante y tiene un intervalo donde crece, $-5 < x < -3$, y otro en donde decrece, $-3 < x < -1$. Sin embargo, a juzgar por las respuestas, los alumnos asocian la función creciente con la región de la gráfica que está en el segundo cuadrante, es decir, donde tiene imágenes positivas. Mas el 27% indica que la función crece en el intervalo $-5 < x < -3$, y el 20% que también lo hace en el intervalo $0 < x < 1$, regiones donde efectivamente la función es creciente de izquierda a derecha.

Sobre la gráfica de $g(x)$, los alumnos muestran concepciones análogas a las anteriores.



Gráfica 3A



Gráfica 3B

TABLA 3

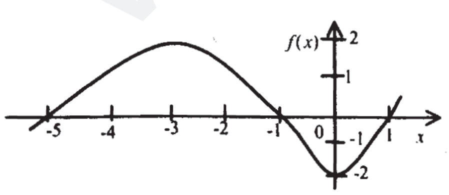
PREGUNTAS	OPCIONES	RESPUESTAS	PORCENTAJE
¿Para qué x la función *f*(*x*) es creciente?	De -5 a -1	13	32.5
	De -3 a 0	0	0
	De -1 a 1	5	12.5
	De -5 a -3	11	27.5
	De 0 a l	8	20
	Otras	9	22.5
	No contestó	0	0
¿Para qué x la función *g(x)* es creciente?	De l a 5	18	45
	De -l a 1	4	10
	De O a 3	10	25
	De O a 5	1	2.5
	De -l a 0	0	0
	Otras	6	15
	No contestó	1	2.5

El 45% indica que la función crece en el intervalo $1 < x < 5$, y el 25% sugiere que lo hace en $0 < x < 3$. La primera es una asociación de la región de la gráfica que está en el primer cuadrante (en el discurso escolar suele decirse está por arriba del eje x) con el concepto de crecimiento, mientras que la segunda constituye una respuesta aceptable, pues en tal intervalo la función aumenta. Tanto para el caso de $f(x)$ como para $g(x)$, en las contestaciones se observa claramente la tendencia a asociar las zonas de las gráficas que tienen imágenes positivas con la idea de crecimiento.

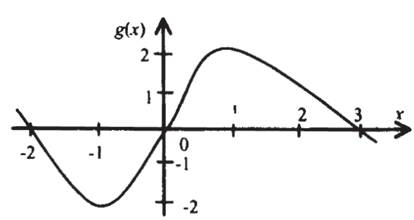
Para explorar las concepciones vinculadas con la función decreciente, se les puso a los estudiantes las gráficas 4A y 4B.

La pregunta consistió en qué intervalos las funciones decrecen; en la Tabla 4 se condensan las respuestas.

Para un poco más del 27% de los estudiantes, la función $f(x)$ decrece en el intervalo $-5 < x < -I$; la quinta parte indica que lo hace en $-3 < x < 0$, y casi la tercera sugiere que eso ocurre en $-1 < x < 1$. En el primer caso, la elección insinúa la asociación de la idea de decrecimiento con la de función con imágenes positivas, pero está ubicada en la región donde sus abscisas son negativas; en el segundo, la opción es aceptable, y en el tercero, donde se ubica el mayor índice de elección, se percibe una concepción que vincula la función decreciente con el intervalo donde la gráfica tiene imágenes negativas.



Gráfica 4A

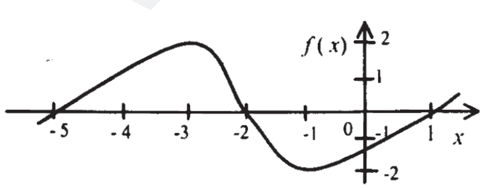


Gráfica 4B

TABLA 4

PREGUNTAS	OPCIONES	RESPUESTAS	PORCENTAJE
¿Para qué x la función $f(x)$ es decreciente?	De -5 a -1	11	27.5
	De -3 a O	8	20
	De -l a 1	12	30
	De -5 a 0	1	2.5
	De -5 a -3	1	2.s
	Otras	5	12.5
	No contestó	2	5
¿Para qué x la función $g(x)$ es decreciente?	De -2 a 0	12	30
	De O a 3	7	17.5
	De -l a 1	2	5
	De -2 a -1	12	30
	De 1 a 3	6	15
	Otras	4	10
	No contestó	2	5

Al analizar la gráfica de $g(x)$, el 30% de los estudiantes señala que la función decrece en el intervalo $-2 < x < 0$. Allí, dicha representación tiene abscisas y ordenadas negativas, a diferencia de la gráfica de $f(x)$, que tiene imágenes negativas, pero para intervalos contiguos donde, por un lado, las x son negativas, por otro, las x son positivas (quizá a ésto se deba la preferencia de los alumnos a considerar como decreciente una función si su gráfica tiene a la vez abscisas y ordenadas negativas). Por otro lado, el 30% eligió el intervalo $-2 < x < -1$, y el 15% optó por $1 < x < 3$. Esta escasa preferencia puede ser atribuida a que en este último intervalo la función efectivamente decrece, pero sus abscisas son positivas.



Gráfica 5

7. Función que no crece al decrece

El análisis matemático precisa que, si una función continua en una vecindad de x_0 con radio $e > 0$ es tal que $f(x_0) = 0$, en x_0 la función tiene extremo relativo, ya sea máximo o mínimo, y en términos geométricos puede interpretarse como *zonas infinitesimales estacionarlas* donde la función no *crece* ni *decrece,* de manera que una tangente trazada en el punto $(x_0, f(x_0))$ sería paralela al eje de las x. La Gráfica 5 fue propuesta para explorar las concepciones sobre la *estabilidad* de las funciones. Para ello, se preguntó a los estudiantes: ¿Dónde la función $f(x)$ no crece ni decrece?

Hay una tendencia entre los alumnos por indicar que en $x = 0$ la función no crece ni decrece. También es notoria la relación que establecen entre el último concepto y los ceros de $f(x)$, ya que el 17.5%, el 15% y el 17.5% seleccionaron las opciones donde se cumple que $f(-5) = 0$, $f(-2) = 0$ y $f(1) = 0$, respectivamente, (en dichos puntos, la gráfica corta al eje de las x); no obstante, se detectó una tendencia a elegir el punto donde la gráfica cor-

TABLA 5			
PREGUNTA	OPCIONES	RESPUESTAS	PORCENTAJE
¿Para qué x la función $f(x)$ no crece ni decrece?	• En $x = -5$	7	17.5
	• En $x = -2$	6	15
	• En $x = -3$	3	7.5
	• En $x = 1$	7	17.5
	• En $x = -1$	3	7.5
	• En $x = 0$	11	27.5
	• Otras	3	7.5

ta al eje y. La siguiente tabla contiene las respuestas a esta pregunta:

8. Función de imágenes positivas y creciente

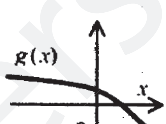
Para ahondar en las concepciones sobre las funciones que tienen imágenes positivas y, a la vez, son crecientes, se les planteó a los estudiantes la siguiente pregunta. ¿Qué gráficas corresponden a funciones de imágenes positivas y crecientes? Para solucionar tal cuestionamiento, se requería de elegir la o las gráficas que satisficieran dichas condiciones (Gráficas de la 6A a la 6E).

En la siguiente tabla están contenidas las respuestas.

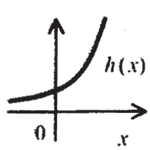
Prácticamente la totalidad de los estudiantes seleccionaron la gráfica de la función $f(x)$. Este dato parece ser muy halagüeño; sin embargo, las gráficas de $h(x)$ y $k(x)$ también satisfacen las condiciones exigidas, mas fueron elegidas sólo por el 32.5% y el 15% de los alumnos, respectivamente. Inclusive sólo 4 estudiantes (10%) prefirieron a la vez las gráficas de $f(x)$, $h(x)$ y $k(x)$. Nótese que la octava parte optó por la gráfica de $j(x)$, la cual es efectivamente creciente, pero tiene una zona donde sus imágenes son negativas, aunque sólo para valores positivos de x.

De estas respuestas se percibe una relación muy privilegiada que construyen los estudiantes entre función con imágenes positivas y además creciente, considerando que esto sólo sucede en el primer cuadrante, donde las co-

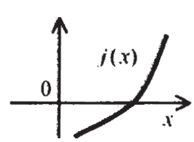
Gráfica 6A



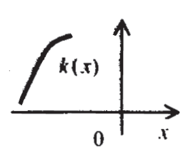
Grafica6B



Gráfica 6C



Gráfica 6D



Gráfica 6E

TABLA 6			
PREGUNTA	OPCIONES	RESPUESTAS	PORCENTAJE
¿Qué gráficas corresponden a funciones de imágenes positivas crecientes?	6A	39	97.5
	6B	1	2.5
	6C	13	32.5
	6D	5	12.5
	6E	6	15

ordenadas $(x, f(x))$ tienen signo positivo. Cuando la gráfica de la función es creciente, pero tiene algunas abscisas negativas, como el caso de $h(x)$, la relación coexistente entre función con imágenes positivas y creciente que establecen los alumnos se debilita, aún más si todas las abscisas son negativas, como en $k(x)$. Así, se infiere que los estudiantes le dan más peso al signo de las abscisas que al de las ordenadas.

9. Función de imágenes negativas y creciente

Con el propósito de explorar las concepciones de los alumnos acerca de las funciones de imágenes negativas y, además, crecientes, se les pidió que seleccionaran la gráfica o gráficas que cumplieran tales condiciones, dándoles cinco opciones (Gráficas 7A a 7E).

La Tabla 7 recopila las respuestas dadas a esta pregunta. Un 67 % de los estudiantes prefirieron la gráfica que tiene ambas coordenadas negativas, como la correspondiente a $j(x)$, la cual es creciente. Dicha tendencia disminuye para la gráfica que es en efecto creciente y tiene abscisas tanto negativas como positivas, como $g(x)$, seleccionada por el 47.5%; un porcentaje menor (45%) eligió la gráfica de $f(x)$, que es creciente, pero no tiene imágenes negativas: sólo lo son sus abscisas.

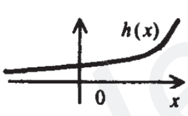
En esta última respuesta subyace una concepción que relaciona las funciones crecientes con imágenes negativas y aquellas gráficas que en efecto crecen, pero sólo tienen abscisas negativas. Como sucedió en la pregunta anterior, para decidir el signo de las imágenes de la función se privilegia el signo de sus abscisas. Aunque las gráficas $g(x)$, $j(x)$ y $k(x)$ satisfacen las dos condiciones exigidas, sólo 7 estudiantes (17.5%) optaron por ellas.

10. Función de imágenes positivas y decrecientes

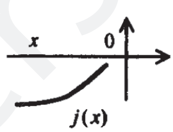
Referente a las concepciones sobre las funciones de imágenes positivas y decrecientes, se pidió a los jóvenes encuestados que seleccionaran la gráfica o gráficas de la 8A a la 8E que cumplieran esas condiciones.

La Tabla 8 detalla las respuestas:

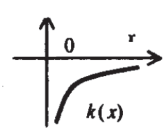
La mayoría de los estudiantes (77.5%) eligió la gráfica de $h(x)$, cuyas coordenadas son positivas y tiene efecto decreciente. Aunque



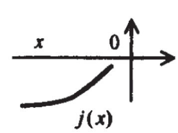
Gráfica 7A



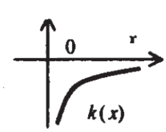
Grafica7B



Gráfica 7C



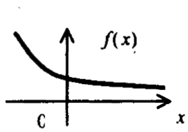
Gráfica 7D



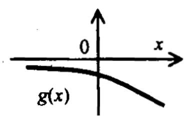
Gráfica 7E

TABLA 7

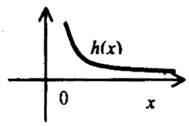
PREGUNTA	OPCIONES	RESPUESTAS	PORCENTAJE
¿Qué funciones de imágenes negativas son además crecientes?	7A	18	45
	7B	19	47.5
	7C	2	5
	7D	27	67.5
	7E	11	27.5



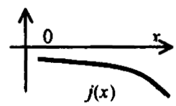
Gráfica 8A



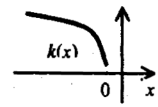
Grafica8B



Gráfica 8C



Gráfica 8D



Gráfica 8E

TABLA 8

PREGUNTA	OPCIONES	RESPUESTAS	PORCENTAJE
¿Qué gráficas corresponden a funciones de imágenes positivas y además decrecientes?	8A	13	32.5
	8B	1	2.5
	8C	31	77.5
	8D	4	10
	8E	7	17.5
	Otras	1	2.5

las gráficas de $f(x)$ y $k(x)$ reunían tales condiciones, fueron elegidas en porcentajes, menores: 32.5% y 17.5%, respectivamente. En este último caso se percibe una concepción que privilegia sólo el signo de las abscisas de la gráfica: allí son negativas, pero las ordenadas son positivas.

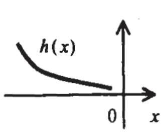
Así, los estudiantes no creen que ese tipo de gráficas pueda tener imágenes positivas y ser creciente a la vez; lo que seguramente causa *turbulencias cognitivas* es el hecho de que la gráfica de $k(x)$ posee abscisas negativas. También llama la atención que el 10% de los estudiantes manifestó que está de acuerdo en que la gráfica de $j(x)$ satisface las condiciones: esta es efectivamente decreciente y tiene abscisas positivas. La última propiedad probablemente pesó más en su decisión.

11. Función de imágenes negativas y decrecientes

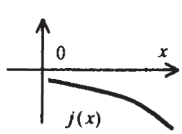
Para explorar las ideas sobre funciones de imágenes negativas y además decrecientes, se pidió a los estudiantes que seleccionaran la o las gráficas que cumplieran esos requisitos de la 9A a la 9E.

La Tabla 9 contiene las respuestas a esta pregunta

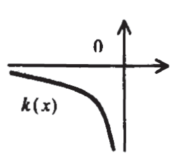
El 70% de los estudiantes prefieren la gráfica de $k(x)$, ya que tiene coordenadas. negativas tanto en x como en y, además de que en efecto decrece; en segundo lugar quedó $g(x)$ y en tercero $j(x)$. Sólo 8 jóvenes seleccionaron, en conjunto, las gráficas de $g(x)$, $j(x)$ y $k(x)$; no obstante, un 17.5% optó por la gráfica de $h(x)$,



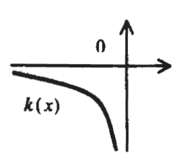
Gráfica 9A



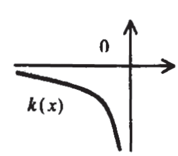
Grafica 9B



Gráfica 9C



Gráfica 9D



Gráfica 9E

TABLA 9

PREGUNTA	OPCIONES	RESPUESTAS	PORCENTAJE
¿Qué gráficas corresponden a funciones de imágenes negativas y además son decrecientes?	9A	0	0
	9B	23	57.5
	9C	7	17.5
	9D	15	37.5
	9E	28	70

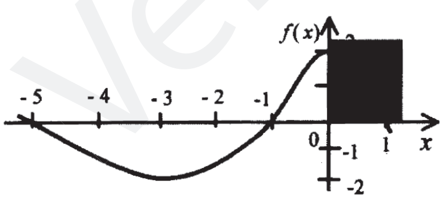
que tiene abscisas negativas y efectivamente es decreciente. Ningún estudiante optó por la gráfica de $f(x)$.

De las respuestas se perciben concepciones donde se privilegia la asociación de las condiciones de función con imágenes negativas y además decreciente, con aquellas gráficas que tienen coordenadas negativas tanto en x como en y. Tal idea es aceptable y converge en la gráfica de $k(x)$, pero no es el único caso: también se encuentra en que las x sean positivas y las y negativas. Otra idea que se nota, aunque con menor preferencia, es la que asocia las gráficas que están en el cuarto cuadrante: allí, $x > 0$ y $y <$ O. Todavía se percibe el nexo entre las gráficas que tienen abscisas negativas y la idea de función con imágenes negativas y además decreciente, si bien esta última propiedad la posea efectivamente la gráfica de la función seleccionada.

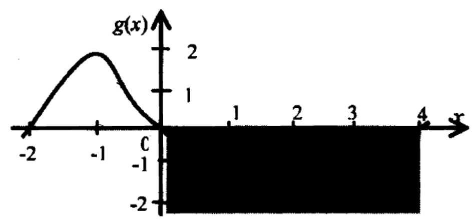
12. Concepciones alternativas detectadas

Función de imágenes positivas o negativas. En su mayoría, los estudiantes sugieren que sólo en región sombreada de la Gráfica 10 la función $f(x)$ tiene imágenes positivas; esa misma situación la indican en la Gráfica 11. Hay una tendencia a asociar la idea de función con imágenes positivas si su gráfica está ubicada en la región donde las x son positivas, sin importar que las ordenadas tengan signo positivo o negativo; sólo se atiende al signo de las abscisas para tomar la decisión.

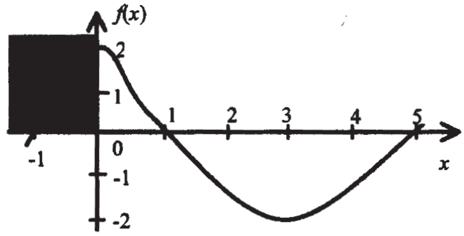
Las concepciones alternativas sobre las funciones con imágenes negativos siguen el mismo patrón. Para los estudiantes, cierta función $f(x)$ tiene imágenes negativas preferentemente donde tiene abscisas negativas.



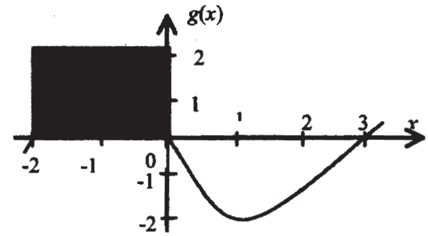
Gráfica 10. Concepción alternativa: los estudiantes prefieren el intervalo $0 < x < 1$ para considerar que $f(x) > 0$.



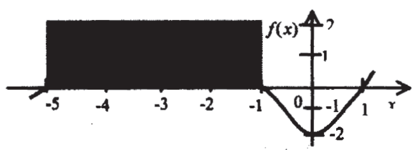
Gráfica 11. Concepción alternativa: $g(x) > 0$ para $0 < x < 4$



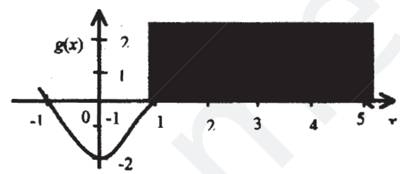
Gráfica 12. Concepción alternativa:
$f(x) < 0$ para $-1 < x < 0$



Gráfica 13. Concepción alternativa:
$g(x) < 0$ para $-2 < x < 0$



Gráfica 14. Concepción alternativa:
$f(x)$ crece para $-5 < x < -1$



Gráfica 15. Concepción alternativa:
$g(x)$ crece para $1 < x < 5$

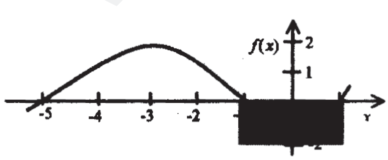
Función creciente o decreciente. Los estudiantes optan por relacionar las funciones crecientes con aquellas cuyos intervalos contienen imágenes u ordenadas positivas. (Gráficas 14 y 15).

De manera análoga, las concepciones alternativas de los estudiantes para las funciones decrecientes son aquellas que ligan a las regiones de las gráficas que implican imágenes u ordenadas negativas. (Gráficas 16 y 17).

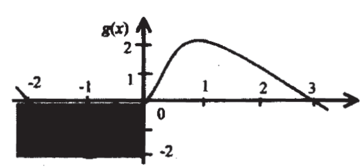
El crecimiento es vinculado con la gráfica que tiene imágenes de $f(x)$ positivas y el decrecimiento con la que posee imágenes negativas.

Función que no crece ni decrece. Los estudiantes tienen preferencia por asociar la propiedad de no crecimiento ni decrecimiento de una función con los puntos donde la gráfica corta al eje de las ordenadas o al de las abscisas. (Gráficas 18).

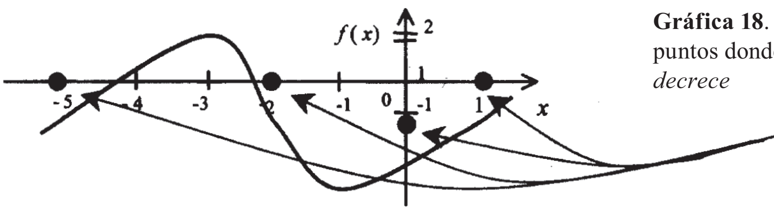
Función de imágenes positivas y además creciente. Prácticamente la totalidad de estudiantes cuestionados indican que la Gráfica 19A representa una función de imágenes positivas y además creciente, pero sólo un tercio sugiere que la 19B encarna tal propiedad, y una cantidad más reducida (poco más de 1/6 del total) selecciona la 19C Hay una tendencia marcada a no considerar función de imágenes positivas y además creciente si su gráfica está ubicada en el segundo cuadrante (con abscisas negativas), aunque sea crecien-



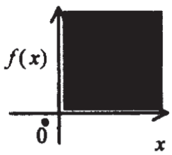
Gráfica 16. Concepción alternativa:
$f(x)$ decrece en $-1 < x < 1$



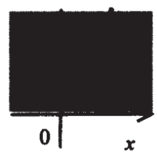
Gráfica 17. Concepción alternativa:
$g(x)$ decrece en $-2 < x < 0$



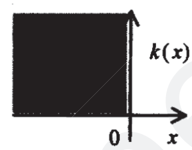
Gráfica 18. Concepción alternativa: puntos donde la función *no crece ni decrece*



Gráfica 19A



Gráfica 19B

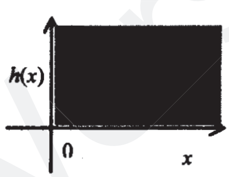


Gráfica 19C

te. De acuerdo a la preferencia, las gráficas elegidas se pusieron en orden descendente.

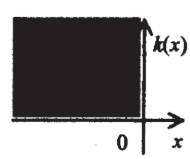
Función de imágenes positivas y además decreciente. La gran mayoría de estudiantes señaló a la Gráfica 20A como la que representa a una función de imágenes positivas y además decreciente. Un tercio optó por la Gráfica 20B y un poco más de la sexta parte se quedó con la 20C. La gran mayoría manifiesta una concepción que no comparte que una función tenga imágenes positivas y sea además decreciente si está ubicada en el segundo cuadrante, aunque en efecto sea decreciente.

Función de imágenes negativas y además creciente. La mayoría de los estudiantes seleccionó la Gráfica 21A como la función con imágenes negativas y además decreciente, ya que tiene coordenadas negativas e incluso es en efecto creciente. En segundo lugar quedó la Gráfica 21B (y casi se iguala con la 21C), que crece y tiene abscisas negativas y positivas, y la menos favorecida fue la 21D, que posee abscisas positivas y ordenadas negativas. Cerca de la mitad de los entrevistados creyó que la Gráfica 21C reunía las condiciones solicitadas; si bien representa a una función que es creciente, sus ordenadas no son negativas, pero sí sus abscisas.

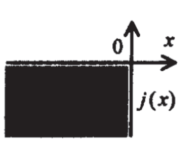


Gráfica 20A

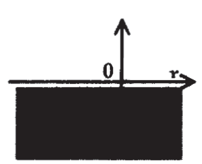
Gráfica 20B



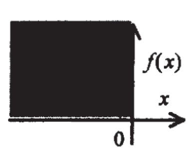
Gráfica 20C



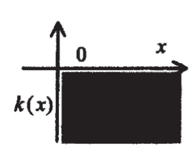
Gráfica 21A



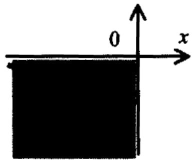
Gráfica 21B



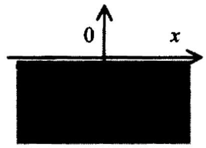
Gráfica 21C



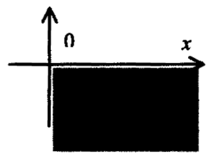
Gráfica 21D



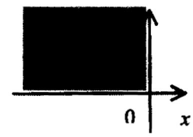
Gráfica 22A



Gráfica 22B



Gráfica 22C



Gráfica 22D

Tal concepción asocia las funciones crecientes y con imágenes negativas con aquellas gráficas que en efecto crecen, pero sólo tienen abscisas negativas. Se privilegia el signo de sus abscisas sobre el signo de sus ordenadas. En orden descendente de preferencia, se muestran las gráficas elegidas.

Función de imágenes negativas y además decreciente. De las gráficas dadas, tres de ellas satisfacen estas condiciones 22A, 22B y 22C, pero en orden descendente de las preferencias de los estudiantes se ubicaron como aparecen abajo. En las concepciones alternativas detectadas se privilegia la asociación de las condiciones de función con imágenes negativas y además decreciente con aquellas gráficas que tienen coordenadas en *x* e *y* negativas (la gran mayoría eligió la 22A). Cuando las abscisas están incluidas en intervalos positivos y negativos las parcialidades declinan notablemente. Se manifiesta también una concepción que asocia las condiciones dadas con la Gráfica 22D, la cual está ubicada en el segundo cuadrante y en efecto decrece. Seguramente el término *función con imágenes negativas* fue asociado privilegiando la idea de abscisas negativas.

13. Conclusiones

Una función es definida como una relación particular entre dos o más variables; para interpretar su gráfica no queda otra alternativa que utilizar tal noción. Cuando se analiza la definición dada por escrito parece no movilizarla, ya que las variables están relacionadas entre sí: los cambios de una ocasionan algún efecto en la otra, mientras que las curvas o rectas son sus representaciones primarias.

La comprensión gráfica presupone que la gente entiende la noción de covariación, pero en este trabajo hay evidencias de que su utilización es muy pobre en una cantidad significativa de estudiantes. Considerar que una función tiene imágenes positivas o negativas sólo por el hecho de que su gráfica tenga abscisas positivas o negativas, respectivamente (véanse las Gráficas 10, 11, 12 y 13), sin importar que sus imágenes propiamente dichas tengan signo positivo o negativo, puede ser un indicador de que los estudiantes centran la atención en las abscisas y desatienden lo que ocurre con las ordenadas. Hay una falta de coordinación de lo que ocurre gráficamente con las dos variables a la vez,

Estos resultados concuerdan con los aportados por Bell et al. (1987a, 1987b), quienes mostraron que las dificultades de los estudiantes se asocian con: a) la falta de conciencia de que una gráfica presenta una relación entre dos variables; b) imprecisiones para reconocer la relación entre puntos' sobre la gráfica, segmentos de rectas y curvas y las correspondientes clases de vínculos; c) la incapacidad para coordinar la información que atañe a las dos variables y los dos ejes.

En esta investigación se notó una concepción de concomitancia, por un lado, entre función con imágenes positivas y función creciente, por otro, entre función con imágenes negativas y función decreciente (véanse las Gráficas 14, 15, 16 y 17). Los estudiantes creen que si la gráfica está en el primer y segundo cuadrante, entonces la función es creciente; si está en el tercero o cuarto, es decreciente.

La fuente de estas concepciones alternativas radica en la confusión entre el comportamiento de la función y la ubicación de su gráfica. La lectura del comportamiento de una función a través de su gráfica presupone la comparación de las imágenes $f(x)$ + h) y $f(x)$ para h positiva, de modo que si $f(x) + h) > f(x)$, $f(x)$ es creciente en el intervalo $(x, x+h)$; en cambio, el hecho de que $f(x)$ sea positiva implica que las imágenes están ubicadas en el primer o segundo cuadrante. Para varios estudiantes, la interpretación gráfica de los términos *con imágenes positivas y creciente* es concomitante y configura para ellos un metateorema: si la gráfica de $f(x)$ está en el primer o segundo cuadrante, entonces es creciente.

Asimismo, la confusión entre los *puntos* o *zonas estacionarias* de la función con los *ceros* de alguna de las coordenadas de la gráfica (véase la número 18) también puede ser una manifestación de la confusión entre comportamiento y ubicación. Los puntos o zonas estacionarias requieren que se establezca la comparación al menos de dos imágenes muy cercanas, mientras que los ceros precisan la ubicación de puntos específicos.

Las concepciones alternativas recopiladas en este trabajo pueden estar asociadas también al significado atribuido a los términos *función que no crece ni decrece.* Estos emanan de la analogía que se establece, ya sea con los ceros que corresponden a las abscisas (puntos donde x no es positiva ni negativa) o con los de las ordenadas (puntos donde las ordenadas no son positivas ni negativas).

Dicha explicación parece más consecuente con las concepciones que se han comentado en el párrafo anterior. Si los estudiantes consideran que una función es creciente cuando su gráfica está por *arriba* del eje x y decreciente cuando está por *debajo,* puede esperarse -como sucedió-, que conciban que no crece ni decrece en los puntos donde la gráfica no está *arriba* ni por *abajo* del eje x, o bien que no están a la derecha ni a la izquierda del eje y. En cualquiera de los casos resulta privilegiada la ubicación de los puntos de la gráfica por sobre su comportamiento variacional, lo puntual por sobre lo global. La tendencia de los estudiantes a leer gráficas puntualmente ha sido señalada por Bell (et al., 1987a) y Even (1998); este último indica además que el uso de un enfoque puntual al analizar las gráficas fue poderoso para el monitoreo de interpretaciones ingenuas o inmaduras.

Cuando a los estudiantes se les plantearon preguntas que exigían el cumplimiento de dos condiciones a la vez, una de ubicación y otra de comportamiento, las concepciones alternativas ratificaron las tendencias ya observadas. La mayoría de los estudiantes no creen que una función cuya gráfica está ubicada en el segundo cuadrante tenga imágenes positivas y sea además creciente (Gráfica 19C), a pesar de que su gráfica asciende de izquierda a derecha. Análogamente, no creen que las gráficas situadas en el segundo cuadrante abarquen imágenes positivas y sean además decrecientes, aunque se presentó así (Gráfica 20C). Seguramente lo que más peso específico tuvo en estas decisiones fue que, en ambos casos, las abscisas de las gráficas eran negativas. En cambio, cuando las gráficas están localizadas en el primer cuadrante, la gran mayoría acepta que tienen imágenes positivas y además son crecientes (Gráfica 19A), o que poseen imágenes positivas y además son decrecientes (Gráfica 20A). Tales respuestas son aceptables, pero muy probablemente fueron consideradas así sólo por el hecho de tener abscisas positivas.

Las preferencias bajan notoriamente cuando las gráficas pasan por el primer y segundo cuadrante (Gráficas 19B y 20B), lo cual es explicable porque esas gráficas no contienen sólo abscisas positivas, sino también negativas. De nuevo, los estudiantes privilegian la ubicación de la gráfica por sobre su comportamiento variacional. Las concepciones alternativas son análogas para el caso de las gráficas de funciones con imágenes negativas y crecientes, o con imágenes negativas y decrecientes; en el primer caso, la mayoría sugiere que las Gráficas 21A y 22A reúnen tales condiciones, respectivamente. Sus respuestas son aceptables; sin embargo, ambas gráficas tenían abscisas negativas. Eso fue lo preponderante para la toma de tal decisión, ya que cuando las gráficas tenían abscisas positivas (Gráficas 21C y 22C), o positivas y negativas (Gráficas 21B y 22B), las tendencias menguaron. Las concepciones alternativas que se notaron por las elecciones de los estudiantes pueden ser producto de la escasa coordinación entre la lectura, e interpretación de propiedades de localización de la gráfica y su comportamiento.

Esta necesidad de coordinación es indispensable para entender las relaciones entre una función primitiva y su derivada, que se estudia en análisis matemático o en el mismo cálculo diferencial. Por ejemplo, el siguiente teorema del análisis es representativo de tales correspondencias: Si $f'(x) > 0$ en el intervalo (a, b), entonces en ese intervalo $f(x)$ es creciente ($f(x)$ continua y derivable. De prevalecer las concepciones alternativas que detectamos, seguramente se constituirán en un obstáculo para comprender las relaciones entre las funciones derivadas y sus primitivas.

De acuerdo con los resultados de esta investigación, una parte significativa de las concepciones generadas en los estudiantes no corresponden con las que, se supone, debieron haber aprendido luego de un proceso de enseñanza ordinario sobre la graficación de funciones. Una parte importante de los alumnos parece que no ha tenido cambios conceptuales hacia ideas aceptables. Tal afirmación es congruente con la teoría de Confrey (1990), la cual indica que los sistemas de creencias difieren de lo que está incorporado dentro del currículo, normal, y que son resistentes al cambio a través de la enseñanza tradicional.

14. Investigaciones futuras

El tema abordado en este trabajo ha sido poco estudiado entre estudiantes universitarios, menos aún desde la perspectiva del desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional. Nuestras intenciones no sólo son ahondar en las concepciones alternativas por sí mismas, sino también en el contexto de la evolución de esa forma de pensamiento matemático en la situación escolar. De entrada estamos convencidos que ese proceso no es, ni por asomo, lineal ni determinístico, ya que en su devenir los alumnos tienen que enfrentar y franquear toda una gama de obstáculos de variada índole: las concepciones alternativas son sólo un tipo especial. Sin embargo, consideramos que este trabajo requiere de ser ampliado y profundizado para obtener una visión más completa de tal problemática.

Como nuestra investigación requería principalmente del análisis de gráficas dadas, es muy probable que otras concepciones no detectadas puedan aflorar si incluimos la observación de las técnicas que utilizan los estudiantes cuando construyen gráficas y las analizan. Ahora bien, el planteamiento de preguntas cerradas pudo haber restringido la variedad de concepciones alternativas; si son abiertas, las concepciones se diversificarán.

Las preguntas fueron hechas utilizando el lenguaje verbal escrito para denotar las propiedades de las funciones. No se recurrió al lenguaje analítico id de otro tipo, mucho me nos a contextos diferentes. No es lo mismo, desde el punto de vista cognitivo, darle respuesta a la pregunta ¿para qué x $f(x)$ es tal que $f(x + h) - f(x) > 0$, con $h > 0$? que a ¿dónde la función es creciente? La primera requiere de *descifrar* los significados implícitos en el lenguaje analítico, un aspecto que no fue abordado aquí. ¿Qué concepciones afloran en estas nuevas circunstancias y escenarios?

Investigaciones recientes (Sinatra y Pintrich, 2003) señalan los defectos comunes de los enfoques existentes respecto al cambio conceptual intencional, circunscribiéndose a detallar estructura de las representaciones del conocimiento existentes en los aprendices y a los medios por los cuales tanto los profesores como los métodos instruccionales podrían facilitar cambios en esas nociones.

Los autores de dichos trabajos afirman que ambas perspectivas sugieren que si los aprendices reconocen y se vuelven conscientes del conflicto entre su conocimiento existente y la concepción científica, el cambio conceptual es posible. Sin embargo, plantean que el conflicto cognitivo y el involucrarse de manera profunda son insuficientes para inducir la modificación; esta a menudo no ocurre, incluso en situaciones diseñadas para promover la reestructuración del saber, debido a características del aprendiz como la motivación, la resistencia afectiva y sus creencias. Aunque recientemente ambas tradiciones de investigación del cambio conceptual han comenzado a reconocer el rol de esos rasgos, no enfatizan suficientemente el grado en que son factores de control en el proceso de cambio.

Por nuestra parte, creemos que un acercamiento hacia estos problemas desde una perspectiva integral y sistémica podría dar respuestas acerca de los factores de control en el proceso del cambio conceptual: eso sería posible de investigar bajo la perspectiva socioepistemológica. Hacia tal rumbo se encaminan nuestros futuros trabajos.

15. Implicaciones didácticas

Pozo (1996) dice que los verdaderos conceptos sólo pueden adquirirse por reestructuración, pero eso sólo es posible si se apoya en las asociaciones previas. He ahí la importancia de conocer las concepciones previas o las alternativas, ya que la reestructuración no obra en el vacío. Pozo formula tres condiciones en las que es posible un cambio conceptual: a) la existencia de una cierta conexión genética con la teoría alternativa del alumno y la teoría científica que se le pretende transmitir; b) enfrentarle ante situaciones conflictivas que supongan un reto para sus ideas, a fin de que pueda comprender la superioridad de la nueva teoría; c) debido a que los conceptos alternativos del alumno suelen ser implícitos, un primer paso para modificarlos será hacerlos explícitos mediante su aplicación a problemas concretos. Además, es necesario que el estudiante tome conciencia de las ventajas de la nueva teoría que se le propone.

Nosotros presuponemos que la superación de este tipo de concepciones alternativas en la enseñanza-aprendizaje de la matemática puede favorecerse si se crean ambientes gráficos que motiven su aparición y enfrentamiento, se posibilite su interiorización, así como se realicen actividades docentes que permitan superarlas, considerando los aspectos volitivos, emocionales, afectivos y sociales.

Quizá su permanencia se deba también a que los estudiantes no están capacitados para superarlas en situaciones regulares de enseñanza. Si les se forma una rica gama de representaciones mentales acerca de las gráficas cartesianas, en especial del análisis e interpretación de su comportamiento, aumentan las probabilidades de superar tales concepciones, atendiendo a las condiciones señaladas. Pero esto requiere de más trabajo tanto de investigación como de docencia.

Bibliografía

Acuña, C. (2001). Concepciones en graficación: el orden entre las coordenadas de los puntos del plano cartesiano. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 4* (3), 203-217.

Ausubel, D., Novak, J. y Hanesian, H. (1995). *Psicología educativa. Un punto de vista cognoscitivo.* México: Trillas.

Azcárate, C. (1993). Esquemas conceptuales y perfiles de unos alumnos de bachillerato con relación a la pendiente de una recta. En E. Filloy y E Cordero (Eds.), *Memorias del V Simposio Internacional sobre Investigación en Matemática Educativa (pp.* 117-136). México, Universidad Autónoma de Yucatán: PNFAPM.

Bachelard, *C1* (1988). *La formación del espíritu científico.* México: Siglo Veintiuno Editores.

Bell, A.; Brekke, G y Swan, M. (1987a). Diagnostic teaching: 4 graphical interpretations. *Mathematical, Teaching* 119, 56-60.

Bell, A.; Brekke, G y Swan, M. (1987b). Diagnostic teaching: 5 graphical interpretations teaching styles and their effects. *Mathematical Teaching* 120, 50-57.

Bell A. & Janvier, C. (1981). The interpretation of graphs representing situations. *For the Learning of Mathematics* 2 (19), 34-42.

Cantoral, R. y Farfán, R. (2000). Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis. En R. Cantoral (Coord.), El *futuro del cálculo infinitesimal (pp.* 69-9l). Sevilla, España: 1CME-Máxico: Grupo Editorial Iberoamérica.

Castro, E. y Castro, E. (1997). Representaciones y modelización. En L. Rico (Coord.), La *educación matemática en la enseñanza secundaria (pp.* 95-124). Barcelona, España: ICE/ HORSORI.

Confrey, J. (1990). A review of research on students conceptions in mathematics, science and programming. En C. E. Cazden (Ed.), *Review of Research in Education* 16, 3-56.

Dolores, C.; Alarcón, G y Carvajal, D. (2002). Concepciones alternativas sobre las gráficas cartesianas del movimiento: el caso de la velocidad y la trayectoria. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 5* (3), 225-250.

Dolores, C. (1998). Algunas ideas que acerca de la derivada se forman los estudiantes del bachillerato en sus cursos de Cálculo Diferencial. En F. Hitt. (Ed.), *Investigaciones en Matemática Educativa II (pp.* 257-272). México: Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav-IPN-Grupo Editorial Iberoamérica.

Dolores, C. y Guerrero, L. (2002). Concepciones alternativas que, referentes al comportamiento variacional de funciones, manifiestan profesores de bachillerato. Conferencia dictada en la 16ª Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa (RELME 16). La Habana, Cuba: Instituto Superior Politécnico José Antonio Echeverría-Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Dreyfus, T. (1993). Advanced mathematical thinking. En P. Nesher, y J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics and cognition: A research synthesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Education (pp.* 113-134). Cambridge, USA: Cambridge University Press QCMI Studies Series).

Duval R. (1998). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. En F. Hitt (Ed.), *Investigaciones en Matemática Educativa* II (pp. 173-201). México: Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav-IPN-Grupo Editorial Iberoamérica.

Eisemberg, T. y Dreyfus, T. (1991). On the reluctance to visualize in mathematics. En W. Zimmerman & S. Cunningham (Eds.), *Visualization in Teaching and Learning Mathematics* (pp. 25-27). USA: MAA Notes Series.

Even, R. (1998). Factor involved in linking representations of functions. Journal of *Mathematical Behavior* 17 (1), 105-121.

Fabra, M. y Deulofeu, J. (2000). Construcción de gráficos de funciones: "Continuidad y prototipos". *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 43* (2), 207230.

Hernández, S., et al. (1997). *Metodología de la investigación.* México: Mc Graw-Hill.

Hitt, F. (1988). Difficulties in the articulation of different representations linked to the concept of function. *Journal of Mathematical Behavior* 17 (1), 123-134.

Howson, G. (199 *l). National curricula in mathematics.* England: University of Southampton-The Mathematical Association.

IBERCIMA (1992). *Análisis comparado del currículo de matemáticas (nivel medio) en Iberoamérica.* Madrid, España: Mare Mostrum Ediciones Didácticas, S.A.

Leinhardt, G; Zaslavsky, 0. y Stein, M. (1990). Functions, graphs and graphing: Tasks, learning and teaching. *Review of Educational Research 60, 1-64.*

Mevarech, Z. y Kramarsky, B. (1997). From verbal description to graphic representation: stability and change in student's alternative conceptions. *Educational Studies in Mathematics* 32 (3), 229-263.

Moschkovich, J.; Schoenfeld, A. y Arcabi, A. (1993). Aspects of understanding: On multiple perspectives and representations of lineal relations, and connecting among them. En T. Romberg, E. Fennema y T. Carpenter (Eds.), *Integrating research on the graphical representation of function* (pp. 69-100). Hillsdale, NJ, USA: LEA.

NCIM (2000). *Estándares curriculares y de evaluación para la educación matemática*. Sevilla, España: SAEM-THALES.

Osborne, R. J. & Wittrock, M. C. (1983). Learning science: a generative process. *Science Education* 67, 498-508.

Pozo, J. 1. (1996). *Teorías cognitivas del aprendizaje*, Madrid, España: Morata.

SEP, SEIT, DEGTI, COSNET (1988). *Programas de maestros del tronco común del bachillerato tecnológico.* México: SEP, SEIT, DEGTI, COSNET.

Sinatra, G. y Pintrich, P. (2003). The role of intentions in conceptual change learning. En G Sinatra y P. Pintrich (Ends), *International conceptual change* (pp. 1-18). Mahwah, NJ, USA: LEA.

Wainer, H. (1992). Understanding graphs and tables. *Educational Researcher* 21, 14-23.

Crisólogo Dolores Flores
Centro de Investigación en Matemática Educativa (CIMATE)
Unidad Académica de Matemáticas, Universidad Autónoma de Guerrero, México
Quetzalcóatl Núm. 3, Col. Calli-Calmécac, CP 30970
Chilpancingo, Guerrero, México
Teléfono y fax (747) 47 15651
E-mails: cdolores@prodigy.net.mx; cdolores@cimateuagro.org