



Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa

Comité Latinoamericano de Matemática Educativa

relime@mail.cinvestav.mx

ISSN (Versión impresa): 1665-2436

MÉXICO

2004

Marta Elena Valdemoros Álvarez

LENGUAJE, FRACCIONES Y REPARTO

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, noviembre,
año/vol. 7, número 003

Comité Latinoamericano de Matemática Educativa

Distrito Federal, México

pp. 235-256



Lenguaje, fracciones y reparto

Marta Elena Valdemoros Álvarez¹

RESUMEN

En el marco de una investigación doctoral en la que se exploró cualitativamente el vínculo entre la construcción del lenguaje aritmético de las fracciones y el desarrollo de conceptos ligados a tales números, aplicamos un cuestionario en un grupo naturalmente constituido de cuarto grado de primaria (integrado por 37 alumnos de 8-11 años de edad). El mencionado cuestionario estuvo centrado en diversos contenidos semánticos asignables a las fracciones. Específicamente, el presente escrito constituye una comunicación parcial derivada de dicha investigación doctoral; aquí, nos referimos exclusivamente a la exploración propiciada por aquel cuestionario en torno al significado de cociente, atendiendo a su carácter de noción derivada de acciones y situaciones familiares para los niños y ofreciendo por ello un punto de partida bastante accesible a la enseñanza de fracciones. El propósito de dicha indagación fue identificar los componentes semánticos, sintácticos y de "traducción" involucrados en las respuestas de los alumnos ante diversas situaciones de reparto. En la prosecución de tal propósito, se concedió especial atención a aquellos componentes que afectasen el adecuado desenvolvimiento de los niños y el consiguiente aprendizaje escolar a desarrollar. Consideramos que todos estos fenómenos son de vital importancia para los profesores y la correspondiente organización de las propuestas instruccionales que ellos desarrollen.

Language, fractions and distribution

ABSTRACT

Within the framework of a doctoral research in which the link between the construction of the arithmetic language of the fractions and the development of concepts related to such numbers was explored qualitatively, we applied a questionnaire in a naturally constituted group of fourth grade (integrated by 37 students of 8-11 years old). The mentioned questionnaire was centered in the diverse assignable semantic contents to the fractions. Specifically, the present paper constitutes a partial communication derived from this doctoral research; here, we exclusively talked about the exploration caused by that questionnaire around the quotient meaning, taking care of its character of derived notion from actions and familiar situations for the children and offering for that reason an accessible beginning point for the teaching of fractions. The intention of this research was to identify the semantic, syntactic and "translation" components involved in the answers of the students engaged on distribution situations. In the continuation of such intention, special attention was granted to those components that affected

Fecha de recepción: octubre de 2003

¹Departamento de Matemática Educativa. Cinvestav-IPN, México.

the suitable unfolding of the children and the consequent learning to develop. We considered that all these phenomena are of vital importance for the professors and the corresponding organization of the instructional proposals that they develop.

KEY WORDS: fractions, sharing, quotient, meaning, semantic, syntax, translation

Linguagem, frações e partição

RESUMO

Como fundamentação para uma pesquisa de doutorado, em que se explorou qualitativamente o vínculo entre a construção da linguagem aritmética das frações e o desenvolvimento de conceitos ligados a tais números, aplicamos um questionário em um grupo naturalmente constituído de 37 alunos, da quarta série do ensino fundamental, com idade entre 8 e 11 anos de idade. O questionário mencionado estava centrado em diversos conteúdos semânticos atribuído às frações. Especificamente, o presente artigo constitui uma comunicação parcial derivada de tal pesquisa. Aqui, nos referimos exclusivamente à exploração propiciada por aquele questionário em torno do significado de quociente, respeitando seu caráter de noção proveniente de ações e situações familiares para as crianças. Oferecendo, assim um ponto de partida bastante acessível ao ensino de frações. O propósito de tal investigação foi o de identificar os componentes semânticos, sintáticos e de “tradução” envolvidos nas respostas dos alunos mediante diversas situações de partição. Na continuidade de tal propósito, se prestou especial atenção a aqueles componentes que afetassem o adequado desenvolvimento das crianças e, conseqüentemente, a aprendizagem escolar a ser desenvolvida. Consideramos que todos esses fenômenos são de vital importância para os professores e para a correspondente organização das propostas instrucionais que eles desenvolvem.

PALAVRAS CHAVE: Frações, partição, quociente, significado, semântica, sintaxe, tradução

Langage, fractions et repart

RESUMÉ

Dans le cadre d' une recherche au niveau du doctorat dans la quelle s' est explorée qualitativement le lien entre la construction du langage arithmétique des fractions et le développement des concepts liés aux tels nombres, on a appliqué un questionnaire dans un groupe naturel constitué par des enfants du quatrième année du premier cycle d' éducation basique (équivalent au CM1 en France) âgés de 8 à 11 ans. Tel questionnaire a été centré en divers contenus sémantiques destinés aux fractions. Spécifiquement le présent écrit constitue une communication partielle dérivée de tel recherche ; ici on se rapporte exclusivement à l' exploration motivée par tel questionnaire autour de la signification du quotient, en faisant attention à son caractère de notion de dérivée des actions et situations familières pour les enfants, en offrant pour tel effet un point de départ assez accessible à l' enseignement des fractions. Le propos de cette investigation fut d' identifier les composants sémantiques, syntactiques et de « traduc-

tion » insérés dans les réponses des élèves face aux telles situations de repart. Dans la poursuite de tel propos, on a fait une particulière attention aux composants qui puissent affecter le développement adéquat des enfants et le consécutif apprentissage scolaire à développer. On considère tous ces phénomènes de vital importance à la organisation des propositions relatives aux instructions qui développeront les professeurs.

MOTS CLÉS: fracciones, repart, quotient, signification, sémantique, syntaxe, traduction.

Nuestros antecedentes teóricos

Algunos investigadores (entre otros, Kieren, 1976, 1980, 1983, 1984, 1985, 1988, 1992, 1993; Freudenthal, 1983; Behr, Lesh, Post y Silver, 1983; Behr y Post, 1988; Ohlsson, 1988) han promovido un gran avance, a nivel de los estudios semánticos centrados en las fracciones. Con ello, han sentado las bases para delimitar ciertos significados factibles de construcción, reconociendo simultáneamente determinados espacios de aplicación en los que aquéllos emergen (lo cual conlleva implicaciones didácticas directas o indirectas).

Aún ahora, sin embargo, dichos progresos logrados en el impulso de la investigación semántica no han estado encuadrados por una exhaustiva indagación de los procesos globales del lenguaje aritmético que acompañan a aquellos significados.

En el presente marco, se sostiene que no hay desarrollo de conceptos sin un lenguaje que constituya su soporte; éste constituye uno de los pilares fundamentales de nuestro marco teórico, al que se subordinan los restantes planteamientos contenidos en el mismo. Por eso, al explorar qué significados atribuyen los niños a las fracciones, consideramos que es fundamental establecer los procesos sintácticos, las modalidades de notación relacionados con los significados ya aludidos y las formas de tránsito de un lenguaje a otro o, de un lenguaje a un sistema simbólico (Valdemoros, 1992, 1993a, 1993b, 1993c, 1994a, 1994b).

En otras áreas de la investigación, la indagación efectuada por Neshet (1982) brinda un relevante antecedente teórico a este estudio del lenguaje aritmético ligado a las fracciones, porque la aludida autora explora ampliamente algunos componentes sintácticos, semánticos y lógicos de aquél (a través de la resolución de problemas verbales aditivos).

Otro antecedente teórico importante lo ofrece la investigación efectuada por Behr, Post, Silver, Mierkiewicz (1980), Lesh, Landau, Hamilton (1980), Lesh, Post y Behr (1987) con respecto al vínculo marcadamente activo que mantienen entre sí los diversos modos de representación involucrados y los conceptos asociados a las fracciones. Al respecto, es la identificación de nexos dinámicos entre las representaciones, nociones y conceptos referidos a las fracciones la aportación que privilegiamos, aquí, de las investigaciones señaladas en último término.

Laborde (1990) resalta la activa construcción del lenguaje matemático, en general —y por ende, del lenguaje aritmético— por parte de los sujetos involucrados en su uso y dominio. La mencionada investigadora señala que, a la par de proporcionar a los últimos un medio para la comunicación, el lenguaje matemático también les ofrece “un medio de representación” y “de explicación”.

Apoyándonos en los señalamientos de los párrafos precedentes, nos proponemos focalizar aquí nuestra atención en los conte-

nidos semánticos asignados por los escolares a las fracciones (los cuales están íntimamente relacionados con la construcción de conceptos), como también, en los componentes sintácticos y de "traducción" del lenguaje "natural" al aritmético, sin omitir el pasaje por diversas modalidades de "representación pictográfica" consagradas a través de la práctica escolar. En ese recorrido, indirectamente tomamos en cuenta la investigación centrada en los números naturales que realizó Sastre (1984), quien exploró ¿al comenzar la escuela primaria? el tránsito que los niños efectúan desde el uso de dibujos hacia el desarrollo de la escritura aritmética. En todos los procesos antedichos, reconocemos que los usuarios del lenguaje realizan una búsqueda activa, la cual llega a evidenciarse tanto en sus mejores logros como en sus errores y distorsiones manifiestos.

En el presente informe hemos seleccionado el significado de cociente susceptible de ser asignado a la fracción, en situaciones concretas de reparto, ya que permite el establecimiento de ambientes familiares para los niños, generando la incorporación de algunas experiencias cotidianas (aunque, al modelar éstas afectamos algunos de los componentes semánticos que están involucrados en tales situaciones reales).

Para abordar las nociones intuitivas de la fracción como cociente, partimos de los estudios realizados por Kieren et al (1984, 1985 y 1988), quien señala que el significado de cociente está ligado a situaciones de *reparto equitativo* de cierto número de objetos, entre un número determinado de personas. Asimismo, Kieren (1984) sostiene que dicho contenido semántico y el constructo de medida son de naturaleza aditiva, por lo que ambos contrastan fuertemente con los significados de razón y de operador, dado el carácter eminentemente multiplicativo de éstos; tal reconocimiento presenta una proyección hacia el aula y el

profesor, dado que señala inequívocamente qué significados deben respaldar, por un lado, a la adición y la sustracción de fracciones, y por el otro, a la multiplicación y la división de dichos números.

El significado de cociente también es designado como "división indicada" (esto es enunciado, entre otros autores, por Behr, Lesh, Post y Silver, 1983, o bien, Behr y Post, 1988), dado que " a/b " suele constituir un modo abreviado de escribir "a dividido entre b". Dichos autores enfatizan el papel ejercido por la partición, la cual es considerada por ellos como el soporte básico de tal contenido semántico (Behr y Post, 1988).

Todos los tópicos antedichos son de capital interés para el diseño y posterior desarrollo de la enseñanza escolar elemental. Con dicho sustento, en la siguiente sección describimos detalladamente el modo de organización del estudio aquí reportado.

En torno a cómo organizamos nuestra experiencia de campo

Para llevar adelante una investigación doctoral (de naturaleza cualitativa y orientada hacia el estudio ulterior de algunos casos) seleccionamos un grupo natural del cuarto grado de primaria. El mismo estaba compuesto por 37 niños con edades comprendidas entre 8 y 11 años. Tanto el grupo escogido como la escuela de pertenencia se caracterizaban por su buen desempeño, el cual podía ser reconocido como un "desempeño medio" si resultaba enmarcado y comparado con el de otras instituciones del sistema de educación pública (conforme a los criterios de evaluación adoptados en el sistema educativo al que adscribe la escuela).

A dicho grupo le aplicamos un **cuestionario inicial exploratorio**, el cual es el objeto de

seguimiento y análisis en el presente escrito, atendiendo a la gran diversidad de datos útiles que el mismo proporciona, tanto al profesor como al investigador, con respecto a las estrategias de resolución y los procesos cognitivos fundamentales desplegados por los niños ante varias **tareas concretas de reparto**. El referido **cuestionario inicial exploratorio** (con respecto al cual no hemos derivado ninguna comunicación parcial, hasta ahora) fue el punto de partida de un estudio de casos posterior, del que se generaron ya varias publicaciones parciales centradas en el manejo de casos y de cuyo desarrollo tan sólo incluimos algunos comentarios terminales, aquéllos que permiten ratificar los hallazgos realizados en el **cuestionario inicial exploratorio**.

Después de un cuidadoso *piloteo previo* (esto es, luego de un ensayo preliminar con otros niños), el cuestionario inicial exploratorio quedó integrado por treinta problemas distintos, entre los que contamos tres tareas de reparto de diferente complejidad, como puede constatarse en la Tabla I.

Las tres tareas de reparto antedichas incluyeron un número creciente de objetos a ser distribuidos y de sujetos intervinientes en el reparto, demandando del estudiante elaboraciones a desarrollar en distintos planos de representación (a través del dibujo y manejando también expresiones tanto lingüísticas como aritméticas). Específicamente, la Tabla I exhibe un incremento progresivo en el nivel de dificultad de los problemas aritméticos integrados en la misma, siendo el primero de ellos el más sencillo y el último, el que ofrece más complejidad a los alumnos.

En la Tarea XIV se destaca que las jarras contienen “bebidas de distintos sabores” porque así suele presentarse, en la vida misma, esta clase de experiencias. No obstante, tal señalamiento no pretende regular el planteamiento de la solución propuesta por los niños,

centrándola en la exclusiva consideración de la fracción en relación a cada una de las jarras. Por el contrario, el enunciado final de este problema —a completar por los niños— refiere la fracción identificada al total de bebidas, o sea, al total de jarras. *A posteriori*, se espera que la elección de la estrategia de partición dependa de la interpretación que cada niño efectúe de dicha situación y de la unidad que reconozca en ella, como ya ha sido destacado claramente en los estudios que configuran el marco teórico de la presente comunicación: entre otras estrategias, tomar consecutivamente a cada jarra, dividirla en ocho partes y acumular luego en octavos lo que corresponde a cada niño, o bien, considerar conjuntamente todas las jarras, apelando a una partición mixta y reconociendo una composición aditiva de dos o más fracciones.

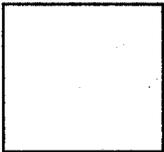
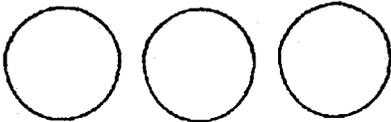
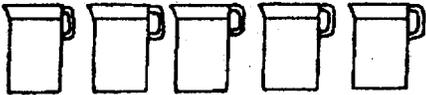
Aquí, las tareas de reparto han sido seleccionadas porque ofrecen a la instrucción escolar de las fracciones un punto de despegue muy accesible a los alumnos, en la medida en que se apoyan en nociones y acciones marcadamente identificables para los estudiantes, en tanto están integradas a la experiencia habitual de los niños, a la par que brindaron con anterioridad un claro respaldo a la enseñanza de los números naturales. Por ello, consideramos que la reflexión acerca de las producciones que los alumnos pueden desplegar en este terreno, ofrece a los maestros muchas pistas acerca de las rutas más eficaces a seguir, en el proceso de instrucción.

Para la realización del posterior análisis de la información recogida a través de esta investigación, diseñamos un **modelo interpretativo** que se expone seguidamente, en el Cuadro 1.

Dicho modelo de análisis presenta una **naturaleza eminentemente lingüística**, ya que permite identificar los tres **planos constituyentes de todo lenguaje**: el **semántico**, el **sintáctico** y el **pragmático** (es decir, el co-

TABLA I

Problemas de Reparto del Cuestionario Inicial Exploratorio

TAREA	TEXTO CORRESPONDIENTE
<p>Ejercicio XII</p>	<p>Cinco amigos se proponen pintar en común, un muro como éste:</p> <div style="text-align: center;">  </div> <p>¿Cómo se podrían distribuir equitativamente el trabajo a realizar? Indícalo en el dibujo de arriba. Así, a cada amigo le corresponderá pintar _____ del muro.</p>
<p>Ejercicio XIII</p>	<p>Cuatro niños van a comer tres galletas. Ayúdalos a repartírselas, de modo que a todos ellos les correspondan partes iguales.</p> <div style="text-align: center;">  </div> <p>Indica en las siguientes figuras cómo harán el reparto. Escribe el nombre de cada niño junto a las partes que tú le asignas. De esa manera, cada niño recibirá _____ de todas las galletas.</p>
<p>Ejercicio XIV</p>	<p>Ocho amigos participan en un festejo. Indica cómo pueden repartirse estas bebidas de diferentes sabores, de modo que cada uno de ellos reciba la misma cantidad:</p> <div style="text-align: center;">  </div> <p>Escribe el nombre de cada amigo, junto a las partes que tú le asignas. Cada niño recibe así _____ de las bebidas preparadas en la fiesta.</p>

EN EL PLANO SEMÁNTICO, la identificación de los significados y de los procesos de significación detectables a través de las elaboraciones de los estudiantes.

EN EL PLANO SINTÁCTICO, el reconocimiento de las modalidades de articulación de distintos signos asociados por los niños a estrategias mixtas de solución, el manejo concreto de las reglas que regulan esas articulaciones y el uso de algoritmos.

EN EL PLANO DE "TRADUCCIÓN"¹ DE UN LENGUAJE A OTRO LENGUAJE O A UN SISTEMA SIMBÓLICO, la puesta en correspondencia entre la lengua y el lenguaje aritmético, el reconocimiento de las dificultades asociadas a ese tránsito y las posibles inconsistencias manifiestas en el uso conjunto de distintos lenguajes y sistemas simbólicos.

EN EL PLANO DE LA ESCRITURA ARITMÉTICA, atención a las notaciones convencionales o personales que nos permitan reconstruir componentes conceptuales importantes de las soluciones propuestas por los niños.

CON RELACIÓN AL PLANO DE LA LECTURA, reconocimiento de modos particulares de asignación de sentido, tanto a los enunciados de los problemas como a los "pictogramas"² incluidos en ellos.

Cuadro 1. Modelo de análisis adoptado para la interpretación de los datos reunidos en toda la investigación.

respondiente al uso del lenguaje considerado, el cual permite dilucidar aquellos procesos que requieren ser inferidos porque no pueden ser observados de un modo directo). Esto último resulta también aplicable a los lenguajes técnicos, en general, tanto como al lenguaje aritmético, en particular.

Además, el modelo de análisis expuesto en el Cuadro 1 nos permite integrar otras modalidades de representación, integradas a **diversos sistemas simbólicos** (los que no disponen de una conformación como la que acabamos de señalar, con referencia a los planos semántico, sintáctico y pragmático); dichos sistemas son tomados en cuenta, aquí, porque están involucrados en el aprendizaje y la enseñanza de las fracciones. En particular,

esto es reconocible en el plano de "traducción" señalado en el Cuadro 1, asumiendo el principio formulado por las **ciencias del lenguaje**, con respecto a la circunstancia de que los componentes de los mencionados sistemas adquieren significación con referencia al lenguaje, el cual constituye su soporte básico.

Puede advertirse que esta herramienta interpretativa no permite situar la génesis de las representaciones y sus correspondientes significados porque tal seguimiento de los procesos genéticos no ha sido tomado en consideración en esta investigación, ya que una indagación de esa naturaleza requeriría un prolongado estudio longitudinal que ejerciese un cuidadoso control sobre la enseñanza que reciban los estudiantes (estos dos últimos

aspectos están ausentes en la presente investigación).

En concreto, el mencionado modelo de análisis estuvo conformado por rubros que facilitaron el reconocimiento de las diversas elaboraciones de los niños, a nivel del lenguaje de las fracciones, así como de sus vínculos con expresiones de la lengua y otras modalidades de representación integradas en la resolución de los problemas aritméticos que conformaron el cuestionario considerado en la presente comunicación.

Al efectuar el análisis de las tareas de reparto presentadas en la Tabla I, nos esforzamos por aplicar tantas categorías de análisis exhibidas en el Cuadro 1 como nos fuese posible, conforme a la propia naturaleza de cada problema aritmético resuelto por los estudiantes.

Los resultados más relevantes y su interpretación

Tomando en cuenta la escritura del numeral que los niños escogieron para representar cada situación de reparto, en el ámbito del lenguaje aritmético, la Tabla II señala los resultados globales que corresponden a dichas tareas; en cada una de sus columnas se precisa el número de estudiantes que evidenciaron la situación descrita, en relación al total de alumnos que resolvieron esos problemas. En particular, el reconocimiento de "otras frac-

ciones" indica la identificación de numerales que no se ajustan a una cuantificación correcta de la situación a resolver. El señalamiento de una "carencia de numerales escritos" da cuenta de que dichas resoluciones tan sólo contienen particiones explícitas, en ausencia de procesos manifiestos de cuantificación.

Globalmente, el incremento de las dificultades manifiestas por los niños a nivel de la explicitación de las respectivas soluciones puede atribuirse a la creciente complejidad de estos problemas. El aumento del número de objetos a repartir y de las personas beneficiadas por las correspondientes distribuciones, señalan a la Tarea XII como la más accesible a la interpretación de los niños, en tanto que la Tarea XIV se revela como la más difícil para ellos.

Asimismo, algunos de estos resultados (el marcado uso de números naturales en las Tareas XII y XIII, o bien, la escasa presencia de cuantificaciones adecuadas en la Tarea XIV) parecen situarnos ante la presumible exclusión de tales problemas en la enseñanza que estos estudiantes recibieron previamente.

Dado que las situaciones de reparto constituyeron previamente uno de los recursos didácticos susceptibles de respaldar la enseñanza de los números naturales, la notable frecuencia con la que los estudiantes apelaron a éstos en el proceso terminal de cuantificación (Tareas XII y XIII, en la Tabla II),

TABLA II

Numerales escritos por los estudiantes en las tareas de reparto

Tareas	Fracciones adecuadas	Otras fracciones	Números naturales	Carencia de numerales escritos
XII	14/37	4/37	15/37	4/37
XIII	8/37	12/37	13/37	4/37
XIV	5/37	22/37	7/37	3/37

nos indica que estos niños han comprendido adecuadamente cada problema pero que no han podido expresar una fracción para arribar a una cuantificación más completa de las situaciones consideradas. El abandono de los números naturales y el progresivo uso de las fracciones (ante problemas aritméticos de este tipo) tan sólo pueden ser garantizados por una enseñanza que acentúe el explícito contraste entre ambos procesos de cuantificación, la cual parece no haber tenido lugar en este grupo escolar.

Atendiendo al desempeño de los estudiantes nucleados en las columnas referidas al reconocimiento de las “fracciones adecuadas” y de los “números naturales” (particularmente, en las Tareas XII y XIII), podemos afirmar que un alto número de estudiantes evidenciaron una comprensión básica de los problemas aludidos y de los contenidos semánticos involucrados en los mismos, aún cuando no hayan arribado todos esos niños a una identificación notacional de la fracción.

En cuanto a la equipartición, la mayoría de los integrantes del grupo se apoyó en ideas de congruencia y de exhaustión del todo, ante las Tareas XII y XIII, las que sin embargo suscitaron diversas dificultades en los restantes alumnos (entre otras, el no agotar el todo a través de la subdivisión del muro o de la colección de las tres galletas). Unos pocos estudiantes dejaron inconclusas sus respectivas ejecuciones, en la Tarea XIII. La equipartición de las bebidas presentó notables dificultades para la mayoría de los niños (Tarea XIV), acentuándose en esta situación la ausencia de exhaustión del todo y las ejecuciones inconclusas de muchos alumnos. Un rasgo peculiar de numerosas particiones, en la Tarea XIV, consistió en que determinados niños no usaron paralelas a la base de las jarras, sino que trazaron diagonales como si, en vez de indicar el reparto de líquidos, estuvieran subdividiendo un rectángulo en octavos.

A continuación, atendiendo a la imposibilidad de analizar y discutir profundamente toda la información obtenida en las tareas ya identificadas, hemos optado por centrarnos en aquellos resultados que fueron portadores de ciertos componentes y rasgos importantes del lenguaje de las fracciones; particularmente, los que afectaron u obstaculizaron el adecuado desempeño de los niños. En el siguiente apartado, los incorporamos a los niveles reconocidos en nuestro modelo de análisis, sin procurar categorizarlos de modo preciso, ya que algunos de los ejemplos expuestos son el vehículo común de dos o más de estos aspectos, aunque por razones de brevedad sólo analizamos el que consideramos fundamental en cada uno de ellos.

Comenzamos la presentación pormenorizada de resultados con la identificación de algunos procesos de “traducción”, continuando luego con ciertos contenidos semánticos importantes, para finalizar con algunas elaboraciones sintácticas de los niños. Tal secuencia seguida en el análisis aquí expuesto no implica una jerarquización de la relevancia reconocida por nosotros a los respectivos contenidos. Tampoco involucra ningún supuesto genético en nuestra interpretación.

I. En el plano de la “traducción” de un lenguaje a otro

En el presente escrito identificamos como “procesos de traducción” a aquéllos que permiten al sujeto efectuar el pasaje desde un sistema de representación a otro, **preservando** los contenidos semánticos que sean sustanciales para el modelo considerado.

De manera específica, nuestra atención se centra en los modos de representación integrados al lenguaje verbal, al lenguaje aritmético y a los sistemas simbólicos auxiliares ligados a este último (en concreto, nos referi-

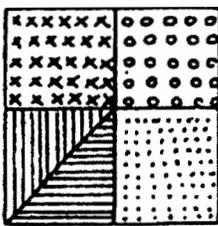
mos a las representaciones pictóricas involucradas en las correspondientes tareas, a las que hemos designado como "pictogramas", coincidiendo con Sastre, 1984).

En este terreno pudimos detectar una gran diversidad de fenómenos importantes. Entre ellos, privilegiamos los que describimos y analizamos en los siguientes párrafos.

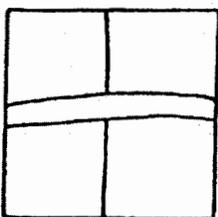
I.1. Una fuerte tendencia, en el grupo escolar de nuestro estudio, consistió en traducir los aspectos cuantitativos de las tareas mencionadas al lenguaje de los números naturales. El numeral escrito por dichos niños correspondió —mayoritariamente— al señalamiento de las partes asignadas a cada sujeto

involucrado en el reparto; sin embargo, hubo otras respuestas en las que el número natural fue tratado como un indicador de la cantidad de partes reconocidas en cada objeto a ser repartido. El Cuadro 2 ilustra algunas de estas respuestas, con relación a los Ejercicios XII, XIII y XIV.

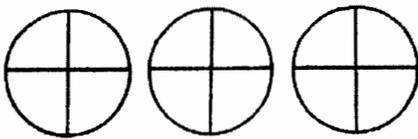
En particular, la ejecución de Jorge (ilustrada en el Cuadro 2) puso en evidencia que —en las más complejas interpretaciones de la tarea— se dificultó para el niño la global asignación de sentido a los pasos involucrados en la solución y la ulterior preservación de dicho sentido, al momento de efectuar la "traducción" o el pasaje desde las representaciones en uso al numeral atribuido a la respectiva



1 parte
Respuesta de Norma
Ejercicio XII



5
Respuesta de Griselda
Ejercicio XII

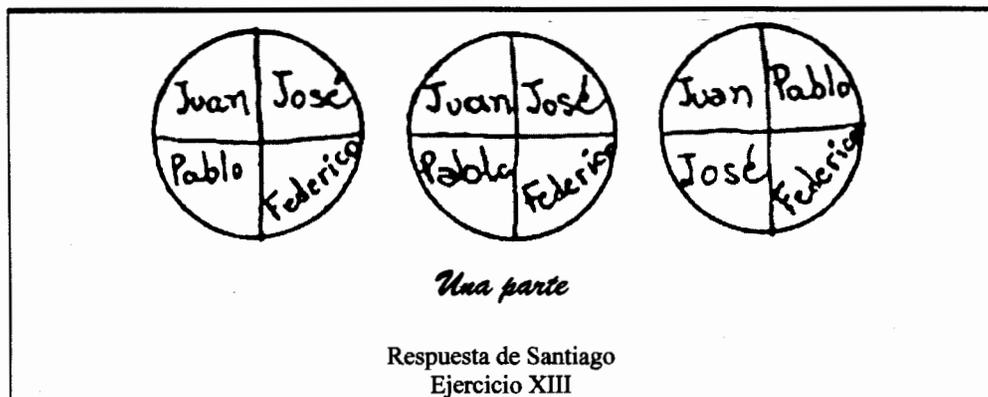


Pepe Juan Aldo Luis
3 pedazos
Respuesta de Alfredo
Ejercicio XIII



2 partes
Respuesta de Jorge
Ejercicio XIV

Cuadro 2. Algunas de las ejecuciones vinculadas al reconocimiento de números naturales, en las Tareas XII, XIII y XIV del cuestionario inicial exploratorio.



Cuadro 3. Las elaboraciones de Santiago, entre muchas otras, exhibieron una cuidadosa combinación de precisas indicaciones pictóricas y de expresiones lingüísticas, indudablemente consistentes entre sí, ante el Ejercicio XIII del cuestionario inicial exploratorio.

situación. Puede advertirse que dicho numeral evidenció el reconocimiento del número de partes en las que quedó partido cada objeto (en contraste con lo demandado por el propio texto del problema, en términos de indicación de cuánto recibió cada sujeto ligado al reparto). Por otra parte, Jorge no dividió todos los objetos propuestos por el problema sino que excluyó al último de éstos (quizás, por no poder combinar eficazmente distintas estrategias de partición).

I.2. Ciertos niños se esforzaron por combinar la información cuantitativa con detallados señalamientos gráficos efectuados sobre los dibujos dados, como se aprecia en el Cuadro 3.

Puede advertirse que la elección de un número natural ¿canalizado indirectamente a través del lenguaje “natural” y portador de información muy restringida referida a la situación aquí modelada? se acompaña de un cuidadoso y pormenorizado pictograma.

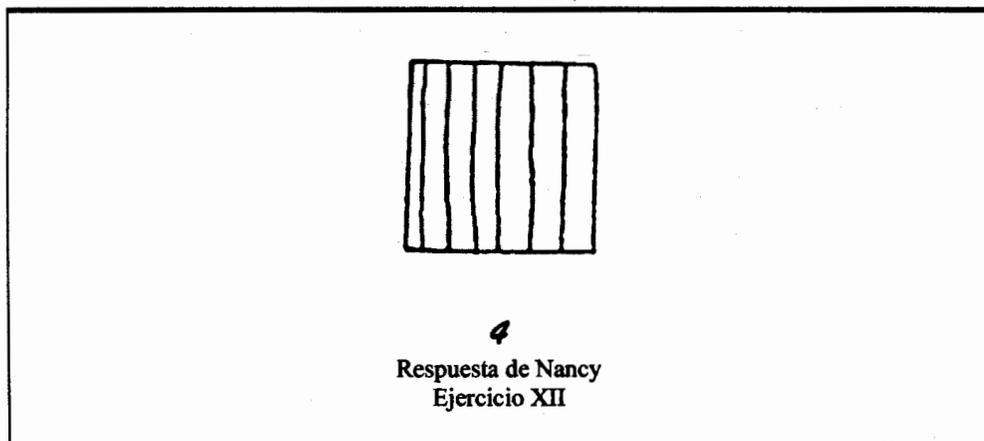
Pese a las limitaciones que evidencia Santiago a nivel del reconocimiento de lo cuantita-

tivo (vía selección de un número natural), el conjunto de las representaciones articuladas al problema exhiben una notoria consistencia, en virtud de que preservan los contenidos fundamentales de la ejecución a través de los diversos planos de explicitación involucrados en la misma.

Entre otros niños, Santiago encontró en el uso del pictograma un importante respaldo, embrionariamente eficaz para ampliar de manera adecuada su pensamiento aritmético (en particular, con la eventual intervención de un profesor que *a posteriori* potencie dicho soporte).

I.3. También hubo otras elaboraciones que presentaron un marcado contraste con la que acabamos de identificar; aunque, no fueron muy frecuentes. En ellas, se manifestó la no concordancia entre la partición, el sombreado ocasional desarrollado por algunos alumnos y el numeral escrito.

La respuesta de Nancy ilustra lo antedicho (véase el Cuadro 4). Esta niña manifestó una



Cuadro 4. Nancy evidenció una discordancia manifiesta entre los distintos planos de representación, tanto a nivel de la partición como de la representación escrita del numeral.

marcada ausencia de correspondencia entre el número natural escogido y la partición de la unidad.

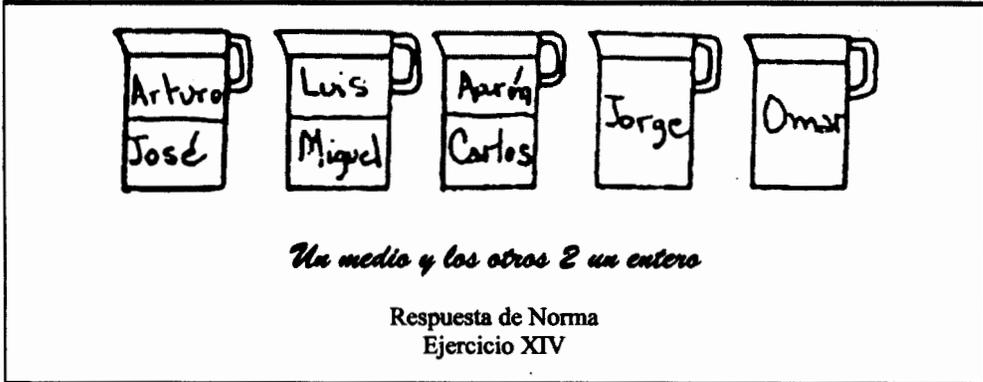
En general, la ejecución de Nancy mostró ciertos rasgos de desintegración ya que pareció que —al hacer uso del pictograma y del lenguaje aritmético— la alumna se apoyó en diversas estrategias de solución, sin desarrollar propiamente procesos adecuados de pasaje (o “traducción”) desde un plano de simbolización al otro.

Asimismo, el sentido global impreciso de tal respuesta quedó ratificado por la carencia de una modalidad específica de indicación del reparto (la escritura de nombres o el sombreado, recursos de simbolización generalizados entre sus compañeros de grupo).

I.4. Algunos alumnos apelaron a un uso simultáneo de distintos lenguajes, a nivel de la *respuesta escrita*. Es decir, conjuntaron signos heteróclitos en un mismo planteamiento final, exhibiendo procesos incompletos de “traducción” o “tránsito” desde los pictogramas al lenguaje aritmético.

En general, tales modalidades de “hibridación” de los lenguajes y sistemas simbólicos usados asumieron formas diversas, dependiendo de la situación planteada por la tarea y de la estrategia de solución adoptada por el respectivo estudiante. Lo que todas ellas tienen en común es el insuficiente nivel de “traducción” alcanzado, circunstancia que indicaría un inestable desarrollo del sentido global de la ejecución; presumiblemente, este fenómeno estaría revelando una situación transicional en el aprendizaje de estos niños, en su progreso orientado hacia modalidades de explicitación crecientemente menos sincréticas y más especializadas.

Sin lugar a dudas, dichas expresiones “híbridas” cumplieron un papel bastante destacado en las elaboraciones cognitivas de estos estudiantes, si prestamos atención a la frecuencia con la que fueron puestas de manifiesto, en el cuestionario inicial exploratorio que nos ocupa aquí. Esto es, para muchos de los niños mencionados, el uso de esas expresiones mixtas parecía proporcionar un posible tránsito hacia la ulterior consolidación del lenguaje aritmético de las fracciones.



Cuadro 5. En la Tarea XIV del cuestionario inicial exploratorio, Norma desarrolló procesos incompletos de “traducción” desde la representación pictórica al lenguaje aritmético y las expresiones lingüísticas involucradas en la respuesta.

II. En el plano semántico

II.1. A lo largo de los tres problemas considerados hubo muchas ejecuciones que carecieron de una adecuada simbolización del reparto.

En los Ejercicios XIII y XIV, explícitamente se propuso a los estudiantes la escritura de nombres propios, lo cual no excluía la posible emergencia de otras formas de representación. De hecho, algunos niños espontáneamente sustituyeron aquel recurso por un sombreado muy preciso. Haciendo omisión de una u otra modalidad de indicación del reparto, muchos estudiantes se limitaron a subdividir las correspondientes figuras, escribir una fracción y ¿con menor frecuencia? realizar un sombreado que no cumplía el rol de hacer corresponder los objetos repartidos con los sujetos beneficiados por el reparto.

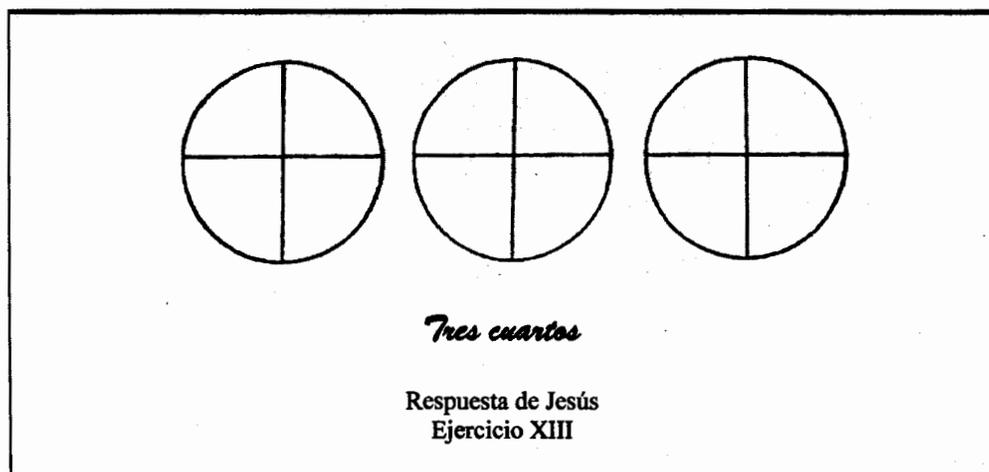
Nosotros interpretamos la última situación descrita como un esfuerzo infructuoso por mantener, en la presente situación, los recursos y significados inicialmente contruidos a nivel de la “relación parte-todo” (o del “fracturador”, apeándonos a la expresión acuña-

da por Freudenthal para referir la emergencia de la fracción como parte de un todo), los cuales resultan insuficientes para resolver clara y explícitamente esta clase de problemas.

Dado que un contexto de reparto requiere de modos de simbolización que permitan establecer la correspondencia entre los objetos repartidos y los receptores de los mismos, es imprescindible que las tempranas formas de representación y significación derivadas de la relación parte-todo sean enriquecidas y ampliadas, para ser eficazmente alojadas en el ámbito de las fracciones como “cocientes indicados”. Ilustramos esto mediante la respuesta de Jesús al Ejercicio XIII (véase el Cuadro 6).

Puede advertirse en el Cuadro 6 que Jesús logró identificar indirectamente —mediante una expresión de la lengua— una fracción que expresó convenientemente las condiciones del reparto. Sin embargo, a nivel del pictograma no llegó a precisar gráficamente tal distribución.

En otros sujetos, dichas limitaciones no sólo afectaron al pictograma desarrollado, sino



Cuadro 6. En la Tarea XIII, Jesús usó una expresión lingüística para identificar adecuadamente la fracción, aunque, no indicó dicha distribución en la representación pictórica respectiva.

también, a la correspondiente elección del numeral (estos niños se centraron en un solo objeto y tendieron a expresar únicamente fracciones unitarias, aún en las situaciones en las que había varios objetos a ser repartidos). Globalmente, puede afirmarse que en estos casos resultó profundamente afectado el sentido otorgado a los pictogramas y a los numerales reconocidos (las carencias y los señalamientos parciales detectados en ambos modos de representación pueden tomarse como indicadores del anclaje de estos estudiantes, en contenidos semánticos más elementales).

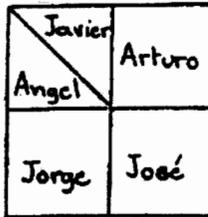
II.2. Una importante dificultad cognitiva detectada en este grupo estuvo asociada al reconocimiento de las restricciones semánticas introducidas por el modelo fraccionario del reparto, el cual sobreimpone a la experiencia cotidiana el requisito de una *distribución equitativa*. Para adecuar "lo real" al discurso aritmético, es necesario desechar toda experiencia que no se ajuste al contenido fundamental del *reparto equitativo*.

Pese a que en los tres problemas de nuestro estudio se hizo explícito el requerimiento de *reparto equitativo* indicado en el párrafo anterior, muchos miembros de este grupo desestimaron dicha indicación (por lo común, porque no pudieron resolver de manera conveniente las dificultades específicas de la partición). El Cuadro 7 expone dos ejecuciones que dan cuenta del mencionado fenómeno.

Otros niños parecieron incurrir en la desestimación de esa restricción semántica porque no llegaron a articular adecuadamente varias estrategias de partición, con referencia a la misma situación de reparto (en el Cuadro 5, el pictograma de Norma ejemplifica esa situación).

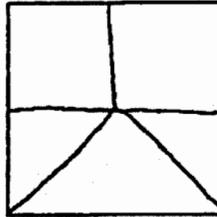
III. En el plano sintáctico

Al desarrollar complejas elaboraciones (conformadas por la articulación de diversos signos y la combinación de distintas estrategias de partición ligadas a la misma situación de reparto), algunos estudiantes formularon una



Una parte

Respuesta de Rosalinda
Ejercicio XII



1/5

Respuesta de Lucero
Ejercicio XII

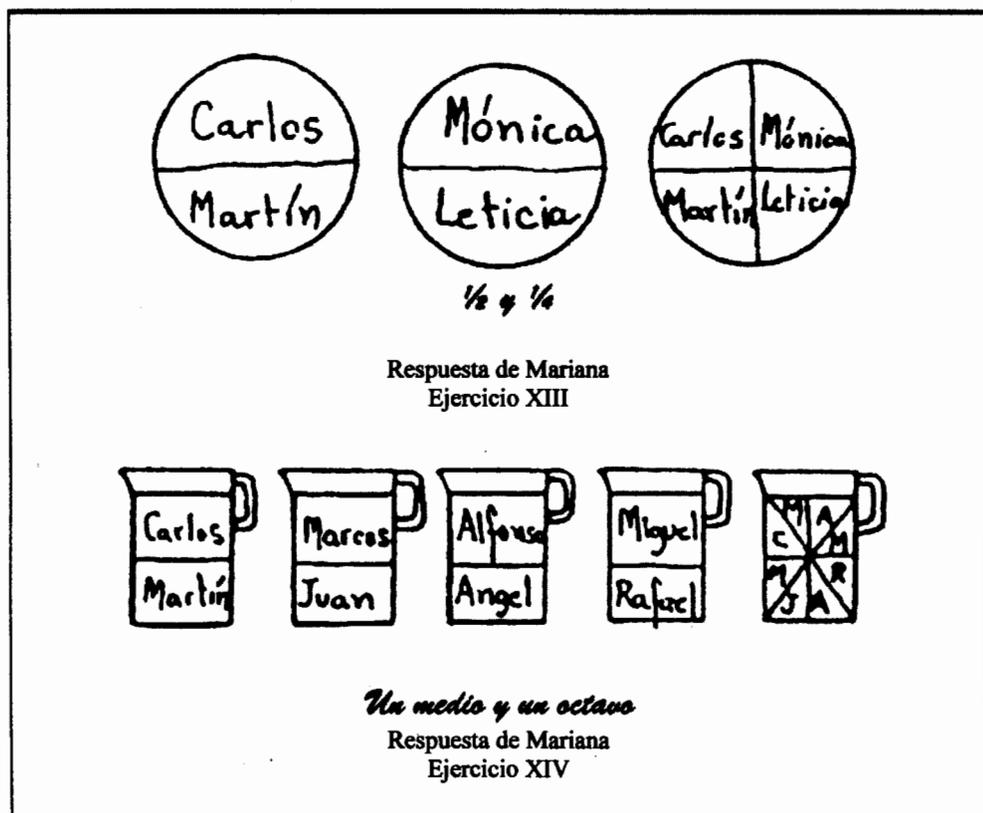
Cuadro 7. Rosalinda y Lucero, en la Tarea XII, realizaron un reparto no equitativo, desechando así la restricción de sentido que demanda el discurso aritmético.

expresión escrita que involucraba implícitamente la suma de fracciones. Sin embargo, para señalar el vínculo entre ambos numerales usaron la cópula lingüística “y”. Tal es el caso de Mariana, al dar solución a los Ejercicios XIII y XIV (ejemplificados en el Cuadro 8).

En ambas tareas, Mariana identificó dos fracciones y las enlazó mediante la escritura de la palabra “y”. Con ello, articuló estrechamente signos aritméticos y signos lingüísticos (circunstancia que también evidenció la realización de incompletos procesos de traducción). Aunque, lo más relevante de este tipo de respuestas fue que quedó sin dilucidar si

Mariana y los restantes estudiantes que las escribieron podrían reconocer, de modo explícito, las sumas de fracciones implicadas en ellas. Es decir, ninguno de los casos vinculados a esta clase de elaboraciones nos permitieron comprobar, por sí mismos, si dichos alumnos hacían corresponder la palabra “y” a la noción de la suma.

Explorando cuidadosamente el uso que los niños dan a ciertos “nexos lingüísticos” asociados a las operaciones con fracciones, pueden ser constatadas algunas aplicaciones nada adecuadas de los mismos. En estudios precedentes y en vinculación con otra operación



Cuadro 8. En las Tareas XIII y XIV, Mariana combinó signos aritméticos, signos lingüísticos y estrategias “mixtas” de partición, enlazándolas entre sí mediante la inclusión de la cúpula lingüística “y”.

entre fracciones, se llegó a comprobar que muchos niños de la escuela primaria usaban la palabra “de” como nexos lingüísticos entre dos fracciones, pero sin asociarlo con la noción de multiplicación de tales números, sino atribuyéndolo a otras operaciones ligadas a éstos (véase Peralta, 1989 y Peralta, y Valdemoros, 1990).

En las situaciones que estamos presentando ahora y con referencia a estos sujetos, podemos esclarecer la duda recién expuesta apelando a la confrontación de dichos resultados con los registrados en las tareas del cuestionario exploratorio centradas en la *invención de problemas*³ aditivos por parte de los ni-

ños. En el último ámbito identificado, varios alumnos idearon textos compuestos por expresiones como las indicadas en el Cuadro 8, tanto en presencia de una suma como de una resta de fracciones (es decir, tales estudiantes no discriminaron el contenido aditivo de la cúpula lingüística “y”, por lo que llegaban a usarla en contextos atribuidos por ellos a la resta de fracciones).

El estudio de casos

Con el único propósito de brindar información general acerca de la proyección y el uso que se dio a los avances logrados a través del

cuestionario inicial exploratorio, aquí exponemos datos globales de *posterior nivel de la investigación doctoral*, en el que la naturaleza de la indagación se amplió y enriqueció, abarcando otros significados de fracción y procurando, asimismo, dilucidar tanto las estrategias de solución de problemas aditivos desarrolladas por los niños como los obstáculos cognitivos asociados al desarrollo del lenguaje fraccionario. Esta fase terminal del estudio ha sido *extensamente expuesta* en varias publicaciones parciales referidas primordialmente al estudio de casos (Valdemoros, 1993b, 1993c, 1994a, 1994b, 1997), motivo por el cual aquí tan sólo es ilustrada muy brevemente.

El estudio de casos de la investigación doctoral estuvo primordialmente conformado por varias entrevistas individuales y semiestructuradas, realizadas a cinco estudiantes del grupo que nos ocupa. Tales niños fueron escogidos, ya que en el cuestionario inicial y en las clases que pudimos observar, ellos expresaron claramente las estrategias de solución y el tipo de elaboraciones más frecuentes en dicho grupo escolar.

Una vez descrito el perfil de cada uno de los cinco niños, en base a su desempeño en el cuestionario inicial y en las clases observadas, se diseñaron luego diez tareas diferentes, aplicables en los respectivos casos. En particular, se presentaron tareas de reparto similares a las incluidas en el cuestionario inicial, las que fueron aplicadas a cuatro de los estudiantes entrevistados.

Globalmente, puede decirse que la producción de los niños en las entrevistas mostró marcadas similitudes con las elaboraciones fundamentales del cuestionario. Fue notoria la circunstancia de que podían manejar con mayor seguridad el significado de cociente que otros contenidos semánticos más complejos de la fracción (específicamente, los de

“medida” y “razón”, a los que se asomaron a través de problemas muy sencillos y respecto a los cuales transcurrió básicamente la indagación de cada caso). Sin embargo, al resolver las muy familiares tareas de reparto, casi todos ellos y, de modo espontáneo, optaban por cuantificar las respectivas situaciones mediante el uso de números naturales, debiéndoseles demandar el uso de otras entidades numéricas para que pudieran identificar fracciones.

En particular, la gran diversidad de procesos de traducción que pudo ser detectada en el cuestionario inicial exploratorio se sometió a profundización en las entrevistas, mediante la depuración de un recurso de contraste que había sido aplicado en el mencionado cuestionario, en el ámbito de presentación de los problemas aditivos. Estos problemas aditivos “paralelos” brindaban información numérica común a tres problemas aritméticos, los que tenían modos diversos de simbolización, como se expone en el siguiente ejemplo: a) a través de un problema verbal que involucraba la suma de $2/8$ y $2/4$, b) de una figura a ser partida conforme a cierta suma de fracciones dada ($2/8 + 2/4$) y, c) de la elaboración o “invención” de un problema por parte de los niños, aplicando la misma suma de fracciones ($2/8 + 2/4$). El caso de Fabiola (profundizado en Valdemoros, 1994a, 1997) ilustra minuciosamente cómo la contradicción entre los diferentes resultados (discordancia muy frecuente entre estos estudiantes), una vez que es puesta en evidencia ante los ojos de la niña, presenta enormes dificultades para ser resuelta y traducida en los distintos planos de expresión utilizados.

Algunos años después, hemos tomado en cuenta los aspectos primordiales del análisis derivado del cuestionario inicial exploratorio aquí descrito, para formular algunas hipótesis y diseñar otra investigación desarrollada bajo la modalidad de un *nuevo estudio de*

casos, en dos grupos escolares pertenecientes a otra institución educativa de la Ciudad de México (Valdemoros, 1998, 2001 y Valdemoros et al., 1996). En este marco, una vez más exploramos producciones de niños de tercero y cuarto grados, las que exhibían muchos rasgos en común con los destacados precedentemente, en este apartado, en lo que al uso de distintos sistemas de representaciones y procesos de “traducción” se refiere. Asimismo, con referencia a los procesos aditivos se profundizó el caso de la constancia de la unidad, bajo transformaciones aditivas y cómo se integran —vía traducción— los distintos modos de representación adoptados.

Todo ello sugiere que los resultados analizados en la presente comunicación, con referencia al cuestionario inicial exploratorio, pudieran presumiblemente llegar a reiterarse en otros estudios análogos a los que acabamos de comentar concisamente.

Reflexiones finales

Tras la concreción de todas esas labores de investigación, pudimos confirmar la pertinencia del modelo de análisis adoptado aquí, para interpretar el uso del lenguaje (aritmético y verbal), a través del desempeño real de los estudiantes, en situaciones fraccionarias ligadas al reparto. Si hubiéramos procurado abordar dicho desempeño sin considerar el uso del lenguaje, nuestros esfuerzos quizás nos hubiesen conducido hacia evidencias insuficientes.

En particular, para el desarrollo de la investigación cualitativa es muy importante establecer qué clase de seguimiento se da a un cuestionario que fija los avances iniciales a alcanzar en cierta indagación. Eso es lo que nos esforzamos en mostrar aquí, en el terreno del uso de las fracciones y en vinculación con el significado de cociente “intuitivo”, derivado del reparto.

Por otra parte, algunos de los resultados analizados en este reporte (con respecto a la información reunida a través del cuestionario) pueden ser acogidos como nuevos interrogantes, susceptibles de incorporación en futuras indagaciones y prácticas de enseñanza. Entre otros fenómenos, nos referimos a las dificultades de pasaje de un lenguaje a otro, al manejo de las restricciones semánticas asociadas a las situaciones en las que las fracciones emergen como “divisiones indicadas”, al uso del nexos lingüístico “y” en situaciones que implícitamente involucran la suma de fracciones.

Concedemos gran importancia al tránsito que los niños deben realizar (a nivel de la construcción de significados fraccionarios próximos), desde los iniciales reconocimientos de la fracción como parte de un todo hacia los contenidos semánticos derivados de las situaciones de reparto. Como lo hemos puntualizado en páginas previas, los estudiantes que se esforzaron por transferir y mantener los mismos contenidos y recursos de simbolización en ambos terrenos, llegaron a generar marcadas distorsiones de las adecuadas representaciones de las fracciones como “cocientes indicados”.

En cuanto a la relevancia que pudieran presentar estos señalamientos para el maestro, queremos enfatizar que permiten reconocer algunos de los múltiples conflictos cognitivos comúnmente enfrentados por los estudiantes, de los que mencionamos —entre otros muchos obstáculos a superar— los que están asociados a una adecuada transferencia de significados y sentido desde un espacio de simbolización a otro, al desarrollo de “pictogramas” que doten de claridad el manejo sintáctico de las fracciones, la eficaz integración en el lenguaje técnico de todos los aspectos (semánticos, sintácticos, de “traducción” y de uso) ya identificados. Los ejes de aproximación didáctica a tales procesos los

proporcionan los propios niños, al exhibir los tramos del conocimiento en vías de construcción, en los que fallan o producen elaboraciones insuficientes.

Notas

1. El término "traducción" no es el más adecuado para dar cuenta de tales fenómenos; en el mejor de los casos lo que propicia es una analogía con las dificultades del pasaje de una lengua a otra. Sustitutivamente, nosotros proponemos designarlos como procesos de "pasaje" o de "tránsito" de un lenguaje a otro lenguaje o a otro sistema simbólico.
2. Identificamos de tal modo los dibujos introducidos escolarmente para "ilustrar", "concretar" y "hacer más accesibles" a determinados contenidos semánticos y algunos procedimientos algorítmicos. Tales "pictogramas" no conforman propiamente la escritura sino que juegan el papel de constituyentes de una "protoescritura" (es decir, son elementos gráficos que en su desarrollo anteceden a la escritura, según la caracterización general de los pictogramas efectuada por Métraux, 1968).
3. Tratábase de tareas de este tipo: "Inventa un problema que contenga: $\frac{1}{4} + \frac{1}{2}$ ". O bien: "Inventa un problema que contenga: $\frac{3}{4} - \frac{1}{4}$ ". Los referidos estudiantes generaron textos casi idénticos en uno y otro terreno, sin discriminar la adición de la sustracción e incluyendo en ellos las respectivas fracciones enlazadas por la cúpula lingüística "y". Entre otras, las elaboraciones de Said (9 años de edad) ilustran lo antedicho; en vinculación con la suma de fracciones él escribió: "Chucho compró $\frac{1}{4}$ de arroz y $\frac{1}{2}$ de chicharrón". En presencia de la resta de fracciones Said expresó: "Said compra $\frac{3}{4}$ de cacahuate y $\frac{1}{4}$ de jitomate pero no le alcanzó". En ambos ejemplos emergieron otros obstáculos ligados a la adición y la sustracción (específicamente, distintas clases de objetos fueron involucradas en cada operación y no hubo un reconocimiento de la unidad de medida vinculada a cada caso).

Referencias bibliográficas

- Behr, M., Post, T., Silver, E. y Mierkiewicz, D. (1980). Theoretical Foundations for Instructional Research on Rational Numbers. *Proceedings of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. 60-67.
- Behr, M., Lesh, R., Post, T. y Silver, E. (1983). Rational-number Concepts. En R. Lesh y M. Landau (Eds.), *Acquisitions of Mathematics Concepts and Processes*. 92-126.
- Behr, M. y Post, T. (1988). Teaching Rational Number and Decimal Concepts. En T. Post (Ed.), *Teaching Mathematics in Grades K-8*. 190-231.
- Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Dordrecht / Boston / Lancaster: D. Reidel. 133-177.
- Kieren, T. (1976). On the Mathematical, Cognitive and Instructional Foundations of Rational Numbers. En R. Lesh (Ed.), *Number and Measurement: Papers from a Research Workshop*. Columbus: ERIC/SMEAC. 101-144.

Kieren, T. (1980). The Rational Number Construct- Its Elements and Mechanisms. En T. Kieren (Ed.), *Recent Research on Number Learning*. Columbus: ERIC SMEAC. 125-149.

Kieren, T. (1983). Partitioning, Equivalence and the Construction of Rational Number Ideas. *Proceedings of the Fourth International Congress on Mathematical Education*. 506-508.

Kieren, T. (1984). Mathematical Knowledge Building: The Mathematics Teacher as Consulting Architect. *35th International Congress on Mathematical Education*. 187-194.

Kieren, T. E., Nelson, D. y Smith, G. (1985). Graphical Algorithms in Partitioning Tasks. *The Journal of Mathematical Behavior*, 4. 125-36.

Kieren, T.E. (1988). Personal Knowledge of Rational Numbers: Its Intuitive and Formal Development. En J. Hiebert y M. Behr (Eds.), *Number Concepts and Operations in the Middle Grades*, 2. 162-181.

Kieren, T.E. (1992). Rational and Fractional Numbers as Mathematical and Personal Knowledge: Implications for Curriculum and Instruction (323-371). En: G. Leinhardt, R. Putnam y R. A. Hatrup (Eds.), *Analysis of Arithmetic for Mathematics Teaching*. Hillsdale, N. J., USA: Lawrence Erlbaum.

Kieren, T.E. (1993). Rational and Fractional Numbers: From Quotients Fields to Recursive Understanding (49-84). En: T. Carpenter, E. Fennema y T. Romberg (Eds.), *Rational Numbers. An Integration of Research*. Hillsdale, N. J., USA: Lawrence Erlbaum.

Laborde, C. (1990). Language and Mathematics. En P. Nesher y J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics and Cognition: A Research Synthesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. 53-69.

Lesh, R., Landau, M. y Hamilton, E. (1980). Rational Number Ideas and the Role of Representational Systems. *Proceedings of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. 50-59.

Lesh, R., Post, T. & Behr, M. (1987). Representations and Translations among Representations in Mathematics Learning and Problem Solving. En C. Janvier (Ed.), *Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics*. Hillsdale: Lawrence Erlbaum. 33-40.

Métraux, A. (1968). Los Primitivos. Señales y Símbolos. Pictogramas y Protoescritura. En M. Cohen y J. Sainte Fare Garnot (Eds.), *La Escritura y la Psicología de los Pueblos*. México: Siglo XXI Editores. 1-22.

Nesher, P. (1982). Levels of Description in the Analysis of Addition and Subtraction Word Problems. En T. Carpenter, J. Moser y T. Romberg (Eds.), *Addition and Subtraction: A Cognitive Perspective*. 25-38.

Ohlsson, S. (1988). Mathematical Meaning and Applicational Meaning in the Semantics of Fractions and Related Concepts. En J. Hiebert y M. Behr (Eds.), *Number Concepts and Operations in the Middle Grades*, 2. 53-92.

Peralta, T. (1989). *Resolución de Operaciones de Suma y Multiplicación de Fracciones, en su Forma Algorítmica y su Representación Gráfica en los Modelos Continuo y Discreto de Fracción de la Unidad*. Tesis de Maestría, Matemática Educativa, Cinvestav, México.

Peralta, T. y Valdemoros, M. (1990). *Representación Gráfica de la Multiplicación de Fracciones, en los Modelos Continuo y Discreto de Fracción de la Unidad*. Memorias de la Cuarta Reunión Centroamericana y del Caribe sobre Formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa. 285-290.

Sastre, G. (1984). *Aprendizaje de los Signos Aritméticos y su Generalización*. Barcelona: Instituto Municipal de Investigación en Psicología Aplicada a la Educación.

Valdemoros, M. (1992). *Análisis de los Resultados Obtenidos a través de un Examen Exploratorio del 'Lenguaje de las Fracciones'. Primera Parte*. México: Matemática Educativa - Cinvestav.

Valdemoros, M. (1993a). *La Construcción del Lenguaje de las Fracciones y de los Conceptos Involucrados en él*. Tesis Doctoral. Matemática Educativa - Cinvestav, México.

Valdemoros, M. (1993b). The Language of Fractions as an Active Vehicle for Concepts. *Proceedings of the Fifteenth Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, I*. 1233-239.

Valdemoros, M. (1993c). La Construcción de Significados a través de Distintos Sistemas Simbólicos. *Memorias del Quinto Simposio Internacional sobre Investigación en Matemática Educativa*. 273-284.

Valdemoros, M. (1994a). Various Representations of The Fraction through a Case Study. *Proceedings of the Eighteenth Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, II*. 16-23.

Valdemoros, M. (1994b). Fracciones, Referentes Concretos y Vínculos Referenciales. *Memorias de la VIII Reunión Centroamericana y del Caribe sobre Formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa*. 21-30.

Valdemoros, M. (1997). Recursos Intuitivos que Favorecen la Adición de Fracciones. *Educación Matemática*, 9, 3. P. 5-17.

Valdemoros, M. (1998). La Constancia de la Unidad en la Suma de Fracciones: Un Estudio de Caso (465-481). En: F. Hitt (Ed.), *Investigaciones en Matemática Educativa*, 2. México: Editorial Iberoamérica.

Valdemoros, M. (2001). Las Fracciones, sus Referencias y los Correspondientes Significados de Unidad: Estudio de Casos. *Educación Matemática*, 13, 1. P. 51-67.

Valdemoros, M., Orendain, M., Campa, A., Hernández, E. (1996). La Interpretación Ordinal de la Fracción (441-455). En: F. Hitt (Ed.), *Investigaciones en Matemática Educativa*, 1. México: Editorial Iberoamérica.

Martha Elena Valdemoros Alvarez
Departamento de Matemática Educativa
Cinvestav-IPN
E-mail: mvaldemo@mail.cinvestav.mx