2003
David E. Meel
MODELOS Y TEORÍAS DE LA COMPRENSIÓN MATEMÁTICA: COMPARACIÓN DE LOS MODELOS DE PIRIE Y KIEREN SOBRE EL CRECIMIENTO DE LA COMPRENSIÓN MATEMÁTICA Y LA TEORÍA APOE
Revista Latinoamericana de Investigacion en Matematica Educativa, noviembre, año/vol. 6, número 003
Comité Latinoamericano de Matemática Educativa
Distrito Federal, México
pp. 221-278

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa
Vol. 6, Núm.3, noviembre, 2003, pp. 221-271.

Modelos y teorías de la comprensión matemática: Comparación de los modelos de Pirie y Kieren sobre la evolución de la comprensión matemática y la Teoría APOE[1]

David E. Meel[2]

RESUMEN

La búsqueda de una descripción significativa de la comprensión cognitiva ha durado ya medio siglo. Durante las últimas tres décadas, se han desarrollado nuevas e integradoras perspectivas alejadas de la distinción de Richard Skemp entre la comprensión instrumental y la relacional. Hasta 1987, Tom Schroeder documentó la evolución de estas perspectivas en su síntesis PME del trabajo sobre la comprensión a partir de los contrastes relacionales e instrumentales de Richard Skemp. Desde 1987, el trabajo sobre la comprensión ha progresado, y el presente documento examina los recientes marcos teóricos de la comprensión que han surgido a partir de estas raíces. Este documento se enfoca en dos marcos teóricos: el modelo de Pirie y Kieren sobre la evolución de la comprensión matemática y la teoría APOE de Dubinsky, haciendo referencia a otros marcos teóricos contemporáneos como es el trabajo de Cornu y Sierpinska sobre los obstáculos cognitivos y epistemológicos; las investigaciones sobre la definición del concepto y la imagen del concepto de Vinner y Tall; las exploraciones de Kaput sobre las representaciones múltiples y las distinciones de Sfard entre las concepciones operacionales y estructurales. Además, se explican las definiciones de la comprensión propuestas por estos dos marcos, el análisis se dirige a sus elementos y construcciones, así como a sus vínculos con las caracterizaciones históricas y recientes de la comprensión. Este documento analiza porqué los modelos de Pirie y Kieren, y la teoría APOE satisfacen el criterio de Schoenfeld (2000) sobre la clasificación como una teoría y, por último, concluye con el análisis de diversas interconexiones entre estas dos teorías, así como los elementos que las distinguen de otras según sus orígenes, organizaciones, relaciones con otros marcos e implicaciones de las dos teorías tanto para evaluaciones como para prácticas pedagógicas.

PALABRAS CLAVE: comprensión, modelos teóricos.

---

[1] *La publicación de este artículo es posible gracias al convenio entre Relime y CBMS (Conference Board of the Mathematical Science) Issues in Mathematics Education. Versión castellana de Models and theories of mathematical understanding: Comparing Pirie and Kieren's Model of the growth of mathematical understanding and APOS theory, Meel D. (2003).*
[2] *Department of Mathematics and Statistics, Bowling Green State University.*

Models and theories of the mathematical understanding: Comparing Pirie and Kieren's Model of the growth of mathematical understanding and APOS theory

ABSTRACT

The search for a meaningful cognitive description of understanding has ensued for the past half a century. Within the past three decades, new and integrative perspectives have grown out of Richard Skemp's distinctions between instrumental and relational understanding. The growth of these perspectives, up until 1987, was documented by Tom Schroeder in his PME synthesis of the work on understanding resulting from Richard Skemp's instrumental/relational contrasts. Since 1987, the work on understanding has progressed and this paper examines the new, more recent theoretical frameworks of understanding which have arisen from these roots. This paper focuses on two theoretical frameworks, Pirie and Kieren's model of the growth of mathematical understanding and Dubinsky's APOS theory, and discusses other contemporary theoretical frameworks such as the work by Cornu and Sierpinska on cognitive or epistemological obstacles, the investigations into concept definition and concept image by Vinner and Tall, Kaput's explorations of multiple representations, and Sfard's distinctions between operational and structural conceptions. Besides explicating the definitions of understanding proposed by these two frameworks, the discussion addresses their elements and constructs as well as their linkages to historical and recent characterizations of understanding. The paper then argues why Pirie and Kieren's model and APOS theory satisfy the Schoenfeld (2000) criteria for classification as a theory and finally concludes with discussions of a variety of interconnections between these two theories as well as the elements which make them distinct from each other such as their origins, organizations, relationships to other frameworks, and implications of the two theories for both assessment and pedagogical practices.

KEY WORDS: Understanding, theorical models.

Modèles et téories sur l' entendement mathématique: Comparaison entre les modèles de Pirie et Kieren du progrès de l'entendement mathématique et la téorie APOS

RÉSUMÉ

La recherche d' une éloquente description cognitive sur l' entendement s' y a ensuivit depuis la dernière moitié du siècle. Pendant les trois dernières décades, nouvelles et intégratives perspectives montrent , selon Richard Skemp, des différences entre l' entendement intrumentale et relationnel. Le dévéloppement de ces perspectives, depuis 1987, a été documenté par Tom Schroeder dans sa synthèse prensentée au PME du travail sur l' entendement resulté des contrastes entre l' entendement instrumental et relationnel de Richard Skemp. Depuis 1987, le travail sur l' entendement a progressé et cet article examine les plus récentes et nouveaux cadres téoriques qui ont surgit de ces origines. Cet ariticle se concentre en deux cadres téoriques

, le modèle de Pirie et Kieren du progrès de l' entendement mathématique et la téorie APOS de Dubinsky. Il discute aussi autres cadres téoriques contémporaines telles que le travail de Cornu et Sierpinska sur les obstacles épistémologiques et cognitifs ; ainsi les recherches sur les concepts de définition et image par Vinner et Tall ; les explorations de Kaput sur multiples représentations et finalement les différences entre les conceptions operationnel et structurel de Sfard. En plus des définitions explicatives sur l'entendement proposés par ces deux encadrements, la discussion adresse ses éléments et construit en plus ses liens dans les caractérisations historiques recéntes de l' entendement. L' article argumente pourquoi le modèle de Pirie et Kieren et la téorie APOS satisfassent le critère Schoenfeld (2000) de la clasification donnée de téorie et finalement conclue avec les discussions d' une varieté d' interconections entre ces deux téories ainsi qu' élements qui sont différents un de l'autre tels que ses origines, organizations, rélations et autres encadrements ; et implications des deux téories pour practiques d'évaluation et pédagogiques.

MOTS CLÉS: Entendement, modèles théoriques.

Modelos e teorias da compreensão matemática: Comparando o modelo de Pirie e de Kieren do crescimento da compreensão matemática e da teoria de APOE

RESUMO

A busca para uma descrição cognitive significativa da compreensão seguiu para a metade passada um do século. Dentro das três décadas passadas, os perspectives novos e integrative cresceram fora das distinções de Richard Skemp entre a compreensão instrumental e relacional. O crescimento destes perspectives, acima até de 1987, foi documentado por Tom Schroeder em sua síntese de PME do trabalho na compreensão resultando dos contrastes de instrumental/ relational de Richard Skemp. Desde 1987, o trabalho na compreensão progrediu e este papel examina as estruturas teóricas novas, mais recentes de compreender quais se levantaram destas raizes. Este papel focaliza em duas estruturas teóricas, modelo de Pirie e de Kieren do crescimento da compreensão matemática e a teoria de APOS de Dubinsky, e discute outras estruturas teóricas contemporary tais como o trabalho por Cornu e Sierpinska em obstáculos cognitive ou epistemological, nas investigações na definição do conceito e na imagem do conceito por Vinner e em explorações altas, kaput de respresentações múltiplas, e de distinções de Sfard entre conceptions operacionais e estruturais. Além de explicating as definições da compreensão propostas por estas duas estruturas, a discussão dirige-se a seus elementos e construções assim como seus enlaces às caracterizações históricas e recentes da compreensão. O papel discute então porque o modelo de Pirie e de Kieren e a teoria de APOS satisfem aos 2000) critérios de Schoenfeld (para a classificação porque uma teoria e os conclem finalmente com discussões de uma variedade das interconexões entre estas duas teorias as.well.as os elementos que os fazem distintos de se tal como suas origens, organizações, relacionamentos a outras estruturas, e implicações das duas teorias para a avaliação e práticas pedagogical.

PALAVRAS CHAVES: Compreendendo, modelos theorical.

Presentación

Este artículo[3] inicia con una breve historia de la búsqueda de una conceptualización claramente definida sobre el significado del término "comprensión"[4], conforme al trabajo de Schroeder (1987).

Históricamente, varias descripciones han asociado la comprensión con el conocimiento: la conexión que surge a partir de las operaciones matemáticas, un acto, o simplemente una captación del significado. El análisis realiza un contraste entre el pensamiento previo al trabajo apoyado en Skemp, que distingue la diferencia entre la comprensión instrumental, y la relacional con los diversos marcos teóricos que se han desarrollado desde entonces. En particular, una descripción breve de los puntos de vista tomados por Brownell y Polya, así como de sus contemporáneos, proporciona un telón de fondo para examinar el movimiento y distinguir entre la comprensión y el conocimiento. Esta cadena culmina en un análisis abreviado de cuatro marcos teóricos recientes que se enfocan en el desarrollo y la adquisición de la comprensión matemática, mediante el establecimiento de una etapa por incisos que describen el modelo de Pirie y Kieren sobre la evolución de la comprensión matemática y la teoría APOE de Dubinsky.

En resumen, Pirie y Kieren (1991a) se han alineado a la conclusión de Schoenfeld (1989) de la comprensión como un elemento orgánico inestable y retrogresivo, y consideraron a la comprensión como un proceso de crecimiento interminable, completo, dinámico y estratificado pero no lineal. Rechazan la noción evolutiva de la comprensión como una función monótona creciente y la consideran como un proceso dinámico de organización y reorganización (Pirie y Kieren, 1992b, 1994b). Por otro lado, Dubinsky (1991) alinea la teoría APOE con la perspectiva de Piaget que explica que la *abstracción reflexiva* es la clave para el desarrollo cognitivo de los conceptos lógico-matemáticos[5]. Desde la perspectiva de la teoría APOE, la comprensión es un proceso interminable de construcción de esquemas iterativos, mediante la abstracción reflexiva; un proceso cognitivo en el que el estudiante reconstruye y reorganiza las acciones físicas o mentales en un plano más elevado de pensamiento y, por lo tanto, las comprende (Ayers, Davis, Dubinsky y Lewin, 1998). Además de exponer estas ideas, el presente análisis se refiere a los elementos y las construcciones de dichas teorías. Teniendo en mente estos componentes, las ilustraciones breves identificarán la relación de sus respectivas teorías con las caracterizaciones de la comprensión tanto históricas como recientes.

Este documento concluye con un análisis de diversas interconexiones entre el modelo de Pirie y Kieren sobre la comprensión, así como la teoría APOE. Ambas teorías tienen

[3] Aclaración del autor: Como en el caso de cualquier revisión y síntesis, este documento sólo puede recurrir a las interpretaciones del autor sobre las imágenes de estas teorías en evolución continua. Como resultado, las interpretaciones y conclusiones que aquí se presentan, dirigen una mirada temporal a las teorías cambiantes, mediante la presentación de afirmaciones de la teoría de cada un de los escritos publicados, acumulados y apoyados de las teorías.

[4] Nota de traducción: se ha tomado el término "understanding" por comprensión

[5] Un concepto lógico-matemático es uno en el que las propiedades físicas de los objetos se han abstraído e integrado en el marco mental del estudiante, a través de la experiencia física. El análisis de esta experiencia sucede mediante el proceso de la experiencia física en lugar de la manipulación de los objetos físicos de los cuales se deriva el concepto.

orígenes constructivistas, pero también contienen elementos que las diferencian. Por ello, el enfoque se encuentra en las estructuras organizacionales de ambas teorías, con particular atención en los elementos y construcciones de cada una de ellas. Posteriormente, el análisis expone los vínculos entre los marcos teóricos recientes de la comprensión, así como la conexión entre el modelo de comprensión de Pirie y Kieren, con una mejora de la teoría APOE definida por Clark et al. (1997). El elemento final de esta sección compara y contrasta las implicaciones de las dos teorías, tanto para las evaluaciones como para las prácticas pedagógicas.

1. Una breve historia de la "comprensión"

Aún cuando se ha utilizado libremente el término "comprensión" en la literatura de la educación matemática, durante años se ha realizado una búsqueda de la definición concisa del término "comprensión". En particular, Brownell y Sims (1946) sintieron que la comprensión matemática era un concepto difícil de definir y explicaron "Es muy difícil de encontrar o formular una definición técnicamente exacta de "comprender" o "comprensión" (p. 163). Sin embargo, varios escritores han trabajado de acuerdo con la suposición de que existe una noción bien definida de la comprensión, por lo que se causaron enredos con la filosofía en el momento que ellos dejaron de hablar de la comprensión en un sentido ideológico e intentaron explicar su significado (Sierpinska, 1990b). De acuerdo con Sierpinska (1990a), estas dificultades surgen de la falta de capacidad de la comunidad de matemática educativa para distinguir entre el conocimiento y la comprensión, hasta antes del famoso documento de Skemp (1976) sobre la "Comprensión instrumental y relacional". En particular, fue sólo hasta una reimpresión realizada en 1978 del *Maestro de la aritmética*, que la distinción de Skemp entre el conocimiento y la comprensión llamó la atención de la comunidad de educación matemática de Estados Unidos.

1.1 "Comprensión" antes de 1978.

Antes del documento de Skemp que causó gran influencia, los investigadores estadounidenses generalmente identificaban la comprensión con el conocimiento. La comprensión se equiparó con el desarrollo de las conexiones en el contexto de la realización de operaciones algorítmicas y la resolución de problemas (Brownell, 1945; Brownell y Sims, 1946; Fehr, 1955; Polya, 1945; Van Engen, 1949; Wertheimer, 1959). Por ejemplo, Brownell y Sims (1946) describen la comprensión como (a) la capacidad de actuar, sentir o pensar de manera inteligente respecto a una situación; (b) varía respecto al grado de exactitud e integridad; (c) varía respecto a la situación problemática que se presenta; (d) necesita conectar las experiencias del mundo real y los símbolos inherentes; (e) necesita verbalizaciones, a pesar de que puedan contener significados menores; (f) desarrolla varias experiencias, en vez de la repetición de las mismas; (g) está influida por los métodos empleados por parte del maestro; y (h) es inferida por la observación de las acciones y las verbalizaciones. Polya (1982) por su parte, identificó la comprensión como un elemento complementario a la resolución de problemas, según se indica en la siguiente cita:

> Se debe tratar de comprender todo; los hechos aislados mediante su recopilación con los hechos relacionados, los descubrimientos recientes a través de sus conexiones con lo ya asimilado, lo desconocido por analogía con lo acostumbrado, los resultados especiales mediante la generalización, los resultados generales por medio de la especialización adecua-

> da, las situaciones complejas mediante la separación de las mismas en sus partes constituyentes y los detalles mediante la integración de los mismos dentro de una imagen total (p. 23)

De acuerdo con Polya (1962) esta comprensión no puede clasificarse como presente o no presente debido a que es más un problema de extensión que de presencia. En particular, Polya (1962) identificó cuatro niveles de comprensión como una regla matemática: (a) "mecánica"- un método memorizado que puede aplicarse correctamente, (b) "inductivo"- la aceptación de que las exploraciones de casos simples se extienden a casos complejos, (c) "racional"- la aceptación de la prueba de la regla, según se demuestra por alguien más, y (d) "intuitiva"- la convicción personal como una verdad más allá de cualquier duda. Dichos niveles califican la comprensión como un conocimiento asociado con reglas matemáticas. Existen descripciones similares en los escritos de otros investigadores durante este periodo. Por ejemplo, Flavell (1997) habló del conocimiento o comprensión numéricos en su análisis de la conservación numérica, mientras que Davis (1978) explicó la dependencia de la comprensión, en cuanto a que el conocimiento se relaciona con conceptos, generalizaciones, procedimientos o hechos numéricos. Lehman (1977) equiparó la comprensión con tres tipos de conocimiento —aplicaciones, significados y relaciones lógicas.

1.2 "Comprensión" después de 1978.

El trabajo de Skemp (1976) distinguió la comprensión del conocimiento y enfatizó las categorías de la comprensión matemática (Byers y Erlwanger, 1985). En particular, Skemp (1976) clasificó la comprensión *relacional* como saber qué hacer y por qué se debe hacer, y la comprensión *instrumental* como tener reglas sin una razón. Cada una de estas comprensiones tiene sus propias ventajas. La comprensión instrumental, de acuerdo con Skemp (1976), tiende a permitir un recuerdo fácil para promover recompensas más tangibles e inmediatas, y para proporcionar un acceso rápido a las respuestas. Por otro lado, la comprensión relacional proporciona vías para una transferencia más eficiente, para la extracción de información desde la memoria del estudiante, para lograr que esa comprensión sea una meta por sí misma, y para promover la evolución de la comprensión. Más tarde, la clasificación evolucionó e incluyó una tercera categoría denominada *lógica* —organización de acuerdo con una prueba formal (1979)— y, finalmente, una cuarta categoría identificada como *simbólica* —una conexión de simbolismo y notación para las ideas asociadas (Skemp, 1982)—, por lo que se crearon cuatro categorías de la comprensión-relacional, instrumental, lógica y simbólica, cada una subdividida en subcategorías reflexivas e intuitivas.

Las categorías de la comprensión relacional e instrumental generaron una variedad de descripciones diversas como (a) de procedimiento y de concepto, (b) concreta y simbólica, y (c) intuitiva y formal (Ball, 1991; Herscovics y Bergeron, 1988; Hiebert y Lefevre, 1986; Hiebert y Wearne, 1986; Nesher, 1986; Ohlsson, Ernest y Rees, 1992; Resnick y Omanson, 1987; Schoeder, 1987). Byers (1977), mediante la combinación de ideas de Bruner y Skemp, desarrolló una clasificación tetraédrica sobre la comprensión, con las siguientes categorías: instrumental, relacional, intuitiva y formal. Tall (1978) sugirió una matriz de categorías (ver Tabla 1) como una comprensión descriptiva.

Otras visiones más generales proponen que la comprensión es el desarrollo de conexiones entre ideas, hechos o procedimientos (Burton, 1984; Davis, 1984; Ginsburg et al., 1992; Greeno, 1977; Hiebert, 1986; Hiebert y Carpenter, 1992; Janvier, 1987; McLellan, 1995; Michener, 1978; Nickerson, 1985; Ohlsson, 1988). La formación de una red de estas conexiones proporciona una estructura para situar una nueva información mediante el conocimiento de similitudes, diferencias, relaciones inclusivas y relaciones de transferencia entre modelos. Por lo tanto, el desarrollo de la comprensión resulta un proceso de conectar las representaciones a una red estructurada y cohesiva. El proceso de conexión requiere el conocimiento de la relación entre el conocimiento y los elementos de la red, así como de la estructura como un todo.

1.3. Puntos de vista recientes sobre la "Comprensión".

A pesar de que actualmente los investigadores separan la comprensión del conocimiento, existen pruebas de que la comunidad de educación matemática no ha alcanzado un acuerdo unilateral respecto al significado de "comprensión", debido a que varios autores se acercan a él desde distintos puntos de vista (Schoeder, 1987). En particular, se han propuesto conceptos constructivistas recientes de la comprensión, además del modelo de Pirie y Kieren sobre la evolución de la comprensión matemática y de la teoría APOE de Dubinsky. Esto incluye los marcos tales como los obstáculos *cognitivos o epistemológicos* (Bachelard, 1938; Cornu, 1991; Sierpinska, 1990b), *la definición del concepto y la imagen de concepto* (Davis y Vinner, 1986; Tall, 1989, 1991; Tall y Vinner, 1981; Vinner, 1983, 1991), *las representaciones múltiples* (Kaput, 1985, 1987a, 1987b, 1989a, 1989b) y una dicotomía entre las concepciones *operativas y estructurales* (Sfard, 1991, 1992, 1994). Algunas de estas definiciones tienen elementos comunes, en especial debido a que la mayoría derivan de la perspectiva constructivista subyacente de que la comprensión del estudiante se construye mediante la formación de objetos mentales y de la realización de conexiones entre ellos.

1.3.1. *La comprensión como la superación de obstáculos cognitivos.*

El concepto de obstáculos *cognitivos* ayuda a identificar las dificultades de los estudiantes, ya que se relaciona con el aprendizaje y después se utilizan para construir mejores estrategias de enseñanza (Cornu, 1991). Los obstáculos *cognitivos,* fueron definidos en primer plano por Bachelard (1938), y se clasificaron como obstáculos *genéticos o psicológicos*, obstáculos *didácticos* u obstáculos *epistemológicos,* dependiendo de si su aparición se debió al desarrollo personal, a la práctica de la enseñanza, o a la naturaleza de los conceptos matemáticos (Cornu, 1991). En particular, los obstáculos epistemológicos contienen dos atributos esenciales: (a) son inevitables debido a que la persona construye las comprensiones de algunos conceptos matemáticos, y (b) el desarrollo histórico de concepto refleja su existencia (Cornu, 1991).

Sierpinska (1990b) explicó su conceptualización de la comprensión a partir de Lindsay, Hussler, Dilthey, Dewey y Ricoeur, y consideró que la "comprensión es un acto, pero un acto relacionado con un proceso de interpretación, que es una dialéctica del desarrollo entre más y más se elaboren suposiciones y se validen dichas suposiciones" (p. 26). Desde esta perspectiva, la comprensión deriva su fundamento en las ideologías, predisposiciones, preconcepciones, conexiones y esquemas de pensamiento no percibidos del estudiante. Este fundamento puede contener factores que actúan como obstáculos para una construcción futura de la comprensión. La superación de dicho obstáculo requiere que el estudiante experimente un conflicto mental que ponga en duda sus convicciones. Además, Sierpinska (1987) comentó "si la presencia de un obstáculo epistemológico en un estudiante se relaciona con una convicción de cualquier tipo, entonces la superación de dicho obstáculo no consistirá en reemplazar esta convicción como opuesta. Esto significaría caer en un obstáculo dual" (p. 374). Como resultado, la superación de un obstáculo significa que el estudiante debe despojarse de sus convicciones y analizar dichas creencias desde un punto de vista externo. Al hacerlo, el estudiante reconocerá la suposiciones tácitas responsables de la disonancia cognitiva, y evaluará las hipótesis alternativas. Esta evaluación requiere que el estudiante identifique los objetos asociados con el concepto, identifique las propiedades comunes y dispares de los objetos, generalice el alcance de la aplicación de los conceptos y finalmente, sintetice la relación entre las propiedades, hechos y objetos para organizarlos en un todo consistente.

No todos los actos de comprensión corresponden a un acto de superación de un obstáculo epistemológico pero, en general, pueden equipararse. Por ejemplo, Sierpinska (1990a) expuso que el "superar los obstáculos epistemológicos y llegar a la comprensión son dos imágenes complementarias de una realidad desconocida sobre los cambios cualitativos importantes de los humanos. Esto sugiere un postulado del análisis epistemológico de los conceptos matemáticos: éstos deberán contener tanto imágenes positivas como negativas, los obstáculos epistemológicos y las condiciones de comprensión" (p. 28). Por lo tanto, a decir de Sierpinska, el uso de un análisis epistemológico de un concepto matemático ayuda a determinar la comprensión lograda por un estudiante mediante la observación atenta de sus distintas maneras de percibir un concepto, y de los riesgos inherentes a ellas. El desarrollo de la comprensión puede describirse en diferentes casos como la conciencia de un obstáculo, la cual permite nuevas vías de conocimiento. Estas nuevas maneras de conocer pueden tener como resultado una adquisición desafortunada de los nuevos obstáculos epistemológicos. En particular, el acto de superar un obstáculo epistemológico puede abrir al estudiante a un dominio mayor que contenga obstáculos epistemológicos adicionales. Desde esta perspectiva, los obstáculos epistemológicos actúan como la dualidad de comprender debido a que los obstáculos epistemológicos se enfocan en forma retrógrada en los errores, y la comprensión observa hacia el futuro las nuevas formas de conocer (Sierpinska 1990b). La medición de la profundidad de la comprensión se logra mediante la identificación del número y la calidad de los actos de comprensión logrados, o el número de obstáculos epistemológicos superados. Estos puntos de vista proporcionan imágenes complementarias de los cambios cualitativos en la mente, conforme el estudiante interactúa con los conceptos.

1.3.2. *La comprensión como generador de imágenes del concepto y definiciones del concepto.*

De acuerdo con Vinner (1991), el estudiante adquiere conceptos cuando construye una *imagen del concepto* —la recolección de imágenes mentales, representaciones y propiedades relacionadas atribuidas a un concepto—. Tall y Vinner (1981) escribieron:

> Deberíamos utilizar el término *imagen de concepto* para describir la estructura cognitiva total que se asocia con el concepto, lo cual incluye todas las imágenes mentales y las propiedades y procesos asociados... Conforme se desarrolla la imagen del concepto, no necesita ser coherente en todo momento... Llamamos *imagen del concepto evocado* a la porción de imagen del concepto que se encuentra activa en un momento determinado. En diferentes momentos, pueden evocarse imágenes aparentemente conflictivas. Sólo cuando se evocan *simultáneamente*

aspectos conflictivos habrá algún sentido real de conflicto o confusión (p. 152)

Resulta evidente que una imagen del concepto difiere de una definición formal del concepto, en caso de que la haya, debido a que la imagen de concepto ejemplifica la manera en que un concepto particular puede observarse por parte de un individuo (Davis y Vinner, 1986). La imagen del concepto involucra distintos vínculos del concepto con otras estructuras del conocimiento asociados, ejemplares, prototipos y procesos. Como resultado, la imagen del concepto es una estructura cognitiva general construida por un estudiante; sin embargo, en contextos diferentes, los distintos componentes de esta imagen del concepto aparecen en primer plano. Estas emocionantes porciones de la imagen del concepto comprenden la *imagen del concepto evocada* que consta de un subgrupo propio de la imagen del concepto. Esta distinción entre la imagen y la imagen evocada permite explicar cómo los estudiantes pueden responder de manera inconsistente, proporcionando evidencia de la comprensión en una circunstancia y careciendo de comprensión en otra. La descripción de un estudiante sobre sus comprensiones puede proporcionar otras discrepancias. En particular cualquier imagen del concepto tiene una *definición del concepto* relacionadas con la forma o las palabras utilizadas por un estudiante para especificar el concepto. Sin embargo, esta definición del concepto puede diferir de la definición matemática formal de un concepto, debido a que la definición del concepto es una descripción individualizada del mismo.

La construcción de estas imágenes del concepto suceden cuando el estudiante encuentra nueva información y se enfrenta a la consolidación de esta información dentro de la estructura cognitiva ya presente. El proceso de la incorporación relaciona las nociones de Piaget sobre la transición y, en particular, la asimilación y la acomodación (Tall, 1991). La *asimilación* se relaciona con la adquisición de nuevos datos y la formación de vínculos entre esta nueva información y la estructura original. En contraste, la *acomodación* reorganiza parte del todo de la estructura cognitiva del individuo. La asimilación y la acomodación subyacentes son dos mecanismos esenciales en el desarrollo cognitivo: la generalización y la abstracción. En matemáticas, la *generalización* comúnmente se refiere al proceso de aplicar un argumento en un contexto más amplio; sin embargo, el tipo de generalización empleada por el estudiante depende de la estructura cognitiva ya presente en el mismo. La *abstracción*, por otro lado, se presenta cuando el estudiante se enfoca en las propiedades de un objeto y las considera aisladas del objeto del cual se derivaron. En este caso, la estructura de las propiedades se vuelve una entidad en sí misma y tiene una aplicación en otros dominios relacionados.

Harel y Tall (1991) identificaron tres tipos de generalización: la generalización expansiva, la generalización reconstructiva y la generalización disyuntiva. *La generalización expansiva* se refiere a la expansión del estudiante del rango de aplicación de un esquema existente[6] sin reconstruirlo. En otras palabras, el estudiante ve los métodos aplicados anteriormente como casos especiales de un nuevo procedimiento generalizado. En este caso, el alcance de la aplicación se amplía sin reconstruir la estructura cognitiva interna, a pesar de que los elementos previos de la estructura cognitiva se vuelvan subestructuras en el esquema de aplicación expandido. Por otro lado,

[6] En este caso, un esquema se refiere a una estructura desarrollada por el estudiante para reconocer los distintos conceptos, procedimientos, etc., vinculados en la labor de resolver ecuaciones lineales con una variable.

la generalización reconstructiva se presenta cuando el estudiante "reconstruye un esquema existente para ampliar su capacidad de aplicación" (Harel y Tall, 1991, p. 38). Es decir, el estudiante busca una nueva estructura que tome los procedimientos o conceptos relacionados que se aislaron en un principio y los organice en elementos más simples como casos especiales, de acuerdo con un caso más general. Quizá la *generalización disyuntiva* sea la más preocupante, desde la perspectiva de la enseñanza. En este tipo de generalización, el estudiante expande el alcance de la aplicación mediante la construcción de un nuevo esquema independiente que carezca de conexión con los conceptos o procedimientos antes estudiados, y que pudieran considerarse casos especiales de este nuevo esquema. Respecto a la generalización disyuntiva, Vinner (1991) declaró que "Es una generalización en el sentido de que un estudiante ahora puede ser capaz de trabajar en un rango mayor de ejemplos, pero resulta probable que tenga un valor poco duradero para el estudiante debido a que sólo aumenta el número de piezas desconectadas de información en la mente del estudiante, sin mejorar la captación del mismo sobre las implicaciones abstractas más amplias" (p. 12). Como resultado, la generalización disyuntiva obstruye al estudiante con una carga adicional que puede resultar fallida.

La *abstracción* difiere de la generalización en cuanto al enfoque cognitivo del estudiante. En vez de ampliar las ideas desde un contexto hacia otro, la abstracción se presenta cuando el estudiante se enfoca en la estructura subyacente del contexto y extrapola las cualidades o características comunes. Este proceso culmina en la construcción de un grupo de axiomas. Como resultado, la abstracción requiere una reconstrucción mental masiva, con el fin de construir las propiedades del objeto abstracto (Tall, 1991). Una vez que se abstraen las propiedades, su aplicación a un nuevo contexto requiere una generalización reconstructiva debido a que "las propiedades abstraídas son reconstrucciones de las propiedades originales, que ahora se aplican en un dominio más amplio" (Harel y Tall, 1991, p. 39). En particular, al ampliar el rango de aplicaciones posibles se presenta la oportunidad de que la generalización expansiva transpire debido a que el estudiante puede relacionar la *teoría abstracta* (i.e. Los axiomas y sus consecuencias) con los elementos de otra estructura cognitiva. Existe un elemento problemático, similar al conocimiento compartamentalizado desde la generalización disyuntiva asociada con la abstracción. Si un estudiante encuentra un grupo limitado de ejemplos, es posible que éstos contengan propiedades que no pertenezcan a la clase total de objetos. Como resultado, el estudiante deberá regresar, quizá en forma repetida, a reconstruir el objeto abstracto y a eliminar las propiedades no esenciales. A pesar de que este mecanismo puede ser problemático en ocasiones, su aplicación permite al estudiante crear imágenes del concepto más extensas y quizá mejor interconectadas, con excepción del caso de la generalización disyuntiva.

1.3.3. *La comprensión durante la operación con representaciones múltiples.*

De acuerdo con Kaput (1989a), la energía cognitiva existe en representaciones múltiples y vinculadas. Estas proporcionan una redundancia mientras permiten al estudiante suprimir algunos aspectos de ideas complejas y enfatizar otras. La facilidad de estas representaciones y sus vínculos permiten al estudiante comprender las ideas complejas de maneras nuevas y aplicarlas en forma efectiva (Kaput, 1989a). El término *representación* es un término trans-teórico que contiene distintas definiciones: *cognitiva y perceptiva, computarizada, explicativa, matemática y simbólica* (Kaput 1985, 1987b). En general, un *sistema de representación* (o un *sistema* *simbólico*) coopera en la instalación de objetos matemáticos, relaciones y procesos mediante la creación de un ambiente en el cual se comparten los artefactos culturales lingüísticos que pueden expresarse en la comunidad (Kaput 1989a). Dicho sistema de representación consta de dos aspectos (a) dos mundos, el representado y el representante; (b) los elementos del mundo representado siendo representados; (c) los elementos del mundo representante realizando la representación; y (d) la correspondencia que une la conexión entre los dos mundos (Kaput, 1985).

Las representaciones matemáticas o sistemas simbólicos matemáticos son sistemas de representaciones especiales en los que el mundo representado es una estructura matemática y el mundo representante es un *esquema de símbolo*[7] que contiene correspondencias especiales (Kaput, 1987b). En particular, los sistemas simbólicos matemáticos, de la misma manera que el lenguaje natural y los sistemas pictóricos, controlan el influjo de experiencias al separarlos en pedazos, asignando los símbolos a dichos pedazos y coordinando estas notaciones en un entorno adecuado de matices y referentes complejos (Kaput, 1987b). El sistema de símbolos matemáticos y sus conexiones puede formar una estructura que actúa como un sistema de símbolos utilizado para representar otro sistema de símbolos que exhibe una auto similitud cuando se amplifica.

Kaput (1989a) pugna que el desarrollo y la expresión del significado matemático del estudiante pueden observarse desde el punto de vista de la construcción de formas no operacionales y estructuras en representaciones mentales en las que una *representación mental* es el medio por el cual un individuo organiza y coordina el flujo de experiencia. En particular, Kaput (1987a) establece que "La premisa fundamental es que el fenómeno básico del aprendizaje y la aplicación de las matemáticas se relacionan con la representación y la simbolización, debido a que se encuentran en el centro del contenido de las matemáticas y están simultáneamente en el centro de las cogniciones asociadas con actividad matemática" (p.22). Desde este punto de vista, la evolución del significado matemático es la construcción y la utilización de representaciones y simbolización.

Cuando el estudiante construye un significado personal, se presenta una negociación entre dos mundos separados: *las operaciones físicas* que pueden observarse y *las operaciones mentales* que son hipotéticas. En particular, el desarrollo de la comprensión es el cambio de operación en el mundo de las operaciones fisicas para operar en el mundo de las operaciones mentales. Para cumplir con esto, el estudiante debe aprender a emplear "(i) interpretaciones deliberadas y activas (o "lecturas"), y (ii) procesos organizados menos activos, menos controlados conscientemente y menos seriales para tener fenómenos mentales evocados por material físico" (Kaput, 1992, p. 522). Por debajo de los operaciones físicas se encuentran las notaciones utilizadas para mostrar las operaciones. Un

[7] Un esquema de símbolo es una colección de caracteres alcanzable de forma concreta, junto con reglas más o menos explícitas para la identificación y la combinación de los mismos» (Kaput, 1987b). En esencia, un esquema de símbolo es un medio abstracto de representación de conceptos más complejos, utilizando símbolos casi realistas para delinear objetos generalmente intangibles. Por ejemplo, los números hindú-arábigos con sus concatenaciones satisfacerían la definición de un esquema de símbolo. De la misma manera que los ejes de coordenadas con sus reglas sintácticas podrían ser considerados como un esquema de símbolo.

sistema de notación[8] se encuentra separado de cualquier representación física particular (diferenciándolo de un esquema de símbolo que debe estar unido a dos mundos: el representado y el representante) y contiene un conjunto de reglas que define sus objetos y las acciones permisibles de acuerdo con estos objetos.

Teniendo esto en mente, se puede reconocer que la mayoría de las actividades matemáticas reales se relacionan con la *coordinación de una traslación entre* los distintos sistemas de notación (Kaput, 1992). Dados dos sistemas de notación con su conjunto de reglas que definen los objetos del sistema, las acciones que se permitirán con dichos objetos y los medios físicos correspondientes en los que el sistema puede iniciarse (en el caso del esquema de símbolos), un estudiante puede (i) negociar entre los dos sistemas de notaciones, (ii) integrar cogniciones, (iii) trasformar objetos dentro de una representación particular, o (iv) realizar la comisión sobre sistema no operacionales. Los primeros dos mecanismos comprenden las *extensiones referenciales* debido a que estos "se trasladan en forma horizontal" entre cualquiera de los sistemas de notación o las estructuras matemáticas. En el primer caso, el significado surge de la identificación de los componentes conectados de los diferentes sistemas de representación, a través de la traslación y el segundo, a través de la construcción y la prueba de los modelos matemáticos, que equivalen a la traslación y coordinación de las organizaciones cognitivas.

Los últimos dos mecanismos equivalen a las *consolidaciones* en las que el estudiante se sumerge en el "crecimiento vertical" mediante la transformación de acciones a un nivel dentro de los objetos y las relaciones capaces de operarse en otro nivel. El tercer mecanismo produce un significado a través del aprendizaje del patrón y la sintaxis, mediante las transformaciones que se presentan dentro de un sistema de notación particular que puede o no contener referencias a significados externos. Este crecimiento es una reorganización del sistema de notación que crea una estructura jerárquica aunque dentro del sistema de notación original. En contraste, el último mecanismo, la cognición sobre un sistema de notación, produce un significado matemático mediante la reificación[9] de las acciones, procedimientos y conceptos dentro de los objetos fenomenológicos que pueden actuar en forma potencial como una base para nuevas acciones, procedimientos y conceptos en un nivel más alto de organización (Kaput, 1992). Estos mecanismos producen significados y, por lo tanto, desarrollan comprensión para el estudiante por medio de la creación de nuevos vínculos entre los sistemas de representación o los elementos de reorganización dentro de un sistema de representación.

1.3.4. *La comprensión como construcción de las concepciones operacionales y estructurales.*

Sfard (1991) define los cimientos de las matemáticas como dos entidades: *Concepto y Concepción.* Un concepto se refiere a una idea oficial definida matemáticamente en la que una concepción involucra un grupo de representaciones y vínculos internos del estudiante, causados por el concepto. Estas dos definiciones se relacionan con el análisis de Vinner

---

[8] Los sistemas de notación familiar, tales como los sistemas de numeración y los sistemas de notación geográfica para una o más variables, generalmente incluyen elementos textuales, pero también elementos estrictamente pictóricos que corresponden a los bloques de Dienes, barras de fracciones, etc.

[9] La reificación, una construcción de Piaget utilizada por Sfard y la teoría APOE, es la capacidad del aprendiz para visualizar, casi simultáneamente, los resultados de los procesos cómo objetos permanentes inseparables de los procesos subyacentes de los cuales surgen.

(1991) sobre la definición del concepto formal y la descripción por parte de Tall y Vinner (1981) de una imagen de concepto. Sfard (1991) señala que los conceptos matemáticos radican en una dualidad de concepción, por lo que se pueden visualizar como estáticos, instantáneos e integradores —*estructurales* o dinámicos, secuenciales y detallados-*operacionales*—.

Una concepción operacional, a pesar de que es difícil de describir, se relaciona con los procesos, algoritmos y acciones que ocurren a nivel físico o mental. Por otro lado, una concepción estructural es más abstracta, más integrada y menos detallada que una concepción operacional. En particular, una concepción estructural es, en cierta forma, isomorfa a la capacidad de "ver" las construcciones matemáticas avanzadas que no son entidades físicas, sino organizaciones mentales abstractas que pueden percibirse sólo en el ojo de la mente de cada persona (Sfard, 1991). Esta capacidad de ver los objetos invisibles que forman el concepto matemático entra en el mundo de la visualización. Sfard propone que las concepciones estructurales reciben el apoyo de las imágenes mentales compactas e integradoras, en vez de representaciones verbales que requieren un proceso serial. Estas imágenes mentales permiten al estudiante realizar ideas abstractas más tangibles y las considera casi como entidades físicas en las que las operaciones relacionadas con ellas ocurren por completo en los ojos de la mente. Además, dicha visualización permite al estudiante desarrollar una visión holística del concepto, y por lo tanto permitir observaciones desde varias perspectivas, al tiempo que conserva la identidad de una relación dentro del concepto.

Desde la perspectiva de Sfard, la comprensión llega más allá de una capacidad de resolver problemas o de probar teoremas (Sfard, 1994). En esencia, ella iguala la comprensión con la construcción de vínculos entre los símbolos y el desarrollo de una concepción estructural. Sin embargo, de acuerdo con Sfard (1991), *"existe una profunda brecha ontológica entre las concepciones operacionales y estructurales"* (p. 4). A pesar de que existe una brecha, las concepciones operacionales y estructurales no son exclusivas en forma mutua. En particular, son complementarias en el sentido de que son dos visiones del mismo concepto matemático y son inseparables debido a que el concepto alberga elementos tanto operacionales como estructurales. La concepción operacional observa el concepto como un proceso, y la concepción estructural iguala el concepto con un objeto estático trascendente de las raíces de su proceso. Sin embargo, para el desarrollo conceptual, resultan necesarias ambas concepciones. Por ejemplo, Sfard (1991) establece que "De hecho, para hablar acerca de objetos matemáticos, debemos ser capaces de tratar con *los productos* de algunos procesos sin perjudicar a los procesos en sí... Parece que el enfoque estructural debe considerarse como un nivel más avanzado de desarrollo conceptual. En otras palabras, tenemos buenas razones para esperar que *en el proceso de la formación del concepto, las concepciones operacionales precedan a las estructurales*" (p. 10). Esta afirmación no implica que las concepciones estructurales sólo puedan desarrollarse después de la construcción de concepciones operacionales en vez de que, en general, ésta sea la vía natural del desarrollo. En otras palabras, conforme se estudia el desarrollo histórico de cualquier concepto matemático, la sociedad pasa por una serie de etapas que culminan en la concepción estructural. En particular, Sfard (1991) utilizó un análisis histórico de la formación del concepto para identificar tres etapas distintas durante el proceso: la generación de un proceso a partir de objetos ya familiares, el reconocimiento emergente de los procesos como entidades autónomas y la capacidad de concebir la nueva entidad como una estructura sintetizada similar a un objeto.

Estas tres etapas se clasifican como *interiorización, condensación y reificación,* respectivamente. La interiorización se presenta cuando un estudiante se familiariza con los procesos, los cuales finalmente pueden reificarse en un objeto matemático. La interiorización en este contexto resulta similar al mecanismo descrito por Piaget (1970), que comprende esencialmente un cambio de concepciones con base en las operaciones físicas hasta hacer operaciones fundadas en las representaciones mentales de los procesos. El significado común de la condensación es similar a sus significado en este contexto. En lugar de trabajar mediante una secuencia larga de procesos mentales relacionados pero distintos, la condensación permite al estudiante concebir una secuencia como un solo proceso y relacionar su entrada y salida sin los pasos que intervienen en el hecho. La aplicación de un nombre para la secuencia condensada da lugar a un nuevo concepto que se mantiene fijo a una orientación del proceso hasta que queda reificado.

De acuerdo con Sfard y Linchevski (1994), la reificación es responsable del desarrollo de los objetos matemáticos. En esencia, la reificación es un salto cuántico desde la concepción de una nueva entidad como una conexión estrecha a un proceso, hasta la concepción de la noción de una entidad como un objeto en el que se puede actuar. Como resultado, la reificación es un cambio ontológico por parte del estudiante (Sfard, 1991). Este cambio permite la capacidad de ver algo familiar desde una perspectiva totalmente distinta que separa la secuencia condensada de una secuencia de origen. La estructura que se presenta, a pesar de que esté invariablemente conectada al proceso que ejemplifica, ya puede observarse como un objeto estático en el ojo de la mente. Además, la nueva entidad comienza a presentar su significado a partir de su asociación, no en el terreno de los procesos, sino como un miembro de una categoría de objetos abstractos que mejoran el alcance de las aplicaciones. En particular, Sfard (1991) declara:

> En algún momento, esta categoría se vuelve el fundamento máximo de las declaraciones de una nueva existencia del objeto, en vez de cualquier tipo de construcción concreta. Una persona puede investigar las propiedades generales de dicha categoría y las diversas relaciones entre sus representantes. El o ella pueden resolver problemas relacionados con la búsqueda de todos los ejemplos de esta categoría que cumplan con una condición dada. Los procesos pueden realizarse en lo que se considera una entrada para el objeto recién nacido. Los nuevos objetos matemáticos pueden estar construidos fuera del objeto presente (p. 20)

Una vez que se ha reificado un proceso, éste produce un objeto en el que puede actuar un proceso de un nivel más elevado. En este momento, el proceso se interioriza y se repite todo el ciclo. Como resultado, el sistema trifásico de interiorización, condensación y reificación es generalmente jerárquico y repetitivo.

El desarrollo de la comprensión en esta visión, es la capacidad de liberarse del pensamiento obligado de una persona. Al hacerlo, el estudiante obtiene la capacidad de percibir un proceso, ya no como una secuencia de actos físicos que se han interiorizado y condensado, sino como un objeto. De acuerdo con Sfard (1994) este objeto, junto con otros objetos del universo matemático y las operaciones realizadas potencialmente de acuerdo a ellos, recibe un significado mediante la reflexión metafórica. En particular, Sfard (1994) se apega a la tesis de Lakoff en relación a que las "metáforas constituyen el universo de las ideas abstractas que éstas crean, en lugar de reflejarlo, las metáforas son la sola fuente de nuestra comprensión, imaginación y razonamiento" (p. 47). Por lo tanto, la metáfora dota de significado a un concepto abstracto, dado que éste proporciona una proyección figurativa de operaciones realizadas en una realidad física dentro del mundo de las ideas. Esta descripción resulta cierta incluso cuando el concepto parece alejarse de la realidad física debido a que lo que se encuentra por debajo del concepto es una larga cadena de metáforas que finalmente se enraízan en acciones realizadas en una realidad física. Como resultado, la opinión de Sfard es que la reificación, la transición de un modo de pensamiento operacional a uno estructural, representa la construcción de los conceptos matemáticos y su fabricación corresponde al nacimiento de una metáfora. Esta metáfora lleva al objeto matemático a ser y, por lo tanto, a intensificar la comprensión del estudiante sobre el universo matemático.

2. El modelo de comprensión de Pirie y Kieren

Pirie y Kieren consideran que su trabajo sobre la evolución de la comprensión matemática proporciona algunas respuestas a preguntas contundentes que surgen a partir de Sierpinska (1990b) "P1 = ¿La comprensión es un acto, una experiencia emocional, un proceso intelectual o una manera de conocer?... P3 = ¿Existen niveles, grados o tipos de comprensión?... R5 = ¿Cuáles son las condiciones para que la comprensión se presente como un acto?... P7 = ¿Cómo llegamos a comprender?... P8 = ¿Se puede medir la comprensión, y cómo? (p. 24). La definición inicial de la comprensión matemática de Pirie y Kieren evolucionó a partir de la definición constructivista de Glasersfeld sobre la comprensión (Kieren, 1990). En particular, Glasersfeld (1987) propuso la siguiente definición de comprensión:

> El organismo de la experiencia se convierte en un constructor de estructuras comunicativas, que pretende resolver dichos problemas conforme el organismo los percibe o los concibe... entre los cuales se encuentra el problema interminable de las organizaciones consistentes [de dichas estructuras] que podemos llamar comprensión. (p .7)

Glasersfeld percibió la comprensión como un proceso continuo para organizar las estructuras del conocimiento de una persona. Al utilizar esta definición como un organizador avanzado, Pirie y Kieren (1991a) desarrollaron su posición teórica respecto a la comprensión matemática. Ellos describieron la comprensión matemática de la siguiente manera:

> La comprensión matemática se puede definir como estable pero no lineal. Es un fenómeno recursivo, y la recursión parece ocurrir cuando el pensamiento cambia los niveles de sofisticación. De hecho, cada nivel de comprensión se encuentra contenido dentro de los niveles subsiguientes. Cualquier nivel particular depende de las formas y los procesos del mismo y, además, se encuentra restringido por los que están fuera de él. (Pirie y Kieren 1989, p. 8)

El propósito del siguiente análisis es explicar de manera más precisa el modelo de Pirie y Kieren.

2.1 Los elementos del modelo de Pirie y Kieren sobre la evolución de la comprensión matemática.

De acuerdo con la definición anterior, Pirie y Kieren conceptualizan su modelo sobre la

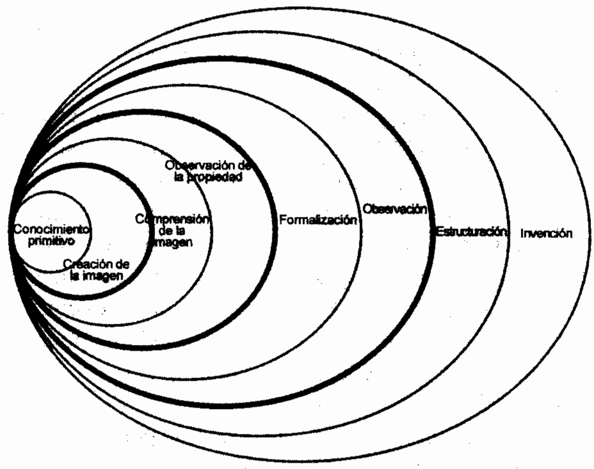

Figura 1. Una representación diagramática del modelo para la evolución de la comprensión matemática.

evolución de la comprensión matemática como poseedor de 7 niveles potenciales que se muestran en la Figura 1. El proceso de llegar a comprender inicia en el centro del modelo llamado el estrato *de conocimiento primitivo*[10]. Primitivo se refiere al punto inicial; no a un bajo nivel de matemáticas. El contenido central es toda la información que el estudiante atrae a la situación de aprendizaje. Estos contenidos se han analizado con distintos nombres "conocimiento intuitivo" (Leinhardt, 1988), "conocimiento situado" (Brown, Collins y Duguid, 1989) y "conocimiento previo o informal" (Saxe, 1988).

Para un concepto particular como las fracciones, se puede suponer que al rastrear el crecimiento de la comprensión matemática, un estudiante llega a la situación de aprendizaje con una gran cantidad de información que puede o no dar forma a la evolución de la comprensión. Resnick y Omanson (1987) se dieron cuenta de que sus estudiantes realizaban una instrucción de trazo de mapas[11] con las representaciones mentales de la sustracción de bloques, anexas a una rica base de conocimiento asociada con la sustracción. En este momento, el estudiante lleva ambas comprensiones de la sustracción más allá del estrato del conocimiento primitivo y de otras comprensiones que apoyan el crecimiento continuo. En contraste, Hiebert y Wearne (1986), al examinar el aprendizaje decimal, encontró que los estudiantes percibían los símbolos decimales como parte de un nuevo sistema simbólico acompañado por un nuevo conjunto de reglas que, por lo tanto, disminuía los vínculos a un material aprendido previamente. Por ello, los vínculos poco uti-

---

[10] El estrato del conocimiento primitivo primero se conoció como "realización primitiva" o "realización" en los artículos anteriores a 1991.

[11] En este caso, la instrucción de creación de mapas consta de tres componentes: (1) el aprendizaje y la práctica de la resta con bloques de base 10 y símbolos, (2) la práctica del registro simbólico sin mover físicamente los bloques y (3) la realización de la manipulación simbólica escrita sin la presencia de los bloques.

lizados del centro pueden impactar el proceso de la comprensión.

En un segundo estrato llamado *creación de imagen,* el estudiante es capaz de realizar distinciones con base en capacidades y conocimientos anteriores. Estas imágenes no son necesariamente "representaciones pictóricas", sino que transmiten el significado de cualquier tipo de imagen mental. Las acciones que se realizan en este estrato se relacionan con que el estudiante realice algo, mental o físico, para obtener una idea sobre un concepto. Por ejemplo, mientras el estudiante está realizando actividades de doblado o cortado puede desarrollar una imagen de fracciones como cosas que obtuvo a partir de cortar algo en piezas iguales y más pequeñas. Como resultado, las acciones que se realizan en este estrato involucran desarrollar las conexiones entre los referentes y los símbolos, según describen Wearne y Hiebert (1988), Greeno (1991) y Brownell (1945) mientras el estudiante emplea el lenguaje de fracción para analizar y registrar las acciones. En el siguiente estrato llamado *comprensión de la imagen,* las imágenes asociadas con una sola actividad se reemplazan por una imagen mental. El desarrollo de estas imágenes mentales, o más precisamente imágenes orientadas por un proceso mental, libera las matemáticas del estudiante a partir de la necesidad de realizar acciones físicas particulares (Pirie y Kieren, 1992b). Estas imágenes mentales se han analizado con distintos nombres "imagen de conceptos" (Davis y Vinner, 1986), "marcos" y "estructuras de representación de conocimiento" (Davis, 1984), y esquemas alternativos de los estudiantes" (Driver y Easley, 1978). La libertad para imaginar un concepto irrestricto por medio de los procesos físicos, los cuales provocan que la imagen sea exitosa en relación a la evolución del conocimiento matemático debido a que el estudiante comienza a reconocer las propiedades globales obvias de las imágenes matemáticas inspeccionadas.

En el cuarto estrato que se conoce como *observación de la propiedad,* el estudiante puede examinar una imagen mental y determinar los distintos atributos asociados con dicha imagen. Además de observar las propiedades internas de una imagen específica, el estudiante es capaz de observar las distinciones, combinaciones o conexiones entre las distintas imágenes mentales. Estas propiedades se combinan para construir definiciones que evolucionan y que pueden definir características particulares, mientras que se ignoran otros elementos del concepto. De acuerdo con Pirie y Kieren (1991a), la diferencia entre la obtención de una imagen y la observación de la propiedad es la capacidad de observar una conexión entre las imágenes y explicar cómo verificar la conexión. De acuerdo con Michener (1978), estas conexiones surgen de la exploración y la manipulación de un concepto en distintos niveles como "la examinación de ejemplos relevantes, la perturbación de grupos y definiciones y el cambio numérico y pictórico" (p. 373). Es posible que en este estrato de observación de la propiedad el estudiante se dé cuenta de las similitudes de las distintas imágenes y desarrolle una definición del concepto (Tall y Vinner, 1981) creada a partir de la interacción entre las diversas imágenes vinculadas, en vez de las imágenes desconectadas. En relación con la comprensión de fracciones, las acciones del estudiante revelan el conocimiento de que las fracciones equivalentes se generan multiplicando el numerador y el denominador por el mismo factor. La verbalización asociada con este estrato consistiría en producir una serie de fracciones equivalentes como

"2/3 = 4/6 = 6/9 = ..."
(Pirie y Kieren, 1991a, p. 2)

La diferencia entre las acciones del estrato de observación de la propiedad y las del estrato de obtención de la imagen es la capacidad de observar las equivalencias y explicar las técnicas necesarias para desarrollarlas.

En el quinto estrato de comprensión, llamado *formalización*, el estudiante es capaz de conocer las propiedades para abstraer las cualidades comunes de las clases de imágenes. En este estrato el estudiante tiene objetos mentales de clases similares construidos a partir de propiedades observadas, la extracción de las cualidades comunes y el abandono de los orígenes de la acción mental de la persona (Pirie y Kieren, 1989). La descripción de estos objetos mentales de clases similares tiene como resultado la producción de definiciones matemáticas completas. El lenguaje que se utiliza para describir un concepto no tiene que ser un lenguaje matemático formal; sin embargo, las descripciones generales proporcionadas por los estudiantes deben ser equivalentes a una definición matemática adecuada. Puede ser que en este estrato se emplee la descripción de Michener (Michener, 1978) sobre el primero de un pasaje de tres fases para lograr la comprensión total. Este primer estrato consiste en que el estudiante se familiarice con el concepto y sus conceptos circundantes. Se presenta la adquisición de las definiciones, pero el interés se mantiene en el concepto particular, y el alcance de las conexiones entre éste y otros conceptos se mantiene como mínimo y local. Respecto a las fracciones, el estudiante ahora puede hablar de fracciones como una clase de objetos formales no conectados con ejemplos específicos, y representar esta clase en términos de *a/b* en el estrato de formalización. El estudiante también puede visualizar las fracciones como un conjunto de números o entidades generales que no están orientadas por una acción.

El siguiente estrato de comprensión, la *observación*, permite la capacidad de considerar y utilizar como referencia el pensamiento formal de la persona. Más allá de la relación del estudiante en la meta-cognición, el estudiante también es capaz de observar, estructurar y organizar los procesos de pensamiento personales, así como reconocer las ramificaciones de los procesos del pensamiento. En este estrato, el estudiante puede producir verbalizaciones relacionadas con la cognición, sobre el concepto formalizado. Esta descripción hace eco en la segunda etapa propuesta por Michener (1978), en la cual el estudiante obtiene una conceptualización general del sujeto y su desarrollo. En particular, la importancia reside en los "elementos y relaciones dentro de los espacios de representación y la teoría como un todo; esto tiene como resultado una visión general" (Michener, 1978, p.376). El estudiante combina las definiciones, ejemplos, teoremas y demostraciones para identificar los componentes esenciales, las ideas de conexión y los medios para cruzar entre dichas ideas. En el caso de las fracciones, el estudiante ha progresado en la producción de verbalizaciones relacionadas con la cognición, conectadas con las fracciones en el estrato de la organización. En ese momento, el estudiante puede observar que "No hay fracciones de medios más pequeñas" (Pirie y Kieren, 1992b, p. 247). Dicha observación es distinta a partir del conocimiento del estrato de observación de la propiedad, cualquier fracción de medios puede hacerse más pequeña debido a que puede doblarse a la mitad; o la conceptualización del estrato de la obtención de la imagen sobre que, en varios dobleces se producen piezas más pequeñas.

Una vez que se es capaz de organizar las observaciones formales de una persona, las expectativas naturales son determinar si la observación formal es verdadera. Después de que el estudiante logró dicha conciencia, puede explicar la interrelación de dichas observaciones mediante un sistema axiomático (Pirie y Kieren, 1989). Este estrato se llama *estructuración*. En este estrato, la comprensión del estudiante trasciende el tema particular para la comprensión que se encuentra en una estructura mayor. Este estrato de estructuración aparece bien correlacionado con la tercera etapa descrita por Michener (1978). En esta tercera etapa, el estudiante comienza a observar la relación entre distintos sujetos; realiza ciertas preguntas sobre ideas subyacentes; axiomas y ejemplos; relaciona estas ideas subyacentes a través de varios dominios y percibe la interconexión de diversas teorías. Por lo tanto, en el estrato de la estructuración, las fracciones se conciben como más allá de las entidades físicas asociadas con el estrato de creación de una imagen, las equivalencias orientadas a la acción y asociadas con el estrato de observación de las propiedades, y el resultado de los algoritmo formales asociados con el estrato de formalización. El estudiante sería capaz en ese momento de concebir las pruebas de las propiedades asociadas con las fracciones, tales como el cierre de las fracciones de medios en relación con la suma, en las que la suma de fracciones se observa como una propiedad lógica seguida de otras propiedades lógicas (Pirie y Kieren, 1991a, 1992b).

El anillo exterior del modelo de Pirie y Kieren sobre la comprensión matemática se llama *invención (inventizing)*. Originalmente conocida como *invención (inventing)*, el nombre de este estrato cambió al término actual para distinguir las actividades asociadas con este estrato y las inversiones que pueden presentarse en las capas menores de la comprensión (Pirie y Kieren 1994b). Como resultado, el uso de la invención no implica que una persona no puede inventar en otros niveles, sino que se utiliza para indicar la capacidad de liberarse del conocimiento estructurado que representa la comprensión total y crear preguntas totalmente nuevas que tendrán como resultado el desarrollo de un concepto nuevo. En este estrato, la comprensión matemática del estudiante es infinita, imaginativa y llega más allá de la estructura actual para contemplar las preguntas de "¿qué pasaría si?" Esta pregunta tiene como resultado el uso, por parte del estudiante, de un conocimiento estructurado como un conocimiento primitivo, al investigar más allá del dominio de exploración inicial. Por ejemplo, la extensión de la notación fraccionaria a/b para $a + bi$ a $a/b/c/d$ para $a + bi + cj + dk$ llevó al matemático Hamilton de una comprensión estructurada de los números complejos a un nuevo sistema llamado cuaterniones (Pirie y Kieren, 1991a).

2.2 Construcciones del modelo de Pirie y Kieren sobre la Comprensión.

El modelo de Pirie y Kieren sobre la comprensión contiene un dinamismo inherente que resulta aparente en varios componentes. En particular, la parte central del modelo, el conocimiento primitivo, tiene una cualidad dinámica subyacente. Por ejemplo, Pirie y Kieren (1990), definen este cambio en la siguiente afirmación:

> Una consecuencia obvia de este modelo es que los niveles externos crecen en forma recursiva desde los niveles internos, pero el conocimiento a un nivel externo permite, y de hecho retiene, los niveles internos. Los niveles externos se insertan y envuelven a los internos. De hecho, esta es una teoría de la relatividad de la comprensión y, por lo tanto, una característica particular de la actividad primitiva [que en otros documentos se conocerá como conocimiento primitivo], es que los observadores pueden considerar lo que deseen como el enfoque de este nivel. Por ejemplo, se podría observar a una persona durante el nivel de invención (*inventing*) [que más adelante se conocerá como invención (*inventizing*)] como si tuviera su comprensión previa total como una nueva acción primitiva [conocimiento primitivo]. Una consecuencia principal de esta

línea de pensamiento es que, para un observador, la comprensión tiene una cualidad fractal. Se puede observar la comprensión de una persona "dentro" de la acción primitiva [conocimiento primitivo] y observar la misma estructura nivelada (p. 5)

A partir de esto, se puede ver que Pirie y Kieren observan el centro interno, llamado conocimiento primitivo, como una composición de modelos completos, similares a la totalidad. Esta propiedad otorga al centro interno el atributo de *característica fractal* que se hace evidente en la Figura 2. Este entretejido señala la importancia de la información que se encuentra en el centro interno, debido a que la información restringe el conocimiento de una persona a los estratos externos (Pirie y Kieren, 1989). Como resultado, este conocimiento central puede ayudar benéficamente a un estudiante en la comprensión de un concepto, o dificultar la comprensión del estudiante al actuar como un obstáculo (Mack, 1990; Resnick et al., 1989).

La característica más importante del modelo de Pirie y Kieren sobre la comprensión es el proceso dinámico de *redoblar*. Cuando uno se encuentra con un problema cuya solución no se puede encontrar en forma inmediata, debe observarse la necesidad de volver a doblar para llegar a una estrato más interno y para extender la comprensión actual e inadecuada de la persona. El proceso de volver a doblar para llegar a un estrato más interno provoca la reexaminación de la comprensión de un estrato en una forma diferente, a partir de las acciones que aparecieron originalmente cuando se trabajó en dicho estrato. La diferencia es cualitativa y realmente distinta debido a la motivación asociada con volver a

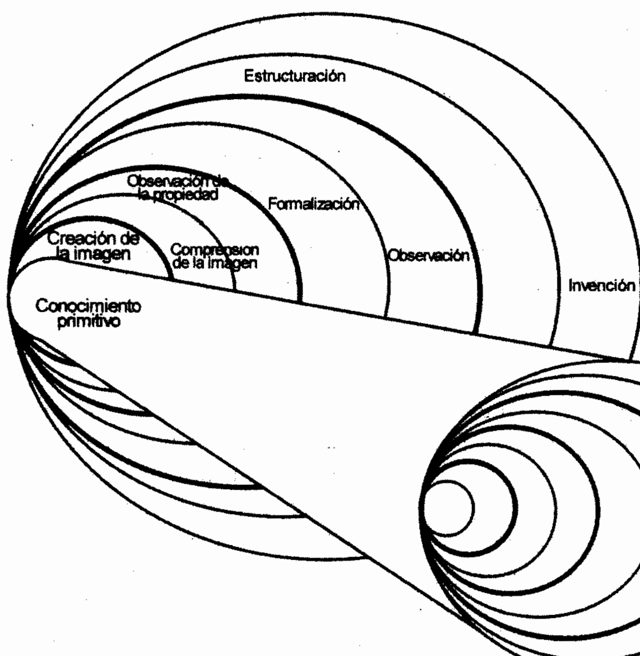

Figura 2. Una representación diagramática del modelo para la evolución de la comprensión matemática que ilustra la naturaleza similar a sí misma del centro interno llamado conocimiento primitivo.

doblar y la comprensión desarrollada de los anillos externos (Pirie y Kieren, 1991a, 1992a). Como resultado, la extensión de la comprensión de una persona no es simplemente un producto de la generalización de actividades de estratos determinados, ni una consecuencia de la abstracción reflexiva de la comprensión de la persona para obtener un nuevo estrato externo, sino que más comúnmente, la extensión se presenta doblando de nuevo hasta que repetidamente se reconstruya y reorganice el conocimiento del estrato interno de la persona, y de esta manera se extienda más aún la comprensión del estrato externo. De acuerdo con Pirie y Kieren (1992b), dicho proceso es similar a la reconstrucción de un esquema existente descrito por Sfard (1991) y Harel y Tall (1991).

Otra construcción del modelo identifica la *complementariedad de un proceso y la acción orientada a la forma.* Cada uno de los estratos, más allá del estrato del conocimiento primitivo, contiene una complementariedad de forma y proceso, según se identifica en la Figura 3.

Pirie y Kieren explican que se debe exhibir la acción orientada a la forma para que funcione completamente en un estrato (Kieren, 1990; Pirie y Kieren, 1990, 1994b).

Estas acciones orientadas a la forma se presentan como una demostración de un agente externo que intenta determinar el estrato de comprensión en el que un estudiante se encuentra operando. Por lo tanto, la ausencia de la acción complementaria que se presenta en el estrato no demuestra que el estudiante esté trabajando en una estrato en particular. Pirie y Kieren (1991a) ampliaron esta noción y reetiquetaron los diagramas que se muestran en la Figura 4 para permitir un análisis más sencillo de los estratos mezclados y laminares, así como los complementos de actuación y expresión de los mismos. En particular, Pirie y Kieren (1994b) afirman que si los estudiantes realizan sólo acciones sin la expresión correspondiente, entonces sus comprensiones se inhiben y no pasan al siguiente estrato.

El estrato de creación de imagen está compuesto por los elementos complementarios llamados *realización de la imagen y análisis de la imagen.* El estudiante que realiza una imagen observa el trabajo previo como un trabajo completo, y no regresará a él; mientras que, un estudiante que revisa una imagen se relaciona con la alteración constructiva de la conducta anterior, sin que necesariamente siga un patrón (Pirie y Kieren, 1991a). La realización de una imagen puede parecer en un inicio

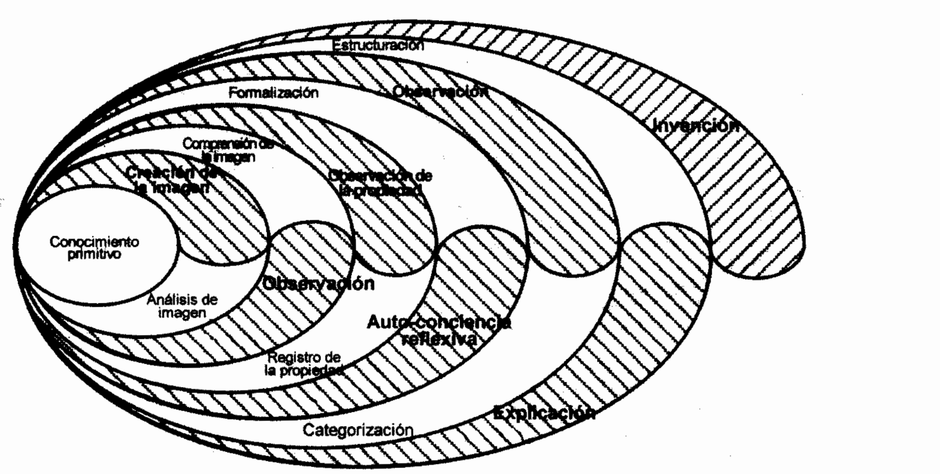

Figura 3. Los elementos complementarios de nivel interno.

más definida debido a que la ocupación en cualquier actividad pareciera una realización de imagen. Sin embargo, la realización de imagen, de acuerdo con Pirie y Kieren (1994b), consta sólo de acciones potencialmente fructíferas relacionadas con la realización intencional de algún tipo de imágenes para un concepto.

El estrato de comprensión de una imagen tiene dos elementos complementarios, *visualización de una imagen y expresión de una imagen.* El acto de la expresión de una imagen ha unido ejemplos previos y tiene un patrón, mientras que la conducta de expresión de la imagen articula el patrón asociado con una imagen (Pirie y Kieren 1991a). En particular, cuando se actúa en la visualización de una imagen, un estudiante identifica un elemento discrepante como un elemento no relacionado con la imagen mental del estudiante, pero no es capaz de expresar porqué. Por otro lado, la expresión de la imagen relaciona al estudiante en la articulación de la imagen y el razonamiento de que el elemento discrepante no se adecua a una imagen (Pirie y Kieren, 1994b). En el estrato de observación de la propiedad, las dos complementariedades son *la predicción de la propiedad y el registro de la propiedad.* El acto de la predicción de la propiedad relaciona la imagen con una propiedad observada por el estudiante, y el registro de la propiedad es un acto que incorpora dentro de la estructura cognitiva del estudiante la propiedad observada como algo que existe y parece funcionar. De acuerdo con Pirie y Kieren (1994b), tanto el estrato de la obtención de la imagen como el estrato de la observación de la propiedad tienen una característica particular que los distingue de otros estratos. En estos dos estratos, las nociones de "actuación" producen comprensiones temporales, en el sentido de que éstas pueden disminuir a través del tiempo si no se coordinan con sus nociones de "expresión" complementarias. Como resultado, la falta de una actividad de "expresión" parece obstruir un movimiento más allá de sus imágenes previas y, por lo tanto, de estratos más elevados en su modelo (Pirie y Kieren, 1994b).

En el estrato de la formalización, la *aplicación del método y la justificación del método* son dos elementos complementarios, mientras que el estrato de observación contiene las complementariedades de la *identificación de*

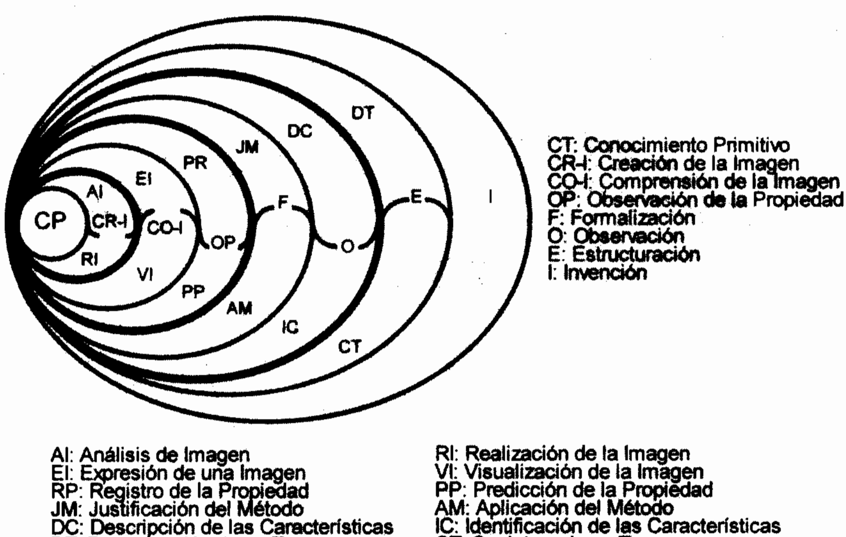

Figura 4. Anillos con complementos de actuación y expresión identificados.

las características y descripción de las características (Pirie y Kieren, 1994b). El último estrato que contiene complementariedades es el estrato de estructuración y contiene la *conjetura de un teorema y la demostración de un teorema* (Pirie y Kieren, 1994b). Las complementariedades para estos tres estratos de su modelo se definen sin ninguna otra descripción más allá de la presentación de términos ilustrativos respecto a Pirie y Kieren (1994b).

La última construcción del modelo son los anillos más oscuros llamados límites de *falta de necesidad.* Estos límites se refieren al paso del estudiante hacia una comprensión más elaborada y estable que no requiere necesariamente los elementos de los estratos más bajos (Pirie y Kieren, 1992b). Por ejemplo, una vez que los estudiantes han cambiado al estrato de obtención de la imagen, ya no resulta necesario obtener ejemplos de creación de imagen o elementos a partir del estrato del conocimiento primitivo. Una persona que se encuentra en el estrato de obtención de imagen, se encuentra en un estrato cualitativamente distinto de comprensión cuando se involucra activamente en las actividades de *visualización de la imagen y expresión de la imagen* en la que el estudiante no necesariamente visualiza un objeto matemático como resultado de una actividad de realización, sino como una entidad con características identificables (Pirie y Kieren, 1991a). El cambio de un estrato de realización de la imagen hacia un estrato de obtención de la imagen, involucra un cambio cualitativo en los procesos de pensamiento asociados. El estudiante ha cambiado de los estratos asociados con el conocimiento no consciente al pensamiento consciente. Por lo tanto, moverse en límites de "falta de necesidad" significa un importante cambio cualitativo en la comprensión de la persona. También se presentan cambios cualitativos similares cuando se alcanzan los estratos de formalización o de estructuración, debido a que ya no hay necesidad de una imagen o de un significado concreto para la actividad matemática. Sin embargo, la superación de un límite de "falta de necesidad" no implica que el estudiante quizá nunca regrese a ese nivel bajo de comprensión. De hecho, estos límites de "falta de necesidad" generalmente se cruzan nuevamente durante los momentos en que se vuelve a doblar para reorganizar y reconstruir las comprensiones de niveles más bajos, con el fin de expandir las comprensiones de niveles más externos.

3. Teoría APOE de Dubinsky

La propuesta de Piaget sobre el proceso de *abstracción reflexiva* como la clave de la construcción de los conceptos lógico-matemáticos, influyeron el desarrollo de Dubinsky sobre la teoría de Acción-Proceso-Objeto-Esquema (teoría APOE). En esta teoría, el desarrollo de la comprensión "... comienza con la manipulación de los objetos físicos o mentales previamente construidos para formar acciones; las acciones se interiorizan para formar procesos que se encapsulan para formar objetos. Los objetos se pueden volver a desencapsular hacia el proceso desde el cual se formaron. Finalmente, las acciones, los procesos y los objetos se pueden organizar en esquemas" (Asiala et al., 1996, p. 8). El mecanismo de la construcción de estos esquemas, la abstracción reflexiva, es el corazón de la teoría APOE debido a que separa las propiedades conectadas e identifica los elementos salientes que comprenden el concepto en forma separada del contexto. En particular, la abstracción reflexiva extiende la construcción de conexiones entre los conceptos abstraídos y constituye una estructura fuera de las abstracciones relacionadas.

De acuerdo con Dubinsky (1991), existen cinco distintos tipos de construcciones de Piaget que son esenciales para desarrollar conceptos matemáticos abstractos —*generalización, interiorización, encapsulamiento, coordinación y reversión*—. La quinta construcción, la reversión, que se considera como un elemento crucial para el pensamiento matemático avanzado desde la perspectiva APOE, no fue parte de la descripción de Piaget sobre la abstracción reflexiva, a pesar de que estaba contenida en sus escritos (Dubinsky, 1991). Las acciones que se presentan describen los componentes de la teoría APOE, definen sus diversas construcciones y relacionan los componentes y construcciones.

3.1 Elementos de la teoría APOE.

Dubinsky propone que un esquema es más que una entidad estática, debido a que continúa siendo inseparable de su propia evolución continua y dinámica. La Figura 5 muestra la estructura de un esquema e identifica las construcciones que influyen.

La piedra angular más importante de la comprensión es la *acción* (similar a los *esquemas de acción* de Piaget). Asiala et al. (1996) identifica que la comprensión de un concepto matemático se origina mediante la manipulación de objetos físicos o mentales previamente construidos para formar acciones. Una acción se equipara con cualquier operación mental o física repetible que transforma de alguna manera un objeto físico ó mental. Como resultado, las acciones tienden a ser algorítmicas por naturaleza y en forma externa (Clark et al., 1997). En relación con el concepto de función, un estudiante puede concebir una función como algo relacionado con la aparición de números en una expresión algebraica y el cálculo de los valores resultantes. Dicha conceptualización parece ser restringida y estática debido a que continúa inexorablemente vinculada a las evaluaciones individualizadas que se presentan una a la vez.

A pesar de que una concepción de la acción parece tener un enfoque limitado, la construcción de la comprensión resulta un elemento necesario, debido a que las acciones se realizan en objetos matemáticos dentro del ámbito de experiencia del estudiante. Conforme una acción se *interioriza* a través de una secuencia de repetición de la acción y el reflejo de la misma, la acción ya no se maneja por influencias externas, pues se vuelve una construcción interna llamada *proceso* (similar a las *operaciones* de Piaget). El logro de esta concepción de proceso indica que el estudiante puede reflejar el proceso, describirlo e

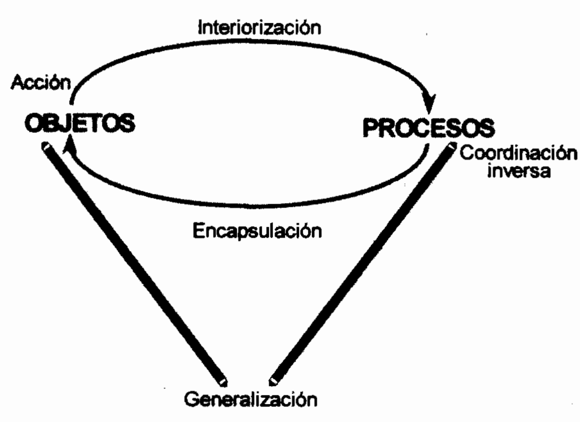

Figura 5. Esquemas y su construcción.

incluso revertir los pasos de transformación sin requerir el estímulo externo (Asiala et al., 1996). En particular, el estudiante puede utilizar este proceso para obtener nuevos procesos, ya sea mediante la *coordinación o la reversión*. La coordinación de los procesos múltiples relacionados da como resultado la construcción de nuevos procesos. En distintas ocasiones, resulta necesario para el estudiante encontrar elementos de un nuevo tema y reconocer las estructuras subyacentes que permiten la aplicación de diversos procesos desarrollados en un contexto distinto. Además, existen situaciones en las que el estudiante encuentra temas que requieren la composición de procesos aparentemente no relacionados para crear una estructura más compleja (Dubinsky, 1991). Por otro lado, la reversión permite al estudiante concebir un nuevo proceso que deshaga la secuencia de transformaciones que comprenden el proceso inicial. La reversión es, esencialmente, la construcción de un proceso que es una contraorden de un proceso internalizado. Por ejemplo, con respecto al concepto de función, un estudiante puede vincular dos o más procesos juntos para producir una función compuesta que coordine diversos procesos en un proceso singular o que revierta una función para obtener lo inverso de la función. Además, el fortalecimiento de una concepción de proceso permite un mayor acceso del estudiante a las nociones como las de uno-a-uno y otras.

Cuando el estudiante puede reflejarse en un proceso y transformarlo por medio de una acción, el proceso se considera como *encapsulado* para convertirse en un *objeto*. De acuerdo con Sfard y Linchevski (1994), el proceso de reificación es casi un sinónimo del encapsulamiento. Una vez encapsulado, el objeto existe en la mente del individuo y necesita la asignación de una etiqueta para el objeto (Dubinsky et al., 1994). La etiqueta resultante permite al estudiante nombrar el objeto y conectar dicho nombre con el proceso a partir del cual se construyó el objeto perseguido; esta visión dual del objeto resulta esencial debido a que el estudiante necesita ser capaz de *desencapsular* un objeto y regresar al proceso en una forma anterior a su encapsulamiento. El desencapsulamiento permite al estudiante utilizar las propiedades inherentes al objeto para realizar nuevas manipulaciones a partir de él. Por ejemplo, respecto a las funciones, un estudiante debe facilitar el encapsulamiento de procesos a objetos y desencapsulamiento de objetos a procesos cuando se consideran manipulaciones como la suma, multiplicación por la creación de conjuntos de funciones (Asiala et al., 1996).

El elemento final de la teoría APOE, el *esquema*, es una colección de procesos y objetos (Dubinsky et al., 1994). Esta colección puede ser más o menos coherente, pero el estudiante la utiliza para organizarse, comprender y crear un sentido del fenómeno o concepto observados. Como resultado, un esquema contiene generalmente otros esquemas subordinados para abarcar varios puntos de un dominio particular. El término esquema tiene fuertes conexiones con el uso que da Piaget al término *esquema (schemata)* que se relaciona con las descripciones de imagen del concepto de Tall y Vinner (Asiala et al., 1996). Sin embargo, los esquemas designados por Dubinsky et al.(1994) corresponden a los esquemas tematizados de Piaget, los cuales indican que la colección fusionada en un objeto en el cual pueden tener lugar acciones. En particular, estos esquemas son representaciones mentales de los conceptos, dado que existen en la mente del estudiante. Como resultado, Dubinsky et al.(1994) señala que "Un esquema puede utilizarse para resolver una situación problemática desempacándolo y trabajando con los procesos y objetos del individuo. Un esquema también puede tratarse como un objeto en el sentido de que se pueden aplicar en acciones y procesos" (p. 271).

Esta capacidad de concebir un esquema como un objeto de acuerdo al cual las acciones y los procesos pueden transformar el esquema, infiere una cualidad fractal con esquemas que contienen otros esquemas como elementos.

En particular, los esquemas son estructuras de organización que incorporan las acciones, procesos, objetos y otros esquemas que el estudiante invoca para resolver una situación problemática de las matemáticas. La construcción de dichas estructuras requiere un mecanismo llamado *generalización*, el cual permite un alcance más amplio de la utilización del esquema, y que también recibe el nombre de *generalización expansiva* por parte de Harel y Tall (1991). En particular, la generalización de un esquema ya construido se presenta cuando el estudiante amplía el ámbito de aplicación sin cambiar la estructura del esquema. Piaget se refiere a dicha construcción como una asimilación reproductiva o generalizada, y la llamó la generalización *extensional* (Dubinsky, 1991). Dicha generalización es la forma más simple y familiar de la abstracción reflexiva, debido a que se relaciona con la aplicación de un esquema ya existente para un nuevo conjunto de objetos.

Más recientemente, Clark et al. (1997), mientras investigaban la construcción de la comprensión de la regla de la cadena de un estudiante, intentaron utilizar esta noción de esquema para negociar entre los miembros del equipo de investigación RUMEC las explicaciones sobre las comprensiones exhibidas por el estudiante. Sin embargo, se volvió aparente durante este intento de clasificar las respuestas del estudiante, que las descripciones de las acciones, procesos y objetos eran insuficientes en este contexto. En respuesta, Clark et al. (1997) señaló que "en el curso de estas negociaciones, nos percatamos que las Acciones, Procesos y Objetos por sí mismos no eran suficientes para describir la comprensión del estudiante sobre la regla de la cadena" (p. 353). En esencia, para el concepto de la regla de la cadena que incorpora distintos subconceptos, la teoría APOE no proporciona una explicación lo suficientemente sólida para los distintos matices encontrados, ya que no es el resultado del encapsulamiento de un solo proceso.

Clark et al. (1997) regresó a los escritos de Piaget y García para analizar el mecanismo tríado que resulta útil en la descripción del desarrollo del esquema. Este mecanismo define tres etapas particulares en el desarrollo de un concepto: *Intra, Inter y Trans*. "La etapa Intra se caracteriza por el enfoque de un solo objeto en aislamiento desde otras acciones, procesos y objetos. La etapa Inter se caracteriza por el conocimiento de las relaciones entre las distintas acciones, procesos, objetos y/o esquemas. Consideramos que es útil llamar "preesquema" a la colección que se encuentra en la etapa Inter del desarrollo. Finalmente, la etapa Trans se caracteriza por la construcción de una estructura coherente que subyace en algunas de las relaciones descubiertas en etapa Inter del desarrollo" (Clark et al., 1997, pp. 353-354). Esta mejora del concepto de esquema permitió a Clark et al. (1997) explicar las acciones y afirmaciones de los estudiantes respecto a la regla de la cadena, así como a McDonald, Mathews y Strobel (2000) les permitió estudiar el desarrollo cognitivo del concepto de sucesión. Como consecuencia, la noción de esquema continúa siendo reexaminada y redesarrollada conforme evoluciona la teoría.

3.2. Construcciones de la teoría APOE.

La construcción de la comprensión desde la perspectiva APOE, pasa por varias etapas manejadas por impulsos externos que después se internalizan y se reflejan, para finalmente organizarse. En particular, Asiala et al. (1996) definieron el desarrollo del conocimiento matemático desde la perspectiva de la teoría APOE de la siguiente forma:

> El conocimiento matemático de un individuo es su tendencia a responder a los problemas matemáticos percibidos mediante el reflejo de los problemas y sus soluciones dentro de un contexto social y por medio de la construcción o reconstrucción de las acciones matemáticas, procesos y objetos, y organizándolos en esquemas para utilizarlos en la solución de situaciones (p. 7).

El acto de la reflexión, una construcción esencial para la teoría APOE, es la atención consciente del estudiante para las operaciones que está realizando. Este reflejo tiene una función integral en el aprendizaje y en el conocimiento debido a que se relaciona con el alcance más allá de la contemplación en la realización particular de técnicas y algoritmos, sin importar su complicación (Asiala et al., 1996). En particular, la reflexión proporciona al estudiante una conciencia de la forma en que trabajan los procedimientos, la apreciación de un resultado sin realizar operaciones físicamente, la capacidad de analizar y manipular variantes algorítmicas y la capacidad de observar la relación y organizar la experiencia. Esta reflexión es una parte integral de la abstracción reflexiva que consta de propiedades para plasmar en papel durante las situaciones, mediante la atención consciente a las acciones, la interiorización de dichas acciones en procesos, el encapsulamiento de los procesos en objetos y, finalmente, la organización relacionada con acciones, procesos, objetos en entidades mentales llamadas esquemas. En particular, la reflexión de un esquema con intención de transformarla amplía la comprensión del estudiante generando medios adicionales para construir un objeto (Asiala et al., 1996). Por lo tanto, la teoría APOE representa la construcción de objetos desde dos fuentes distintas —el encapsulamiento de los procesos y las *reflexiones de los esquemas*—.

Otra construcción esencial de la teoría APOE relacionada con los esquemas es la descripción teórica llamada *descomposición genética*. El hecho de que los esquemas sean entidades generales engendrará una de las dificultades inherentes del análisis de un esquema del estudiante. Para superarla, aunque no por completo, Dubinsky y otros utilizaron la descomposición genética de conceptos para describir los vínculos y las representaciones con un concepto. Una descomposición genética de un concepto deriva de tres fuentes: los datos psicológicos, las ideas de Piaget sobre la formación del concepto y la comprensión del concepto apegado a los matemáticos (Dubinsky, 1991). Los datos psicológicos obtenidos a partir de las observaciones de los estudiantes en medio del aprendizaje del concepto. Las ideas de Piaget sobre las mejoras decisivas influyeron la construcción y la revisión de la descomposición genética del modelo. Estas mejoras se generaron a partir de las reflexiones en los experimentos del aprendizaje, los cuales seguían los ajustes del modelo y acomodaban de una mejor manera los fenómenos nuevos y relevantes para producir un modelo más rico y representativo. Debido a que el modelo requiere una menor modificación para representar los datos generados desde un experimento de enseñanza, existe mayor evidencia de que el modelo es descriptivo. Por último, las descripciones matemáticas de un concepto son esenciales debido a que la descomposición genética debe tener sentido a partir de la perspectiva matemática. Sin embargo, de acuerdo con Dubinsky (1991), la descomposición genética no refleja necesariamente la manera en que un matemático en particular analizaría el concepto para formular un método y enseñar dicho concepto. Como resultado, una descomposición genética es una descripción idealizada de las representaciones, vínculos, objetos, procesos y acciones esperadas matemáticamente, que casi siempre se atribuyen al concepto. Además, la descomposición genética proporciona un trayecto posible para la formación de un concepto por parte del estudiante; sin embargo, puede no ser representativa de la trayectoria que tienen todos los estudiantes (Dubinsky, 1991).

Asiala et al. (1996) afirman que "Nuestra comprensión tentativa sugiere que el esquema del concepto de un individuo incluye su visión del concepto, la cual está descrita por la descomposición genética, así como otros conceptos percibidos para vincularse al concepto en el contexto de las situaciones problemáticas" (p. 12). Como resultado, el esquema del estudiante puede o no representar la totalidad, o incluso una parte, de la descomposición genética. Este esquema puede no contar con los elementos esenciales o contener elementos que no se consideran matemáticamente conectados al concepto. Sin embargo, como señala Dubinsky (1991) "No es posible observar directamente ninguno de los esquemas del sujeto o de sus objetos y procesos. Sólo podemos inferirlos desde nuestras observaciones de los individuos, los cuales pueden o no traerlos para que resuelvan los problemas —situaciones en las cuales el sujeto busca una solución o trata de entender un fenómeno—. Pero estos mismos actos o el conocimiento y la solución de problemas o las nuevas preguntas y la creación de nuevos problemas son los medios (en nuestra opinión, los únicos medios) a través de los cuales el sujeto construye un nuevo conocimiento matemático" (p. 103). Como resultado, la intención de descubrir un esquema del estudiante mediante la presentación de nuevas tareas, la observación de las manifestaciones externas y la realización de las inferencias sobre las acciones, procesos, objetos y esquemas internos a partir de ellos parece ser inútil. La inutilidad surge de la posibilidad de que la relación con una tarea motiva la reorganización del pensamiento. Sin embargo, las respuestas consistentes a través de diversas tareas indican que el estudiante asimiló una porción de un esquema ejemplificado en una descomposición genética.

4. Análisis de los elementos compartidos y distintivos

El modelo de Pirie y Kieren sobre la evolución de la comprensión y la teoría APOE de Dubinsky tiene varios elementos isomorfos entre sí y algunos de ellos que son diferentes. Por ejemplo, se puede analizar por qué el modelo de Pirie y Kieren sobre la evolución de la comprensión matemática y la teoría APOE de Dubinsky satisface el criterio asociado con el estatus de una teoría, comparar los orígenes de ambas teorías, relacionar sus estructuras organizacionales, examinar los vínculos de las teorías alternativas de la comprensión y analizar la implementación de teorías respecto a las prácticas de evaluación e instrucción. Como resultado, los siguientes incisos identificarán estas cualidades comparables, así como las cualidades que distinguen ambas teorías.

4.1. ¿Por qué estos dos marcos satisfacen el criterio para una teoría?

Antes de pasar a la pregunta de si el modelo de Pirie y Kieren y la teoría APOE realmente satisfacen el criterio de una teoría, se requiere aclarar algunos términos. Un *modelo* es una representación útil sólo en el grado en el que describen los vínculos entre los objetos representados y organiza una estructura que nos ayude a comprender dichos objetos. En general, un modelo puede ocultar sistemáticamente características particulares con la intención de simplificar relaciones y, por lo tanto, dejar de representar gran parte de la situación. Como consecuencia, el modelo proporciona una descripción de la realidad para trabajarla que se enfoca en los objetos y en sus relaciones sin ostentar una verdad absoluta. De la misma manera, una *teoría* no afirma ser una verdad absoluta y sus explicaciones se enfocan en el nivel de mecanismo. Esto es, se enfocan en meta-relaciones en vez de los objetos representados en una situación particular, mientras que aún lucha con la descripción del fenómeno complejo que se está trabajando. Por último, el término *marco teórico* que se ha utilizado en este documento es una descripción de un modelo o teoría que no se ha analizado de acuerdo con el criterio de Schoenfeld (2000).

Así que ¿Cuál es el criterio de Schoenfeld? De acuerdo con Schoenfeld (1998), existían tres criterios que podían definir si un marco teórico podía clasificarse como una teoría: el poder explicativo, el poder predictivo y el alcance. Estos tres criterios se expandieron según Schoenfeld (2000) para incluir: (a) poder descriptivo, (b) poder explicativo, (c) alcance, (d) poder predictivo, (e) rigor y especificidad, (f) susceptible de falsación, (g) capacidad de replicabilidad y (h) varias fuentes de evidencia ("triangulación"). Cada uno de estos requisitos se definirá y se presentará un análisis de la manera en que el modelo de Pirie y Kieren sobre la evolución de la comprensión matemática y la teoría APOE de Dubinsky satisfacen este criterio.

4.1.1 *Poder descriptivo.*

El poder descriptivo se relaciona con la capacidad del marco teórico para capturar las características esenciales bajo investigación, en formas que permiten un análisis fidedigno del fenómeno que se está describiendo (Schoenfeld 1998). Resulta claro que tanto el modelo de Pirie y Kieren sobre la evolución de la comprensión y la teoría APOE de Dubinsky satisfacen este primer criterio. Pirie y Kieren utilizan transcripciones de entrevistas e imágenes gráficas para definir el fenómeno de un estudiante entre los niveles de su modelo para identificar los tipos de comprensión utilizados para resolver diversas preguntas durante los procesos de una entrevista. De la misma manera, la teoría APOE de Dubinsky utiliza técnicas de recolección de datos orales y escritos para formar un documento descriptivo que clasifique el nivel de comprensión alcanzado por el estudiante. En este sentido, ambas teorías proporcionan suficiente descripción por la cual un lector puede interpretar la teoría y reconocer los datos correspondientes a las conclusiones. Ambas teorías proporcionan al observador de las acciones o expresiones externas del estudiante un medio de recolectar, organizar y analizar dichas observaciones. Al mismo tiempo, ambas son incompletas, pues dejan sin explicar elementos periféricos y describen asuntos focales.

4.1.2. *Poder explicativo.*

El poder explicativo se refiere a la capacidad del marco para explicar los mecanismos-descripciones de cómo y por qué las cosas se juntan y funcionan. De acuerdo con Schoenfeld (2000), las explicaciones proporcionan las razones subyacentes del porqué un estudiante puede o no realizar una tarea en particular. En esencia, una teoría debe contener términos precisos y descriptivos que indiquen los objetos importantes de la teoría, sus interrelaciones y las razones por las que ciertas cosas en particular pueden ser posibles o no. Dubinsky y McDonald (2001) argumentan que el poder explicativo de la teoría APOE reside en la capacidad de la teoría para señalar las construcciones mentales particulares de las acciones, procesos, objetos y/o esquemas que un estudiante parece realizar, a pesar de que otro no lo haya hecho. De una manera similar, la teoría de Pirie y Kieren les permite explicar las diferencias en el desempeño del estudiante, basados en el nivel de comprensión correspondiente a los conceptos anteriores. Por ejemplo, en Pirie y Kieren (1992a), ellos marcan una diferencia entre el desempeño de los estudiantes basados en su capacidad para trabajar con "tercios", con base en las acciones y expresiones externas del estudiante proporcionando una indicación de diferencias en los estratos de operación. En particular, su teoría señala las imágenes desarrolladas, las relaciones observadas entre imágenes, las descripciones formalizadas de dichas relaciones, etc., como explicaciones de las variaciones en el desempeño del estudiante.

4.1.3. *Alcance.*

El alcance se relaciona con el rango del fenómeno que analiza la teoría. En esencia, una teoría comprensible debe aplicarse a un amplio rango de fenómenos mas que en un concepto localizado. La teoría APOE se ha empleado ampliamente por parte de Dubinsky y miembros de su equipo RUMEC en diversos temas como: funciones, álgebra abstracta (operaciones binarias, grupos, subgrupos, normalidad, grupos cocientes), matemáticas discretas (inducción, permutaciones, simetrías, cuantificadores existenciales y universales), cálculo (límites, regla de la cadena, derivadas, sucesiones infinitas), estadística (media, desviación estándar, teorema del límite central), teoría de números elementales (valor de lugar en base *n*, divisibilidad, múltiplos, conversiones entre bases) y fracciones. El número de conceptos mencionados señala claramente la aplicabilidad de la teoría APOE a un amplio rango de fenómenos que están comúnmente vinculados a las matemáticas superiores, a pesar de que se han investigado unos cuantos temas con niños menores (Dubinsky y McDonald, 2001). En contraste, el modelo de Pirie y Kieren sobre la evolución de la comprensión se enfoca generalmente en el desarrollo de la comprensión en niños pequeños. Como consecuencia, el rango del fenómeno para el que se aplica la teoría de Pirie y Kieren es menor ante la teoría APOE. Los conceptos tales como las fracciones, las funciones cuadráticas y otros contenidos a nivel de estudios medios, han sido foco de sus investigaciones con un estudio del aprendizaje geométrico en Pirie y Kieren (1991a). Sin embargo, otros han empleado el modelo de Pirie y Kieren sobre la comprensión con respecto al cálculo (Meel, 1995), el conocimiento del álgebra abstracta (Grinevitch, en preparación) y las intervenciones del profesor (Towers, Martin y Pirie 2000) con lo que surge la posibilidad de que el modelo de Pirie y Kieren pueda aplicarse a un rango mayor de fenómenos de los conceptos matemáticos de nivel escolar básico.

4.1.4. *Poder predictivo.*

El poder predictivo no se encuentra en el nivel de los realizados en las ciencias físicas, sino que se refiere a la capacidad de una teoría para proporcionar predicciones razonables respecto a las acciones y expresiones observadas con base en información anterior. En esencia, el poder predictivo permite al investigador anticipar las respuestas, gracias al conocimiento previo, antes de que el participante responda. El modelo de Pirie y Kieren sobre la evolución de la comprensión se refiere al peso de la información previa obtenida del estudiante, con el fin de identificar las imágenes y estructuras construidas por el mismo. Teniendo esto en mente, la teoría de Pirie y Kieren sugiere acciones y expresiones potenciales de un estudiante con respecto a una nueva tarea, con base en su experiencia con tareas anteriores. Por ejemplo, en Pirie y Kieren (1992a), se establece lo siguiente acerca de la estudiante "Sandy, una niña superdotada de ocho años que había mostrado una comprensión formalizada con respecto a las "fracciones de medios", pareció aplicar un método formal para generar nuevas fracciones" (p. 515). Conforme los estudiantes utilizaron su conocimiento sobre las "fracciones de medios" e intentaron extrapolar esto a "fracciones de tercios", resultó claro que la teoría de Pirie y Kieren permitirá a los maestros anticipar las imágenes potenciales desarrolladas y la manera en que sus estudiantes interactuarían con esas imágenes recién desarrolladas. Otros ejemplos sobre las predicciones probables de las respuestas de los estudiantes se encontraron en Martin y Pirie (2000) con respecto a las intervenciones del profesor. De una manera similar, la teoría APOE permite el desarrollo de las predicciones. De acuerdo con Dubinsky y McDonald (2001), la teoría APOE proporciona una oportunidad de realizar predicciones comprobables "de que si una colección de acciones, procesos, objetos y esquemas particulares se construyen de cierta manera por parte de un estudiante, entonces este individuo probablemente tendrá éxito utilizando ciertos conceptos matemáticos y en ciertas situaciones problemáticas" (p .4). Las *tres composiciones genéticas* de los conceptos empleados por la teoría APOE proporcionan información descriptiva, así como los medios para generar hipótesis sobre la manera en que se presenta el aprendizaje y cuáles son los elementos que interactúan en el desarrollo de la comprensión del individuo acerca de un concepto particular.

4.1.5. *Rigor y especificidad.*

El rigor y la especificidad se refiere a la capacidad de la teoría para identificar claramente los elementos inherentes a la teoría y los mecanismos que los conectan. De manera explícita, el rigor y la especificidad se refieren a que los términos y las relaciones de la teoría están bien definidos, es decir, si usted estuviera entrevistando a un estudiante, podría detectar fácilmente que éste estuviera trabajando con un estrato en particular, de acuerdo con el modelo de Pirie y Kieren, o con una concepción particular, de acuerdo con la teoría APOE. Anteriormente se definieron en este documento los elementos y construcciones del modelo Pirie y Kieren y de la teoría APOE de Dubinsky. Estas descripciones no sólo proporcionan la clasificación de los elementos y sus vínculos, sino que identifican sus relaciones con otras perspectivas relacionadas. Como ejemplo de los datos del estudiante y como un medio de interpretación de las conversaciones se encuentra el análisis de la descripción de Pirie y Kieren (1994b) de Teresa o Julie trabajando con fracciones, la descripción de Pirie y Kieren (1992) de Sandy, el inciso 7.1.4 de la descripción de Ada en Brown et al. (1997) que fue un cambio entre la concepción de acción y proceso de un grupo, o la descripción del capítulo 7 en Cottrill (1999) que describe a los estudiantes, como Tim, Al, Ray, Peg y Jack, desde una perspectiva de operación a nivel Intra, Inter o Trans.

4.1.6. *Capacidad de falsación.*

La capacidad de falsación se necesita en cualquier teoría. En la práctica, la capacidad de falsación se refiere a que las predicciones realizadas y los elementos definidos por la teoría deben apegarse al análisis empírico. De hecho, tanto el modelo de Pirie y Kieren como la teoría APOE de Dubinsky no afirman que sus marcos sean verdad, pero sirven como lenguaje descriptivo que necesita escrutinio y comprobación. Por ejemplo, Dubinsky y McDonald (2001) establecen que:

> No creemos que una teoría del aprendizaje sea una afirmación de la verdad y, por lo tanto, puede haber una aproximación a lo que realmente esté sucediendo cuando un individuo trata de aprender uno u otro concepto matemático, este no es nuestro enfoque. Por el contrario, nos concentramos en la manera en que la teoría del aprendizaje de las matemáticas puede ayudarnos a comprender el proceso de aprendizaje al proporcionarnos explicaciones

> del fenómeno que podemos observar en estudiantes que están tratando de construir sus comprensiones de los conceptos matemáticos y sugiriendo direcciones para la pedagogía, que puedan ayudarnos en este proceso de aprendizaje (p .1).

De la misma manera, Pirie (1988) afirma:

> En la actualidad, nunca podemos abarcar completamente la "comprensión" por sí misma. Como Piaget establece (1980) para todo conocimiento, con cada paso que nosotros damos para acercarnos a nuestro objetivo, el objetivo en sí se aleja y los modelos sucesivos que creamos pueden ser sólo aproximaciones que nunca alcanzan el objetivo, y que siempre continuarán teniendo propiedades sin descubrir. Sin embargo, podemos intentar categorizar, dividir y elaborar facetas de los componentes de la comprensión de una manera que nos muestre una comprensión más profunda del pensamiento de los niños (p. 2).

Como consecuencia, ni el modelo de Pirie y Kieren ni la teoría APOE proclaman la verdad, sino que afirman que proporcionan un lenguaje para los mecanismos necesarios para describir el desarrollo en una variedad de propiedades.

Desde esta perspectiva, tanto Pirie como Kieren y sus colegas, así como Dubinsky y sus colegas del RUMEC han continuado realizando pruebas empíricas de la aplicación de sus marcos respectivos a distintos conceptos matemáticos, de acuerdo con una gran variedad de propiedades. Cuando se explore un nuevo concepto o se examinen nuevas propiedades, los investigadores mejorarán y adaptarán sus marcos para explicar mejor el fenómeno y de esta manera trascender las descripciones anteriores, al mismo tiempo que mantienen la compatibilidad con las afirmaciones previas. De esta manera, estos marcos proporcionan ópticas dinámicas para visualizar situaciones y las interacciones contenidas dentro de dicha situaciones. Como consecuencia, cualquier cambio a su veracidad debe enfocarse en la consistencia interna del marco y en su capacidad para interpretar situaciones de acuerdo con dichas restricciones.

4.1.7. *Capacidad de replicación.*

La capacidad de replicación se encuentra muy unida al rigor y a la especificidad. De acuerdo con Schoenfeld (2000) "Hay dos conjuntos relacionados de problemas: (1) ¿Pasará lo mismo si las circunstancias se repiten? (2) ¿Otros, con la capacitación adecuada, verán lo mismo en estos datos?" (p. 648) En particular, la capacidad de replicación se relaciona con la capacidad del marco para describir conductas similares en forma similares, así como grupos distintos de investigadores capacitados en un marco particular, observando y describiendo eventos similares con lenguaje similares. Esto es, que el marco debe definirse lo suficientemente bien para que otros puedan observar los mismos datos y llegar a las mismas conclusiones.

Generalmente, la capacidad de replicación se relaciona con la capacidad de un investigador para examinar los procedimientos y las construcciones, implementar un estudio utilizando dichos procedimientos y construcciones, e interpretar los datos en una manera similar. Los análisis de la aplicación tanto del modelo de Pirie y Kieren como de la teoría APOE de Dubinsky, para el análisis de los conceptos matemáticos particulares, indica claramente sus respectivos métodos de recolección de datos, el empleo de estructuras teóricas, el modo de análisis y los resultados generales o transcripciones analizadas sintácticamente. Al ser capaz de revisar el lenguaje y el trabajo de los participantes de estos estudios, uno puede obtener una visión de la interacción de las teorías y de los datos con una confianza en la capacidad de replicación de dichos métodos para otros participantes y situaciones. Sin embargo, la condición adicional de la capacidad de replicación no debe construirse con certeza. El modelo de Pirie y Kieren y la teoría de APOE de Dubinsky proporcionan diversos resultados posibles que asumen que un estudiante interpreta las preguntas de manera anticipada por los investigadores (ver el inciso 4.5.2 de *prácticas instructivas* para un análisis más profundo).

4.1.8. *Triangulación.*

El último criterio identificado por Schoenfeld (2000) fue el de la triangulación. Esto quiere decir que una teoría no debe desarrollarse basada en un conjunto limitado de experiencias, sino que debe utilizar información recolectada en una variedad de propiedades (entrevistas de salón, trabajo individual sobre tareas, trabajo en parejas, etc). De ser así, la teoría puede examinarse de acuerdo a consistencias internas así como de acuerdo con la sensibilidad a los factores locales que no resultan de influencia para el caso general. Además, la triangulación se refiere a la capacidad de la teoría para utilizar varios recursos de información cuando se analizan conceptos particulares, así como en mantenerse informado del amplio rango de fenómenos. Como ya se analizó, tanto Pirie y Kieren como Dubinsky, sincronizaron sus teorías en un espectro amplio del fenómeno y en una variedad de propiedades al reunir evidencia sobre los estudiantes a partir de diversos recursos. Con respecto al uso de una triangulación interna, el modelo de Pirie y Kieren se enfoca en la colección de datos de una entrevista en una base individual, como parte de pares o grupos, y como parte de una clase. Las interpretaciones relacionadas a la ubicación de los estudiantes con respecto a la teoría también surgen de la interacción del estudiante con varias tareas diseñadas para ayudar al investigador a observar los cambios en el conocimiento matemático. Por otro lado, la teoría APOE de Dubinsky utiliza el trabajo escrito y los datos de entrevistas para fusionar una visión de las acciones, procesos, objetos y/o esquemas desarrollados por un estudiante. Al utilizar este enfoque de los ángulos, los métodos de recolección de datos por los investigadores APOE otorgan al investigador una visión general desde el trabajo escrito y después, la capacidad de enfocarse en pequeños pedazos de conocimiento durante las entrevistas.

Este análisis ha proporcionado medios de validar las afirmaciones de que el modelo de Pirie y Kieren sobre la evolución de la comprensión y la teoría APOE de Dubinsky satisfacen el criterio establecido por Schoenfeld (2000). El resto de esta sección identificará las cualidades que conectan las dos teorías, así como las cualidades que las hacen distintas.

4.2. Orígenes de las teorías.

Tanto el modelo de Pirie y Kieren sobre la evolución de la comprensión y la teoría APOE de Dubinsky surgen desde un punto de vista constructivista. El modelo desde APOE y Kieren surge de la percepción de Glasersfeld de que la comprensión es un proceso continuo de organización de las estructuras de conocimiento de la persona, mientras que los análisis de Piaget sobre la abstracción reflexiva llevan a la construcción del marco teórico APOE. De acuerdo con cada teoría, el estudiante participa activamente en la empresa de construir la comprensión desde los elementos y las situaciones que le proporcionan los problemas matemáticos. De acuerdo con el modelo de Pirie y Kieren y la teoría APOE, esta construcción es un proceso en el que los estudiantes se comprometen continuamente en el acto de organizar sus propias estructuras de conocimiento (Ayers et al., 1988; Pirie y Kieren, 1991a). Como resultado, ambas teorías describen la comprensión como un proceso interminable. Además de este lazo de unión, el vínculo entre las teorías no termina con sus raíces constructivistas. Ambas teorías desarrollaron la tradición de la observación significante y la interacción con los estudiantes en relación con el contenido matemático particular. A este respecto las dos teorías son similares y distintas.

El origen primario del modelo de Pirie y Kieren descansa en la observación de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas a nivel escolar medio y superior como son las fracciones y las funciones cuadráticas (Pirie y Kieren, 1989, 1991a). Dichas observaciones se presentan como parte de los "experimentos de enseñanza" de una clase entera con Tom Kieren fungiendo como maestro, y los estudiantes se encontraban en un ambiente constructivista (Pirie y Kieren, 1994a). Se seleccionaron estudiantes similares a "Sandy" (Pirie y Kieren, 1992b) de entre el amplio ambiente de aprendizaje para las sesiones de entrevistas individuales. De manera simultánea a las entrevistas, las actividades en clase fueron grabadas en audio o video, mientras que los asistentes de investigación rastreaban el trabajo de los subgrupos de estudiantes, discutiendo las transcripciones con notas de campo y recolectando trabajo entre los estudiantes (Pirie y Kieren, 1992a). Estas distintas herramientas se estudiaron con la presencia de actividades que permitieron a Pirie y Kieren probar, elaborar y desarrollar construcciones y propiedades en su teoría.

Pirie y Kieren (1992b) describen un ambiente de aprendizaje general en el cual los estudiantes se comprometen durante un par de semanas con un área de fracciones utilizando la "familia de medios" y las exploraciones de doblado de papel. Un pasaje de una entrevista con Sandy después se utilizó para ilustrar varias preguntas del entrevistador y respuestas de Sandy. Un elemento que debe considerarse es que las preguntas del entrevistador no fueron fijas sino que reaccionaron ante las respuestas de Sandy, mientras que se realizaban nuevas preguntas, elaborándolas sobre las viejas o logrando la comprensión de las respuestas de los estudiantes. Al utilizar las transcripciones, los investigadores procedieron a producir un mapa detallado de la evolución de la comprensión de Sandy conforme se observaba durante la entrevista. La frase "según se puede observar" es de gran importancia debido a que Pirie y Kieren (1994) afirman que "no hacíamos afirmaciones sobre lo que podía estar pasando en la 'cabeza de los estudiantes'" (p. 182). Como resultado, todas las inferencias sobre lo que las imágenes intervenían para responder preguntas la manera en que Sandy regresó a las formas previas de conocimiento con el fin de ampliar su comprensión, y la estabilidad de las interpretaciones del entrevistador respecto a las respuestas de Sandy (para un mayor análisis, ver Pirie y Kieren, 1992b, pp. 249-255) fueron mediadas por las reacciones del estudiante a las preguntas y trianguladas con otras respuestas del estudiante.

De manera integral al proceso general de la validación de la teoría se encuentra una reflexión sobre los componentes de la enseñanza utilizados para estimular a los niños a que se involucren activamente con el contenido y que exploren personalmente las interconexiones del contenido. Sin embargo, los resultados de las intervenciones diseñadas por el maestro, incluso aquellas con una intención específica, dependen de las acciones y las interpretaciones del estudiante (Pirie y Kieren, 1992a). De hecho, los estudiantes pueden interpretar un comentario de un maestro en una manera no intencionada, causando así una respuesta inesperada. Como consecuencia, la simple examinación de lo que el estudiante hace frente a una tarea matemática no es suficiente (Pirie y Kieren, 1992a). Por ejemplo, las preguntas realizadas por el entrevistador o el maestro necesitan analizarse respecto a la respuesta del estudiante, en vez del efecto pretendido. Además, el entrevistador o el maestro debe reconocer que el estudiante puede comprender las cosas en distintos niveles, y por lo tanto los investigadores deben esperar que los estudiantes respondan en distintos niveles en diversos puntos durante la clase o la entrevista.

En contraste con el enfoque de Pirie y Kieren sobre la evolución de la comprensión del estudiante en las matemáticas de la escuela de nivel medio, la teoría APOE desarrolló la observación de los estudiantes trabajando con álgebra abstracta, funciones y cálculo, matemáticas discretas y teoría elemental de los números (Dubinsky y McDonald, 2001). De acuerdo con Asiala et al. (1996), este desarrollo continúa involucrando un ciclo de investigación (ver Figura 6) comenzando con un análisis teórico de los elementos percibidos como necesarios para el desarrollo de la comprensión conceptual, el diseño de actividades e instrucciones que permitan que los estudiantes realicen las construcciones requeridas, la observación y evaluación de las construcciones del estudiante y las reflexiones sobre la capacidad de la teoría para capturar los matices de dichas construcciones.

La composición particular de este ciclo de investigación involucra la mezcla de (a) observación de los estudiantes en el proceso de aprendizaje de conceptos matemáticos, con el fin de identificar el desarrollo de estructuras conceptuales, (b) el análisis de datos a la luz de la teoría APOE subyacente para generar una descomposición genética que indique una manera posible en que un estudiante pueda construir un concepto, (c) el diseño de actividades e instrucciones para ayudar a cambiar a los estudiantes a fin de que ejecuten dichas construcciones y por lo tanto realicen las abstracciones reflexivas particulares que indica la descomposición genética y (d) la repetición del proceso después de la reflexión en la descomposición genética y el tratamiento instruccional (Dubinsky, 1991). Este ciclo de investigación continúa en forma espiral sobre sí mismo, combinado con la reexaminación explícita de la capacidad del análisis teórico para describir los distintos matices descubiertos durante la observación y reevaluación, hasta que se alcance una estabilidad entre el análisis teórico y la capacidad para explicar lo que significa aprender un concepto particular y la manera en que los tratamientos instruccionales que se sugieren ayudan a los estudiantes a lograr dicho aprendizaje (Dubinsky, 1994).

De manera integral en dicho ciclo de investigación se encuentra la examinación del aprendizaje del estudiante en situaciones de salón de clases en las que en varios casos se utilizó el *Ciclo de enseñanza ACE* (que se describirá más adelante en este documento). Por ejemplo, Asiala et al. (1996) describen una colec-

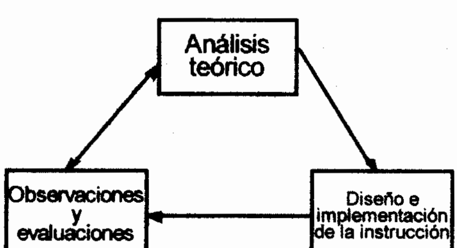

Figura 6. El marco de investigación cíclico APOE.

ción de datos enfocados en las respuestas del estudiante para los instrumentos escritos y las entrevistas individuales. Las entrevistas se grabaron en audio, se transcribieron y se relacionaron con la documentación auxiliar producida por el estudiante (Asiala et al., 1996). Estos datos se utilizaron más adelante para "evaluar la utilidad de nuestros modelos de cognición preguntando si las construcciones mentales propuestas en los análisis iniciales eran realizadas por los estudiantes. En segundo lugar,...[para] evaluar el desempeño matemático de los estudiantes en las tareas relacionadas con los conceptos" (Asiala et al., 1998, p. 15). En efecto, se analizó una descomposición genética del concepto a la luz de varias respuestas de instrumentos y entrevistas, con el fin de determinar la eficacia del modelo para detectar y explicar las diferencias en la comprensión al señalar las construcciones mentales específicas de las acciones, procesos, objetos y/o esquemas que mantiene el estudiante.

Por ejemplo, la investigación relacionada con la teoría APOE se enfoca en la capacidad de la descomposición genética para describir las construcciones mentales potenciales en tanto que el estudiante pasa a través de las distintas etapas del desarrollo cognitivo. En Asiala et al. (1996), los investigadores describen la evolución de una descomposición genética del concepto del límite. La descomposición resultante fue:

— La acción de evaluar la función f en algunos puntos, cada punto sucesivo más cercano a a que el punto anterior.

— La interiorización de la acción del Paso 1 a un proceso único en el que $f(x)$ se aproxima a L como x se acerca a a.

— El encapsulamiento del proceso del Paso 2 de manera que, por ejemplo, al hablar de las propiedades de combinación de límites, el proceso del límite se vuelve un objeto para el cual se pueden aplicar acciones (ejemplo, determinar si se mantiene una cierta propiedad).

— La reconstrucción del proceso del Paso 2 en términos de intervalos y desigualdades. Esto se realiza introduciendo cálculos numéricos de la cercanía del enfoque en símbolos,

$$0 < |x-a| < \delta \text{ y } |f(x)-L| < \varepsilon.$$

— La aplicación de un esquema de cuantificación para conectar los procesos reconstruidos de los pasos previos para obtener la definición formal del límite....

— Una concepción ε-δ completa y aplicada a situaciones específicas (Asiala et al., 1996, pp. 174-175).

En ese momento los investigadores implementaron una serie de actividades instruccionales de siete semanas que involucraban a estudiantes de cálculo con tareas relacionadas con computadoras y trabajo de grupo. Estas actividades se diseñaron para ayudar a los estudiantes a realizar construcciones mentales definidas en la descomposición genética antes mencionada e incluyeron investigaciones de computadora en aproximaciones, representaciones gráficas del concepto del límite, construcciones auxiliadas por computadora sobre el valor de aproximación al límite, construcciones basadas en computadora sobre el concepto del límite y ventanas ε-δ.

A partir de las entrevistas de los estudiantes seleccionados, la descomposición genética se revisó para que reflejaran de mejor manera las construcciones que se estaban observando. Sin embargo, debe hacerse notar que la creencia similar a Pirie y Kieren en relación con la imposibilidad de rastrear la observación de la cognición interna de una estudiante, los descubridores de la teoría APOE concordaron con la postura constructivista[12] radical de Glasersfeld, de acuerdo con Asiala et al. (1996), y afirmaron que "es imposible para un individuo conocer realmente qué está sucediendo en la mente de otro individuo" (p. 29). Como resultado, la descomposición genética modificada da lugar a la observación continua y la revisitación de la teoría en general, e incluso la revisión y la mejora o, en muy pocos casos, una mejora de la teoría para explicar más profundamente el fenómeno observado, que no se puede describir en términos de la teoría original. En particular, Cottrill et al. (1996), observó que se necesitaba un paso incluso más preliminar a la descomposición genética que se relaciona con la acción de la evaluación de f en un solo punto, cerca o igual a a. Además, los Pasos 2 y 3 de la descomposición genética original se realizaron para permitir la posibilidad de varios procesos que dan lugar a la construcción de esquemas coordinados, que entonces pudieron actuar y que finalmente fueron encapsulados. Utilizando esta descomposición genética modificada, Cottrill et al. (1996) fue capaz de reconciliar sus observaciones basadas en los datos de la entrevista, y de realizar atribuciones para las diferencias de desempeño de los estudiantes, así como proporcionar sugerencias pedagógicas para la atención cada vez mayor de los procesos del dominio y el rango, y cómo utilizar la función para coordinarlos.

Resulta claro que el modelo de Pirie y Kieren y la teoría APOE de Dubinsky están cimentados en una gran observación e interacciones del maestro con los estudiantes que realmente están haciendo matemáticas. Ambas teorías se fundaron en raíces constructivistas similares y este fundamento subyacente ha dado como resultado elementos comunes considerables entre los marcos teóricos. Por ejemplo la investigación de medios para describir la comprensión matemática y la capacidad para detectar diferencias observables y mínimas entre los estudiantes. Sin embargo, el desarrollo de la teoría APOE a partir de las investigaciones dentro del contenido matemático subgraduado, y la utilización de la descomposición genética de los investigadores APOE indica un énfasis en la porción *matemática* de la comprensión matemática. En contraste, Pirie y Kieren se enfocaron en el elemento de la *comprensión* al relegar el contenido matemático al fondo. A pesar de que los enfoques son distintos, ambas teorías son sensibles a las acciones matemáticas de los estudiantes e integran las observaciones continuas de las acciones de los estudiantes en el contexto para que los investigadores reevalúen y modifiquen sus teorías y, por lo tanto, describan mejor las construcciones de los estudiantes.

4.3. Organización y mecanismos de las teorías.

Pirie y Kieren organizaron sus modelos en ocho estratos —Conocimiento primitivo, creación de la imagen, obtención de la imagen, observación de las propiedades, formalización, observación, estructuración e invención— y cada uno de los estratos delinea un cambio cualitativo en la evolución de la comprensión del estudiante. Además, el modelo contiene una construcción de la que

[12] Glasersfeld no concuerda con la afirmación de Piaget sobre que los componentes de la realidad de un individuo pueden reflejarse y, por el contrario, apoyó la idea de que la realidad se encuentra más allá del alcance del observador, en relación con la justificación de la experiencia. Como consecuencia, él cree que incluso una persona puede elegir tareas o experiencias bien definidas, el proceso constructivo no alcanza terminaciones prescritas y que resulta insostenible que existan representaciones internas perfectas del estudiante, como una realidad construida.

se hace referencia como los "límites de falta de necesidad". Cuando el estudiante pasa al límite de "falta de necesidad" el estudiante muestra la capacidad de "trabajar con nociones que ya no están unidas en forma obvia a las formas anteriores de la comprensión, pero estas formas previas están integradas a los nuevos estratos de la comprensión, y están listos para obtener el acceso en caso de que se necesiten" (Pirie y Kieren, 1994b, p 172). Como resultado, los estratos más cercanos al límite interno de "falta de necesidad" indican una comprensión diferente en forma cualitativa, en comparación con los estratos previos, mientras que los estratos más cercanos a un límite externo de "falta de necesidad" se relacionan con la nueva comprensión y coordinación de los mismos en relaciones más ricas. Las acciones que se encuentran entre los dos límites sucesivos de "falta de necesidad", se comportan como unidades que primero involucran la construcción de una nueva manera de concebir y de organizar estas nuevas concepciones en una forma capaz de ser transformada en un estrato de concepciones mayor.

Los tres límites de "falta de necesidad" dividen el modelo de ocho estratos de Pirie y Kieren sobre la comprensión, en cuatro unidades que tienen conexiones fuertes a los elementos de la teoría APOE de Dubinsky. En particular, el primer límite de "falta de necesidad" se presenta entre los estratos de *creación de la imagen y de obtención de la imagen*, debido a que el estudiante obtiene una imagen de un concepto y no necesita acciones externas como ejemplos específicos de creación de la imagen (Pirie y Kieren, 1994b). Esta descripción es similar a las diferencias entre las concepciones de acción y proceso descritas por Dubinsky et al.(1994) en la que la concepción del *proceso* indica que el estudiante internalizó las acciones externas y, por lo tanto, permitió la coordinación y la reversión de los procesos para formar nuevos procesos mentales. Este primer límite de "falta de necesidad" en el modelo de Pirie y Kieren sobre la comprensión, separa las acciones externas y los procesos internos que apenas se están desarrollando y que el estudiante crea a partir de dichas acciones.

El siguiente límite de "falta de necesidad" en el modelo de comprensión de Pirie y Kieren, aparece entre los estratos de *observación de las propiedades de formalización*. En este caso, el estudiante va de la obtención de imágenes de un concepto a la fusión de éstas en una idea matemática formal (Pirie y Kieren, 1994b). En particular, el atravesar este límite indica que el estudiante disminuyó la confianza en las imágenes y le permitió concebir las ideas matemáticas como un objeto mental similar a una clase (Pirie y Kieren, 1992). En la teoría APOE, el pasar de una concepción de *proceso* a una concepción de *objeto*, sucede cuando "un individuo refleja una operación aplicada a un proceso particular, según sea consciente del proceso como una totalidad, y se da cuenta de las transformaciones (ya sean acciones o procesos) que pueden actuar en él, y es capaz de construir realmente dichas transformaciones, entonces él o ella piensan en el proceso como un objeto. En este caso, podemos decir que el proceso ha sido encapsulado en un objeto" (Asiala et al., 1996, p. 11). Por lo tanto, un avance a una concepción de objeto se relaciona con la fusión de los procesos de un concepto en un objeto que ya no requiere los procesos subyacentes, pero aún los mantiene en el sentido de la dicotomía operativa/estructural de Sfard. El último límite de "falta de necesidad" descrito por Pirie y Kieren se encuentra entre los estratos de la *observación y la estructuración* de su modelo. El trascender estos límites, de acuerdo con Pirie y Kieren (1994b), indica que el estudiante ha desarrollado una estructura matemática y no requiere el significado que se le otorga mediante los estratos internos de la comprensión. De la misma manera, el movimiento entre la concepción del *objeto* y la concepción del *esquema* se relaciona con el estudiante en la construcción de una estructura coherente de acciones, procesos, objetos y esquemas subordinados que existen en la mente del estudiante. Esta estructura permite al estudiante tratar situaciones problemáticas permitiendo que este desencapsule el esquema y trabaje con los objetos y procesos subyacentes que lo acompañan (Dubinsky et al., 1994). Por lo tanto, los límites de "falta de necesidad del modelo de Pirie y Kieren sobre la comprensión, dividen su modelo en cuatro unidades similares a los cuatro niveles de la teoría APOE de Dubinsky. Los estratos del conocimiento primitivo y de la creación de imagen corresponden a la concepción de la acción; la creación de la imagen y la observación de las propiedades corresponden a la concepción de los procesos; los estratos de formalización y observación necesitan una concepción del objeto y los últimos estratos en estructurarse e inventarse organizan una estructura similar a la concepción del esquema.

Además, ambas teorías contienen un mecanismo comparable por la extensión de la comprensión. El modelo de Pirie y Kieren sobre la comprensión proporcionan el redoblado como un mecanismo generativo que corresponde al regreso del estudiante a un estrato interno de la comprensión para discutir, reestructurar o expandir las comprensiones inadecuadas de los estratos más internos (Pirie y Kieren, 1994b). En el caso del redoblado, este ajuste en la comprensión del estrato más interno recibe la guía a partir de las experiencias y comprensiones construidas como parte de los estratos más externos. *Inadecuado* puede referirse a dos cosas distintas: incompleto o insuficiente. *Incompleto* implica que el elemento adicional debe agregarse a un estrato más bajo de comprensión para apoyar el desarrollo de la comprensión en un estrato más elevado. Este tipo de redoblado tiende a presentarse cuando el estudiante no ha alcanzado completamente el estrato de formalización y debe reestructurar los estratos más bajos para incorporar las nuevas imágenes necesarias para construir una comprensión formalizada. *Insuficiente* sugiere el alcance de la comprensión como un estrato más bajo que necesita expandirse para informar la extensión de la comprensión en un nuevo grupo de circunstancias. Por ejemplo, un estudiante puede tener una comprensión formalizada sobre la suma de pares de fracciones, utilizando el truco generado personalmente de la multiplicación cruzada, pero cuando se enfrenta con la necesidad de sumar tríos de fracciones, el estudiante puede redoblarse a la creación de imagen para crear un método y lograr esta suma (Pirie y Kieren, 1992). En este caso, dicha actividad consiste en expandir el alcance de la comprensión para manejar la suma de tres fracciones, pero esta expansión recibe una dirección desde la comprensión formalizada ya presente, y por lo tanto la sugerencia de posibles estrategias para la expansión.

Esta última descripción corresponde a la representación de Dubinsky sobre el *desencapsulamiento* que es un regreso a *"el proceso mediante el cual fue encapsulado para construir el objeto desde un inicio"* (Dubinsky, 1994, p. 271). En particular, el desencapsulamiento permite al estudiante regresar al proceso que origina al objeto, coordinar dichos procesos para formar nuevos que puedan por sí mismos encapsularse en nuevos objetos. Como resultado, el desencapsulamiento tiene la función generativa de regresar a la forma previa de pensamiento para proporcionar un fundamento para la extensión de la conceptualización previa. Por ejemplo, para entender la suma de funciones, Dubinsky (1991) afirma que el estudiante debe desencapsular los objetos de la función hasta sus raíces orientadas al proceso, dichos procesos deben coordinarse a través de una suma de un punto bien ponderado, y después el proceso resultante encapsulado para formar un nuevo objeto. Como resultado, el mecanismo de desencapsulamiento de la teoría APOE de Dubinsky permite la extensión de la comprensión al expandir el alcance de las comprensiones previas, de manera similar al mecanismo de redoblado del modelo de Pirie y Kieren sobre la comprensión.

4.4. Vínculos a otros marcos teóricos.[13]

El modelo de la evolución de la comprensión de Pirie y Kieren, la teoría APOE de Dubinsky y otros marcos teóricos contemporáneos sobre la comprensión, forman visiones distintas, pero compatibles en relación con el desarrollo de la comprensión. En particular, cada marco se ha desarrollado para proporcionar a los investigadores y profesores de nivel medio un método para observar la comprensión como un proceso continuo en el cual la interpretación se predica de acuerdo con las estructuras de conocimiento individual del estudiante, la dinámica social de la situación de aprendizaje en la que se presenta dicho aprendizaje, y las restricciones de las manifestaciones de dicha comprensión debido la naturaleza del ambiente. Se cuenta con el contenido y las propiedades en las que los investigadores adaptan sus marcos particulares, cada uno enfocado en distintos componentes y descubriendo conexiones específicas entre dichos componentes. Esto produce una colección de marcos teóricos en la que cada uno proporciona una imagen de un estudiante comprometido en el desarrollo de la comprensión; pero, como en el caso de cualquier retrato, ciertas características de dicho desarrollo se resaltan y otras pierden énfasis. En esta sección, el objetivo será explicar más profundamente las relaciones, en caso de que las haya, del modelo de Pirie y Kieren sobre la evolución de la comprensión y la teoría APOE de Dubinsky respecto a sus marcos teóricos asociados con los obstáculos *comunicativos y epistemológicos, las definiciones del concepto, la imagen del concepto, las representaciones múltiples y las entidades operacionales y estructurales.*

4.4.1. *Errores, concepciones erróneas y obstáculos epistemológicos.*

Los investigadores atribuyen los errores y las concepciones falsas a las extrapolaciones basadas en los ejemplos insuficientes, los ejemplos ambiguos, los vínculos perdidos o incluso los vínculos parciales entre piezas relevantes del conocimiento, tales como el conocimiento conceptual o de procedimiento (Hatano, 1988; Hiebert y Carpenter, 1992; Hiebert y Wearne, 1986; Mansfield y Happs, 1992; Silver, 1986; Tall, 1989; VanLehn, 1986). De acuerdo con Ferrini-Mundy y Gaudard (1992), estos errores funcionan como ventanas para observar el trabajo interno de la mente de un estudiante y corresponde a los elementos del marco teórico de los obstáculos epistemológicos antes descritos en este documento. Tanto el modelo de Pirie y Kieren sobre la comprensión como la teoría APOE de Dubinsky contienen componentes que representan el desarrollo y superan las concepciones erróneas y los obstáculos epistemológicos.

En particular, Pirie y Kieren representan el posible desarrollo de las concepciones erróneas cuando analizan los movimientos dentro de su modelo. Dicho movimiento requiere la

[13] El uso continuo del "marco teórico" en relación con otro trabajo reciente sobre la comprensión, no pretende expresar que estos no satisfagan los requisitos identificados por Schoenfeld (2000). Es posible que algunos, si no es que todos, satisfagan estos requisitos, pero este documento no pretende discutir el estado de los mismos.

construcción de conexiones adicionales que finalmente alcanzarán el estrato estructurado en el que la red se volvió una entidad estable. En el proceso del estrato de cambio de la obtención de la imagen a la de la observación de las propiedades, y después al estrato de la formalización, el estudiante procede a través de un proceso de imágenes de internalización, propiedades del conocimiento asociados con grupos de imágenes y la integración de varias propiedades reconocidas en objetos mentales formalizados que no tienen contradicciones internas (Pirie y Kieren, 1991a). Un estudiante que pasa de la obtención de imagen a la formalización no tiene que superar una concepción errónea al realizar dicha transición, debido a que las imágenes potencialmente problemáticas quizá ni siquiera se hayan construido. Sin embargo, el trabajo en la observación de las propiedades dentro de un dominio limitado de imágenes puede tener como resultado la extrapolación de las conexiones a partir de las imágenes evocadas, que pueden ser incompletas en el dominio de todas las imágenes asociadas con un tema. Esta construcción, a pesar de que no se encuentra en forma obligatoria, puede dar como resultado el desarrollo de una imagen problemática considerada como una concepción errónea. En el caso de que surja dicha concepción errónea, el paso de la observación de la propiedad a la formalización significa que el estudiante ha superado algunas de estas falsas concepciones basadas en la propiedad, al reconocer las inconsistencias con las conexiones establecidas, desarrollando conexiones correctas, forjando redes de conexiones elaboradas y, finalmente, construyendo objetos mentales.

Varios de los mismos mecanismos para desarrollar y superar las concepciones erróneas identificadas en el análisis del modelo de Pirie y Kieren, también existen en la teoría APOE. Por ejemplo, Dubinsky et al.(1994) menciona que "la teoría general de Piaget (1975) incluye la idea de que los conceptos están construidos en un estrato que resulta adecuado para trabajar con un ambiente matemático, pero que cuando se confronta un nuevo fenómeno, es necesario reconstruir conceptos en un estrato más elevado. Por lo tanto, la construcción se retrasa, la concepción del estudiante de algunas nociones matemáticas puede ser adecuada en un estrato, pero errónea en otro" (p. 295). Desde la perspectiva de Dubinsky, una concepción errónea es una comprensión que no se reconcilia con un contexto más amplio, pero que sigue siendo razonable en un alcance más estrecho. Por lo tanto, Dubinsky (1991) utiliza una "falta de comprensión" para referirse a que el estudiante no ha construido un esquema adecuado para el concepto examinado. Sin embargo, la superación de obstáculos epistemológicos resulta igual a la interacción del estudiante con un ambiente desequilibrado, la reflexión de las comprensiones realizadas y la reorganización de dichas comprensiones para integrar los elementos discrepantes de las situación perpleja.

4.4.2. *Conexiones con las imágenes de concepto.*

Como ya se mencionó, tanto el modelo de Pirie y Kieren sobre la comprensión como la teoría APOE de Dubinsky tienen características asociadas con la *imagen de concepto*. En particular, Pirie y Kieren (1992a), aún cuando no se refieren directamente al término imagen de concepto, establecen que un "niño pequeño utiliza los objetos mentales creados por sí mismo, algunos de los cuales tienen una cualidad figurativa, pero otros son abstractos, para crear el conocimiento matemático" (p. 505). Esta cualidad figurativa surge particularmente en los estratos de obtención de imagen y observación de la propiedad, a pesar de que también existen en otros estratos. Además, dicha descripción hace eco en la definición de la imagen de concepto como una colección de imágenes mentales, representaciones y propiedades relacionadas, atribuidas a un concepto por parte del estudiante. De hecho, Pirie y Kieren (1994b) comentaron que el uso de la palabra "imagen" en la descripción de dos estratos se debía a que la "evidencia en estos niveles generalmente se basa en la representación pictórica" (p. 166); sin embargo, la comprensión a dichos niveles no se restringe sólo a este modo de expresión, sino que incluye la creación de imágenes mentales que se define por el concepto razonablemente establecido de los objetos mentales. Por otro lado, la palabra "idea" puede haberse utilizado porque se pensaba que "imagen" era menos ambigua y tenía menos connotaciones buscadas por la teoría.

Además, Pirie y Kieren (1992b) realizaron conexiones con el trabajo de Harel y Tall (1991) en relación con la generalización. Conforme Harel y Tall (1991) detallaron las distintas construcciones mentales del estudiante, utilizaron tácitamente frases tales como "el sujeto reconstruye un esquema existente" y Pirie y Kieren (1992b) conectaron esto explícitamente a una de las características esenciales de su teoría, es decir, el redoblado. También resulta de interés la creencia de que la generalización disyuntiva se integra con la idea general de Pirie y Kieren (1992b) de la comprensión desconectada, en tanto que esta abstracción genérica "se adecua con nuestra teoría en relación a que la comprensión crece al observar las propiedades de la imagen de una persona, y a realizar observaciones en la formalización de la persona" (p. 245). Como consecuencia, las imágenes y procesos conectados dentro del marco teórico de la imagen del concepto tienen lazos fuertes con los elementos del modelo de Pirie y Kieren.

El modelo teórico de la definición/imagen del concepto, de acuerdo con Dubinsky (1991), explica por qué falla el desarrollo de la comprensión, mientras que la abstracción reflexiva describe los elementos esenciales para el desarrollo de la comprensión. Sin embargo, Asiala et al. (1996) afirman que la noción de la imagen del concepto proporciona explicaciones que van más allá del porqué la comprensión no se desarrolla. Ellos consideran que la imagen del concepto corresponde al esquema de Piaget que se encuentra muy vinculado al uso del esquema en la teoría APOE. De acuerdo con Dubinsky (1996), "Un esquema es una colección más o menos coherente de objetos y procesos. La tendencia de un sujeto a invocar un esquema para llegar a la comprensión, lidiar con ella, organizar o lograr un sentido fuera de la situación problemática percibida en su conocimiento de un concepto individual matemático. Por lo tanto, un individuo tendrá una amplia variedad de esquemas" (p. 102). Como resultado, una imagen de concepto y un esquema sirven para el mismo propósito de organizar y estructurar las comprensiones obtenidas en relación con un concepto. Además, las últimas dos oraciones citadas por Dubinsky se asemejan a la descripción de Tall y Vinner de las imágenes del concepto evocadas que se relacionan con las porciones de una imagen del concepto activado por un estímulo particular. De hecho, Tall y Vinner (1981) afirman que los "distintos estímulos pueden activar diferentes partes de la imagen del concepto, desarrollándolos de una manera que no necesita ser totalmente coherente" (p. 152). Por lo tanto, existe una fuerte conexión entre las imágenes del concepto y los esquemas.

4.4.3. *Conexiones a las representaciones múltiples y a las concepciones operacionales y estructurales.*

Pirie y Kieren no realizan una referencia específica a las ideas de las representaciones múltiples como las describe Kaput. Sin embargo, se presenta una discusión de la dualidad de Sfard sobre las concepciones operacionales y estructurales en algunos documentos escritos por Pirie y Kieren. Por ejemplo, Pirie (1988) en un documento retrata brevemente algunas de las interpretaciones de la comprensión, como son: instrumental, racional, intuitiva, construida, formalizada, etc y menciona que, de acuerdo con Sfard, una concepción operacional es del primer paso para la adquisición de una nueva idea matemática. Esta afirmación representa el vínculo a una noción operativa inicial de un concepto con la construcción de una comprensión inicial. En el documento de Pirie y Kieren (1992b) aparece un análisis más amplio, en el que identifican el trabajo de Sfard como "interesado en comprender a un nivel de pensamiento algorítmico" (p. 244). Esta descripción indica una creencia de que la pugna de Sfard respecto a la adquisición de ideas matemáticas viene de nociones derivadas en forma operacional desde un principio, las cuales se fusionan mediante la interiorización, la condensación y la reificación desde un punto de vista estructural. El vínculo del trabajo de Sfard con el modelo de Pirie y Kieren sobre la comprensión se enfoca en la preocupación de Sfard por la actividad de formalización en la comprensión matemática. Sfard (1991) implica que el proceso de reificación, como es la objetivización de una noción operacional, involucra un cambio difícil por parte del estudiante. Pirie y Kieren cree que su teoría proporciona la descripción de varias acciones y mecanismos que son integrales a este cambio (Pirie y Kieren, 1992b). Sin embargo, la creencia de Pirie y Kieren (1992) sobre la no linealidad del crecimiento de la comprensión los separa de Sfard.

De una manera muy similar al modelo de comprensión de Pirie y Kieren, la teoría APOE de Dubinsky no muestra conexiones explícitas para el marco teórico de Kaput sobre las representaciones múltiples. Sin embargo, Dubinsky (1994) menciona que él se aproxima a la idea de las representaciones múltiples de una manera distinta a la de otros investigadores. En vez de utilizar herramientas que se proporcionan en un ambiente de computadora, Dubinsky creó investigaciones en las que los estudiantes se relacionan con la computadora en el desarrollo de sus propias herramientas para comparar las distintas representaciones de un concepto. Además, la teoría APOE de Dubinsky se conecta con la dualidad operacional y estructural de Sfard (Dubinsky et al., 1994). Sfard y Linchevski (1994) exponen este vínculo cuando atribuyen la teoría APOE de Dubinsky, según lo descrito en Dubinsky (1991), como proporcionadora de un modelo muy cercano a su dualidad proceso-objeto de conceptos matemáticos. En particular, ellos afirman que la principal conexión entre estos dos marcos es la descripción de Piaget sobre la abstracción reflexiva.

Además, el término "reificación" y el uso de Dubinsky de "encapsulamiento" tiene significados similares debido a que ambos surgen de la descripción de Piaget sobre los orígenes operacionales de las nociones matemáticas (Sfard, 1994). En particular, Sfard (1991) establece "El trabajo pionero en este campo lo realizó Piaget, quien escribió en su libro sobre la epistemología genética (1970, p 16) "la abstracción [matemática] aparece no desde el objeto en el que actúa, sino desde la acción en sí misma. Me parece que esto es la base de la abstracción lógica y matemática" (p. 17). Como consecuencia, Sfard indica que, tanto el trabajo de Dubinsky como su trabajo, elaboran más aún las ideas originales de Piaget, y que su caracterización de una dicotomía entre las concepciones operacionales y estructurales proporciona una conjetura más amplia para la dualidad del pensamiento matemático.

4.4.4. *Vínculos del modelo Pirie y Kieren sobre la comprensión hacia una mejora de la teoría APOE.*

La mejora de la descripción del desarrollo del esquema proporcionado por Clark et al. (1997) revela una conexión interesante en algunos estratos del modelo de comprensión de Pirie y Kieren. En particular, Clark et al. (1997) identificaron tres etapas en el desarrollo de un concepto: Intra, Inter y Trans, las cuales fueron descritas en el inciso 3.1. En la etapa Intra, un estudiante tiene una colección de reglas pero no ha reconocido la relación entre ellas. Esto es similar al estrato de Obtención de imagen del modelo de Pirie y Kieren sobre la comprensión, la cual se describe como un nivel en el que las imágenes de un concepto se construyeron a partir de actividades únicas, pero que dichas imágenes, también aisladas, forman un fundamento para conocimiento matemático (Pirie y Kieren, 1991a). La etapa Inter se presenta cuando el estudiante puede organizar los distintos casos encontrados y reconoce las relaciones entre dichos casos (Clark et al., 1997). Esta etapa es isomorfa al estrato de Observación de la propiedad que indica que el estudiante puede analizar las imágenes obtenidas para las propiedades específicas y relevantes, con el fin de observar sus distinciones, combinaciones y conexiones, y predecir su actualización (Pirie y Kieren, 1991a). La realización de la etapa Trans indica que el estudiante construyó una estructura subyacente para un concepto particular. En este momento "Los elementos del esquema deben cambiar de ser descritos esencialmente por una lista, a ser descritos por una sola regla" (Clark et al., 1997, p. 360). Esta descripción resulta similar al estrato de Formalización que se relaciona con el estudiante en la contemplación consciente de las propiedades observadas para abstraer las cualidades comunes de estas últimas y, por lo tanto, construir posiblemente una definición matemática total para acompañar el nuevo objeto mental de tipo clase (Pirie y Kieren, 1991a). Por lo tanto, cada una de las etapas de esta mejora de la teoría APOE está razonablemente correlacionada con los tres estratos del modelo de comprensión de Pirie y Kieren, la observación de la propiedad y la formalización.

4.5 Implementaciones de evaluación e instrucción.

Tanto el modelo de comprensión de Pirie y Kieren como la teoría APOE de Dubinsky reúnen información sobre la comprensión del estudiante y cuestionan cómo utilizar estos datos para ajustar las prácticas de instrucción y promover la evolución de la comprensión. Los siguientes dos incisos intentan proporcionar información sobre las implicaciones de estas teorías con respecto a la evaluación y a sus ramificaciones para la instrucción.

4.5.1. *Evaluación de la comprensión.*

En relación con las opiniones expresadas por Pirie y Schwarzenberger (1988), al igual que Simon (1993), Pirie y Kieren (1989, 1992b) reconocen la utilidad de las entrevistas para rastrear los movimientos del estudiante a través de los estratos de la comprensión. En particular, Pirie y Kieren creen que un instrumento escrito, en especial un examen de opción múltiple, no expone completamente lo comprendido por el estudiante por lo que ésta sólo puede ser inferida y no medida. Ellos afirman que los instrumentos descritos son menos factibles de ahondar en la evolución de la comprensión del estudiante, puesto que los instrumentos descritos desde su punto de vista, proporcionan imágenes estáticas de las expresiones externas del estudiante. Como resultado, ellos consideran que las entrevistas son los principales medios de descubrir la comprensión cambiante del estudiante. Estas entrevistas permiten realizar deducciones sobre la conciencia del estudiante acerca de las relaciones entre los conceptos, la capacidad de adaptar los procedimientos a situaciones nuevas, la posesión de ejemplos genéricos y la fluidez del lenguaje y el simbolismo.

El establecimiento de inferencias sobre los movimientos entre los estratos de comprensión sólo pueden aparecer después de que el estudiante realice acciones y expresiones (Kieren, 1990; Pirie y Kieren, 1990). Estas acciones orientadas a la forma [14] y las verbalizaciones demuestran a un agente externo la operación del estudiante a nivel de comprensión. Sin dicha demostración, el agente externo puede pensar que no se ha alcanzado la comprensión. Las situaciones que requiere el estudiante para actuar y verbalizar en referencia con situaciones complejas y únicas, resultan integrales para establecer su nivel de comprensión. Estas circunstancias pueden ayudar a presentar el nivel actual de comprensión del estudiante y promover el desarrollo de la comprensión cuando se le incita en una situación de entrevista. Las preguntas de la entrevista actúan como herramientas de enseñanza y se vuelven un instrumento de diagnóstico útil debido a que en él pueden provocar la comprensión en un estrato más externo, invocar el redoblado o validar la comprensión del estudiante. Aún cuando un investigador deseé categorizar las preguntas, la categorización sólo se presentará después de que el escucha responda a las preguntas y demuestre el efecto de la pregunta en la comprensión cambiante del estudiante. En particular, una pregunta provocativa llevará al estudiante a un estrato más externo y le permitirá un desarrollo de la comprensión más continuo. La validación de las preguntas proporciona evidencia de que un estudiante está trabajando con un estrato específico de comprensión mediante su motivación para demostrar, de manera verbal o simbólica, las acciones matemáticas actuales (Pirie y Kieren, 1991a).

Por lo tanto, el uso de Pirie y Kieren de preguntas provocativas, invocativas y de validación coinciden con la afirmación de Glasersfeld acerca de que aún cuando se puede estar "estudiando la construcción de la realidad matemática de individuos dentro del espacio de su experiencia, en esta construcción no hay finales prescritos con los cuales lucha esta construcción, a pesar de que puede haber tareas o espacios bien definidos por experiencia" (Steffe y Kieren, 1994, p. 721). Como resultado, Pirie y Kieren (1990, 1991a) se encuentran en la postura de que no pueden dar a un estudiante la comprensión en vez de que el estudiante cree su propia comprensión. Además, Pirie y Kieren (1994b) afirman que "Cada comprensión matemática de la persona es única. De hecho, debido a que creemos que todo conocimiento está construido y organizado en forma personal, los estudiantes construirán en cualquier ambiente la comprensión de alguna manera" (p. 526). Como resultado, el proceso de las entrevistas se vuelve una herramienta de enseñanza y una oportunidad para traficar las evidencias externas mostradas por el estudiante y examinar la forma en que éste responde a diversas preguntas.

En contraste, la evaluación de la comprensión desde la perspectiva de la teoría APOE de Dubinsky es menos constructivista radical en naturaleza. En vez de confiar completamente en las entrevistas, la aplicación de la teoría APOE, de acuerdo con (Asiala et al. 1996), utiliza comúnmente dos tipos de herramientas: los instrumentos escritos y las entrevistas profundas. Estos instrumentos escritos incluyen elementos estándares, generalmente abiertos por naturaleza, enfocados en el contenido y en las respuestas del estudiante y reciben un análisis relativamente tradicional. Estos instrumentos escritos proporcionan un amplio enfoque de lo que los

[14] Una acción orientada a la forma es la demostración externa del estudiante, que resulta útil para indicar el estrato de comprensión en el cual el estudiante puede estar trabajando. Ver el inciso 2.2 para un análisis más profundo.

estudiantes pueden o no estar aprendiendo, y las indicaciones sobre posibles construcciones mentales. Desde esta amplia postura, las entrevistas después se vuelven más estrechas en las comprensiones manifestadas al reunir información adicional. En particular, (Asiala et al., 1996) señala que las "entrevistas son mucho más valiosas que los instrumentos de evaluación escrita utilizados en forma independiente... [ya que] para un estudiante, el trabajo escrito puede parecer esencialmente correcto, mientras la transcripción [de la entrevista] revela muy poca comprensión; mientras que para otros estudiantes lo contrario podría resultar verdad" (p.25). Como resultado, las entrevistas se vuelven herramientas para permitir que una persona observe las señales externas de comprensión interna; sin embargo, todos los datos recolectados en referencia con el estudiante se juntan para obtener una mejor perspectiva de la comprensión obtenida.

El diseño y el uso de las preguntas de entrevista son otro tema en el que las prácticas de la teoría APOE divergen en forma importante de las prácticas de las entrevistas asociadas con el modelo de Pirie y Kieren sobre la comprensión. De acuerdo con Asiala et al. (1996), las preguntas de las entrevistas surgen de la descomposición genética desarrollada anteriormente por el entrevistador. Después de la etapa de la entrevista, el análisis de los datos alimenta la categorización de las respuestas del estudiante, haciendo referencias a ellas con respecto a las construcciones mentales propuestas, que se encuentran definidas en la descomposición genética, y examinando la descomposición genética de acuerdo con estos datos. En particular, Clark et al. (1997) establecen que "las respuestas del estudiante se comparan para encontrar puntos matemáticos muy finos, los cuales parecen entender algunos estudiantes (u operaciones que algunos pueden realizar), pero que otros no. Después, intentamos encontrar una explicación para las diferencias en relación con la construcción de acciones, procesos, objetos y/o esquemas. Si podemos encontrar una explicación que parece funcionar, entonces se utiliza para revisar la descomposición genética" (p. 189). Por lo tanto, los entrevistadores sirven a un propósito dual de ofrecer una comprensión de las construcciones matemáticas de los estudiantes, las matemáticas aprendidas y utilizadas, y los poderes descriptivos y explicativos de la descomposición genética.

4.5.2. *Prácticas de instrucción.*

Pirie y Kieren (1994b) observan que las comprensiones recogidas de su modelo de comprensión resultan útiles en la planeación y la participación en las elecciones matemáticas, así como en la realización de observaciones sobre el desarrollo del currículo. A partir de sus creencias sobre el desarrollo de la comprensión matemática del estudiante, ellos construyeron una variedad de prácticas de instrucción que relacionan el ambiente del salón de clases con la promoción de la evolución de la comprensión. Bajo estas prácticas se encuentran un grupo de creencias que motivan la implementación y las interacciones del maestro con los estudiantes. En particular, Pirie y Kieren (1992a) identifican cuatro principios esenciales a los que los maestros deben apegarse cuando crean un ambiente constructivista para motivar el aprendizaje en la comprensión matemática:

1) Aunque un maestro pueda tener la intención de hacer pasar a los estudiantes hacia objetivos de aprendizaje matemáticos particulares, debe estar consciente de que dicho progreso puede alcanzarse por parte de algunos de los estudiantes, pero es posible que otros no lo alcancen como se esperaba...

2) En la creación de un ambiente o aprovisionamiento de oportunidades para los niños

con el fin de modificar su comprensión matemática, el maestro actuará de acuerdo con la creencia de que existen diferentes caminos para llegar a la misma comprensión matemática...

3) El maestro estará consciente de que distintas personas tendrán distintas comprensiones matemáticas....

4) El maestro sabrá que para cualquier tema existen diferentes niveles de comprensión, pero que éstos nunca se alcanzarán "de una vez y para siempre" (pp. 507,-,508).

El primer principio sugiere que el maestro constructivista debe estar consciente y reactivo al ambiente de salón de clases que se encuentra en constante evolución. Esta continua reestructuración de salón de clases se registra mediante las observaciones de las fabricaciones de comprensión de cada uno de los estudiantes, así como de las construcciones de toda la clase. Como un resultado, y de acuerdo con Kieren (1997), un maestro deberá poner énfasis:

1. En escuchar, en lugar de simplemente oír;

2. En actuar con los estudiantes para realizar las matemáticas, en vez de simplemente mostrar a los estudiantes cómo realizar las matemáticas;

3. En establecer un discurso efectivo del argumento matemático o de la conversación matemática en vez de simplemente el discurso de decir, interrogar y evaluar;

4. En el mecanismo del pensamiento matemático del estudiante, en vez de simplemente en las respuestas del estudiante;

5. En el maestro y los estudiantes como una relación referida con sus acciones, uno aprendiendo del otro;

6. En el maestro como co-desarrollador de un currículo matemático vivo y no sólo un recipiente o conducto de un currículo pre-decidido (p. 33).

Este énfasis transforma el ambiente del salón de clases y permite que los maestros enfoquen la comprensión construida por los estudiantes, individuos, mientras se tiene la conciencia necesaria para planear experiencias adicionales en el salón de clases.

El segundo principio implica que el maestro debe reconocer que no hay una forma específica o una secuencia de instrucción, dado que no hay un patrón único o mejor para construir la comprensión. Sin embargo, Pirie y Martin (1997) identifican una secuencia efectiva para la enseñanza del concepto de ecuaciones lineales. Esta secuencia, aún cuando se presenta como aplicable en todo el salón de clases, relaciona al maestro con la comprensión realizada por los estudiantes individualmente dentro de la clase. En un principio, el maestro proporcionó organizadores avanzados para llevar los elementos del conocimiento primitivo al frente de la mente de los estudiantes y prepararlos para el desarrollo de la comprensión. Después de ésto, el maestro presentó una tarea que requería investigación, llevando a los estudiantes a exploraciones que expondrían el pensamiento del mismo, causando la reflexión y guiando su pensamiento futuro. El maestro realizó constante súplicas a los estudiantes para que redoblaran y reconocieran los niveles más inferiores de la comprensión sin presionarlos en una forma inadecuada. A pesar de que se describe como una secuencia, el estudiante recibe distintas preguntas y sondeos; sin embargo, esta práctica de instrucción general parece ser exitosa (Pirie y Martín, 1997).

El tercer principio propone que el maestro considere que la comprensión de cada alumno está mediada por la comprensión interna realizada por el individuo. Como resultado, el maestro no puede suponer que la comprensión de cierto tema pueda transmitirse u obtenerse por los estudiantes. La razón de ello, de acuerdo con Pirie y Kieren (1992a), "La comprensión de un tema no es una adquisición. La comprensión es un proceso continuo que por naturaleza es único para el estudiante" (p. 508). Por lo tanto, al parecer Pirie y Kieren sostienen que el maestro no puede desear impartir una versión idealizada particular de la comprensión a los estudiantes.

El último principio se relaciona con las respuestas del estudiante en relación con las observaciones encontradas en el salón de clases. Aunque aparecen evidencias externas que indican que diferentes estudiantes llegaron a la misma comprensión, cada estudiante tiene una comprensión única. Como resultado, el maestro debe validar el nivel de comprensión de cada estudiante y comparar los niveles de comprensión entre todos los estudiantes. Además, la instrucción no debe enfocarse únicamente en las formas de pensamiento correspondientes a un sólo estrato, puesto que el proceso normal de evolución requiere que los estudiantes redoblen sistemáticamente hacia los estratos anteriores de la comprensión. Como resultado, el ambiente de aprendizaje debe construirse para promover el redoblado con la esperanza de motivar la evolución de la comprensión en los estudiantes.

Como fundamento de todo este análisis se encuentra la creencia de que el "maestro no puede proporcionar la comprensión al estudiante. Sólo el estudiante puede construir su propia comprensión. La función del maestro es provocar y permitir esta evolución" (Pirie y Kieren, 1991a, p .5). La provocación y la motivación de la evolución va más allá de la simple solicitud a los estudiantes para trabajar con matemáticas de alto nivel, e incluye la generación de oportunidades para promover la comprensión. Los tres tipos de preguntas, provocativo, invocativo y de validación, son una parte integral de esta labor. Al utilizar estas técnicas de cuestionamiento, el maestro puede dirigir la comprensión individualizada de un estudiante al provocar un cambio a un estrato más externo de comprensión, mediante la solicitud del redoblado a un nivel previo de comprensión, y mediante la motivación de los estudiantes para validar su propio razonamiento (Pirie y Kieren, 1990).

El enfoque de instrucción para fomentar el pensamiento conceptual conectado con la teoría APOE de Dubinsky difiere de la organización proporcionada por Pirie y Kieren, a pesar de que contiene algunas características similares. De acuerdo con Cottrill (1996), "La principal contribución que realiza la [perspectiva teórica APOE] para diseñar la instrucción, es sugerir una construcción mental específica que pueda realizarse en el aprendizaje del material. La instrucción se enfoca en hacer que los estudiantes realicen estas construcciones" (p. 169). Como resultado, la descomposición genética representa una vía posible en que un estudiante pueda lograr el desarrollo de una comprensión conceptual, así como una guía para el desarrollo de una actividad constructiva. En específico, la descomposición genética proporciona al maestro una trayectoria general que puede llevar al estudiante a construir una comprensión adecuada. Sin embargo, Dubinsky et al. (1994) no consideran el desarrollo de una secuencia de instrucción como una secuencia simplista y lineal en la que el tema complejo se divide en una secuencia coherente en forma lógica de los componentes pequeños. En efecto, Asiala et al. (1996) señala que, de acuerdo con la teoría APOE, "la evolución de la comprensión es no lineal en gran medida con inicios y detenciones; el estudiante desarrolla una comprensión parcial, regresa en forma repetida al mismo conocimiento, y periódicamente resume y enlaza las ideas" (p. 13). Por lo tanto, las prácticas pedagógicas necesitan representar simultáneamente la construcción de la comprensión del estudiante sobre diferentes conceptos con un concepto subordinado al otro. Para lograrlo, las experiencias de instrucción desde la perspectiva APOE emplean la aplicación holística.

> La idea [de la aplicación holística] es que todo está salpicado en una forma holística. Cada individuo (o equipo) intenta crear un sentido fuera de la situación —es decir, intentan realizar los problemas que el maestro le pidió resolver, o contestar las preguntas que el maestro o el compañero estudiante le hizo—. De esta manera, el estudiante mejora su comprensión de uno y otro concepto poco a poco. Ellos continúan llegando a él, siempre intentando crear un mayor sentido, siempre aprendiendo un poco más, y en ocasiones sintiendo una gran frustración. Y ésta es la función del maestro, no eliminar este frustración sino ayudar a los estudiantes a aprender a manejarla, y utilizarla como un martillo para aplastar su propia ignorancia (Dubinsky et al., 1994, p. 300).

Una parte integral de esta estrategia se relaciona con los estudiantes que se encuentran en ambientes intencionalmente desequilibrados que se integran tanto como es posible con el concepto que se está estudiando. Resulta de particular importancia el aspecto social de la situación de aprendizaje (Asiala et al., 1996). En vez del ambiente que apoya la exploración individualizada, los individuos componen un grupo de aprendizaje cooperativo, cada uno brindando su propia perspectiva sobre el material presentado y por tanto, construyen su propia versión de la comprensión. Sin embargo, para que el grupo se comunique con eficiencia, los miembros deben mediar sus comprensiones al grupo durante la discusión. Por lo tanto, de acuerdo con las perspectivas de Dubinsky desde la teoría APOE, el contexto social en el que se realice el aprendizaje mejorará la construcción individualizada de la comprensión.

Un ejemplo de lo anterior al enfoque pedagógico teórico fue acuñado por los investigadores APOE como el *Ciclo de enseñanza ACE*, el cual integra actividades, discusiones en clase y ejercicios. El diseño del enfoque pedagógico se centra en la obtención de construcciones mentales específicas sugeridas por el análisis teórico. Para cumplir con ésto, las actividades se relacionan con grupos de aprendizaje cooperativo que se involucran en la exploración de conceptos matemáticos, utilizando tareas por computadora como medios para construir una base de conocimiento. En particular, Asiala et al. (1996) afirmaron que "Es importante observar que hay diferencias esenciales entre estas actividades por computadora y el tipo de actividades que se utilizan en el "aprendizaje por descubrimiento". Mientras que algunas actividades de computadora pueden involucrar un elemento de descubrimiento, su objetivo primario es proporcionar a los estudiantes una base de experiencia, en vez de llevarlos hacia las respuestas correctas" (p. 14). En efecto, las actividades por computadora sirven como medios para ayudar a los estudiantes a lograr el sentido de las diferentes porciones del concepto total y, por lo tanto, establecer en forma incremental el estado para mejorar la comprensión del estudiante a través de la reflexión personal y la discusión de grupo. Además, las actividades por computadora llevan hacia el frente los componentes que se necesitan para realizar las construcciones mentales que requiere el análisis teórico.

Para una mayor creación sobre el fundamento de las actividades por computadora, las discusiones del salón de clases se reflejan en las actividades por computadora y relacionan a los estudiantes, los equipos de trabajo y las tareas de papel y lápiz (Asiala et al., 1996). El instructor involucra activamente a los grupos en las discusiones de las experiencias por computadora y la manera en que el trabajo de papel y lápiz se integran con dichas experiencias y proporcionan ocasionalmente definiciones, explicaciones y generalizaciones de integración para avanzar en la discusión. Finalmente, en el *Ciclo de enseñanza ACE,* los ejercicios asignados después de la conclusión de las actividades por computadora y de la discusión del salón de clases, se consideran relativamente tradicionales pero con la intención de "reforzar las ideas que [los estudiantes] construyeron, para usar las matemáticas que aprendieron y , en determinado momento, comenzar a pensar sobre las situaciones que se estudiarán más adelante" (Asiala et al. 1996, p. 14). Una diferencia importante de los ejercicios contenidos en el texto tradicional y en los textos que surgieron de la teoría APOE es que, en los textos tradicionales, los ejercicios proporcionan problemas modelo que corresponden a los ejemplos y la teoría presentada en un capítulo particular. Estos modelos, desde la perspectiva de la teoría APOE, sorteará el desequilibrio y la formación de una construcción mental rica, considerada necesariamente para la construcción de la comprensión. Como resultado, los textos basados en la teoría APOE incorporan el ejercicio después de las actividades por computadora y la discusión de las matemáticas contenidas en ellos. Los textos no proporcionan "ejemplos elaborados" lo que obliga a los estudiantes a investigar las ideas subyacentes de una actividad, reflejan las actividades de computadora e integran aquellas con la discusión en clase para buscar los vínculos y las vías de solución.

5. Conclusión

Aunque existen varios marcos teóricos sobre la comprensión matemática, parece que tanto el modelo de Pirie y Kieren sobre la evolución de la comprensión matemática como la teoría APOE de Dubinsky incluyen las características más importantes de los mismos. Pirie y Kieren (1989) plantean la comprensión como un proceso conectivo, de varios estratos, no lineal y recursivo con características fractales. Desde esta perspectiva, el desarrollo de la comprensión se involucra con la construcción y la reorganización de las estructuras de conocimiento de la persona. El movimiento entre los estratos de comprensión es un resultado de la generalización y va más allá del nivel previo y la reconstrucción de una comprensión de estratos más bajos. Dicho movimiento se evoca mediante el redoblado. La construcción de la comprensión permite la examinación de las conexiones construidas entre las imágenes del concepto, la ubicación de las conexiones faltantes, incorrectas o parciales y la reorganización de estas conexiones en una estructura estable y consistente. De la misma manera, Dubinsky afirma que la comprensión debe entrelazarse en el desarrollo del esquema, por lo que requiere de varias construcciones especificadas por la abstracción reflexiva. Desde esta perspectiva, el desarrollo de la comprensión es un proceso continuo, aunque no lineal, de los esquemas de construcción de mayor elaboración que fusionan acciones en el proceso, y este proceso se regresa encapsulado en objetos, a partir de los cuales se presentan nuevas acciones. El esquema organiza estas acciones, procesos, objetos y esquemas subordinados en una estructura que trasciende los componentes al mismo tiempo que proporciona el significado de un concepto.

Este documento busca dirigir las relaciones de estas dos teorías para marcos históricos y recientes de la comprensión matemática, con el fin de identificar elementos y construcciones de las teorías; para analizar sus raíces; para crear hipótesis sobre cómo se relacionan sus organizaciones y para analizar las implicaciones de estas teorías en las prácticas de evaluación de la instrucción. Ninguna de las teorías superó a la otra, puesto que cada teoría tiene su propio conjunto de perspectivas, así como su propio conjunto de fortalezas. Para seleccionar una teoría en vez de otra, se requeriría analizar las perspectivas de la teoría. Este documento busca proporcionar un análisis coherente de las dos teorías al comparar y contrastarlas en diferentes niveles y desde diferentes puntos de vista. Como resultado, este documento resolvió varias preguntas; pero al hacerlo, dio lugar a otras.

La primera, de las perspectivas filosóficas ¿Cómo pueden el modelo de Pirie y Kieren sobre la evolución de la comprensión y la teoría APOE de Dubinsky informar e investigar en forma simultánea? Segundo, ¿Si se analiza la misma sesión de entrevistas desde la perspectiva del modelo de Pirie y Kieren sobre la comprensión y desde la teoría APOE de Dubinsky, qué aspectos se descubrirían como comunes? ¿Se descubrirían en uno, pero se ocultarían en el otro? ¿Cuáles son las implicaciones instructivas que aparecerían? Tercero, ¿Cuáles son las diferencias operacionales que resultan evidentes en un salón de clases, de acuerdo con el modelo de Pirie y Kieren sobre la comprensión, y en un salón de clases basado en la teoría APOE de Dubinsky? ¿Cambiarían los objetivos del maestro? ¿Las diferencias afectarían en forma importante la práctica instructiva, los procedimientos de evaluación y la interpretación, las actitudes hacia las pruebas estandarizadas, o la acción de los estudiantes? Este documento no puede esperar a resolver estas preguntas; sin embargo, quizá en una investigación futura la respuesta esté a nuestro alcance.

Bibliografía

Asiala, M., Brown, A., DeVries, D. J., Dubinsky, E., Mathews, D., & Thomas, K. (1996). A framework for research and curriculum development in Undergraduate mathematics education. In J. Kaput, A., H. Schoenfeld & E. Dubinsky (Eds.) *Research in Collegiate Mathematics Education* (pp.1-32). Providence, RI: American Mathematical Society.

Asiala, M., Brown, A., Kleiman, J.& Mathews, D. (1998). The development of students' understanding of permutations and symmetries. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 3*, 13-43.

Ayers, T., Davis, G., Dubinsky, E., & Lewin, P. (1988). Computer experiences in learning composition of functions. *Journal for Research in Mathematics Education, 19*(3), 246–259.

Bachelard, G. (1938). *La formation de l'esprit scientifique*. Editions J. Paris: Vrin.

Ball, D. (1991). Research on teaching mathematics: Making subject matter knowledge part of the equation. In J. Brophy (Ed.), *Advances in research on teaching: Vol. 2 Teachers' subject matter knowledge and classroom instruction* (pp.1– 48). Greenwich, CT: JAI Press.

Agradecimientos: El autor agradece a los miembros de su seminario de Educación Matemática, que incluyen a la Dra. Barbara Moses, Oxana Grinevitch, Becky Kessler, Daria Fillipova, Rachel Rader y Julie Grabowski, así como y muy especialmente a Ed Dubinsky, Susan Pirie y los revisores anónimos por sus valiosos y profundos comentarios en las primeras versiones de este documento.

Brown, A., DeVries, D. J., Dubinsky, E. & Thomas, K. (1997). Learning binary operations, groups, and subgroups. *Journal of Mathematical Behavior, 16*(3), 187–239.

Brown, J. S., Collins, A., & Duguid, P. (1989). Situated cognition and the culture of learning. *Educational Researcher, 18*(1), 32 – 42.

Brownell, W.A. (1945). Psychological considerations in the learning and teaching of arithmetic. In W. D. Reeve (Ed.), *The Teaching of Arithmetic. Tenth yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics* (pp.1–31). New York: Teachers College, Columbia University.

Brownell, W. A. & Sims, V. M. (1946). The nature of understanding. In J. F. Weaver & J. Kilpatrick (Eds.) (1972), *The place of meaning in mathematics instruction: Selected theoretical papers of William A. Brownell* (Studies in Mathematics, Vol. 21, pp. 161–179). Stanford University: School Mathematics Study Group. (Originally published in The measurement of understanding, Forty-fifth Yearbook of the National Society for the Study of Education, Part I, 27—43.)

Burton, L. (1984). Mathematical thinking: The struggle for meaning. *Journal for Research in Mathematics Education, 15*(1), 35 – 49.

Byers, V. & Erlwanger, S. (1985). Memory in mathematical understanding. *Educational Studies in Mathematics, 16*, 259 – 281.

Byers, V. & Herscovics, N. (1977). Understanding school mathematics. *Mathematics Teaching, 81*, 24 – 27.

Clark, J., Cordero, F., Cottrill, J., Czarnocha, B., DeVries, D., St. John, D., Tolias, G. & Vidakovic, D. (1997). Constructing a schema: The case of the chain rule. *Journal for Mathematical Behavior, 16*(4), 345 – 364.

Cornu, B. (1991). Limits. In D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp.153 – 166). Dordrecht: Kluwer.

Cottrill, J. (1999). *Students' understanding of the concept of chain rule in first year calculus and the realation to their understanding of composition of functions*. Unpublished doctoral dissertation, Purdue University.

Cottrill, J., Dubinsky, E., Nichols, D., Schwingendorf, K., Thomas, K. & Vidakovic, D. (1996). Understanding the limit concept: Beginning with a coordinated process scheme. *Journal of Mathematical Behavior, 15*, 167 – 192.

Davis, E. J. (1978). A model for understanding in mathematics. *Arithmetic Teacher*, September, 13 – 17.

Davis, R. B. (1984). *Learning mathematics: The cognitive science approach to mathematics education*. Norwood, NJ: Ablex.

Davis, R. B. & Vinner, S. (1986). The notion of limit: Some seemingly unavoidable misconception stages. *Journal of Mathematical Behavior*, *5*, 281 – 303.

Driver, R. & Easley, J. (1978). Pupils and paradigms. *Studies in Science Education*, *5*, 61 – 84.

Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp.95 – 123). Dordrecht: Kluwer.

Dubinsky, E. (1994). A theory and practice of learning college mathematics. In A. Schoenfeld (Ed.), *Mathematical thinking and problem solving* (pp. 221 – 247). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Dubinsky, E., Dautermann, J., Leron, U., & Zazkis, R. (1994). On learning fundamental concepts of group theory. *Educational Studies in Mathematics*, *27*, 267 – 305.

Dubinsky, E. & McDonald, M. (2001). APOS: A constructivist theory of learning in undergraduate mathematics education research. In D. Holton et al. (Eds.), *The teaching and learning of mathematics at university level: An ICMI study* (pp. 273 – 280). Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Fehr, H. (1955). A philosophy of arithmetic instruction. *Arithmetic Teacher*, 2, 27 – 32.

Ferrini-Mundy, J. \& Gaudard, M. (1992). Secondary school calculus: Preparation or pitfall in the study of college calculus? *Journal for Research in Mathematics Education*, *23*(1), 56 – 71.

Flavell, J. H. (1977). *Cognitive development*. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice Hall.

Ginsburg, H. P., Lopez, L. S., Mukhopadhyay, S., Yamamota, T., Willis, M. & Kelley, M. S. (1992). Assessing understandings of arithmetic. In R. Lesh & S. Lamon (Eds.), {\it *Assessment of authentic performance in school mathematics* (pp. 265 – 289). Washington, DC: AAAS Press.

Greeno, J. G. (1977). Process of understanding in problem solving. In N.J. Castellan, Jr., D. B. Pisoni & G. R. Potts (Eds.), *Cognitive theory* (Vol. 2, pp. 43 – 83). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Greeno, J. G. (1991). Number sense as situated knowing in a conceptual domain. *Journal for Research in Mathematics Education*, *22*(3), 170 – 218.

Grinevitch, O. (in preparation). *Student understanding of abstract algebra: A theoretical examination.* Unpublished doctoral dissertation, Bowling Green State University.

Harel, G. & Tall, D. (1991). The general, the abstract, and the generic in advanced mathematics. *For the Learning of Mathematics*, *11*(1), 38 – 42.

Hatano, G. (1988). Social and motivational bases for mathematical understanding. In G. B. Saxe & M. Gearhart (Eds.), *New Directions for Child Development* (Vol. 41, pp. 55 – 70).

Herscovics, N. & Bergeron, J. (1988). An extended model of understanding. *Proceedings of PME-NA 10* (pp. 15 – 22). Dekalb, Ill: Northern Illinois University.

Hiebert, J. (Ed.) (1986). *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics.* Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Hiebert, J. & Carpenter, T. P. (1992). Learning and teaching with understanding. In D. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 65 – 97). New York, NY: Macmillan.

Hiebert, J. & Lefevre, P. (1986). Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis. In J. Hiebert (Ed.), *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics* (pp. 1 – 27). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Hiebert, J. & Wearne, D. (1986). Procedures over concepts: The acquisition of decimal number knowledge. In J. Hiebert (Ed.), *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics* (pp.199 – 223). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Janvier, C. (Ed.) (1987). *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics*. Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Kaput, J. (1985). Representation and problem solving: Methodological issues related to modeling. In E. A. Silver (Ed.), *Teaching and learning mathematical problem solving: Multiple research perspectives* (pp. 381 – 398). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Kaput, J. (1987a). Representation and mathematics. In C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in mathematics learning and problem solving* (pp. 19 – 26). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Kaput, J. (1987b). Towards a theory of symbol use in mathematics. In C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in mathematics learning and problem solving* (pp. 159 – 195). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Kaput, J. (1989a). Linking representations in the symbol systems of algebra. In C. Kieran & S. Wagner (Eds.), *A research agenda for the learning and teaching of algebra* (pp. 167 –194). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics; Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Kaput, J. (1989b). Supporting concrete visual thinking in multiplicative reasoning: Difficulties and opportunities. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, *11*(1), 35– 47.

Kaput, J. (1992). Technology and mathematics education. In D. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 515 – 556). New York, NY: Macmillan

Kieren, T. E. (1990). Understanding for teaching for understanding. *The Alberta Journal of Educational Research*, *36*(3), 191–201.

Kieren, T. E. (1997). Theories for the classroom: Connections between research and practice. *For the Learning of Mathematics*, *17*(2), 31 – 33.

Lehman, H. (1977). On understanding mathematics. *Educational Theory, 27*(2).

Leinhardt, G. (1988). Getting to know: Tracing student's mathematical knowledge from intuition to competence. *Educational Psychologist, 23*(2), 119 – 144.

Mack, N. (1990). Learning fractions with understanding: Building on informal knowledge. *Journal for Research in Mathematics Education, 21*(1), 16 – 32.

Mansfield, H. M. & Happs, J. C. (1992). Using grade eight students' existing knowledge to teach about parallel lines. *School Science and Mathematics, 92*(8), 450 – 454.

McDonald, M. A., Mathews, D. M. & Strobel, K. H. (2000). Understanding sequences: A tale of two objects. In E. Dubinsky, A. H. Schoenfeld & J. Kaput (Eds.), *Research in Collegiate Mathematics Education* (pp. 77 – 102). Providence, RI: American Mathematical Society.

McLellan, J.A. & Dewey, J. (1895). *The psychology of number and its applications to methods of teaching arithmetic*. New York: D. Appleton.

Michener, E.~R. (1978). Understanding understanding mathematics. *Cognitive Science, 2*, 361 – 383.

Nesher, P. (1986). Are mathematical understanding and algorithmic performance related? For the Learning of Mathematics, *6*(3), 2 – 9.

Nickerson, R. S. (1985). Understanding understanding. *American Journal of Education, 93*(2), 201 – 239.

Ohlsson, S. (1988). Mathematical meaning and applicational meaning in the semantics of fractions and related concepts, In J. Hiebert & M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (pp. 53 – 91). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Ohlsson, S., Ernest, A. M., & Rees, E. (1992). The cognitive complexity of learning and doing arithmetic. *Journal for Research in Mathematics Education, 23*(5), 441 – 467.

Piaget, J. (1970). *Genetic epistemology*. New York, NY: W.W. Norton.

Piaget, J. (1975). Piaget's theory. In P.B. Neubauer (Ed.), *The process of child development* (pp. 164 – 212). New York, NY: John Aronson.

Pirie, S. E. B. (1988). Understanding: Instrumental, relational, intuitive, constructed, formalised dots ? How can we know? *For the Learning of Mathematics*, *8*(3), 2 – 6.

Pirie, S. E. B. & Kieren, T. E. (1989). A recursive theory of mathematical understanding. *For the Learning of Mathematics*, *9*(3), 7 – 11.

Pirie, S. E. B. & Kieren, T. E. (1990). *A recursive theory for the mathematical understanding: some elements and implications*. Paper presented at the Annual Meeting of the American Educational Research Association (Boston, MA, April 1990).

Pirie, S. E. B. & Kieren, T. E. (1991a). *A dynamic theory of mathematical understanding: Some features and implications*. (ERIC Document Reproduction Service No. ED 347 067)

Pirie, S. E. B. & Kieren, T. E. (1991b). *Folding back: Dynamics in the growth of mathematical understanding*. Paper presented at the Fifteenth Meeting of the Psychology of Mathematics Education Conference (Assissi, Italy, July 1991).

Pirie, S. E. B. & Kieren, T. E. (1992a). Creating constructivist environments and constructing creative mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 23*, 505 – 528.

Pirie, S. E. B. & Kieren, T. E. (1992b). Watching Sandy's understanding grow. *Journal of Mathematical Behavior, 11*, 243 – 257.

Pirie, S. E. B. & Kieren, T. E. (1994a). Beyond metaphor: Formalising in mathematical understanding with constructivist environments. *For the Learning of Mathematics, 14*(1), 39 – 43.

Pirie, S. E. B. & Kieren, T. E. (1994b). Growth in mathematical understanding: How can we characterise it and how can we represent it? *Educational Studies in Mathematics, 26*, 165 – 190.

Pirie, S. E. B. & Martin, L. (1997). The equation, the whole equation and nothing but the equation! One approach to the teaching of linear equations. *Educational Studies in Mathematics, 34*, 159 – 181.

Pirie, S. E. B. & Schwarzenberger, R. L. E. (1988). Mathematical discussion and mathematical understanding. *Educational Studies in Mathematics, 19*, 459 – 470.

Polya, G. (1945). *How to solve it*. Princeton, NJ: Princeton University Press.

Polya, G. (1962). *Mathematical discovery* (Vol. 2). New York, NY: Wiley.

Resnick, L. B. & Omanson, S. (1987). Learning to understand arithmetic. In R. Glaser (Ed.), *Advances in instructional psychology* (Vol. 3, pp.41 – 95). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Resnick, L. B., Nesher, P., Leonard, F., Magone, M., Omanson, S., & Peled, I. (1989). Conceptual bases of arithmetic errors: The case of decimal fractions. *Journal for Research in Mathematics Education, 20*(1), 8 – 27.

Saxe, G. B. (1988). Studying working intelligence. In B. Rogoff & J. Lave (Eds.), *Everyday cognition* (pp. 9 – 40). Cambridge, MA: Harvard University Press.

Schoenfeld, A. H. (1989). Exploring the process problem space: Notes on the description and analysis of mathematical processes. In C. Maher, G. Goldin, & R. B. Davis (Eds.), *Proceedings of psychology of mathematics education North America XI*, (Vol. 2, pp. 95 – 120). New Brunswick, NJ: Rutgers, Centre for Mathematics, Science and Computer Education.

Schoenfeld, A. H. (1998). Toward a theory of teaching-in-context. *Issues in Education*, *4*(1), 1 – 94.

Schoenfeld, A. H. (2000). Purposes and methods of research in mathematics education. *Notices of the American Mathematical Society*, *47*(6), 641 – 649.

Schroeder, T. L. (1987). Student's understanding of mathematics: A review and synthesis of some recent research. In J. Bergeron, N. Herscovics, & C. Kieren (Eds.), *Psychology of Mathematics Education XI*, (Vol. 3, pp. 332 – 338). Montreal: PME.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, *22*, 1 – 36.

Sfard, A. (1992). Operational origins of mathematical objects and the quandry of reification: The case of function. In G. Harel & E. Dubinsky (Eds.), *The concept of function: Aspects of epistomology and pedagogy* (pp.59 – 84). Washington, DC: MAA.

Sfard, A. (1994). Reification as the birth of metaphor. *For the Learning of Mathematics*, *14*(1), 44 – 55.

Sfard, A. & Linchevski, L. (1994). The gains and the pitfalls of reification: The case of algebra. *Educational Studies in Mathematics*, *26*, 191 – 228.

Skemp, R. R. (1976). Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics Teaching*, *77*, 20 – 26.

Skemp, R. R. (1979). Goals of learning and qualities of understanding. *Mathematics Teaching*, *88*, 44 – 49.

Skemp, R. R. (1982). Symbolic understanding. *Mathematics Teaching*, *99*, 59 – 61.

Sierpinska, A. (1987). Humanities students and epistemological obstacles related to limits. *Educational Studies in Mathematics*, *18*, 371 – 397.

Sierpinska, A. (1990a). *Remarks on understanding in mathematics*. Paper presented at the 1990 meeting of the Canadian Mathematics Education Study Group (Vancouver, CAN, 1990).

Sierpinska, A. (1990b). Some remarks on understanding in mathematics. *For the Learning of Mathematics*, *10*(3), 24—41.

Silver, E. A. (1986). Using conceptual and procedural knowledge: A focus on relationships. In J. Hiebert (Ed.), *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics* (pp. 181 – 189). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Simon, M.~A. (1993). Prospective elementary teachers' knowledge of division. *Journal for Research in Mathematics Education*, *24*(3), 233 – 254.

Steffe, L. P. & Kieren, T. E. (1994). Radical constructivism and mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education*, *25*(6), 711 – 733.

Tall, D. (1978). The dynamics of understanding mathematics. *Mathematics Teaching*, *84*, 50 – 52.

Tall, D. (1989). Concept images, generic organizers, computers, and curriculum change. *For the Learning of Mathematics*, *9*(3), 37 – 42.

Tall, D. (1991). The psychology of advanced mathematical thinking. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 3 – 21). Dordrecht: Kluwer.

Tall, D. & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with special reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, *12*, 151 – 169.

Towers, J., Martin, L. & Pirie, S. E. B. (2000). Growing mathematical understanding: Layered observations. In M. L. Fernandez (Ed.), *Proceedings of the Twenty-Second Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 225 – 230). Columbus, OH: ERIC Clearinghouse.

Van Engen, H. (1949). An analysis of meaning in arithmetic. *Elementary School Journal*, *49*, 321 – 329.

VanLehn, K. (1986). Arithmetic procedures are induced from examples. In J. Hiebert (Ed.), *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics* (pp. 133 – 180). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Vinner, S. (1983). Concept definition, concept image and the notion of function. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *14*, 293-305.

Vinner, S. (1991). The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 65 – 81). Dordrecht: Kluwer.

Von Glasersfeld, E. (1987). Learning as a constructive activity. In C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in the learning and teaching of mathematics* (pp. 3 – 18). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Wearne, D. & Hiebert, J. (1988). A cognitive approach to meaningful mathematics instruction: Testing a local theory using decimal numbers. *Journal for Research in Mathematics Education*, *19*(5), 371 – 384.

Wertheimer, M. (1959). *Productive Thinking*. New York: Harper & Row.

David E. Meel
Departament of Mathematics and Statistics
Bowling Green State University
meel@math.bsgu.edu