2003
Ricardo Cantoral / Evelia Reséndiz
EL PAPEL DE LA VARIACIÓN EN LAS EXPLICACIONES DE LOS PROFESORES: UN ESTUDIO EN SITUACIÓN ESCOLAR
Revista Latinoamericana de Investigacion en Matematica Educativa, julio, año/vol. 6, número 002
Comité Latinoamericano de Matemática Educativa
Distrito Federal, México
pp. 133-154

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa
Vol. 6, Núm. 2, julio, 2003, pp. 133-154.

El papel de la variación en las explicaciones de los profesores: un estudio en situación escolar

Ricardo Cantoral*
Evelia Reséndiz[†]

RESUMEN

En este artículo, analizamos el papel de las explicaciones en la clase de matemáticas del primer semestre de ingeniería, cuando la noción de *variación* esté siendo usada por el profesor y al momento de que los estudiantes intervienen a propósito de ella. En particular, nos centramos en las nociones de *función* y *derivada* que son vistos como modelos para el estudio de la variación.

Centramos la atención en el papel del discurso en la clase de matemáticas cuando se enseñan conceptos y procesos ligados a la noción de variación, pues consideramos que el discurso constituye el espacio donde se construyen, negocian e interpretan los significados en la interacción social que se realiza en la escuela. Los registros y las transcripciones de las clases son analizadas considerando un modelo particular de investigación cualitativa, la etnografía.

PALABRAS CLAVE: Variación, función, discurso, explicación.

The role of variation in teacher's explanations: a school situation study

ABSTRACT

In this paper, we analyzed the role of the explanations in a mathematics course on the first semester of engineering, when the variation notion is being used by the professor and at the time of which the students take part with it. In particular, we are focus in the notion of *function* and *derivative* that are seen as models for the study of variation.

We focused our attention in the role of the speech in the mathematics class when concepts and processes related to the variation notion are taught, because we considered that the speech constitutes the space where meanings are constructed, negotiated and interpreted. The register and the transcriptions of the course are analyzed considering a particular model of qualitative research, the ethnography.

KEY WORDS: Variation, function, discourse, explanation.

Artículo recibido en marzo de 2003.
**Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional*
[†]*Universidad Autónoma de Tamaulipas. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional*

Le rôle de la variation dans les explications des professeurs: un étude en situation scolaire

RÉSUMÉ

Dans cet article, on analyse le rôle des explications dans la classe des mathématiques dans le premier semestre de génie, quand la notion de *variation* est utilisé par le professeur et au moment où les étudiants interviennent à propos d' elle. En particulier, on se centre sur les notions de *fonction* et *dérivée* qui sont vus comme modèles pour l' étude de la variation.

On centre l' attention dans le rôle du discours dans la classe des mathématiques quand s' enseignent concepts et procès liés à la notion de variation, car on considère que le discours constitue l' espace où se construisent, négocient et interprètent les significations dans l' interaction social qui se réalise à l' école. Les registres et les transcriptions des classes sont analysés considérant un modèle particulier de recherche qualitative.

MOTS CLÉS: Variation, fonction, discours, explications.

O papel da variação nas explicações dos professores: um estudo na situação escolar

RESUMO

Ocuparemo-nos de analisar o papel das explicações na classe das matemáticas do primeiro semestre de ingenharia, quando a noção de variação está a ser usada pelo professor e quando os estudantes intervêm a propósito desta. Em particular, concentrar-nos-emo nas noções de função e derivada que são vistas como modelos para o estudo da variação.

Concentramos a atenção no papel do discurso na classe das matemáticas quando se pretende ensinar conceitos e processos matemáticos ligados à noção de variação, pois o discurso constitui o espaço onde se constroõem, negoceiam e interpretam os significados na interação social que se realiza na escola. Os registros e as transcrições das aulas, que se registraram em audio, foram analizados considerando um modelo particular de investigação qualitativa.

PALAVRAS CHAVE: Variação, função, discurso, explicação

INTRODUCCIÓN

Los resultados que arroja esta investigación forman parte del proyecto denominado P&LV - Pensamiento y Lenguaje Variacional, que ha sido conducido desde hace una década por el grupo de investigación del Área de Educación Superior del Departamento de Matemática Educativa del Centro de Investigación y Estudios Avanzados del IPN. En él se ha sostenido desde sus orígenes, que el actual discurso matemático escolar, dominante en las escuelas, parece inhibir el desarrollo de ideas variacionales entre los estudiantes. Esto debido a que la enseñanza del cálculo ha sido entendida como el desarrollo de habilidades algorítmicas, de naturaleza algebraica, para derivar, integrar y optimizar variables, de ahí que su enseñanza entonces, no suela plantear al estudiante demasiados escenarios para la significación de la variación, ya sea al nivel global o al local.

Investigaciones en el campo de la matemática educativa (García, 1998; Ávila, 1996; Hoyos, 1996; Cantoral, 1992; Carlson, 1998) reportan la existencia de robustas dificultades entre los estudiantes para tratar con cuestiones que exigen algún tipo de estrategia variacional. Otros estudios (Zubieta, 1996), analizan las dificultades que muestran los estudiantes al representar con registros gráficos, aquello que se les ha comunicado como un enunciado verbal. Este escenario, naturalmente, se extiende mas allá de nuestras fronteras y así encontramos que en (Pulido, 1998; o Artigue, 1991) se analizan las razones por las que los estudiantes de ingeniería o de las ciencias físicas otorgan significados mínimos o pobres a los símbolos comúnmente usados en cálculo, símbolos tales como *dx*, *dy*/*dx*.

Conviene comentar de inicio que, con este estudio, no se pretende remediar tal estado de cosas. Tampoco se pretende indicar cómo se habrá de enseñar la noción de variación, o si un profesor "la enseña bien" en el aula. Nos proponemos algo aún más modesto, más particular, lo que intentamos es la comprensión del rico entramado de pautas de interacción en el sentido de Candela (1999), interacciones que se dan para producir conocimiento entre docentes y alumnos. Ahora bien, consideramos que este tipo de estudios son necesarios como punto de partida para cualquier propuesta que pretenda mejorar la enseñanza del cálculo en su contexto real. Así, en este artículo propusimos estudiar las interacciones discursivas en el aula desde la perspectiva del profesor; aunque también es necesario aclarar que no es posible analizar dicha perspectiva sin considerar a la vez a la de los alumnos, pues ambos agentes actúan como referentes de sus contribuciones y el significado de éstas depende del contexto interactivo. Pretendemos entonces, con esta investigación, construir una respuesta, parcial, que centre su atención en algunos de los fenómenos de enseñanza específicamente involucrados con las dificultades del aprendizaje en matemáticas. Particularmente hemos centrado la atención en la noción de variación, que si bien no es un objeto explícito de enseñanza en el sentido de Chevallard, (1991), está claramente presente en muchas de las prácticas discursivas de los profesores.

Para ello optamos por centrar la atención en el papel de las explicaciones en la clase de matemáticas cuando se pretenden enseñar conceptos y procesos matemáticos ligados a la variación. Ello en virtud de nuestro interés por entender el fenómeno de envejecimiento de las situaciones de enseñanza. De este modo, el estudio de las maneras en que se introduce en el aula el discurso instruccional y las formas en que se desarrolla consecuentemente a través de las interacciones. Pretendemos de este modo, identificar elementos discursivos a los que recurre el profesor para realizar su actividad docente, pues el discurso matemático escolar en el salón de clases proporciona un escenario para el maestro y los alumnos a fin de representar, pensar, hablar, estar de acuerdo o en desacuerdo. Las cuestiones del discurso son abordadas desde múltiples formas, desde aquellas en el dominio de la lingüística hasta aquellas en la didáctica (Sfard, 2002, Seeger, 2001, Ball, 1991) quienes nos explican que el *discurso* se utiliza para subrayar los modos en que el conocimiento se construye e intercambia en el salón de clases, quién habla, acerca de qué se habla, de qué manera se habla, qué preguntas son importantes para quienes hablan, de quién se aceptan ideas y modos de conocer y de quién no, etc.

Aun son escasas las investigaciones sobre el discurso sostenido en la clase de matemáticas universitarias (Yackel, 2002; Sierpinska, 1994), en la educación básica en cambio, encontramos el caso de Pirie (1988), citado en (Flores, A. & Sowder, J., 1995), Pimm (1991, 1994), Mopondi (1995), Josse & Robert (1993), y el creciente interés por estudiar el papel de los contextos sociales de la cognición ubica al lenguaje como un medio que une lo cognoscitivo con lo social (Cazden, 1991). Éste es el caso de los estudios citados en Candela (1990), quienes exploran la relación entre cultura, lenguaje y cognición y que consideran el desarrollo cognoscitivo y lingüístico como una forma de socialización y aprendizaje cultural (Lave 1990, Ochs y Schieffelin, 1994). En otros trabajos se concibe al lenguaje como una mediación cultural para el pensamiento y la acción expresados en prácticas cotidianas (Edwards y Mercer, 1987). Piaget (1932) afirmó, por su parte, que la participación de los niños en conflictos sociales tales como las discusiones desarrolla sus habilidades para "ver" con perspectiva, lo que propicia el crecimiento cognitivo. Vygotsky (1962), en cambio, subrayó el papel del lenguaje social en el desarrollo del pensamiento y, más recientemente, Bishop (1985) enfatizó la importancia de la construcción social del significado para la educación matemática.

La investigación que ahora se reporta, no se ubica propiamente en la llamada línea de trabajos representativos del pensamiento del profesor, en el sentido de que no estudiamos los rasgos de personalidad, actitud o desempeño áulico, sino más bien, se estudia un aspecto de la práctica del profesor al hacer vivir entre sus estudiantes una cierta idea matemática sujeta a las restricciones propias del funcionamiento del sistema didáctico. De este modo, esta investigación se ubica en lo relativo al estudio del discurso del profesor en el aula, considerando para ello un contenido matemático específico: la variación. De ahí que la observación en el aula haya sido la fuente principal de nuestra información. Esta mirada traerá, en nuestro opinión, un beneficio importante, pues permitirá centrar la atención en las formas en que se interactúa en un salón de clases cuando se quiere explicar una cierta idea matemática.

Consideramos que un modelo de investigación cualitativa, basada en método etnográfico que toma a la observación como técnica de registro, es para nosotros el medio más adecuado para caracterizar procesos discursivos de la práctica docente. Esta perspectiva metodológica no parte, como se sabe, de categorías o modelos predefinidos por el investigador, ni de relaciones causa efecto entre enseñanza y aprendizaje, sino busca analizar las explicaciones de los profesores cuando articulan discursos, pues consideramos que éstos son medios para hacer comprender, o para dar sentido a sus alumnos.

DESCRIPCIÓN DE LA EXPERIENCIA

Para alcanzar nuestros objetivos desarrollamos durante un largo periodo, una actividad sistemática de observación y análisis de clases de matemáticas universitarias. Primero de carácter preliminar, donde quisimos evaluar la sensibilidad a la observación y al registro que mostraban los profesores de matemáticas de educación superior así como sus alumnos en sus clases cotidianas. Esto en virtud de que dichas observaciones son completamente inusuales en esos niveles de enseñanza, por lo que cuestiones de método, filmar, grabar, registrar podrían tener un considerable efecto en nuestras observaciones. Esta etapa inicial sirvió para saber, cuáles son los recursos que podríamos utilizar a fin de conservar la dinámica del aula. De ahí que optamos por usar audio y registro etnográfico después de que los profesores aceptaran voluntariamente participar en tales actividades. La segunda parte de la observación tuvo un carácter sistemático y fue desarrollada durante un semestre escolar completo, registrando el periodo en que tres profesores en cinco grupos exponían el tema de *función* y de *derivada*. Se registró en audio toda la comunicación entre alumnos y profesor, y en notas escritas por el observador, se registraron todos los escritos hechos en el pizarrón tanto por el profesor como por el de algún alumno. Al momento del análisis de la información registrada, elegimos solamente tres grupos de la asignatura de Matemáticas I en las carreras de Ingeniería en Sistemas, Bioquímico y Electrónica.

Los temas de función y derivada, son parte del currículo del cálculo diferencial e integral y del análisis matemático, son temas que se encuentran en un nivel avanzado dentro de la jerarquía de conocimientos matemáticos que se hallan vinculados a temas de matemáticas avanzadas (análisis real, ecuaciones diferenciales, variable compleja) característicos del nivel superior. El énfasis y la profundidad con la que se tratan estos temas, se establece de acuerdo al perfil de ingreso y egreso del programa de licenciatura en cuestión; lo cierto es que cualquier currículo del nivel superior contiene, al menos, un curso de matemáticas con tales temas. En algún sentido, se ha dicho que el cálculo es el paradigma contemporáneo de la educación matemática al nivel superior (Farfán, 1992; Robinson, 1966), aunque constituye a la vez una asignatura con altos índices de reprobación.

La enseñanza de los principios del cálculo ha resultado siempre problemática (Robinet, 2001), quizá sea esa la razón por la que se les enseña a los estudiantes de forma mecánica, trabajando con reglas para evaluar funciones o calcular derivadas y resolver problemas típicos. En consecuencia, la enseñanza tradicional se ha centrado en evaluar habilidades adquiridas en este dominio, el de una práctica algorítmica de naturaleza algebraica para los objetos del cálculo. Si bien este enfoque de enseñanza logra disminuir sustancialmente el porcentaje de estudiantes no acreditados, no logra que estos comprendan de manera satisfactoria conceptos y métodos del cálculo. En educación superior, la enseñanza del cálculo se ha declarado un problema grave. El cálculo ocupa un lugar primordial en este nivel, sus vínculos tanto con la matemática elemental, así como su papel en matemáticas y ciencia lo hacen un conjunto de conocimientos con valor teórico y empírico indispensable en la educación superior tanto de las ciencias exactas como de las humanidades. Cabe mencionar, como dato adicional, que el curso de cálculo es uno de los factores causal de la deserción estudiantil en instituciones públicas y privadas en educación superior en nuestro país (Albert, 1996). Por otro lado, el cálculo es la herramienta matemática que ha servido para la descripción de los fenómenos de un mundo cambiante, se ha dicho que es la matemática del cambio y la variación. Sin embargo, tradicionalmente el cálculo ha sido entendido como el estudio de los procesos inversos de derivación e integración en un contexto simbólico.

EL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

El pensamiento y lenguaje variacional describe, genéricamente, un programa de investigación en marcha, un programa no excluyente ni de orientaciones teóricas ni de acercamientos metodológicos, con el que se busca entender cómo es que se construye o se forma progresivamente entre los estudiantes dicho pensamiento. Entendemos por el estudio del pensamiento y lenguaje variacional como aquel que se ocupa de los fenómenos de enseñanza, aprendizaje y comunicación de saberes matemáticos propios de la variación y el cambio en el sistema educativo y en el medio social que le da cabida. Por aquel que pone particular atención en el estudio de los diferentes procesos cognitivos y culturales con que las personas asignan y comparten sentidos y significados utilizando diferentes estructuras y lenguajes variacionales. Es una línea de investigación que posee una orientación múltiple, por un lado se ocupa del estudio de estructuras variacionales específicas desde un punto de vista matemático y fenomenológico, en segundo término, estudia las funciones cognitivas que los seres humanos desarrollan mediante el uso de conceptos y propiedades matemáticas del cambio y en tercer lugar, tiene en cuenta los problemas y situaciones que se abordan y resuelven en el terreno de lo social mediante estructuras variacionales consideradas tanto en la escuela como en el laboratorio (Cantoral, 1997).

Queremos comprender en esta investigación cuáles son las tramas que se establecen entre profesor, alumnos y contenido curricular al momento en que ellos construyen explicaciones que comunican a través de sus discursos. Razón por la que emprendimos un amplio estudio sobre las formas en que los profesores desarrollan un conocimiento específico sobre la manera de enseñar su materia, centramos la atención muy particularmente cuando se precisa tratar con una idea matemática fundamental para el cálculo infinitesimal, cuando se ocupan de la noción de *variación*.

El objetivo principal de la investigación fue el de localizar y analizar las maneras en que se introduce y desarrolla dicha noción de variación en una situación de enseñanza particular. Así que consideramos que una forma particular para abordar el estudio de la enseñanza de la noción de variación fuera la de abordar el discurso en el aula a través del papel que desempeña la explicación en la clase de matemáticas universitarias. Pues en nuestra opinión, es en el aula, al seno de la clase, donde la palabra —en tanto medio de comunicación— se utiliza la mayor parte del tiempo, la comunicación y, específicamente, la interacción entre el docente y el alumno y entre los propios alumnos se considera en la actualidad como la base del proceso de aprendizaje (Tusón & Unamuno, 1999). Una de las maneras de tener acceso a la información sobre cómo se introduce y se desarrolla la noción de variación en la clase de cálculo, fue estudiando el discurso del profesor y también el discurso de la interacción social que se realiza en el aula escolar entre los actores. El problema de investigación se delimitó por medio de las siguientes preguntas: ¿Qué papel explicativo juega la variación en el discurso del profesor? ¿Cómo evoluciona la noción de variación en el curso de la interacción didáctica? ¿Cuáles son las interacciones de los alumnos ante el discurso del profesor?

MARCO TEÓRICO Y METODOLÓGICO

Para realizar las observaciones nos apoyaremos en un particular punto de vista teórico. Nos basamos en las teorías de Transposición Didáctica desarrollada por Chevallard y la teoría de las situaciones Didácticas iniciada por Brousseau. La primera nos interesó desde la perspectiva del saber [1] mientras que la segunda nos proveyó del sustrato situacional que caracteriza a la enseñanza. El saber a en-

[1] Se hace necesario estudiar las condiciones de los procesos de formación de conocimientos en los alumnos (las manifestaciones de comportamientos observables) en particular aquellos que pueden ser

señar se ve afectado por la acción misma de enseñarlo, es decir, aun cuando el maestro introduce una noción en su clase, ésta se modifica por la situación de enseñanza y produce lo que se denominan una transposición interna.

En la teoría de situaciones, el análisis de los patrones de interacción no queda reducido a la relación entre profesor y alumnos, pues se trata de caracterizar fenómenos didácticos, esto es, regularidades observables en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas pero explicables dentro de un marco teórico propio. Se describe como uno de los fenómenos de la didáctica al denominado "envejecimiento de las situaciones de enseñanza", en el cual, los patrones de interacción se refieren a las relaciones entre el profesor, los alumnos y las propias situaciones a través de las explicaciones. Se ha podido dar cuenta, en este estudio, de este fenómeno didáctico al interior del aula, ya que con las interacciones se modifican las situaciones de enseñanza del profesor, cuando las interacciones se producen cambian entonces las relaciones de poder y las situaciones de enseñanza mismas.

En nuestro caso particular estamos estudiando un fenómeno didáctico en el campo de la matemática universitaria mediante una aproximación sistémica. Reflexionamos sobre lo educativo desde una perspectiva en la que la triada, saber, profesor, alumno, desempeña el papel de unidad de estudio. Sin embargo aunque podemos explicar las interacciones entre dichos polos con base en las nociones, contrato, situación o transposición, quisimos profundizar mas puntualmente en el papel del discurso en el aula cuando se pretende explicar entre los actores. Razón por la que incorporamos elementos de los estudios cualitativos de corte etnográfico.

El enfoque etnográfico permite obtener información relevante del contexto de la clase que es relevante para la interpretación. Esta perspectiva teórica permite realizar un detallado estudio secuencial de las situaciones de enseñanza, para describir el trabajo que se realiza en cada intervención que antecede o precede a otra situación de enseñanza. Este nivel de detalle, sin perder el contexto general de cada clase impartida en cada aula escolar particular, es en nuestra opinión el que permite reconstruir el sentido que tienen las intervenciones para los participantes.

LAS EXPLICACIONES EN LA CLASE DE MATEMÁTICAS

Si se concibe a la enseñanza como un espacio de comunicación, el vehículo que sirve de transporte para la mayoría de los aprendizajes que se dan en el salón de clases, es el discurso. Los aspectos del aula están poblados de diferentes lenguajes, que unos emiten y otros intentan interpretar correctamente. Idealmente el aula es ese espacio común para el entendimiento mutuo, para cierta negociación de conocimientos y para la formación de significados compartidos. En este sentido, enseñar es fundamentalmente comunicar (Edwards y Mercer, 1987). Desde esta perspectiva, se sugiere que se analice aquello que

---

controlados o realizados por el maestro. El objeto de la teoría de situaciones didácticas se ocupa, entonces, de investigar los modelos que relacionan a: los estudiantes, el maestro, la concepción de la materia a enseñar, las estrategias, la evolución, etc. y estas situaciones se dan en presencia de: **el saber:** una parte de teoremas matemáticos, acompañados de conceptos metateóricos. **Los sujetos:** sus estados iniciales, sus metas, la manera de aprender, de evolucionar, etc. Los **medios didácticos**: el maestro, sus decisiones, un conjunto de estrategias de aprendizaje, los medios materiales.

se dice y cómo se dicen las cosas que se hacen en las clases. Partimos de que el discurso en el aula tiene una organización explicativa, pues toda intervención se puede ver orientada hacia la comprensión de alguna idea, noción o concepto.

Para estudiar el *discurso de los profesores* resulta conveniente entonces analizar algunas situaciones de aula en las que hacen uso de una serie de recursos discursivos para *explicar* la noción de *variación*. Se analiza el papel de las acciones explicativas en la construcción del conocimiento y la forma y situaciones en las que los profesores hacen uso de este recurso. Sin embargo, nos ha interesado también estudiar las *prácticas discursivas en la interacción* en el aula para indagar el papel de la explicación en la construcción del conocimiento en el contexto escolar. Consideramos que, uno de los objetivos del docente es hacer comprender a los estudiantes los conocimientos matemáticos o los saberes que enseña. Entre los esfuerzos que el profesor emprende figuran las *explicaciones*.

Por *explicación* se entiende aquellos recursos discursivos que tienden a comprender una noción o idea, un hecho, objeto, fenómeno, esto es, que van más allá de una descripción, para tratar de encontrar las causas que lo provocan o permiten entenderlo. La explicación es una actividad reflexiva en relación a otra. Entonces la explicación es un medio explícito que dispone el profesor o el estudiante para unir o enlazar las ideas. Da una o más razones para volver comprensible un dato, un fenómeno, un resultado, un comportamiento (Duval, 1999). La explicación es uno de los medios que utiliza el profesor para hacer comprender o "dar sentido", es el objeto de una comunicación, de un debate, o de una discusión. La explicación puede aparecer como una comunicación de información útil o como un medio de facilitar rápidamente una comunicación o una argumentación.

Como dijimos anteriormente, una explicación da una o más razones para volver comprensible un dato, un fenómeno, un resultado, un comportamiento, etc. Es una actividad importante que parece estar ligada al razonamiento (Duval, 1999). El objetivo de una explicación es encontrar el entendimiento (Sierpinska, 1994). La explicación tiene un rol de explícitar el sentido de un objeto (método, término o enunciado), es el medio utilizado por el docente y por los estudiantes para mostrar o investigar la comprensión. La explicación puede tener como objetivo enseñar, convencer, requerir un orden, obtener una ventaja, etc. Hay una gran diferencia de rol y de forma entre las explicaciones proporcionadas por el profesor a los estudiantes y las proporcionadas por un estudiante a su profesor o bien las explicaciones dadas por un estudiante a sus compañeros. Estas clases de explicaciones todavía están subdivididas siguiendo los objetivos mismos de las situaciones: la explicación de una consigna, las de un error, las de una ausencia, las de un teorema, aquellas que pueden ser propuestas, impuestas o solicitadas, y en fin; dichas explicaciones son dadas para mirar las diferencias o asimetría en el uso del lenguaje.

Recursos discursivos del profesor para enseñar la variación: las explicaciones

Para estudiar los recursos o elementos discursivos del profesor donde aparece la noción de variación, dirigimos el análisis hacia las situaciones en las que ellos explican los diferentes temas de estudio, función y derivada en nuestro caso. Las secuencias discursivas seleccionadas son aquellas en las que se puede identificar con claridad, desde nuestro punto de vista, a la noción de variación.

Un primer asunto que nos interesó explorar fue el concerniente a las ideas que tienen los docentes de la noción de variación, ello a través de las explicaciones que elaboraron en el salón de clase y también con base en las modificaciones que hicieran de estas explicaciones en su interacción discursiva con el fin de lograr acuerdos sociales. Algunas secuencias discursivas fueron cortas y otras un poco más largas, pero a causa de que la interacción que se da en el aula es complicada de recortar y elegir sólo la explicación del docente, resultó complicado presentar ejemplos de todos los puntos considerados.

De las explicaciones que los profesores dan sobre los asuntos citados enseguida, daremos cuenta del papel que la noción de variación desempeña:

- Cuando emplean a la tabulación como variación numérica
- Al momento de construir gráficas como la variación de un punto de referencia
- En sus expresiones verbales con referencia a situaciones cotidianas
- Mediante el empleo de parámetros como variables principales
- En los casos en que las derivada son vistas como covariación o comparación *a*/*b*

Un primer acercamiento a la noción de variación, en el aula, es por medio de *la tabulación.* En las explicaciones de los profesores aparece la idea *de relación entre conjuntos, comportamiento de los puntos intermedios, aproximación, rotación, crecimiento o decrecimiento.* En el siguiente extracto, el profesor explica que para hacer la gráfica de una función se precisa de una tabulación y propone para ello a los valores, –3, –2, –1. Esta explicación es interesante ya que el profesor está suponiendo que los alumnos le harán una serie de preguntas que a si mismo se hace y que él se contesta. La primera pregunta se refiere a la selección de números enteros para tabular: *¿por qué en números enteros?*. La explicación del profesor alude a la sencillez que da el trabajar con enteros y lo difícil que resultaría trabajar con fracciones. La segunda pregunta que hace el docente es la siguiente, *¿por qué no evaluamos en más números?*, eso lo deja al criterio del alumno ya que lo que interesa es que visualicen la forma de la gráfica.

> **P:** ... $f(x)=x$, queremos su gráfica entonces vamos a hacer una tabulación, vamos a darle valores a x y encontramos los valores de y, por ejemplo vamos a empezar con –3, –2, –1. ¿Por qué en números enteros? Alguien podría preguntarme, bueno porque son sencillos de trabajar, puedes trabajar con fracciones, pero para que meterse en problemas ¿verdad?... Entonces la pregunta podría ser, ¿por qué no evaluamos en más números?, bueno, eso es a criterio tuyo, o sea si tu consideras que con esos puntos puedes visualizar la forma de la gráfica. Si para ti no son suficientes los puntos tendrías que dar más, ¿cuántos más? Pues los necesarios para que tú visualices la gráfica, la forma de la gráfica, en este caso para hacer su gráfico nos encontramos con esto, –3 con –3, creo que ese ya lo trabajan muy bien; el 1 con el 1, el 2 con el 2, el 3 con el 3, ¿por qué unimos los puntos? porque entendemos que los demás *puntos intermedios*, también los puedes evaluar y encontrar con su respectiva pareja, entonces los unes y te da esta figura, la figura que representa una recta, ahí está,...

Es interesante, en nuestra opinión, la última pregunta que formula el profesor: *¿por qué unimos los puntos?*, dado que su explicación gira en torno de los puntos intermedios dada una sucesión de puntos. Dice, *los unes y te da la gráfica*, aunque dichos puntos intermedios son aquellos de los que él mencionó que era complicado tabular, justamente son las fracciones. En su explicación aparece la noción de *variación numérica*, en el sentido de que es el número el que ordena la posición de los puntos, y en su modelo o representación gráfica, es la tabla de valores la que guía la secuencia de construcción de la gráfica.

En las explicaciones de los tres profesores aparece la idea de mover un punto de referencia como el origen, el vértice, la asíntota, etc. Esta idea ha resultado de gran importancia para construir o elaborar estas explicaciones en torno al movimiento de la gráfica. En la secuencia siguiente, la explicación del profesor gira en torno al desplazamiento del vértice o la *variación de un punto de referencia.* Inicia su explicación haciendo una transformaciones de la función cuadrática $y = x^2$ al sumarle una unidad. $y = x^2 + 1$ desplaza el origen en $y = 1$. La explicación: *se desplaza el origen en* $y = 1$, si bien es proporcionada por un alumno no le fue solicitada. Al restarle una unidad a la función cuadrática básica $y = x^2 - 1$, se desplaza el vértice una unidad hacia abajo y al sumarle una unidad se desplaza el vértice hacia arriba. El docente utiliza el término: *desplaza* que empleara el alumno: *la curva se desplazó una unidad hacia arriba.*

P: Bueno ¿cuál sería la gráfica o cuál es gráfica de la función? ¿verdad? si esa función le sumamos por ejemplo 1, $y = x^2 + 1$ ¿sí?

Am: se desplaza el origen en $y = 1$

P: ¿Verdad que estaríamos haciendo eso? dijera que y va a ser lo que valga en x^2 y eso que estaríamos haciendo sumándole 1 en dónde está en x, en 0 pónganle 1, en 0 pongo 1 y en 1 cuando valga 1 ahora la y va a valer 1 ¿cuánto va a valer?

As: ¡2!

P: Va a valer 2 (...) y entonces la fórmula seguiría siendo la misma, entonces que fue lo único que sucedió, que la curva se desplazó una unidad hacia arriba y si la quisiera yo bajar que podríamos hacer

As: ¡Restar!

P: Restarle 1, ahora cuál sería la gráfica de $y = x^2 - 1$ bueno y aquí le podemos poner esta $y = x^2$ bueno y si regresamos 1 qué va a suceder ¿qué sucedería? Cuando abres al vértice el (0, –1) donde corta al eje x en 1, –1 y entonces esta es la gráfica de $y = x^2 - 1$ esa es la gráfica de $y = x^2$ bueno entonces si yo le resto ¿qué sucede con la curva?

Am: La desplazamos

P: La desplazamos ¿cuántas unidades?

El profesor demanda que los alumnos expliquen su opinión, como se ve en el extracto anterior. Estas preguntas de los docentes propician intervenciones explicativas de los alumnos. Es importante resaltar que resulta de sumo interés para los alumnos el poder mover o desplazar el vértice de su posición inicial. A continuación veremos una explicación del docente que consiste en variar los parámetros que multiplican a la función $f(x) = \text{sen}\, x$ y ver las modificaciones que sufre la gráfica.

P: Bueno ahí, cuando le pone un valor, cuando tenga la variable ahí, lo que incide mucho en el dominio, en el dominio sí, va a incidir en el dominio, o sea que lo que vamos a *variar dependiendo de que cambios le haga es esto* _sen$x$ y al incidir sobre el dominio la imagen también va a cambiar y esto indica que su gráfica no va a ser la función coseno sino que va a ser sen x, pero de principio incide rápidamente

Dependiendo del valor al que se multiplique la función se modificará el dominio y el rango de la función.

En el siguiente fragmento, veremos la explicación del docente al realizar el siguiente ejercicio, vale aclarar que fue un ejercicio de tarea. Se trata de graficar las funciones al variar los parámetros: $f(x)$ = sen x, $f(x)$ = sen $2x$, $f(x)$ = 2sen x, y encontrar algunas diferencias y similitudes entre ellas. Su explicación se inicia con la función básica $f(x)$ = sen x, que oscila entre -1 y 1, y que toma como referencia. Posteriormente explica la modificación que sufrió la función al multiplicarla por 2, la función aumentó al doble, la función se duplicó. Surge una pregunta de un alumno: *¿Es una onda maestro?*; la inquietud es sobre la forma de la gráfica, si sigue conservando la onda. Dice el docente que es una onda central.

> **P:** Cómo quedaría la función. A ver la primera función es ésta $f(x)$= 2sen x ¿verdad? Bueno aquí dice que el doble del seno de 0 pues es 0 el doble de $\pi/2$ es 2 y el doble del seno de p es 0 entonces quiero decir, que si ustedes se acuerdan de la función que trazamos al principio la función senoidal y encontramos que la primera era de este estilo ¿verdad? En donde solamente andaban entre 1 y -1 si ustedes observan era de -1 y 1 esa era la oscilación que tomaban los valores que tomaba el rango, entonces van a ver ustedes que al doble que le va a pasar ahora aumentó al doble, es decir, la función se duplicó si fuera triple entonces la función sería tres veces más, si fuera 4 veces, 5 veces entonces va aumentando, que va aumentando la amplitud.
>
> **Am:** ¿Es una onda maestro?
>
> **P:** Es una onda central
>
> **Am:** Maestro
>
> **P:** Bueno nada más que aumenta la amplitud, va aumentando la amplitud, lo que sale aquí es más ¿no? sería esto, perdón es así entonces ¿verdad? Porque $\pi/2$ es 1, entonces es 1 aumenta el doble eso es lo que quería que observaran el primero, la otra es la función seno doble entonces dice seno del ángulo doble es decir, dos veces el seno de 90, dos veces el seno de 0, dos veces el seno de 180, dos veces el seno de 270 o dos veces el seno de 360 ¿qué pasa ahora con la función? ¿qué pasa con la función $f(x)$ = sen $2x$?
>
> **Am:** Dónde era una frecuencia ahora son dos frecuencias.

La última función es la $f(x)$ = sen $2x$, seno del ángulo doble, dice el docente. El profesor hace la siguiente pregunta: *¿Qué pasa con la función $f(x)$= sen $2x$?* Una alumna responde: *donde era una frecuencia ahora son dos frecuencias*; aunque el docente sabe que esa respuesta es correcta, no la valida inmediatamente y prosigue a dar algunos valores de ángulos para evaluar la función y llegar a la respuesta que él desea.

En el siguiente fragmento, podemos ver la explicación del profesor a través de esta notación de la cual dice que si se varía la x, se pregunta cómo varía la función, o equivalentemente si cambia la x, cómo es que cambia la función.

> **P:** ... Este símbolo $\frac{df}{dx}$, este símbolo dice mucho lo voy a leer dice: Si variamos la x ¿cómo varía la función? que es lo que dice aquí la gráfica, no se si estén de acuerdo, la x es 1 y la variable ahora se

llama 2 ¿cómo varía la función? la función se llama ahora F de 2 así se puede leer esto, si tú varias la x como varía la función? o también puedes leerlo así, si tu cambias la x cómo va a cambiar la función? Así es la forma de leer yo creo que para mí sería una forma más correcta de estar hablando de derivadas, sería mejor hablar así, o sea aunque cueste más trabajo sería más correcto hablar así que decir simplemente la derivada de F con respecto de X se pierde mucha información diría yo en cambio si yo digo ¿si yo varío la Z cómo varía la función? Si yo varío la R como varía la S ¿verdad?

El profesor explica que esa es la forma correcta de hablar de derivadas, que cuesta más trabajo, que sería más correcto hablar así que decir simplemente $f'(x)$. Esto es la *variación de los valores del cociente.*

La construcción de significados a través de la explicación: la variación

En las intervenciones explicativas por parte del maestro, mismas que fueron presentadas anteriormente, se analizó también el efecto que estas intervenciones explicativas tuvieron en la estructura de la clase a más largo plazo. Esto es, en la interacción discursiva con los alumnos resultó muy interesante dar cuenta de cómo se va construyendo y se van negociando las explicaciones en la interactividad del docente con los alumnos.

Dado el carácter interactivo de la construcción de significados, en el caso particular de las explicaciones, se requiere que las unidades mínimas de análisis sean secuencias de interacción y no frases o mensajes descontextualizados (Candela, 1999). Así el problema planteado condiciona las características de las unidades de análisis. Una unidad de análisis natural es la clase completa en la que se delimita y trabaja el contenido de un tema curricular dentro de la jornada escolar. La clase se describe a través del contenido de la lección y de la secuencia de actividades que se van desarrollando en una o dos horas de trabajo que dura el tratamiento del tema o la clase. Las secuencias discursivas seleccionadas fueron aquellas donde se identificaron actividades y explicaciones de los profesores frente al contenido cuando se trata con la noción de variación. Los siguientes extractos forman parte de las clases o sesiones de un primer semestre de Ingeniería.

En las secuencias analizadas, los profesores hacen uso de diversos *mecanismos discursivos* para orientar las versiones de los alumnos hacia los acuerdos:

- Demanda de explicaciones y justificaciones.
- Formulaciones de lo que los alumnos dicen.
- Reorientaciones o cambio del tema como forma de evadir.
- Solicitud de manifestaciones colectivas para llegar a un acuerdo.
- La repetición de una pregunta puede interpretarse como una estrategia para sondear las opiniones que existen en el grupo.
- Considerar los errores ya que son parte de una aproximación a la respuesta correcta.
- Considerar términos usados por los alumnos.
- A través de la pregunta se sigue cuestionando.

Estos mecanismos, utilizados por el docente para orientar la participación de los alumnos, hacen ver que los profesores no recurren a la imposición sino más bien recurren a diversos recursos o procedimientos hasta convencer a sus alumnos a fin de validar el contenido establecido en el aula. Por otro lado, los alumnos demandan un acuerdo cuando no lo hay, mostrando su rechazo a conservar sus dudas. También actúan construyendo acuerdos en torno a versiones alternativas a la de los profesores cuando éstas no les convencen. Estas opiniones propician que el docente modifique su explicación, su situación de enseñanza, ya que no le funciona. Esto suele presentarse al momento de desarrollar la clase y cuando la lección precisa de mayor interacción entre docente y alumnos. Este fenómeno está ligado al control de la transposición didáctica.

Los docentes se enfrentan a dificultades cuando intentan tomar en cuenta las explicaciones o las versiones que sostienen los alumnos para construir acuerdos en la negociación de los significados en el aula. Las dificultades del profesor ante grupos que, en promedio, cuentan con 50 alumnos discutiendo todo y ellos muestran la capacidad de conducir, de guiar el proceso con mesura hacia los alumnos.

Los conflictos y los acuerdos sociales

El proceso de dotar de significado a un tema está basado en un consenso de trabajo y es así un producto de la negociación. Un consenso de trabajo es un acuerdo tentativo logrado mediante la negociación en la interacción social. Pusimos en esta sección un particular interés en los acuerdos sociales, es decir en los momentos en los que se expresan y comparten las intenciones y las orientaciones. Un acuerdo es también una opción que sirve para expresar las intenciones comunicativas. Por acuerdo se entiende las maneras diferentes de mostrar orientación positiva hacia el contenido proposicional del enunciado del hablante precedente (Moyer, 2000). Sostenemos que la forma de expresar acuerdos está relacionada con la formación de significados asignados a la noción de variación. De ahí que no reportemos lo que los alumnos responden ante una tarea preestablecida, bien o mal matemáticamente, sino que se busca caracterizar cómo las interacciones entre profesor y alumnos a propósito de un saber, influyen sobre la formación de significados matemáticos.

Los *hechos* de la actividad humana son construcciones sociales; existen por acuerdo social o consenso entre los participantes en un contexto o situación. La discusión resultante los conduce a llegar a una comprensión de las ideas en desarrollo y los intentos de solución de los participantes. Los acuerdos sociales son uno de los rasgos del discurso que nos lleva hacia la aceptación entre los participantes de las versiones construidas en la interacción, manteniendo el acuerdo como perspectiva, independientemente de que éste se logre o no en todos los casos (Edwards y Potter, 1992). Las explicaciones, en especial sobre la variación, se pueden orientar hacia la construcción de acuerdos sociales entre los participantes. Estas explicaciones tienden a comprender una idea o noción para tratar de encontrar las causas que lo provocan o permiten entenderlo y llegar a un acuerdo. Cuando se presentan situaciones de conflicto en el aula, la interacción discursiva adquiere mayor importancia ya que las explicaciones se van construyendo entre los participantes, manteniendo el acuerdo social como perspectiva, en donde no necesariamente se llega a divergencias de ideas.

Dependiendo de las situaciones de interacción, los participantes construyen explicaciones diversas sobre un contenido. Estas explicaciones se comparten, negocian y reconstruyen en el proceso mismo de la interacción y es en ese proceso interactivo donde se van definiendo las explicaciones y sus significados para los participantes. Esta tendencia hacia una versión aceptada es una característica del discurso situado, por la cual los participantes hacen uso de recursos retóricos para persuadir a otros y tratar de validar una versión del contenido con base en su carácter discursivamente compartido. Estudiar los acuerdos sociales es una manera de estudiar cómo se construye una explicación del contenido, cómo se trabaja en la interacción discursiva, qué papel tienen los acuerdos sociales, cómo se manejan los participantes en estos acuerdos sociales

El difícil papel de los conflictos y los acuerdos sociales

A continuación se presenta el análisis de la secuencia de turnos de un extracto de una clase en la que se genera un conflicto sobre un contenido, se debaten en la interacción discursiva ya que van construyendo explicaciones entre los participantes. Se analizará la orientación de los docentes hacia los acuerdos sociales en el aula cuando el profesor explica el tema de funciones cuadráticas y surge un conflicto. Dado que esta secuencia es muy larga, se intentarán ilustrar sólo algunos aspectos del conflicto y de los acuerdos.

El docente propone un ejercicio que consiste en graficar las función $f(x) = x^2$, $f(x) = x^2 + 1$ y $f(x) = (x + 1)^2$. Las dos primeras por medio de lo que ha denominado técnica de graficación y la última por medio de la tabulación. Esto lo sugiere de esto modo porque primero tabulan y una vez que las reconocen, los lleva a que utilicen lo que él denomina como técnica de graficación. A solicitud del docente, la tercera de las funciones $f(x) = (x + 1)^2$, se grafica por tabulación. El profesor utiliza el recurso de solicitar la respuesta al alumno que está justo al frente y al grupo también al decirle: *¿verdad que la vamos hacer así?* Es un primer paso del profesor para intentar un acuerdo con el grupo, aunque parecería ser una imposición. Vamos a ver cómo se va orientando el discurso en el proceso del debate.

> **P:** ... ¿quién pudiera hacerlas? Usted va hacer directamente la segunda $f(x) = x^2 + 1$ ¿verdad?, la tercera $f(x) = (x + 1)^2$ la va hacer por tabulación ¿verdad que la vamos a hacer así?

Al inicio de este extracto, el docente solicita que un estudiante pase al frente a graficar una cierta función. El alumno inicia el tercer ejercicio pero su estrategia, para tabular la función, consiste en desarrollar el binomio al cuadrado, esto crea un pequeño conflicto. El profesor le dice que hay que tabular y el alumno no entiende dónde está el error y pregunta: *¿qué está mal?,* ya que había desarrollado el binomio y tabulado el primer valor. El alumno está demandando una explicación de parte del docente para aclarar dónde estuvo el error. El objetivo del docente era discutir la variación en la forma de la gráfica que produce la pequeña familia de funciones, para los alumnos en cambio, la labor era ejercitar las técnicas.

> **Am:** Oiga esta va a ser igual $f(x) = (x + 1)^2$, lo va a elevar

> **P:** Tiene que ir tabulando, póngase a tabular x y y, -3 donde está x va a poner -3

> **Am:** ¿Qué está mal?

> **P:** Como encontró el 10

> **Am:** Bueno, o sea lo factorizo ó lo dejo así nada más

> **As:** Esta mal, esta mal

P: Primero hay que aclararle varias a usted varias cosas, mire

Am: Para desarrollar el binomio al cuadrado

P: Sí, pero para qué, ¿cuál es el objetivo de hacer eso? Por qué lo hizo así, lo que usted crea, o sea no importa

Am: Para poder tabular ¿no?

A coro algunos miembros del grupo le dicen que está mal, hay un desacuerdo con el procedimiento del alumno. El profesor tampoco acepta este desarrollo del binomio y pregunta al alumno que cuál es el objetivo de hacer el desarrollo y el alumno le dice que para poder tabular la función. El profesor hace una reflexión, dice que es muy importante saber por qué se hacen las cosas (se refiere al desarrollo del binomio y la tabulación) y dice que: *eso nos sirve mucho como profesor para tomarlo en cuenta*. De nueva cuenta a coro, algunos miembros del grupo está rechazando lo realizado por el alumno y se mantiene el conflicto.

El docente intenta regresar a la idea original que era la tabulación argumentando que la tabulación implica una evaluación, de ahí que ejemplifique con la evaluación para el valor de -3, sustituye y encuentra el valor con la ayuda de la mayoría. Pero el alumno no acepta que su estrategia no sea la correcta al decir: *¿Entonces todo está mal?* La manifestación del profesor contra el desarrollo del binomio no impide que el alumno cuestione su explicación y se propicia y continúa el desacuerdo.

P: Necesita desarrollar la tabulación tal como la hemos trabajado implica una evaluación, ¿verdad? una evaluación sobre una expresión que es ésta $f(x) = (x + 1)^2$, qué entenderé que él debería de haber hecho -3 donde está x y le vas a poner -3, $-3 + 1$

As: -2

P: $(-2)^2$

As: 4

P: Y ponerle aquí el 4

Am: ¿Entonces todo esto está mal?

Así, nuevamente aparece una doble función en una frase, *¿entonces todo está mal?*, en este caso, la de dialogar simultáneamente con las versiones distintas. Por un lado la versión del docente y por otro lado la del alumno. Ante el comentario anterior que hizo el alumno, el profesor cede un poco al decir que en un momento dado se puede hacer este desarrollo matemático, pero que los desarrollos matemáticos en este tipo de situaciones se hacen para reducir la expresión, más no para agrandarla. El profesor se da cuenta de que no sólo el alumno que está en el pizarrón hizo este desarrollo, también algunos más. Para convencerlos de que no se debe hacer este desarrollo propone un contraejemplo, se trata de una función que tiene dos términos idénticos $-x^2$ y $-x^2$, y dice que en ese caso se antojaría antes de empezar a darle valores agrupar y quedaría $-2x^2$. Los recursos discursivos del profesor para orientar hacia un acuerdo grupal parecería conducir a un debate con los alumnos que desarrollaron el binomio más que llegar a un acuerdo.

Al final del extracto anterior el profesor busca el acuerdo social al preguntar, en voz alta, por qué desarrollan el binomio. Esta pregunta nuevamente conduce a la participación de varios alumnos defendiendo su postura. El alumno que está al frente explica que va a salir lo mismo si desarrolla o no el binomio al cuadrado, intenta defender su postura ante el profesor y algunos de sus compañeros, para ello propone un ejemplo al evaluar con -3 en el binomio y -3 en la función original y muestra que el resultado es el mismo pero no logra convencer al profesor.

Am: Va a salir lo mismo, no en otra forma si usamos el binomio $(-3)(-3) = 9$, $2(-3) + 1$ sale a 4 positivo. Si usamos el binomio como quiera va a salir lo mismo.

P: Si yo entiendo eso, lo que yo estoy preguntando es por qué tienden a desarrollar, los que lo hicieron claro, no hay ningún comentario aparte de su compañero alguien que lo haya desarrollado que me diga por qué lo hizo.

Am: Por lo mismo que dice la función $f(x) = (x + 1)^2$ o sea

P: ¿Por qué desarrollaron el binomio?

Am: Porque siempre que nos ponen el binomio tendemos a desarrollarlo

P: ¿Es para llegar a la función básica?

Af: Yo pienso que muchos lo desarrollamos porque ya lo hacemos de una forma mecánica, siempre que nos ponen el binomio de productos lo que tendemos a hacer es a desarrollarlo únicamente.

P: Sí, ese si es un buen comentario, dice que eso nos ayuda a nosotros como profesores, nos ayudan ese tipo de comentarios, porque así sabemos más o menos como actuar en lo siguiente. Aquí lo que tratamos de hacerles es una tabulación, o sea una evaluación, les vuelvo a insistir el desarrollo se hace pero para reducir una expresión, en cambio aquí, se agranda, entonces el comentario queda así, entonces no es necesario hacerlo porque nos complica más la situación, nos hace trabajar más, nada más es por eso, que sea lo mismo, si estoy de acuerdo pero esa no es la discusión sino el trabajo que estamos realizando.

En esta intervención la pregunta se ha convertido en una forma de orientación hacia un acuerdo: *¿por qué desarrollaron el binomio?*, aunque la pregunta va dirigida a los demás alumnos que también desarrollaron el binomio. El docente busca llegar a un acuerdo. Una de las respuestas de los alumnos se refiere a que lo desarrollan de manera automática cada que se les presenta el binomio, ellos tienden a desarrollarlo. Otra alumna, enfatiza... cada que nos ponen un binomio actúan de modo mecánico. El profesor interviene diciendo que sí bien se trata de un buen comentario, pues eso les ayuda a los profesores a saber cómo actuar en la siguiente ocasión, el profesor intenta concluir y comenta que los desarrollos se hacen para reducir una expresión no para agrandarlas, que no siempre es necesario hacerlos porque se puede complicar más la situación. Por un lado, hay un *acuerdo* entre el profesor y algunos alumnos en que se obtiene lo mismo, pero por otro el docente defiende su postura al decir que esa no es la discusión. Él ha denominado la técnica de graficación ya que después de tabular y reconocer el comportamiento de la función se usa la técnica y no se podría usar esta técnica para el binomio ya desarrollado.

Se podría decir que han llegado a un acuerdo, aunque el alumno que está en el pizarrón se resiste a modificar su procedimiento.

Am: Lo corrijo o así lo dejo

El docente le dice que lo corrija y enseguida el alumno prosigue a dar valores para hacer la tabulación. El profesor busca llegar a un acuerdo social al preguntar: *¿hacia dónde la movió?*, busca que todos expresen su respuesta. El grupo le responde que hacia la izquierda.

Para finalizar la clase, se presenta un titubeo al acuerdo social ya que surge una pregunta que hace que el profesor modifique una vez más su discurso: Maestro *¿Siempre se va po-*

der hacer? El alumno se refiere a la graficación de funciones, ya sea por medio de la tabulación o por la técnica usada por el profesor.

Am: Maestro ¿siempre se va poder hacer?

P: ...si yo la tabulo no la voy a hacer ahorita pero, si yo la tabulo me voy a tardar mucho para encontrar su gráfica $f(x) = x^3 + x^2 + x + 1$. Lo que voy a hacer a continuación es aplicarle el cálculo, con este ejercicio, lo que quiero darles a entender es que para hacer una gráfica con la mejor formación posible tenemos necesidad del cálculo o sea necesitamos saber derivar, o sea aprendiendo algunas metodologías, vamos a hacerlo $f'(x) = 3x^2 + 2x + 1 = 0$

As: (...)

P: ya que no me bastan las técnicas de graficación ni la tabulación, necesito el cálculo ... A esto le llama un valor máximo y a esto un valor mínimo, yo lo que quiero es también saber donde cambia la forma o sea las formas las tengo así ...

El profesor propone una misma función, pero sumándole una x^2, que sería $f(x) = x^3 + x^2 + x + 1$, dice el docente que lo que se entiende es que es una función cúbica, que si la tabula se va a tardar mucho para encontrar su gráfica y lo que se va hacer es aplicarle el cálculo, para hacer una gráfica con la mejor forma posible se tiene la necesidad de recurrir al cálculo, que se necesita derivar la función y quedaría $f'(x) = 3x^2 + 2x + 1 = 0$. Después de esta explicación se escucha un murmullo, como una manifestación de que no existe acuerdo. Explica que no basta con las técnicas de graficación, ni la tabulación, que se necesita del cálculo. Lo que se va a investigar es que a veces tiene diversas formas, entonces el matemático (el profesor es físico) a esto le llama un valor máximo y a esto un valor mínimo y que también se desea en donde cambia la forma de la gráfica (variación de las pendientes).

El docente modificó la situación de enseñanza (fenómeno de envejecimiento de las situaciones de enseñanza) que giraba en torno a la graficación. Recurrió al cálculo, a la derivación, a los máximos y mínimos para graficar una función y para poder proporcionar una explicación. El desacuerdo de un alumno o de varios, como en este caso, influyen definitivamente en los recursos discursivos que el docente tiene que usar y con esto orientar el contenido del discurso posterior en el contexto creado en la interacción.

Otro aspecto importante que puede concluirse de este análisis es la fuerte presencia de las intervenciones de los alumnos en la dinámica del discurso en el aula, ya que las intervenciones de ellos logran *modificar* en diversas ocasiones las situaciones de enseñanza, y por lo tanto el discurso y la explicación del docente. Esto se puede observar en secuencias de interacción largas en donde los *significados* se elaboran por medio de *negociaciones* por las que el grupo llega a estar de *acuerdo* sobre ciertas convenciones. El resultado final de estas negociaciones tienen propiedades emergentes: a causa de las interacciones, las contribuciones individuales pueden añadir algo sobre lo que nadie había pensado y anticipado. En esto radica la gran importancia que tiene estudiar la dinámica del aula y no sólo centrar la atención en los logros de aprendizaje sin contexto escolar.

Variaciones en las relaciones de poder

Así mismo quisimos confirmar o refutar la afirmación de que las clases de cualquier nivel y de cualquier asignatura siguen una estructura establecida del discurso (pregunta-respuesta–evaluación, nombrada en la literatura como IRE). Este asunto, si bien no fue el objetivo principal de esta investigación, se fue tornando conforme se avanzaba en un verdadero reto para nosotros, pues la problemática ligada al estudio de la clase de matemáticas en la educación superior, resultó más compleja que la señalada por Cazden, (1991). Los alumnos por ejemplo, pueden ser quienes pregunten o incluso cuestionen y evalúen a su maestro o a sus propios compañeros. La naturaleza propia del contenido matemático en cuestión planteaba un escenario donde la asimetría clásica maestro–alumno, se veía seriamente puesta en duda. La noción de variación pertenece simultáneamente al currículo de la física, la química, la biología, la matemática, la ingeniería y..., las posibilidades de pasar de una a otra nos brindaron un escenario idóneo para nuestros objetivos de investigación.

Las explicaciones son un recurso del cual se apropian los alumnos para construir versiones distintas a las del profesor y las cuales modifican la dinámica en el aula. Hay una participación activa y dinámica de los alumnos que no parece ajustarse al esquema IRE.

COMENTARIOS FINALES

En este trabajo, no se pretende señalar cómo debe enseñarse la variación, pues este estudio puede resultar ilustrativo para los docentes y posiblemente pueda considerarse para orientar su trabajo cotidiano, aproximándose con ello a la manera en que ellos se van formando en la práctica. Interesa más bien, poner en tela de juicio, desde el contexto específico del aula escolar, la concepción de que en el salón de clases los discursos son autoritarios y los formatos comunicativos son rígidos por parte del docente; discursos poco reflexivos, en los que no se busca conocer cómo llega la información a los alumnos. Que los conocimientos ya están acabados, que son los que se pretende enseñar en la educación superior y la autoridad que se le atribuye al docente como conocedor de la verdad en el aula. Desde esta perspectiva es interesante contribuir al debate del papel del análisis del discurso como medio para explorar las explicaciones en el aula de matemáticas.

Se observa que los profesores con frecuencia promueven la producción de explicaciones al demandar que los alumnos expliquen o justifiquen sus puntos de vista. Los docentes también aportan explicaciones para apoyar una versión o para rechazar otras. Con estas acciones discursivas los profesores trabajan para crear acuerdos en el grupo. Sin embargo, los alumnos proporcionan sus puntos de vista cuando es solicitado por el profesor, pero también defienden sus versiones, cuando el profesor explica y los alumnos no comparten la versión. Los alumnos al no compartir la versión del profesor pueden contradecirlo y no seguir o apoyar su versión, incluso hacen que el docente modifique su discurso. La riqueza de la construcción de significados en la interacción, más que un proceso que parte de la diversidad de opiniones termina como un proceso donde se negocian y articulan significados, pero también se abren alternativas explicativas, se plantean debates y explicaciones que casi siempre llegan a una conclusión. En este sentido, se pude afirmar que la apropiación de conocimientos precisa de una negociación de significados por parte del docente y de sus alumnos.

Se logró capturar una gran diversidad en las explicaciones de los profesores en torno a la noción de variación. En las diversas intervenciones de los docentes se identificaron explicaciones donde se aprecian sus propias nociones en torno a la variación. Por ejemplo, la variación de parámetros (rota, traslada, la sube), la asignación de un significado geométrico a las funciones: traslación, inclinación, rotación, desfasamiento, sube o baja, crece o decrece. Se le atribuyeron nociones de movimiento a las gráficas, a puntos de referencia como el vértice, el origen, asíntota, línea, tales como: se desplaza, sube o baja, se recorre, se mueve, corrimiento. Aproximar valores a un número. *df/dx* como la variación de los valores del cociente, la variación de un ángulo, de un punto de referencia. La sucesión de puntos intermedios.

Centremos un momento en el discurso de los profesores considerados en este estudio sobre la idea de mover un punto de referencia, como el origen, el vértice o la asíntota. Nos parece que ello ha resultado de gran importancia para elaborar sus explicaciones en torno al movimiento de la gráfica y de ahí enfatizar el papel de la noción de variación.

De este modo, hemos podido constatar que el fenómeno de envejecimiento de las situaciones de enseñanza, se ve afectado por el papel que juegan las explicaciones como medio de interacción discursiva en el aula. Su secuenciación, su función pragmática, su papel discursivo como base para la negociación de significados han sido claramente detectadas y reportados en este estudio. En nuestra opinión, es fundamental realizar estudios sobre la vida cotidiana en el aula, además de seguir investigando sobre lo que un alumno puede o no puede realizar como tarea matemática, ello en virtud de que la dinámica del aula, permite entender la forma en que el conocimiento es el producto directo de una negociación, y no solo de una estructuración mental.

BIBLIOGRAFÍA

Albert, A. (1996). *La convergencia de series en el nivel superior. Una aproximación sistémica.* Tesis Doctoral. Cinvestav, IPN.

Artigue, M. (1991). Analisis. In D. Tall (Ed.). *Advanced Mathematical Thinking.* (Cap. 11, pp.167 - 198). Kluwer.

Ávila, R. (1996). Detección de algunos obstáculos que dificultan la asimilación y manejo de los conceptos presentes en el análisis y comprensión de los problemas sobre variación. *Publicaciones Centroamericanas* 10(1): 121 - 126.

Ball, D. L. (1991). What's all this talk about discourse? *Arithmetic Teacher* 39(3): 44 - 48.

Bishop, A. (1985). The social construction of meaning – a significant development for mathematics education? *For the Learning of Mathematics* 5(1): 24 - 28.

Brousseau, G. (1986). Fondaments et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 7(2): 33 - 115.

Brousseau, G. (1990). Le contrat didactique: le milieu. *Recherches en didactique des mathématiques* 9(3): 309-336.

Candela, A. (1990). Investigación etnográfica en el aula: el razonamiento de los alumnos en una clase de ciencias naturales en la escuela primaria. *Investigación en la escuela* 13: 13 - 23.

Candela, A. (1999). *Ciencia en el aula. Los alumnos entre la argumentación y el consenso.* Paidós.

Cantoral, R. (1992). Acerca de la intuición del rigor: Notas para una reflexión didáctica. *Publicaciones Centroamericanas* 6(1): 24-29.

Cantoral, R. (1997). *Pensamiento y lenguaje variacional.* Documento interno Cinvestav, IPN.

Carlson, M. (1998). A cross-sectional investigation of the development of the function concept. *Research in Collegiate Mathematics Education, III. Issues in Mathematics Education* 7: 114 - 162.

Cazden, C. (1991). *El discurso en el aula.* Temas de educación, Ministerio de educación y Ciencia. Paidós.

Chevallard, Y. (1991). *La Transposition Didactique.* La Pensée Sauvage.

Duval, R. (1999). *Argumentar, demostrar, explicar: ¿continuidad o ruptura cognitiva?* Grupo Editorial Iberoamérica.

Edwards, D. & Mercer, N. (1987). *El conocimiento compartido: El desarrollo de la comprensión en el aula.* Paidós.

Edwards, D. & Potter, J. (1992). *Discursive Psychology*: Sage.

Farfán, R. (1992). *¿Matemática educativa en el nivel superior? Seis años de investigación en la Reunión Centroamericana y del Caribe.* Publicaciones Centroamericanas 6(2): 236-253.

Flores, A. et al. (1995). *Orquestar, promover y mejorar el discurso matemático en el quinto grado: Estudio de un caso.* Cuadernos de Investigación, PNFAPM.

García, M. (1998). *Un estudio sobre la articulación del discurso matemático escolar y sus efectos en el aprendizaje del cálculo.* Tesis de Maestría, Cinvestav, IPN.

Hoyos, V. (1996). *La transición del pensamiento algebraico procedimental básico al pensamiento algebraico analítico.* Tesis Doctoral, Cinvestav, IPN.

Huertas, J. y Montero, I. (2001). *La interacción en el aula. Aprender con los demás.* Aique.

Josse, E. & Robert, A. (1993). Introduction de l'homothetie en seconde, analyse de deux discours de professeurs. *Recherche en Didactique des Mathématiques* 13(2): 119 - 154.

Mopondi, B. (1995). Les explications en classe de mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques* 15(3): 7 - 52.

Moyer, M. (2000). Estrategias de negociación: Análisis de la partícula no en conversaciones bilingües. *Revista Iberoamericana de Discurso y Sociedad* 2(1).

Piaget, J. (1973). *La representación del mundo en el niño.* Morata.

Pimm, D. (1991). *El lenguaje matemático en el aula.* Morata.

Pimm, D. (1994). Mathematics Classroom Language: Form, Function and Force. En R. Biehler, R. W. Schole, R. Strasser y B. Winkelmann (Eds.) *Didactis of Mathematics as a Scientific Discipline*, 159-169. Kluwer Academic Publishers.

Pirie, S. (1988). Understanding: Instrumental, relational, intuitive, constructed, formalised...? How can we know. *For the Learning of Mathematics* 8.

Pulido, R. (1998). *Un estudio teórico de la articulación del saber matemático en el discurso escolar: la transposición didáctica del diferencial en la física y la matemática escolar.* Tesis Doctoral, Cinvestav, IPN.

Robinet, A. y Speer, N. (2001). Research on the teaching and learning of Calculos/Elementary Analysis. En D. Holton (Ed.) *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level. An ICMI Study*, 283-299. Kluwer Academic Publishers.

Robinson, A. (1996). *Non – standard Análisis*. North Holland Publishing Company.

Sierpinska, A. (1994). *Understanding in Mathematics*. Studies in Mathematics Education, Series: 2, The Flamer Press.

Sfard, A. (2002). Learning mathematics as developing a discourse. En R. Speiser, C. Maher, (Eds.) *Proceedings of 21st conference of PME-NA* (23-44). Columbus, Ohio: Clearing House for Science, mathematics, and environmental educacion.

Seeger, F. (2001). Discourse and Beyond: on the Ethnography of Classroom Discourse. En H. Steinberg, M. Bartolini, A. Sierpinska (Eds.) *Language and Communication in the Mathematics Classroom*, 85-101. National Council of Teachers of Mathematics.

Tusón, A. y Unamuno, V. (1999). ¿De qué estamos hablando? El malentendido en el discurso escolar. *Revista Iberoamericana de Discurso y Sociedad* 1(1).

Vygotsky, L. (1984). Aprendizaje y desarrollo intelectual en edad escolar. Revista de Infancia y Aprendizaje Núm. 27/28.

Woods, P. (1987). *La escuela por dentro, la etnografía en la investigación educativa.* Paidós.

Yackel, E. (2002). What we can learn from analysing the teacher's role in collective argumentaction. *Journal of Mathematical Behavior* 21: 423 - 440.

Zubieta, G. (1996). *Sobre número y variación: antecedentes del cálculo.* Tesis Doctoral. Cinvestav, IPN.

Evelia Reséndiz Balderas

Dirección particular:
10 y 13 Epigmenio García # 617
Fraccionamiento Valle de Aguayo
Ciudad Victoria, 87020, TAMPS.
Teléfono particular: 01-834-3.16.39.48

Dirección laboral:
Centro de Excelencia de la UAT
Primer piso (Posgrado) Colonia
Centro Universitario Adolfo López Mateos
Ciudad Victoria, 87000, TAMPS.
Teléfono: 01-834-3181800 ext. 2817
Fax: 01-834-3181800 ext. 1271

Email: erbalderas@uat.edu.mx

Ricardo Cantoral Uriza

Dirección particular:
Nicolás San Juan 1307-2
Colonia Del Valle
México 03100, DF
Teléfono Particular: 55-56055903

Dirección laboral:
Avenida IPN 2508
San Pedro Zacatenco
México 07360, DF

Teléfono: 55-50613819
Fax: 55-50613820

Email: rcantor@mail.cinvestav.mx