

Algunas explicaciones vigotskianas para los primeros aprendizajes del álgebra

María Cecilia Papini¹

RESUMEN

Este trabajo resulta de un informe de tesis² que se inscribe en la problemática de las relaciones entre psicología cognitiva y didáctica de la matemática. Más específicamente, se propone avanzar en la tarea de precisar en qué sentido la psicología de Vigotsky³ puede resultar relevante para abordar cuestiones relativas a la enseñanza y el aprendizaje del álgebra elemental.

Se estructura el contenido de este artículo alrededor de tres puntos. En primer lugar, se propone una caracterización de la actividad algebraica, donde se retoma y relaciona información proveniente de la Didáctica de la Matemática alrededor de algunas cuestiones del aprendizaje del álgebra elemental. Luego se rescatan algunas ideas de la teoría de Vigotsky con el propósito de establecer relaciones con las explicaciones didácticas trabajadas identificando posibles elementos nuevos que amplíen la descripción del aprendizaje de las primeras herramientas algebraicas. Finalmente, se trata de estructurar una única explicación que permita pensar el aprendizaje del álgebra elemental en la escuela a partir de la articulación de las explicaciones psicológica y didáctica trabajadas.

PALABRAS CLAVE: Aprendizaje del álgebra elemental, Psicología Vigotskiana.

ABSTRACT

This work results from a thesis report that deals with the relations between Cognitive Psychology and Didactics of Mathematics. More specifically, it is proposed to advance in the

Fecha de Recepción: Diciembre de 2002.

¹ *Docente e investigadora del Departamento de Formación Docente y del Grupo de Investigación en Enseñanza de las Ciencias, Facultad de Ciencias Exactas, Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires (UNCPBA), Tandil, Buenos Aires, Argentina.*

² *Titulado "Algunos aportes de la psicología de Vigotsky a la problemática didáctica de los primeros aprendizajes del álgebra elemental", para optar al grado de Magister en Educación orientación en Psicología de la Educación correspondiente al Programa de Postgrado en Educación de la Facultad de Ciencias Humanas de la Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires en convenio con la Facultad de Educación de la Universidad Estadual de Campinas (San Pablo, Brasil), presentado en junio de 2002. Dirigido por Patricia Sadovsky, profesora adjunta ordinaria del Centro de Formación e Investigación en Enseñanza de las Ciencias, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Buenos Aires (UBA), Argentina.*

³ *Se ha decidido utilizar en este texto el apellido del autor ruso con la ortografía "Vigotsky" utilizando el criterio explicado en el texto de Castorina y otros (1996), pero en la bibliografía se ha respetado la ortografía elegida en el texto que se cita.*

task of specifying in what sense Vygotsky's Psychology can turn out relevant to approach the questions related to the teaching and learning of elementary algebra.

The content of this article is structured into three points. Firstly, a characterization of the algebraic activity is set out, where information from Didactics of Mathematics about some questions on the learning of elementary algebra is retaken and related. Then, some ideas from Vygotsky's theory are taken to establish relations with the didactic explanations worked, inferring possible new elements that broaden the learning description of the first algebraic tools. Finally, it is intended to structure a single explanation that allow to think the learning of elementary algebra at school from the articulation of the psychological and didactic explanations worked.

KEY WORDS: Learning of elementary algebra, Vygotsky's Psychology.

RÉSUMÉ

Ce travail est le produit d'un premier rapport de thèse encadré dans la problématique des rapports entre la Psychologie Cognitive et la Didactique des Mathématiques. Plus spécifiquement, le but est préciser dans quel sens la psychologie de Vygotsky peut être important pour aborder certaines questions de l'enseignement et l'apprentissage de l'algèbre élémentaire.

Le contenu de cet article est structuré autour de trois points. D'abord on propose une caractérisation de l'activité algébrique, on reprend et on met en rapport des informations provenant de la Didactique des Mathématiques, surtout en ce qui concerne les questions de l'apprentissage de l'algèbre élémentaire. Puis, on reprend certains notions de la théorie de Vygotsky, avec le but d'établir des rapports entre les explications didactiques travaillées en inférant de probables nouveaux éléments qui étend la description de l'apprentissage des premiers outils algébriques. Enfin, il s'agit de structurer une unique explication qui permet de penser l'apprentissage de l'algèbre élémentaire dans l'école à partir de l'articulation des explications psychologiques et didactiques dont on a parlé.

MOTS CLÉS: Apprentissage de l'algèbre élémentaire, Psychologie de Vygotsky

RESUMO

Este trabalho resulta de um informe de tese que se inscreve na problemática das relações entre a Psicologia Cognitiva e a Didáctica da Matemática. Mais específico, propõe-se adiantar na tarefa de precisar em que sentido a Psicologia de Vygotsky pode resultar relevante para abordar questões relativas ao ensino e à aprendizagem da álgebra elementar.

Estrutura-se o conteúdo deste artigo ao redor de três pontos. No primeiro lugar, propõe-se uma caracterização da atividade algébrica, onde se retoma e relaciona informação proveniente da Didática da Matemática ao redor de algumas questões da aprendizagem da álgebra elementar. Depois resgatam-se algumas idéias da teoria de Vygotsky com a intenção de estabelecer relações com as explicações didáticas trabalhadas e inferindo possíveis novos elementos que ampliem a descrição da aprendizagem das primeiras ferramentas algébricas. Finalmente, trata-se de estruturar a única explicação que permita pensar a aprendizagem da álgebra elementar na escola a partir da articulação das explicações psicológicas e didáticas trabalhadas.

PALAVRAS CHAVE: Aprendizagem da álgebra elementar, Psicologia de Vygotsky

INTRODUCCIÓN

Como lo prueban numerosas investigaciones en el área de Didáctica de la Matemática, la entrada en el mundo del álgebra supone para los alumnos que vienen de prácticas aritméticas una ruptura cognitiva esencial, un cambio fundamental en su racionalidad matemática. (Chevallard, 1985, 1989; Grugeon, 1995; Vergnaud, Cortes y Favre, 1987; Kieran y Filloy, 1989). En este trabajo se considera el término "racionalidad" en un sentido amplio que abarca los modos de validación, las formas de abordar los problemas, las estrategias de control y las creencias que pone en juego un sujeto en su actividad matemática.

El dominio del álgebra elemental es un campo fértil para la puesta en juego de prácticas que recuperan rasgos esenciales del quehacer matemático como lo son el tratamiento con lo general, la exploración, formulación y validación de conjeturas sobre propiedades numéricas, la verdad de una afirmación sustentada en argumentaciones deductivas, la coordinación entre diferentes registros de representación semiótica, entre otros.

Es esta fertilidad para el despliegue de capacidades específicas de la actividad matemática la que lleva a pensar que la interacción de los alumnos con ciertos problemas de este dominio contribuirá a transformar la racionalidad matemática de los alumnos respecto

de aquella construida como producto de sus prácticas aritméticas.

En tanto el pasaje de la aritmética al álgebra supone —como se ha señalado— una ruptura cognitiva esencial, se asume como hipótesis de trabajo que las explicaciones psicológicas resultan significativas para abordar los problemas didácticos en este campo.

El hecho de buscar aportes psicológicos para la didáctica coloca el problema de cómo utilizarlos. Esto tiene relación directa con la pregunta de cuál es la relación entre psicología y didáctica, discutida desde hace mucho tiempo pero que merece ser redefinida para este caso particular. Se concibe esta relación asumiendo a la psicología cognitiva como ciencia de referencia, la didáctica de la matemática puede tomar de ella algunas metodologías, pero concibe la necesidad de definir una problemática específica que requiere de un cuerpo teórico original.

G. Brousseau (1986) al distinguir entre el sujeto cognitivo y el alumno, pone de relieve el hecho de que muchas de las intervenciones del alumno obedecen a condicionamientos institucionales, no necesariamente ligados a las resistencias opuestas por el objeto de conocimiento. Por esta razón, las explicaciones psicológicas no serían suficientes para interpretar las intervenciones del alumno en situación de clase.

La Didáctica de la Matemática⁴ toma de Piaget el reconocimiento de la necesidad de un punto de partida epistemológico para la investigación en enseñanza. Existen cuestiones comunes entre las preguntas de la epistemología genética y la didáctica de las matemáticas. La epistemología genética intenta responder ¿cómo aumentan los conocimientos?, o ¿cómo evolucionan sus organizaciones sucesivas?, mientras que la didáctica de la matemática intenta responder también a la cuestión de la transformación de los conocimientos pero teniendo en cuenta los fenómenos de transmisión cultural de los saberes por medio de una institución, la escuela, que tiene la intención de enseñar.

En el punto de partida de toda cuestión didáctica, es necesaria una toma de posición epistemológica respecto de la relación entre el sujeto de conocimiento y el objeto de conocimiento. De hecho, la didáctica de la matemática adopta para su propia problemática una posición constructivista e interaccionista siguiendo las huellas de la epistemología genética piagetiana y nutriendo el punto de vista interaccionista con las ideas de Vigotsky (Brun, 1994).

Algunos autores como Portugais (1994) apoyan la idea de *continuidad conceptual e histórica* entre la epistemología genética y la didáctica de la matemática, aclarando que esta continuidad no implica una identificación entre ambas, puesto que los objetos de estudio de estas dos disciplinas son distintos y bien definidos. En el mismo texto se cita a Vergnaud et al. (1987) insistiendo sobre la continuidad entre didáctica y psicología y admitiendo una cierta relación de *complementariedad*. Según este autor la psicología estudia y analiza las conductas y concepciones del sujeto mientras que la didáctica in-

vestiga los medios de hacer evolucionar estas concepciones y las competencias que les son asociadas, por lo tanto, la didáctica se apoya en la psicología. Recíprocamente, la didáctica aporta nuevos problemas a la psicología. Por ejemplo, el problema de la necesidad de tomar en cuenta los contenidos de conocimiento a la hora de realizar un análisis cognitivo y de desarrollo. Otro problema que introduce, tiene que ver con la relación entre desarrollo y aprendizaje. Al respecto, Vergnaud plantea que las conductas observadas por el psicólogo no son independientes de la experiencia escolar y extraescolar del niño, como tampoco estos aprendizajes (escolares y extraescolares) explican por sí solos las conductas observadas.

Existen varias razones que justifican la elección para este trabajo de la propuesta teórica de Vigotsky. En primer lugar se asume como punto de partida una caracterización de la actividad matemática proveniente de una línea de investigación en didáctica de la matemática que toma como supuestos psicológicos los propuestos por Piaget. Asumiendo, como dice Castorina (1996, pp. 35-40) que no existe inconsistencia entre las propuestas de ambos autores, en el sentido que la admisión de una de las teorías implique la negación de la otra, sino preguntas diferentes, pueden encontrarse en las explicaciones vigotskianas nuevas ideas que esclarezcan algunos aspectos de la cognición relativos al aprendizaje del álgebra elemental.

En segundo lugar, el tipo de aprendizaje que se aborda en esta tesis encuentra en la escuela su único lugar de circulación social, y como dice Bruner (en Carretero, 1996, p. 23) Vigotsky tiene auténtica relevancia para la educación *"porque la mayoría de sus ideas nacen en un contexto y con una finalidad edu-*

⁴ Por nuestra formación y recorrido, tomamos en este trabajo como referencia principal a la escuela francesa de Didáctica de la Matemática, sabiendo que estamos haciendo una fuerte restricción.

cativa y desde ese lugar se relacionan con la Psicología" o como reconocen muchos otros autores las variables sociales en esta teoría tienen un papel central en los mecanismos subyacentes a las construcciones cognitivas.

Finalmente puede considerarse central en la teoría vigotskiana la cuestión de los procesos de apropiación de los signos de la cultura y el impacto que ellos provocan en el desarrollo del sujeto, y este punto coloca nuevamente esta teoría en un lugar sumamente interesante para tratar de explicar la apropiación de los símbolos del álgebra.

UNA CARACTERIZACIÓN DE LA ACTIVIDAD ALGEBRAICA

Como ya se dijo, numerosas investigaciones acreditan las dificultades con las que se enfrentan los alumnos cuando son acercados a las primeras herramientas algebraicas. Dificultades para utilizar dichas herramientas en la resolución de problemas, o en general, para comprender algoritmos relacionados con las escrituras algebraicas.

La aparición de estas dificultades puede tener relación con las características propias de este tipo de conocimientos o con la necesaria ruptura de los conocimientos algebraicos respecto de los conocimientos aritméticos anteriores, pero también, con fenómenos de tipo didáctico como suele ser el excesivo énfasis puesto, en las clases de matemática, en la mecanización del trabajo algebraico en desmedro de un uso modelizador de estas herramientas. Estas dificultades se suelen manifestar generalmente, en falta de interés por parte de

muchos alumnos, que puede pensarse como la manifestación de una profunda falta de comprensión.

El sentimiento de dominar aquello con lo que se interactúa, que provoca una gran satisfacción intelectual, se escapa para la mayoría de los alumnos cuando trabajan en "álgebra", cometan o no errores, sean más o menos eficientes en la manipulación de las técnicas.

Como se ha explicitado, el propósito de este trabajo es avanzar en este problema y profundizar en qué sentido algunos aportes teóricos de la psicología cognitiva, y en particular de la teoría de Vigotsky resultan relevantes para abordar cuestiones relativas a la enseñanza y el aprendizaje del álgebra elemental.

La pregunta "*¿cuál es la naturaleza de la actividad algebraica escolar?*", es una de las primeras en surgir de este propósito general y, consecuentemente, la construcción de una descripción de la actividad algebraica elemental se plantea como necesaria para poder comprender mejor algunas de estas dificultades a las que se enfrentan los alumnos al entrar en el mundo del álgebra.

Para avanzar en la tarea nos hemos apoyado, en primer lugar, en el trabajo de numerosos autores que describen *el funcionamiento del álgebra elemental* desde una perspectiva didáctica⁵.

En segundo lugar, hemos tomado autores que ubican *el funcionamiento del álgebra con relación a la aritmética*⁶. El hecho de que la práctica aritmética es punto de apoyo para la actividad algebraica, y que al mismo tiem-

⁵ Hay muchos recortes didácticos posibles para un objeto matemático. Todos ellos incluyen, necesariamente, una mirada del funcionamiento matemático de dicho objeto. Pero esta mirada está atravesada por el hecho de que el "didacta" piensa en los objetos viviendo en instituciones, en las que éstos se enseñan.

⁶ Se ha elegido ubicarse en una posición desde la cual "se ven" las rupturas en los procesos de construcción de conocimiento.

po esta última supone una ruptura respecto de la aritmética ubica la cuestión del pasaje como una problemática ineludible para todos aquellos que estudian problemas relativos a la enseñanza y el aprendizaje del álgebra elemental.

I. ¿Cómo funciona el álgebra?

Todo intento de caracterizar “el álgebra” es arduo. Se trata de una práctica, de una manera de abordar problemas, de una minicultura dicen algunos. Distintos autores focalizan en aspectos diferentes y todos en conjunto dan cuenta de esta actividad.

Se elige estructurar este punto de la caracterización de la actividad algebraica retomando las siguientes cuatro líneas:

1. *La actividad algebraica como actividad modelizadora* (Chevallard, 1989).
2. *El lenguaje simbólico como herramienta que ocupa un lugar principal en esta actividad modelizadora. Los distintos estatus de las letras* (Drouhard et al., 1995; Grugeon, 1995).
3. *Los instrumentos de pensamiento que se ponen en juego en esta actividad* (Mason, 1996; Drouhard et al., 1995; Chevallard, 1989).
4. *La relación entre la actividad modelizadora del álgebra y el aprendizaje y el dominio de las técnicas* (Grugeon, 1995, 1997; Drouhard et al., 1995).

1. El álgebra como actividad modelizadora

Se recupera, en este punto, la caracterización de modelización matemática de Chevallard (1989, p. 53) que utiliza un mismo esquema de modelización matemática tanto para el estudio de sistemas extramatemáticos como para sistemas intramatemáticos.

En general, cuando se utilizan las herramientas semióticas típicas de un cierto dominio matemático para dar cuenta de los objetos pertenecientes a otro dominio, se suele hablar de “representación”. Hay entonces un “representante” y un “representado”. La idea de modelización que propone Chevallard cambia el status de representante y representado, por modelo (instrumento del trabajo matemático) y sistema (matemático o no matemático) a ser modelizado, o denomina al registro del modelo como el matemático y al objeto a estudiar como matematizado.

Esta idea permite reconocer que todo objeto matemático es el fruto de una matematización, es decir, puede ser tomado como matematizado en un estudio de nivel superior: tanto el sistema como el modelo son objetos matemáticos.

En términos de Chevallard (1989, p. 53) modelizar supone tres etapas:

- 1) Definir las variables del sistema que se propone estudiar precisando los “aspectos” pertinentes en relación con el estudio que se quiere hacer del sistema.
- 2) Construir el modelo estableciendo un cierto número de relaciones entre las variables tomadas en cuenta en la primera etapa. El modelo es el conjunto de estas relaciones.
- 3) Trabajar matemáticamente el modelo para interpretarlo con el fin de producir conocimientos nuevos relativos al sistema, que toma la forma de nuevas relaciones entre las variables de dicho sistema.

Esta visión de la idea de modelo científico (Chevallard, 1989, p. 61) lo asume como una construcción artificial puesta en relación de una manera determinada con aquello que se quiere representar, supuestamente adecuada

pero no una copia de "lo real", sino un agregado. Este modelo no es la imagen más completa posible del sistema, toma de éste sólo los aspectos que resultan pertinentes al problema que se plantea, a su propósito. Provee una imagen voluntariamente empobrecida, y es justamente esto lo que potencia sus posibilidades.

Desde un punto de vista semiótico, toda actividad humana se encuentra inmersa y utiliza una pluralidad coordinada de registros semióticos, está dotada desde el comienzo de un cierto espesor semiótico. De todos estos registros la actividad deja aparecer uno o varios códigos dominantes, a los cuales los otros se encuentran de cierta manera sujetos. La articulación del conjunto de los registros puestos en movimiento, forma lo que se denomina complejo semiótico donde el registro de la lengua natural está siempre presente. El problema general en toda actividad humana, y por consiguiente de todo aprendizaje, es el del uso adecuado de los registros semióticos articulados. Mirando a la matemática como a una práctica semiótica, actividad de simbolización y uso reglado de sistemas de signos, la actividad matemática oprime el espesor semiótico en torno de códigos específicos sin eliminar la pluralidad de los códigos. En este aprisionamiento en torno a un código privilegiado, se gana en potencia. (Chevallard, 1989, p. 61)

La introducción de las letras, por las implicancias que tiene en las posibilidades de generalización, produce una ampliación indefinida de la potencia de la matemática. Efectivamente, el hecho de que este uso permite conservar la estructura de los cálculos, permite poner en evidencia relaciones que se "esfuman" en un único resultado, cuando sólo se utilizan números. Pero la clave del éxito, no radica solamente en la posibilidad de introducir letras para representar las incógnitas o variables del problema, sino en utilizar le-

tras para representar los datos o parametrizar. Chevallard señala que la potencia del álgebra, entonces, también reside en el empleo de parámetros ya que estos permiten estudiar tipos de problemas en lugar de tratar con problemas aislados (Chevallard, 1989, p. 65).

Como señalan Bolea, Bosch y Gascón (2001, p. 266): "para poder manipular la estructura global de los diferentes tipos de problemas es preciso hacer un uso sistemático del juego entre parámetros, entendidos, de una manera muy general, como objetos matemáticos conocidos (sean números, conjuntos, funciones, espacios vectoriales, figuras, matrices o cualquier otro objeto) que se manipulan como si fueran desconocidos, e incógnitas, entendidas como objetos matemáticos desconocidos, que se manipulan como si fueran conocidos".

Esta reflexión sobre el uso de parámetros coloca, en una perspectiva escolar, en un lugar central la noción de fórmula (tanto su producción como su ejecución), y conduce a considerar la familiarización aún precoz con la noción de función. Chevallard (1989, p. 65) propone como ejemplo el de la fórmula del área del rectángulo (muy usada en la escuela desde aproximadamente cuarto año, 9 o 10 años): la medida b del lado de un rectángulo de área S , en el que el otro lado mide a , está dado por la fórmula $b=S/a$. Si se supone S fijo y se hace variar a , la medida del otro lado es una función de a .

Finalmente, considera que esta idea de modelización permite dar una mirada global a la actividad matemática de toda la escolaridad, y pone de relieve nuevamente estos dos elementos esenciales de la actividad algebraica: la simbolización y el uso reglado de símbolos (Chevallard, 1989, p. 61). Al hacer esto último, deja planteado como problema la cuestión de la relación entre el dominio del cálculo algebraico y los avances en las posibilidades de producir conocimiento sobre los

objetos matemáticos, vía la modelización algebraica. Esta cuestión será retomada en los puntos siguientes.

2. La complejidad de las escrituras simbólicas del álgebra

“Comprender” las escrituras simbólicas del álgebra elemental (ESA) es, en términos de Drouhard et al. (1995), tomar en cuenta en conjunto su sintaxis, su denotación, su sentido y su interpretación. Se describe brevemente la interpretación que hace este autor de las dimensiones mencionadas.

Drouhard construye un modelo de tipo lingüístico para describir las expresiones simbólicas del álgebra elemental y las transformaciones formales de reescritura. Defiende la idea de que no se puede hablar de la significación dejando de lado la sintaxis (convenciones ligadas a la escritura de expresiones algebraicas).

Al comparar la sintaxis de las ESA y las de las lenguas naturales como el castellano, encuentra que no sólo existen diferencias (por ejemplo la escritura matemática se desarrolla en dos sentidos de la hoja de papel: horizontal y vertical), sino que las ESA conllevan una gran dificultad intrínseca de su sintaxis. Por ejemplo, la gran cantidad de convenciones que no siempre son explicitadas: las tres funciones del punto multiplicativo, el rol del paréntesis, el rol implícito de la barra de fracción, la no presencia de la constante multiplicativa 1, las reglas algebraicas formales para transformar expresiones. Estas convenciones pueden ser descritas de manera rigurosa y pertinente, pero la descripción no es trivial (Drouhard, 1998).

La noción de denotación se apoya en la distinción establecida por Frege (en Drouhard, 1998) entre sentido y denotación. Por ejemplo las expresiones 42, 4, (1+1) se refieren todas al número 2, su única denotación. Sin embargo, no tienen el mismo sentido puesto que ellas no recuperan el mismo dominio de descripción, no ponen en evidencia las mismas relaciones. La dimensión matemática supone justamente esto: establecer una *relación entre las escrituras y los objetos matemáticos que estas escrituras designan. La elección de transformaciones y procedimientos aplicables a estas expresiones en función de la tarea a realizar depende de su sentido.*

Llama interpretación de una expresión en un marco⁷ dado a todo objeto que corresponde a la denotación de esta expresión en este marco. Por ejemplo la expresión $2x - 3$, en el marco de las funciones de R en R , tiene por interpretación la función que a cada valor de x , número real, le asigna otro número real cuyo valor es el doble de x disminuido en 3 (Grugeon, 1995).

Finalmente, la noción de connotación designa la percepción y la interpretación que tiene un sujeto, de una expresión algebraica. Obviamente esta interpretación es personal y tiene relación con su experiencia anterior con este tipo de objetos, mayoritariamente es escolar, y fue constituida en situaciones y cursos en los que el sujeto ha manipulado expresiones algebraicas.

El trabajo de Drouhard da cuenta de la complejidad que supone el dominio de las escrituras simbólicas algebraicas y lleva a preguntarse acerca de las relaciones entre las distintas categorías que él establece en el proceso de comprensión de dichas escrituras.

⁷ La idea de “marco” que es utilizada en el sentido en el que la considera Douady (1986), remite a un cierto dominio organizado de la matemática, como por ejemplo, el marco geométrico.

Además, aporta elementos que abonan la visión de ruptura (entre aritmética y álgebra como procesos psicológicos superiores rudimentarios y avanzados respectivamente), también sostenida por la mirada vigotskiana y que se describirá más adelante.

3. Los instrumentos de pensamiento del álgebra

Respecto de los instrumentos de pensamiento que la actividad algebraica moviliza, Mason (1996) centra su atención en la actividad de generalización en tanto instrumento de pensamiento clave para la matemática. La generalización no se encuentra presente sólo en la culminación de las investigaciones matemáticas, sino es natural, endémica y omnipresente; es central para la matemática como ciencia.

Considera que la diferencia entre un experto matemático y un novato reside en los puntos de atención de uno y otro. La generalización es tan central en la matemática que el modo de pensar del matemático incluye una búsqueda permanente de generalidades. Entrar en las prácticas de generalización que supone el trabajo matemático, requiere una intencionalidad específica. Esto es muchas veces considerado un fenómeno "transparente"⁸ en la enseñanza y lleva a que los docentes no tomen conciencia de las distancias que existen entre su propia estructuración de los conceptos matemáticos y la que pueden tener los alumnos que se acercan a esta disciplina.

Mason analiza en particular, el uso que hacen los docentes de los ejemplos que proponen a sus alumnos y las interpretaciones que ellos están en condiciones de hacer. Al respecto señala que un ejemplo para el profesor es una manifestación de una noción más general,

mientras que para el alumno un ejemplo es una totalidad, algo completo que, generalmente, no le remite a otras cosas por detrás. La tarea del alumno es reconstruir la generalidad a partir de estos casos particulares que le son ofrecidos. Para esto hace falta apreciar la generalidad, reconocer lo invariante, y esto no es lo que ocurre habitualmente en la escuela.

Cuestiona los programas de enseñanza de la matemática de la escuela actual porque enfatizan lo particular quitando la atención de lo general, y responsabiliza a los teóricos de la educación de este efecto. Mason (1996, p. 70) sostiene que algunos teóricos han malinterpretado la epistemología de Piaget, acerca del rol de los objetos concretos, generando sustento a una predilección por lo concreto, direccionando de alguna manera las actividades de enseñanza hacia la manipulación de objetos.

Se pregunta si usar un compás particular para dibujar un círculo particular es un indicador de la conciencia del potencial para dibujar círculos de las herramientas del estilo del compás, o si la manipulación de los bloques de Dienes o las regletas de Cuisenaire necesariamente llevan a la apreciación de lo que el educador considera que se está instalando, o si los programas de computación que proveen instancias particulares necesariamente llevan a los alumnos a darse cuenta de la generalidad (Mason, 1996, p. 70).

Es interesante destacar que estas apreciaciones de Mason muestran una consideración especial respecto del tipo de tarea que se hace en clase de matemática. Es decir, Mason parece considerar que el tipo de actividad que se realiza en la escuela, con los objetos de la matemática, es tan importante como los mis-

⁸ "Transparente" en el sentido de no cuestionada, o no considerada como objeto de reflexión e investigación.

mos objetos. Consideraciones parecidas se pueden obtener de las explicaciones vigotskianas del aprendizaje de conceptos.

Respecto de los tipos de tareas escolares Mason (1996) afirma que:

- Estudiar las propiedades de los números es una manera de no comprometerse con lo particular y darse cuenta de los procesos. La *aritmética generalizada*, como una de las varias raíces del álgebra, ofrece más de una oportunidad para sacar la atención de lo particular y llevarla hacia lo general (op. cit.: p. 70).
- Es habitual que en la escuela se homologue el sentido de “ejercicio” con automatizar una técnica. Sin embargo, lo esencial del trabajo matemático tiene que ver con reconocer “tipos” de preguntas para las cuales se plantea el problema de reconstruir una técnica general. Automatizar una técnica es sólo un aspecto de la cuestión (op.cit.: p. 71).

Esta idea resulta cercana a la de modelización que propone Chevallard. Este aspecto modelizador de la matemática fue el que posiblemente le dio al álgebra su carácter revolucionario y su mayor potencia respecto de la aritmética, puesto que se pasaba de resolver uno a uno problemas particulares a resolver clases de problemas de similar estructura mediante un mismo modelo.

- Trabajar en clase el estudio de las afirmaciones matemáticas buscando “lo invariante”, considerando la generalidad que suelen representar los artículos en una expresión verbal y que tienen relación con los cuantificadores (todos, algunos, ninguno...) no suele ser una práctica habitual en clase y, sin embargo, puede transformarse en una ocasión de producir relaciones generales.

Por ejemplo (op. cit.: p. 67) se pregunta ¿cuál es la palabra más importante, desde el punto de vista matemático, en la afirmación?: “*la suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180 grados*”. Y concluye que la palabra más importante es el artículo *un*, porque está indicando que esta propiedad vale para *todos*, o para cualquier triángulo. Esta tarea de lograr que los alumnos reconozcan los indicadores de generalidad, no es para nada obvia y sí sumamente rica.

- El lenguaje es sumamente importante: al hablar, los sujetos muestran su capacidad de generalizar. Al identificar una situación con una palabra se está incluyendo algo particular en una clase más general que es el significado, se está viendo “lo general” a través de algo particular. Recíprocamente, ver lo particular en lo general, aplicar una teoría a una situación, es especializar, y este no es un acto trivial, requiere dejar lo particular y ver “más allá”.

Al sacar la atención de la generalidad, con la esperanza de hacer el aprendizaje más fácil, se está quitando el derecho de cada alumno de experimentar y trabajar con confianza con la generalidad tanto como con la particularidad, de ver lo general a través de lo particular y lo particular en lo general en matemática. Mason afirma que las clases que no están “embebidas” de generalización y conjeturas no son clases de matemática, cualquiera sea el título que tengan (op.cit.: p. 83).

4. La relación entre la actividad de modelización y el aprendizaje de las técnicas algebraicas

En este punto se retoman algunos aspectos de una caracterización de la actividad algebraica, que es parte de la tesis doctoral

de Grugeon⁹ (1995) en la que coloca como estructuradoras las dimensiones “*instrumento*” y “*objeto*” (Douady, 1986) para dar una primera gran clasificación del saber algebraico elemental.

En la perspectiva de instrumento el álgebra es considerada como una herramienta para resolver problemas que emergen en contextos internos o externos a la matemática. La competencia algebraica se evalúa en esta dimensión a través de la capacidad de producir expresiones y relaciones algebraicas para traducir un problema, e interpretar y después movilizar los instrumentos algebraicos adaptados para su resolución. Se otorga un interés particular a la capacidad de utilizar el álgebra como instrumento para probar conjeturas numéricas. A la vez, esta utilización del álgebra supone la interpretación de una expresión algebraica que debe articularse con un marco o un contexto y la utilización de la herramienta algebraica para hacer funcionar otras nociones matemáticas.

En la dimensión objeto del álgebra se puede hablar de un conjunto estructurado de objetos matemáticos: incógnitas, variables, parámetros, ecuaciones, inecuaciones, funciones, etc., dotados de propiedades, de modos de tratamiento en particular de naturaleza formal, de modos de representación que permiten esos tratamientos (escrituras algebraicas, gráficos, notaciones funcionales, etc.). El saber algebraico se expresa en términos de estatuto de los objetos algebraicos, de competencias para manipularlos y de articulación entre sus atributos sintácticos y semánticos. La competencia algebraica se evalúa a través de capacidades técnicas de orden sintáctico y capacidades interpretativas que ponen en juego denotación, interpretación y sentido de las

expresiones (en el sentido de Drouhard et al., 1995). Es necesario aquí dar un lugar “justo” a la dimensión técnica.

El trabajo de Grugeon (1995) da cuenta de la complejidad de la actividad algebraica y lleva a preguntarse cómo se constituye la posibilidad de articulación entre las múltiples dimensiones que ella identifica. En particular, “resuena” la cuestión del “justo lugar” a la dimensión técnica. La autora encuentra que en la escuela el dominio de las técnicas puede vivir en forma independiente de las actividades de matematización o modelización o, dicho de otro modo, existe tratamiento de tipo algebraico en donde los conocimientos matemáticos que se ponen en juego no forman parte de la resolución de un problema. En estas situaciones lo técnico no funciona como instrumento matemático, sino que es un fin en sí mismo.

Como consecuencia de lo anterior, los alumnos pierden la posibilidad de desarrollar estrategias de control refiriéndose a algún significado de aquello que manipulan. Drouhard et al. (1995) dice que aquellos alumnos que pueden manipular las técnicas del álgebra pero no pueden hacer referencia a alguna significación en ningún momento, son “*calculadores ciegos*”. Encuentra que éste es uno de los puntos paradójicos y dificultosos del aprendizaje del álgebra, porque justamente en esta posibilidad de transformar las expresiones algebraicas sin referirse constantemente a los objetos que las expresiones simbolizan es donde reside la fuerza del álgebra, pero también es en este punto donde se genera la mayor fuga de sentido.

Si bien los algebraistas expertos (“*fluents algebraists*”): (Krishner, 1987) en Drouhard et

⁹ En su tesis estudia las relaciones institucionales y personales con el álgebra elemental en la transición entre dos instituciones del sistema de educación media en Francia, una de las instituciones responde a un esquema de enseñanza de tipo profesional y la otra es un bachillerato (liceo).

al., 1995 p. 21) tampoco tienen necesidad de apelar constantemente a las situaciones de referencia (de modelización u otras) en cada etapa del cálculo, sí tienen a su disposición medios para evaluar sus producciones. Esta característica del funcionamiento algebraico experto (la no-necesidad de remitirse permanentemente a las situaciones introductorias o de referencia) permite afirmar que el sentido de las expresiones no reside únicamente en estas situaciones de origen.

Un ejemplo que propone Drouhard resulta interesante para describir el comportamiento del calculador ciego: es común que el profesor de matemática encuentre en sus clases que los alumnos “escriban” $(a + b)^2 = a^2 + b^2$. Frente a esto, también es común la intervención del docente mostrándole que si se le asignan valores a las letras de esa expresión, “la igualdad no se verifica”. Por ejemplo: si $a = 2$ y $b = 3$, entonces $(a + b)^2 = 25$ mientras que $a^2 + b^2 = 13$. Pero este argumento no es para nada convincente para los alumnos. Efectivamente, esa intervención tiene el supuesto de que los alumnos a quienes va dirigida, conocen que *la transformación es válida si sólo si para cualquier par de números, el valor que toma el primer miembro de la igualdad cuando las letras se reemplazan por dicho par, es igual al valor que toma el segundo miembro cuando se hace el mismo reemplazo*. La explicación de Drouhard es, justamente, que para estos alumnos (“calculadores ciegos”) ese no es un conocimiento disponible. El álgebra aparece como una “cuestión de reglas”, y el valor que toman las expresiones no es, para ellos, un criterio pertinente de control.

En otros términos, Drouhard piensa que los “calculadores ciegos” no saben que las transformaciones algebraicas, para ser válidas, deben conservar la denotación¹⁰. Se produce

entonces un “malentendido” en el que los “calculadores ciegos” no saben que las expresiones denotan y sus profesores no son conscientes de esto. Drouhard se pregunta ¿cómo hacer tomar conciencia a los interlocutores de que, empleando todas las mismas palabras, no hablan en realidad de la misma cosa?

Se puede pensar que la relación entre la tarea de modelización y el dominio de las técnicas se da justamente en este punto: en el del reconocimiento de que las expresiones algebraicas tienen cierta denotación y que las sucesivas transformaciones que se les realizan, cambian el sentido pero conservan la denotación.

La cuestión de la denotación “contiene” un aspecto que se considera fundamental en el tratamiento algebraico y que normalmente es omitido en los pizarrones y los textos: el relativo al uso de cuantificadores. Efectivamente, “saber que las expresiones denotan” es saber que cualquiera sea el valor por el que se reemplace en una expresión y en su transformada (a través de una transformación válida), el resultado debe ser el mismo. La escasez de palabras “completando” el significado de las expresiones algebraicas, no favorece la comprensión.

Los distintos trabajos sobre la actividad algebraica elemental, parecen coincidir en la necesidad de que los alumnos elaboren estrategias de control de las técnicas que utilizan. Esas estrategias “necesitan” referencias que pueden buscarse en diferentes niveles:

- reemplazo de las letras por números
- utilización de propiedades válidas de las operaciones aritméticas

¹⁰ Es claro que no se espera que los alumnos manejen esta terminología sino que pongan en acto lo que la misma quiere expresar.

- utilización de transformaciones que conservan la denotación
- utilización del objeto que se modeliza como marco de control.

Señalemos finalmente que el dominio de las técnicas condiciona la utilización del álgebra como herramienta de modelización (Vergnaud, 1997, p. 73), pero al mismo tiempo, las destrezas algebraicas no podrían desarrollarse y controlarse de manera independiente de la actividad de modelización. Esto plantea la necesidad de considerar muy de cerca, una de la otra, a ambos tipos de actividades.

La recuperación del aspecto técnico dentro de la actividad algebraica, en el esquema de caracterización de Grugeon, coloca nuevamente el centro de la cuestión en la relación entre el tipo de tarea que se le propone al alumno y el tipo de conceptualización matemática (o de conocimiento algebraico) que de ese tipo de tarea el alumno obtiene. Esta cuestión también se plantea como central en el planteo vigotskiano y en el de sus seguidores. Dentro del apartado en el que se discuten las ideas vigotskianas, se redimensiona la idea de "actividad" como "*bisagra entre cultura e individuo*" (Baquero, 1997, p. 153), se plantea su incidencia sobre el desarrollo no sólo relacionada con la apropiación de los instrumentos de mediación semióticos sino también con el modo en el que se produce esta apropiación o el tipo de actividad que la posibilita.

II. La relación entre la aritmética y el álgebra: continuidad y ruptura

Nuevamente se consideran muy explicativos los aportes de Chevallard, en este caso, alrededor de las relaciones entre aritmética y álgebra.

Chevallard (1985) considera que existe históricamente (e incluso antes de la aparición del lenguaje algebraico propiamente dicho) una relación dialéctica funcional entre lo numérico y lo algebraico.

Encuentra que los griegos ya distinguían dos aritméticas: la aritmética vulgar o logística, la de los calculadores; y la aritmética propia de los filósofos como dice Platón, la teoría de los números. Los calculadores calculan y los "aritméticos" estudian las propiedades de los números. Ambos manipulan un lenguaje numérico pero no lo emplean en las mismas tareas ni le reconocen los mismos valores.

El "reino del cálculo numérico" se rige por la ley de simplificación, interiorizada en hábitos. Una de las cláusulas está constituida por el principio de finalización de los cálculos. Por ejemplo, $4 + 8$ no podría ser una respuesta a un problema porque "está sin terminar", la respuesta debería ser 12.

Mientras que los pitagóricos, por ejemplo, realizaban otro tipo de trabajo numérico: a partir de la representación geométrica de los números, encontraban propiedades de valor general. Si bien estas "demostraciones" tienen fuerza demostrativa sólo para los valores tratados, también es cierto que tienen valor genérico como el de las figuras geométricas y se puede pensar que no estarían lejos de una demostración válida para un cierto conjunto de números. En la prolongación de este análisis de lo numérico se situaría una demostración que utiliza el lenguaje algebraico actual, pero sobrepasándola en ductilidad y potencia. (Chevallard, 1985, p. 74).

La creación del lenguaje algebraico permite poner en evidencia la problemática del estudio de lo numérico, colocándola (sin oponerla) al lado de la perspectiva calculadora. Permite explicitar lo que estaba implícito, se evidencia acá la copresencia de dos modos de enfrentar lo numérico.

El surgimiento histórico del álgebra permite evidenciar esta dialéctica de lo numérico y de lo algebraico. Lo algebraico es un instrumento de estudio de las propiedades de los números, y recíprocamente, las propiedades de los números son los instrumentos que permiten transformar las expresiones algebraicas, para que estas últimas puedan “mostrar” nueva información.

Puede decirse que el lenguaje numérico tiene eficacia designativa para favorecer los cálculos, pero esa misma posibilidad de resolver las cuentas y reemplazar la operación entre dos números por su resultado, no conserva la traza o la historia de las transformaciones, tiende a ignorar el valor mostrativo de la escritura.

Al contrario, el lenguaje algebraico funciona como una memoria que conserva la huella o la traza de las operaciones efectuadas, proporciona información mostrativa porque hace aparecer la información pertinente. Es un instrumento superior para una tarea semejante, dice Chevallard (1985, p. 57), puede dedicarse al mismo tipo de problemas que la aritmética pero al mismo tiempo permite “desnudar” o mostrar la estructura de los problemas estudiados.

El álgebra permite evidenciar la problemática de lo numérico, explicita las propiedades de los números que estaban implícitas, es una *aritmética generalizada*, extendida de los números particulares a números cualesquiera, y por lo tanto de operaciones que se ejecutan a operaciones que se indican por signos. No se piensa tanto en el resultado de las operaciones como en elaborar fórmulas que solucionan todos los problemas de un mismo género.

Asumiendo esta “definición” de lo algebraico, aprender álgebra (Kieran, 1989), no es sólo, hacer explícito lo que en la aritmética estaba

implícito. Aprender álgebra implica un cambio de pensamiento, pasar de situaciones numéricas concretas a proposiciones más generales sobre los números y las operaciones, de un modo informal a un modo formal de representación y resolución de problemas. Este cambio de pensamiento requiere “romper” con algunos conocimientos y “hábitos” que provienen del marco de referencia anterior de tipo aritmético.

Esta “ruptura” con la aritmética implica, por ejemplo, cambiar con (Vergnaud et al., 1987; Kieran y Filloy, 1989; Küchemann, 1981; Booth 1982, 1983 en Kieran y Filloy, 1989):

- a) *La forma de ver el signo igual*
- b) *Las convenciones de notación*
- c) *Los métodos de resolver problemas.*
- d) *La experiencia anterior con las letras.*
- e) *El contrato didáctico.*

Finalmente, las explicaciones que se han trabajado sucesivamente en los ítems anteriores: la actividad de modelización, la complejidad de las escrituras simbólicas del álgebra, la valorización de los procesos de generalización como inherentes al pensamiento matemático, la actividad técnica como instrumento matemático posibilitador medios de control de los procedimientos matemáticos, añadidas a las explicaciones acerca de la continuidad y la ruptura de los conocimientos aritméticos respecto de los algebraicos, son retomadas en las siguientes reflexiones a la luz de las ideas de Vigotsky.

ALGUNOS ELEMENTOS TEÓRICOS VIGOTSKIANOS Y SU RELACION CON LA CARACTERIZACION ANTERIOR

A continuación se describen brevemente algunos elementos de la teoría de Vigotsky, y

también se establecen algunas relaciones con la caracterización de la actividad algebraica que se hizo previamente.

Se estructura este apartado alrededor de tres puntos:

1. Las relaciones entre pensamiento y palabra.
2. La formación de conceptos.
3. El desarrollo de los conceptos científicos y su relación con el desarrollo de los conceptos espontáneos.

1. Las relaciones entre pensamiento y palabra

Al identificar la necesidad de enfocar en las relaciones entre pensamiento y lenguaje como objeto de estudio, Vigotsky (1987, p. 22) plantea un método de análisis que denomina por unidades. La unidad es un elemento teórico ("un producto del análisis" dice el autor) que conserva todas las propiedades básicas del total y no puede ser dividida sin perderlas. Propone que el aspecto interno de la palabra, su significado, es la unidad de pensamiento verbal, porque es tanto pensamiento como habla, es justamente la idea que representa esta conexión buscada.

Una palabra es una generalización, se refiere a una clase de objetos y no a un solo objeto y obligatoriamente tiene significado (no puede ser un sonido vacío). Por lo tanto, la palabra es un acto verbal del pensamiento que refleja la realidad en un sentido distinto del que lo hacen la percepción y la sensación. El significado de la palabra es, justamente, la unidad de análisis que Vigotsky (1987, pp. 25-26) buscaba porque es tanto palabra como pensamiento y representa la relación entre ambos.

Respecto de la dirección del desarrollo del pensamiento considera que no va del indivi-

dual al socializado, sino del social al individual. El lenguaje sigue el mismo curso y obedece a las mismas leyes que todas las otras operaciones mentales (incluido el uso de signos, tales como la numeración o las ayudas mnemónicas). Estas operaciones se desarrollan en cuatro etapas según Vigotsky (1987, p.75):

1. **Fase primitiva o natural:** corresponde al lenguaje preintelectual y al pensamiento verbal.
2. **Fase de la psicología simple:** el niño experimenta con las propiedades físicas de su propio cuerpo y con las de los objetos, aplica esta experiencia al uso de herramientas (primer ejercicio de la inteligencia práctica).

En el lenguaje se manifiesta por el uso correcto de las formas gramaticales, antes que haya entendido las operaciones lógicas en las cuales se apoyan (porque, si, cuando, pero).

3. **Uso de signos externos.** Se distingue por operaciones externas que son utilizadas como ayuda en la solución de problemas internos. Etapa en que el niño cuenta con los dedos, recurre a ayudas mnemónicas. En el desarrollo del lenguaje corresponde a la fase egocéntrica.
4. **Crecimiento interno,** la operación externa se convierte en interna y opera una transformación profunda en el proceso. El niño comienza a contar en su cabeza, a usar la memoria lógica (operar con relaciones inherentes y signos interiorizados). En el desarrollo del habla esta es la etapa final del lenguaje interiorizado.

El niño descubre la función simbólica del lenguaje en forma gradual (no repentina) y a tra-

vés de una serie de cambios moleculares. Las palabras son concebidas inicialmente como propiedades de los objetos más que como símbolos de esos objetos. En el proceso de operar con las palabras concebidas como propiedades de los objetos, el niño descubre y consolida su función como signos.

El lenguaje interiorizado se desarrolla a través de lentas acumulaciones de cambios estructurales y funcionales, y se separa del habla externa, simultáneamente con la diferenciación de las funciones sociales y egocéntricas del lenguaje, y finalmente las estructuras de este último se convierten en estructuras básicas del pensamiento.

El desarrollo del pensamiento está determinado por el lenguaje, es decir, por las herramientas lingüísticas del pensamiento y el desarrollo sociocultural del niño. El desarrollo del lenguaje interiorizado depende de factores externos, el crecimiento intelectual del niño depende del dominio de los medios sociales del pensamiento, y principalmente del dominio del lenguaje.

Wertsch (1988, pp. 109-111) explica cuál es el razonamiento de Vigotsky para llegar a aseverar *que la interacción social genuina es la que conduce el desarrollo psicológico humano*.

Parte de la idea de que la organización de las lenguas humanas se sostiene en dos tendencias opuestas que pueden parecer pero no son contradictorias: la descontextualización y la contextualización. El lenguaje tiene implícitamente el potencial para ser usado en la

reflexión abstracta, en la descontextualización, en especial la descontextualización del "significado". Pero, al mismo tiempo, la organización lingüística tiene sus raíces en la contextualización, puesto que la estructura e interpretación de los signos lingüísticos depende de las relaciones con el contexto en que éstos aparecen. Esto tiene estrecha relación con la definición de «sentido» utilizada por Vigotsky¹¹.

En sus términos, atribuir una palabra a una clase conocida o a un grupo de fenómenos conocidos, necesariamente implica generalización. Entonces, la interacción social presupone generalización. Y, recíprocamente, el desarrollo del significado de la palabra (generalización) se hace posible en presencia de la interacción social.

Además, encuentra una relación entre los niveles de generalización del sujeto y los niveles de desarrollo en la interacción social. Teniendo en cuenta estas dos tendencias opuestas (contextualización y descontextualización), reconoce dos funciones del habla y sus relaciones con los niveles de generalización: la función indicativa y la función simbólica del habla.

Para comprender esta distinción Wertsch plantea que se debe diferenciar entre las ideas de significado y referencia (inspiradas en Husserl), es decir, se debe distinguir el significado de la palabra de los objetos que ella representa o expresa. La función indicativa de la palabra implicaría una función puramente referencial, se refiere directamente a los objetos. Su nombre (indicativa) tendría rela-

¹¹ Vigotsky (1988, p. 188) diferencia el sentido del significado de una palabra, retomando esta distinción de Paulhan, según él mismo dice. El sentido de una palabra es la suma de todos los sucesos psicológicos que la palabra provoca en la conciencia de una persona, una palabra adquiere un sentido del contexto que la contiene, cambia su sentido en diferentes contextos. Mientras que el significado es la zona más estable y precisa del sentido, se mantiene estable a través de los cambios de sentido. "El significado 'de diccionario' de una palabra -dice Vigotsky- no es más que una piedra en el edificio del sentido, nada más que una potencialidad que encuentra su realización en el lenguaje".

ción directa con la clasificación de los signos según Peirce, que denomina índice cuando el signo tiene una conexión física directa con el objeto, por ejemplo señalar con el dedo índice. En la comunicación, el signo vehiculante (índice) y el objeto son espacial y temporalmente copresentes. Otra propiedad importante del índice, en términos de Peirce es que al usarlo para identificar un objeto, este objeto se caracteriza en un mínimo sentido.

A partir de esta información es que Vigotsky plantea que los primeros niveles de generalización y los primeros niveles de desarrollo en la interacción social se basan en la función indicativa del habla. Al comienzo del desarrollo, las palabras del adulto son indicadores para el niño, sirven para dirigir la atención del niño hacia un objeto, no sirven para caracterizar objetos ni propiedades abstractas de estos objetos. La palabra no tiene un significado para el niño, sino muestra algo. Mientras que, la función simbólica del habla implica la clasificación de eventos y objetos en categorías generalizadas y la formación de relaciones entre categorías posibilitando los niveles más avanzados de generalización.

¿Cómo se pasa de un nivel de funcionamiento semiótico contextualizado a un nivel descontextualizado?, ¿cómo se produce la descontextualización o el significado de las palabras o conceptos?

Dos aspectos de la explicación a estas cuestiones resalta Wertsch como novedosas y sumamente importantes: por un lado, la génesis en el desarrollo de los significados de las palabras (que continúan desarrollándose luego de la aparición de las palabras en el habla de los niños), y por otro, la relación entre sistematicidad, generalización, mecanismos semióticos y significado de la palabra (no sólo relaciones entre signos y objetos sino relación entre signos).

Respecto del significado de las palabras, Vigotsky traza una progresión ontogenética de tres fases: compilaciones no organizadas, complejos y conceptos. Estas fases evidencian desacuerdo con la idea de que una vez incluida una palabra en el vocabulario de un niño éste ha comprendido por completo su significado, por el contrario, esta aparición sólo marca el comienzo del desarrollo del significado de esa nueva palabra. Además, la categoría de los pseudoconceptos (un tipo de complejo) y su equivalencia funcional con los conceptos, explica la coincidencia sólo aparente, en el uso práctico del lenguaje, de los significados de las palabras entre un niño y un adulto.

¿Por qué Wertsch considera que la distinción entre significado y referencia que asume Vigotsky es la clave para comprender su propuesta sobre el desarrollo de los conceptos?

Porque a partir de esta diferenciación traza la génesis del pensamiento conceptual, comparando las palabras del niño con las del adulto:

- Pensamiento pre-pseudoconceptual: las palabras del niño no coinciden ni en la referencia ni en el significado con las del adulto.
- Pensamiento pseudoconceptual: coinciden en la referencia pero no en el significado.
- Pensamiento conceptual: el niño se apropia de los significados compartidos con el adulto, aparecen las relaciones descontextualizadas entre los signos y otros signos.

¿Por qué este último paso posibilita la evolución de los procesos psicológicos superiores?

Porque el control o la regulación del pensamiento del niño pasa del plano de los *objetos*

o de las relaciones icónicas entre objeto y signo, al *sujeto*. Al lograr independizarse del contexto y ubicarse en el plano de las relaciones entre conceptos, el sujeto puede operar con el significado de las palabras ejerciendo un control voluntario y consciente. De ahí que Vigotsky atribuya a la sistematicidad propia de los conceptos científicos la principal fuente de progreso del funcionamiento psicológico.

Consecuentemente puede anticiparse el importante lugar que otorga a la interacción social, y en particular a la escuela, como fuerza motivadora del pasaje de los signos contextualizados (muy relacionados con la función indicativa del habla), al momento en que el funcionamiento semiótico llega a un punto en el que las relaciones signo – signo, descontextualizadas, regulan la actividad del niño.

El lenguaje natural es en términos vigotskianos un instrumento de pensamiento y de modo similar el lenguaje algebraico también es un instrumento de pensamiento que requiere o presupone actos de generalización.

¿Qué aspectos de estos dos instrumentos de mediación pueden ser comparados y qué nuevas explicaciones permite obtener esta comparación? ¿Qué condiciones se pueden establecer para esta comparación? ¿Qué restricciones?

Los objetos que representa el álgebra no son los objetos, ni las clases de objetos tangibles de la vida cotidiana, sino abstracciones y generalizaciones de anteriores abstracciones y generalizaciones de esas clases de objetos. Por ejemplo, al estudiar las propiedades de los conjuntos de números, se están realizando abstracciones y generalizaciones de los nú-

meros que ya son abstracciones y generalizaciones.

Por otro lado, si bien el lenguaje algebraico tiene simultáneamente una función de comunicación y de producción de conocimiento, no está sujeto de la misma manera que el lenguaje natural a las retroacciones de la interacción social porque no es un instrumento de uso cotidiano.

En este punto aparece bastante claro el rol de la escuela, que es el medio social que ofrece la posibilidad de interactuar con este lenguaje, de construir o “fabricar” un ambiente en el que se puedan desplegar funciones de comunicación del lenguaje algebraico que, por estar sometidas a las retroacciones de los otros sujetos permitirían avanzar en la elaboración de su función simbólica.

Si vale la comparación entre el lenguaje natural y el algebraico (al menos como instrumentos de mediación semiótica), a pesar de las diferencias señaladas, entonces también valdría preguntarse ¿cuál sería el correlato para el caso del álgebra de la idea de que el lenguaje es primero una propiedad de los objetos más que un símbolo de los mismos? ¿Qué significaría que se aprehende antes la estructura externa de la “palabra algebraico-objeto”¹² que su estructura simbólica interna? ¿Qué forma cobraría la interiorización del lenguaje algebraico en pensamiento algebraico?

Con relación a la idea de que los símbolos algebraicos constituirían en primer lugar una propiedad de los objetos, se plantea el siguiente ejemplo.

¹² Se utiliza esta expresión para marcar el paralelo con la expresión de Vigotsky de “palabra-objeto” que pretende simbolizar esta idea de la palabra como propiedad del objeto, como un elemento externo al sujeto antes que un símbolo interno (Vigotsky, 1987, p.79).

En el marco del trabajo de tesis de Patricia Sadovsky¹³, que se propone caracterizar un espacio didáctico de articulación entre prácticas aritméticas y algebraicas, alumnos de séptimo grado debían resolver un problema que se modeliza a través de una ecuación lineal con dos variables:

Marisa tiene 20 pesos en monedas de 10 centavos y de 50 centavos. ¿Cuántas monedas de cada clase puede ser que tenga?

Frente al pedido de la profesora de proponer una fórmula para “fabricar” todas las soluciones, un grupo de alumnas explica que ellas hicieron una tabla y luego hicieron la fórmula “para verificar”. En la fase colectiva las alumnas insisten en que es la tabla la que da las soluciones que luego se comprueban a través de la fórmula. En este caso, la representación algebraica se “agregaría” a la tabla de valores en la que se expresan todas las soluciones y las alumnas no estarían en condiciones de aceptar que la fórmula constituye una representación del conjunto solución en lugar de un agregado de los objetos de conocimiento trabajados. Este modo de concebir la fórmula como representación del conjunto solución se lograría en el tiempo como un producto de la interacción sostenida entre los alumnos y con el docente a propósito de este problema y de otros similares.

Algunas cuestiones propuestas por Vigotsky con respecto a las relaciones entre pensamiento y lenguaje podrían dar lugar a una lectura que “justifique” en el plano psicológico una práctica didáctica según la cual primero es necesario aprender la mecánica de la manipulación de símbolos para luego utilizarlos en tareas de modelización. Las cuestiones referidas son las siguientes:

- 1) “el uso funcional de un nuevo signo se halla precedido por un período de aprehensión de la estructura externa del signo” (Vigotsky, 1987, p. 79)
- 2) en el proceso de desarrollo del lenguaje existe “un uso correcto de las formas y estructuras gramaticales antes de que el niño haya entendido las operaciones lógicas en las cuales se apoyan” (op.cit.: p. 75).
- 3) el pensamiento pseudoconceptual muestra coincidencia entre el lenguaje del adulto y del niño a nivel de referencia pero no de significado.

Se proponen a continuación argumentaciones en contrario de la lectura mencionada.

- En primer lugar, la idea de estructura externa del signo no implica aislar el signo del conjunto de “objetos” que le den significado sino, por el contrario, supone que el signo no puede concebirse de manera independiente de dichos objetos.
- En segundo lugar, el uso correcto de las formas gramaticales deviene en la comprensión de las operaciones lógicas en las que se apoyan, gracias a las retroacciones, producto de la interacción social que supone el uso del lenguaje. En el caso de la manipulación mecánica de símbolos estas retroacciones no tendrían lugar con lo cual es difícil concebir una evolución en la conceptualización de las escrituras, a partir de dicha práctica.

2. La formación de conceptos

Vigotsky afirma que un concepto es más que la suma de enlaces asociativos que se forman

¹³ Este trabajo se encuentra en elaboración y lleva el título “Condiciones de un espacio Didáctico de articulación entre prácticas aritméticas y prácticas algebraicas”.

en la memoria, es un acto de pensamiento que no puede ser enseñado mediante la instrucción¹⁴. Un concepto expresado en una palabra es un acto de generalización que se desarrolla desde sus formas más primitivas hasta las más avanzadas, por lo tanto, no se mantiene estático, sino que evoluciona.

Este desarrollo de los conceptos o evolución del significado de las palabras implica la evolución de muchas funciones intelectuales como la atención deliberada, la memoria lógica, la abstracción, la habilidad para comparar y diferenciar, cuyo dominio no es posible a través del aprendizaje aislado. Tampoco es posible la enseñanza directa de los conceptos, es decir, no es posible retransmitir un concepto a través de explicaciones, memorizaciones o repetición.

Respecto de la diferenciación entre conceptos espontáneos y no espontáneos, sostiene que el desarrollo de las actividades que dan origen a unos y a otros se relacionan e influyen constantemente, son partes de un proceso único: el de la evolución de la formación de un concepto, que se encuentra afectado por las variaciones externas y las condiciones internas. En su explicación, la instrucción tiene un lugar central, como una de las fuentes principales de los conceptos infantiles, *“una fuerza poderosa en la dirección de su desarrollo; determina el destino de su evolución mental completa”*. (Vigotsky, 1987, p. 123)

Vigotsky afirma que es pertinente esta diferenciación, entre conceptos espontáneos y no espontáneos, porque se forman a partir de condiciones internas y externas diferentes, y porque los motivos de su formación tampoco son los mismos. La mente se enfrenta a problemas muy distintos cuando asimila los conceptos de la escuela que cuando aprende los

de la vida diaria. Y además, justifica esta división porque permite estudiar la relación entre la instrucción y el desarrollo de los conceptos científicos.

El pensamiento de un nivel superior está gobernado por las relaciones de generalidad entre conceptos. La presencia o ausencia de un sistema es la diferencia psicológica fundamental entre los conceptos científicos y espontáneos. Las particularidades del pensamiento infantil tienen relación con la falta de distancia con la experiencia inmediata. Esto no ocurre con los conceptos científicos del niño que desde el principio involucran relaciones de generalidad y rudimentos de sistematización. Esta sistematización transforma gradualmente la estructura de los conceptos espontáneos del niño, ayuda a organizarlos en un sistema, y promueve su desarrollo a niveles superiores.

En relación con el aprendizaje del álgebra es posible recuperar algunas ideas de Vigotsky, él dice: *“un concepto puede estar sujeto a un control consciente cuando es parte de un sistema”* y esta preocupación por la posibilidad de control de los conceptos es considerada por los distintos autores y retomada en la caracterización de la actividad algebraica.

En relación con lo anterior se puede establecer la siguiente reflexión: puede ubicarse una de las causas de la falta de control de los procedimientos o razonamientos de los niños en los modos de aparición y de articulación de las actividades de tipo técnico. Aparecen en la escuela actividades técnicas alejadas de tareas de matematización o modelización, donde estas técnicas son trabajadas como un fin en sí mismas y no como instrumentos de resolución de problemas; los procedimientos de resolución que los alumnos ponen en jue-

¹⁴ Se asume “instrucción” como el proceso de enseñanza socialmente organizado, o escolarización formal.

go en estos casos no permiten acceder a relaciones que podrían actuar como elementos de control.

Estas tareas planteadas sin vinculación con problemas, sin la posibilidad de “visualizar” un objetivo (distinto del de manipular signos de acuerdo a reglas) no generan las retroacciones necesarias para que las expresiones algebraicas se conviertan progresivamente en símbolos de objetos matemáticos. En términos vigotskianos, las ideas del sujeto están reguladas por “*la tendencia determinante*”, establecida por la visualización de una finalidad. La formación del concepto es un proceso dirigido por un objetivo, una serie de operaciones como escalones que persiguen la meta final. Mientras la tarea técnica tenga como objetivo la sola manipulación técnica es razonable pensar que los alumnos no encontrarán en ella elementos para construir medios de control de sus aprendizajes, porque no se estaría dando un proceso de conceptualización y por lo tanto no se puede esperar la comprensión.

Por ejemplo las tareas del tipo “Hallar x ” para resolver una ecuación, que suelen encontrarse en los textos, no permiten una buena contextualización, no está claro el fin de la tarea. Si por ejemplo se dijera hallar los valores de x para los cuales $3x + 2 = 5x - 7$ se cumple, se enriquecen las posibilidades de interpretación de este trabajo.

Como se planteó anteriormente, también Drouhard (1995) considera que es preciso ofrecer a los alumnos instancias que les permitan elaborar medios de control de la validez de sus producciones. Los “calculadores ciegos” (aquellos alumnos que no pueden hacer referencia a alguna significación en ningún momento) no tienen conciencia de que las escrituras denotan y menos aún podrán

tener conciencia de que las transformaciones (matemáticamente válidas) sobre estas expresiones, conservan esta denotación.

A su vez es interesante pensar desde otro lado este fenómeno del “malentendido” entre el docente y el alumno, Drouhard dice: los alumnos no saben que las expresiones simbólicas del álgebra denotan y sus docentes no son conscientes de este desconocimiento. Desde esta teoría vigotskiana en todo aprendizaje habría unas primeras instancias de coincidencia de los conceptos a nivel de referentes pero no a nivel de significado, es necesario que el adulto sea consciente de esta aparente similitud y genere a partir de ahí instancias de interacción tendientes a compartir los significados de los conceptos que se utilizan conjuntamente.

3. El desarrollo de los conceptos científicos y su relación con el desarrollo de los conceptos espontáneos

Buscando explicar la diferencia entre el desarrollo de los conceptos científicos y los cotidianos, (Vigotsky, 1987, p. 125) estudia las características y la dirección de desarrollo (en la edad escolar) de los conceptos cotidianos. En este aspecto admite coincidir con las explicaciones de Piaget quien encuentra que los conceptos del escolar se caracterizan fundamentalmente por su falta de conocimiento consciente de las relaciones. Dice y se pregunta: “...*El pensamiento infantil es no deliberado y no tiene conciencia de sí mismo. ¿Cómo puede entonces el niño alcanzar eventualmente el conocimiento y dominio de sus propios pensamientos?*...” (p. 125)

El escolar avanza en el conocimiento y en el dominio pero no en la conciencia de sus propias operaciones conceptuales. La conciencia¹⁵ y el control aparecen en la última etapa

¹⁵ Define conciencia como conocimiento de la actividad de la mente, conciencia de ser consciente.

del desarrollo de una función, después de haber sido utilizada en forma inconsciente y espontánea. ... *"Para poder someter una función al control intelectual y volitivo, primero debemos poseerla"*. (op.cit.: p. 128).

Justamente el desarrollo de la introspección comienza en los años escolares, del mismo modo en que el niño pasa de la primitiva percepción sin palabras a la percepción de los objetos guiada por palabras, el escolar pasa de la introspección no formulada a la verbalizada, percibiendo sus propios procesos psíquicos como significativos. Esto denota el comienzo de un proceso de generalización de las formas de actividad interna superior, que abre nuevas posibilidades de manejo de esta actividad interior. El hacernos conscientes de nuestras propias operaciones nos conduce a poder dominarlas (op.cit.: p. 128).

Si conciencia significa generalización, y generalización significa la formación de un concepto sobreordenado que incluye el concepto dado como un caso particular, se entiende que un concepto puede estar sujeto a un control consciente sólo cuando es parte de un sistema. *"...Los conceptos científicos, con su jerarquía sistemática de intercalaciones, parecen ser el medio de desarrollo de conocimientos y las destrezas que luego se transfieren a otros conceptos. ...Los rudimentos de sistematización ingresan primero en la mente infantil por medio de su contacto con los conceptos científicos y son transferidos entonces a los conceptos cotidianos, cambiando totalmente su estructura psicológica"*. (op.cit.: pp. 130-131).

Vigotsky coloca la interrelación entre conceptos científicos y espontáneos como caso especial de la relación entre la instrucción escolar y el desarrollo mental del niño.

Cuando el niño opera con conceptos espontáneos su atención está centrada en los objetos a los cuales se refieren los conceptos y no

en sus propios actos de pensamiento. Los conceptos científicos que el niño aprende en la escuela, por estar mediatizados por otros conceptos desde el principio, corren la atención de los objetos centrándola en las relaciones entre conceptos. Este cambio de plano en el pensamiento promueve en el niño la conciencia de su propio proceso mental.

En palabras de Wertsch (op.cit.: p.118): *"...los conceptos científicos son los que permiten a los humanos realizar la actividad mental con la máxima independencia del contexto concreto. Es decir, representan el punto final de la descontextualización de los instrumentos de mediación. Esto no significa que dicha actividad psicológica sea más pura o esté menos sujeta a limitaciones. Al fin y al cabo, a este respecto es crucial la estructura de los propios sistemas de signos. Esto significa, sin embargo, que los mecanismos semióticos sociohistóricamente desarrollados desempeñan un papel cada vez más importante en el funcionamiento psicológico, mientras que el contexto concreto disminuye su papel. Esta negociación en la fuente del control en la actividad psicológica constituye el tema de la investigación sobre complejos y conceptos llevada a cabo por Vigotsky"*.

Para poder establecer el lugar que ocupan las prácticas educativas (como construcción social que "ofrece" los conceptos científicos) en el proceso de desarrollo del sujeto, la diferenciación al interior de los procesos psicológicos superiores (PPS) en "rudimentarios" y "avanzados" resulta interesante. Desde un punto de vista descriptivo, ambos comparten las características de los PPS pero se diferencian en el grado de control consciente y voluntario que implican, o en el tipo de uso, crecientemente descontextualizado, que hacen de los instrumentos de mediación (Baquero, 1996, p. 100).

Desde un punto de vista "genético" ambos surgen como producto de la vida social pero,

los PPS “avanzados” requieren para su formación de la participación del sujeto en situaciones sociales específicas, no alcanza con pertenecer y crecer en el seno de una cultura para que este tipo de procesos se desarrollen.

Baquero coloca como ejemplo paradigmático la relación entre la adquisición de las competencias para participar en los actos del habla y la adquisición de la lengua escrita. Por el solo hecho de pertenecer a una cultura los sujetos aprenden a hablar movidos por la necesidad de la comunicación. Mientras que esta sola pertenencia no alcanza para la apropiación de la lengua escrita. La adquisición de las competencias para la escritura se posibilitan con la participación en situaciones sociales específicas, que si bien requieren de la existencia previa del habla no resultan de su evolución espontánea. La escritura requiere de mayor abstracción y para ello de un creciente control voluntario y consciente de los procesos psicológicos superiores.

Se puede pensar en una relación semejante entre las competencias relativas a los aprendizajes “numéricos” y a los aprendizajes “algebraicos”. La posibilidad de manejarse con la idea de número y con algunas operaciones elementales entre números se obtiene a partir de la vida en sociedad, mientras que los aprendizajes que sistematizan esas ideas, que las ubican en un sistema teórico, ya sea que utilicen o no el lenguaje algebraico, no aparecen en la vida diaria, su aprendizaje necesita de situaciones específicas, más precisamente de situaciones escolares de enseñanza y también implican un mayor nivel de abstracción acompañado de elementos que favorezcan un creciente control consciente y voluntario.

Baquero (op.cit.: p. 102) pone énfasis en que a pesar de pertenecer ambos (PPS rudimentarios y avanzados) a la “línea cultural de desarrollo” tienen orígenes evolutivos diferenciados, procesos genéticos diferentes,

pero también convergencia y mutua reorganización debida a la permanente interacción que sostienen durante el curso del desarrollo.

Estas características, de orígenes y procesos distintos y a la vez convergencia y mutua reorganización, se vincula con las ideas de ruptura y continuidad de las construcciones inferiores y superiores. La continuidad está sostenida porque cada generalización se realiza sobre objetos ya generalizados en el sistema anterior, pero simultáneamente existe una diferencia entre los objetos que se generalizan. La ruptura se produce porque no se generaliza sobre objetos sino sobre pensamientos (generalización de generalizaciones), entonces, no es la continuación de un movimiento en una misma dirección sino se produce un cambio en el vector del desarrollo, un paso hacia otro plano superior de pensamiento. Nuevamente el ejemplo que se cita es el del cambio desde los preconceptos aritméticos del niño hacia los verdaderos conceptos algebraicos del adolescente: los conceptos algebraicos son generalizaciones de los aritméticos pero a la vez implican una nueva manera de pensar. (Baquero, 1996, pp. 133-134).

Se puede asumir que los conocimientos algebraicos reestructuran los aritméticos a través de la sistematización que las herramientas algebraicas permiten. La idea de continuidad y ruptura, recién señalada, podría explicar la relación entre aritmética y álgebra.

Esta diferencia en los orígenes de los PPS rudimentarios y avanzados también impulsa a Baquero a preguntarse sobre cuáles son las diferencias de las situaciones que les dan origen. Evidentemente existen diferencias en la naturaleza de las actividades sociales y en las características de los instrumentos mediadores y en su modo de uso, que dan lugar a los distintos tipos de procesos psicológicos. Y en este terreno la escuela tiene un lugar central.

En este contexto vigotskiano, dice Baquero, tiene sentido hablar de “*impacto cognitivo de la escolarización*” y también tiene sentido preguntarse si ese impacto tiene relación sólo con la apropiación de los instrumentos de mediación o con la modalidad de trabajo intelectual que propone la escuela.

A partir del estudio de algunos trabajos de investigadores de la Psicología Socio-histórica (Scribner y Cole, Rogoff, Luria, van der Veer y Valsiner, Cazden, Edwards y Mercer en Baquero, 1996, pp. 106-118) plantea que “*no parece ser el dominio en sí mismo del sistema de representación o el instrumento mediador, como una lengua escrita, lo que produce mayor impacto sobre la vida cognitiva, sino las características de las situaciones de su apropiación efectiva, es decir, el uso que se realiza del instrumento de mediación apropiado*”. El tipo de tareas que se plantea en la escuela sería el que genera diferencias en el modo de procesar la información de las personas. Los sujetos escolarizados muestran un funcionamiento cognitivo diferente de los que no lo son y esto tendría relación con el modo de trabajo escolar.

Baquero propone, entonces, una definición de desarrollo que establece claramente el lugar de la educación: “*...los procesos de desarrollo consisten en la apropiación de objetos, saberes, normas e instrumentos culturales en contextos de actividad conjunta socialmente definidos...*” (op.cit.: p. 105).

Desde esta perspectiva vigotskiana, el trabajo escolar parece implicar:

- El dominio de instrumentos de mediación crecientemente descontextualizados, incluyendo el dominio de su estructura, de sus características propias y de su modo de uso típicamente escolar.
 - El dominio de la lengua escrita y el desarrollo de los conceptos científicos que son ejemplos paradigmáticos de los grados y modalidades de desarrollo que se logran en la escuela.
 - “*...un sujeto activo, pero sujeto en su actividad a cierto régimen de trabajo intelectual que permite crecientes grados de toma de conciencia de las propias operaciones intelectuales y, con ellos, un dominio creciente y voluntario de su propia actividad*” (op.cit.: p. 118).
- Es para Vigotsky claro que la instrucción precede al desarrollo puesto que las funciones que se requieren para los aprendizajes de las distintas áreas no están maduras aún cuando comienza la instrucción. Sus investigaciones le muestran que el desarrollo de las funciones psicológicas no precede a la instrucción, pero sí mantienen una interacción continua con las contribuciones de dicha instrucción.
- Es también una manifestación de que el desarrollo se produce a consecuencia de la instrucción, la aparición de hábitos y destrezas en el niño antes de que pueda aplicarlos consciente y deliberadamente. Y en estas primeras adquisiciones provisorias tiene un rol importante la imitación. No se refiere a imitación como a una actividad mecánica, porque requiere de medios para pasar de algo ya conocido a algo nuevo. Tanto en el aprendizaje del habla como en el de las materias escolares la imitación resulta indispensable, dice.
- En este punto es interesante destacar esta diferenciación que hace Vigotsky entre con-

tenido de un concepto y los actos de pensamiento que permiten captar ese contenido (que representa con la analogía geográfica) porque aparece claramente la relación entre instrucción y desarrollo. Puede pensarse que en los procesos de aprendizaje del álgebra, el contenido conceptual que se aprende está integrado por las propias herramientas algebraicas, mientras que los actos de pensamiento que tienen que ver con estos aprendizajes son la generalización y las capacidades relativas a la modelización (posibilidad de recortar ciertas relaciones de un objeto o una situación y pensar ese objeto o situación en términos de las relaciones). La cuestión específica que aporta este punto de la teoría de Vigotsky es la siguiente: cuando se introduce la noción de modelo, se la introduce a propósito de situaciones particulares, referidas tanto a cuestiones matemáticas o extra matemáticas. Los alumnos no necesariamente captan el alcance de lo que es un modelo¹⁶. Aceptan su utilización, y la ponen en juego por un proceso de imitación, tal vez porque el docente muestra el funcionamiento. Ahora, el hecho de “forzar” a utilizar e interpretar modelos matemáticos en variadas situaciones de interacción con problemas, y también en la interacción social con el conjunto de pares y el docente, “provoca” que los alumnos comprendan, progresivamente, más profundamente su funcionamiento y su significado hasta lograr un uso consciente, voluntario y controlado de la herramienta algebraica.

Como podía suponerse, es posible encontrar buenos argumentos en las ideas de Vigotsky para incluir la enseñanza del álgebra en el currículum de la escuela: los conocimientos algebraicos son sistemáticos e implican relaciones de generalidad, el hecho de asumir relaciones de inclusión entre conceptos y clases de conceptos implica tener conciencia de los

procesos de pensamiento puestos en juego y asumirlos como de un determinado tipo, y esto conduce a poder dominar esas operaciones. Esta sistematización promueve el desarrollo del niño a niveles superiores.

Por otro lado, resulta interesante retomar esta cuestión, aparentemente paradójica, de que el habla interior se construye socialmente o de que la privacidad (subjetividad) se construye cuando se internaliza aquello que ha surgido en primer lugar de relaciones interpersonales. Se podría establecer una cierta relación entre esta idea y la noción de contrato didáctico ya definida en términos de Brousseau (1986).

Efectivamente, la noción de contrato didáctico viene a señalar que en las interacciones en la clase el alumno interpreta las intervenciones de los otros (docente y alumnos) atribuyéndoles una cierta intencionalidad con respecto al objeto (matemático) con el que se está trabajando. La interpretación de esa intencionalidad puede funcionar como un motor de avance en el conocimiento en la medida en que la misma entra en diálogo con las posibilidades del sujeto.

De un modo similar se pueden relacionar con la idea de contrato didáctico las de lenguaje social y ventriloquización (Wertsch, 1998, pp. 44-45). En los diálogos contextualizados en una clase, la voz de cada uno de los sujetos que interactúan estaría impregnada de voces y significados que no siempre se explicitan. Interpretar los mensajes que se producen en estos “códigos sociales” resulta ser una de las tareas de cuyo éxito depende el desarrollo de cada uno de los sujetos participantes.

¿Qué implicancias tendrían para un docente estas ideas? En principio puede pensarse que hace falta una toma de conciencia, por parte

¹⁶ En el sentido de “modelo matemático” definido por Chevallard (1989) y trabajado en apartados anteriores.

del docente, de que hay mucho de implícito en las comunicaciones sociales, y que si bien no es posible ni deseable una explicitación exhaustiva de todos los significados que se movilizan, existiría la posibilidad de explicitación en clase de muchos de estos significados que serían imprescindibles para posibilitar la comunicación, el aprendizaje, el desarrollo.

Tanto el análisis de Baquero como el de Wertsch, otorgan un lugar central a la actividad de mediación. Parece sumamente interesante por sus posibilidades explicativas la idea de que el mayor impacto cognitivo no sólo tiene relación con la apropiación de instrumentos de mediación sino también, y quizás una relación más profunda, con el tipo de uso que se hace de esos instrumentos, o más precisamente con el modo de trabajo escolar.

PENSAR EL APRENDIZAJE DEL ÁLGEBRA EN LA ESCUELA A PARTIR DE LA TEORÍA DE VIGOTSKY

Dos grandes líneas se han pensado como estructuradoras de estas palabras finales. En primer lugar, se trata de explicar cuál sería la contribución del aprendizaje del álgebra al pensamiento del sujeto. En un segundo término se tratan de particularizar algunos de los aspectos incluidos en la primera explicación a modo de hipótesis que pueden resultar como puntos de partida de investigaciones futuras en esta área.

1. La contribución de la enseñanza del álgebra al pensamiento.

La puesta en juego de determinadas actividades de tipo algebraico ofrece la posibilidad de impulsar el desarrollo intelectual de los sujetos.

¿Cómo se explica esta afirmación con los elementos teóricos planteados?

Utilizando argumentos vigotskianos la interacción con este tipo de instrumento de mediación semiótica genera procesos psicológicos superiores de tipo avanzado.

Cabe recordar que los PPS “avanzados” se diferencian de los “rudimentarios” en el grado de control consciente y voluntario que implican, o en el tipo de uso, crecientemente descontextualizado, que hacen de los instrumentos de mediación.

Dos características propias de la actividad algebraica permiten afirmar que trabajar con las herramientas del álgebra genera procesos psicológicos superiores avanzados:

- El álgebra en tanto que herramienta de generalización de la aritmética, requiere de un **mayor nivel de abstracción**, que tiene relación con una mayor distancia respecto del plano de los objetos. Es decir, los símbolos del álgebra encontrarían sus referentes en los números, que son símbolos de anteriores símbolos, son abstracciones y generalizaciones de anteriores abstracciones y generalizaciones. Esto necesariamente moviliza un plano superior de abstracción.
- Este cambio de plano de actuación intelectual, desde la relación entre los objetos de la vida cotidiana y los números, hacia el plano de las relaciones entre los números y los símbolos del álgebra posibilita que el **control o la regulación** del pensamiento se independice del contexto y se ubique en el plano de las relaciones entre conceptos, el sujeto puede operar con el significado de los símbolos ejerciendo un control voluntario y consciente. Esta posibilidad es atribuida por Vigotsky a la **sistematicidad** propia de los conceptos científicos, en este caso algebraicos.

Esta relación entre aritmética y álgebra, o entre la evolución desde los PPS rudimenta-

rios y hacia los avanzados, que el paso del trabajo aritmético al algebraico promueve, no resulta un proceso “espontáneo”. Por implicar orígenes y procesos distintos y a la vez convergencia y mutua reorganización: la relación entre aritmética y álgebra es de **continuidad y ruptura** a la vez.

La continuidad está sostenida porque la generalización algebraica se realiza sobre los objetos numéricos que ya son generalizaciones en el sistema anterior, pero simultáneamente existe una diferencia entre los objetos sobre los que se generaliza. La ruptura se produce porque no se generaliza sobre objetos de la vida cotidiana sino sobre números que ya son pensamientos (generalización de generalizaciones), entonces, no es la continuación de un movimiento en una misma dirección sino que se produce un cambio en el vector del desarrollo, un paso hacia otro plano superior de pensamiento.

Como se dijo, existe un cambio en el modo de pensar: pasar de situaciones numéricas concretas a proposiciones más generales sobre los números y las operaciones, renunciar a la búsqueda aritmética directa de la solución, extraer relaciones pertinentes e independientes, remitirse a formas simbólicas y a una sintaxis explícitas, de un modo informal a un modo formal de representación y resolución de problemas. Este cambio de pensamiento requiere “romper” con algunos conocimientos y “hábitos” que provienen del marco de referencia anterior de tipo aritmético.

Como puede desprenderse de estas ideas el tipo de tarea que se realiza sobre los instrumentos de mediación semiótica es decisivo. Aún más, los estudiosos y continuadores de la teoría de Vigotsky sostienen que el tipo de **actividad** decide sobre el desarrollo tanto o más que los propios **instrumentos de mediación**.

En este punto se puede apreciar el rol fundamental del docente en cuanto al impulso del desarrollo de sus alumnos en tanto que es quien decide el tipo de tareas a trabajar en clase. Por otro lado, también se plantea hasta dónde se puede tener el control de los significados y procesos que se promueven en clase. Está claro que no es posible controlar todos los significados, y las ideas de lenguaje social o de contrato didáctico lo explican, pero sí es posible la toma de conciencia de este fenómeno y la puesta en juego de situaciones de reflexión y de explicitación que permitan acordar y compartir algunas nociones y convenciones hasta ese momento implícitas.

2. Algunas hipótesis para pensar la enseñanza del álgebra elemental

a) Acerca del tipo de tareas.

- El tipo de tarea que se proponga la apropiación de las herramientas del álgebra (como la apropiación de cualquier instrumento de mediación semiótica) debiera posibilitar las instancias de contextualización / descontextualización. Se está pensando en actividades que se propongan en contextos (tanto matemáticos como extramatemáticos) tales que permitan visualizar un objetivo, que ofrezcan elementos que permitan una adecuada interpretación (en el sentido de Drouhard).

b) Sobre la necesidad de la mediación del docente.

- El modelo teórico que explica la producción de conocimientos en términos de adaptación a un medio resistente que ofrece retroacciones con relación a la validez de las relaciones matemáticas invertidas en la resolución de un problema, no resulta del todo explicativo para la producción de escrituras.

- El aprendizaje de las herramientas semióticas, que son el producto cultural de una compleja trama construida y reconstruida una y otra vez a lo largo de siglos, en contextos culturales muy diferentes a los de los alumnos actuales no puede producirse de la sola interacción del alumno con un problema. Pensar que la sola interacción con un tipo de problemas llevaría a producir las mismas escrituras sería considerar que el problema las determina, de manera independiente de los conocimientos, de la cultura en la que están inmersos, y de las funciones que le atribuyen quienes las producen.
- El aprendizaje de las herramientas del álgebra necesita de situaciones específicas que impliquen la intervención de otro sujeto que las ofrezca como tales.

c) La validación de las escrituras en la interacción social

- La validación de escrituras no se realiza a través de un sistema de teoremas matemáticos y esto distingue el proceso de emergencia de las mismas respecto de la elaboración de otros objetos matemáticos
- La función comunicativa del lenguaje, da pistas para fundamentar una hipótesis de trabajo según la cual las primeras producciones vinculadas al lenguaje algebraico se validarían en la interacción social, ofreciendo al alumno la posibilidad de tomar dichas herramientas como objeto de discusión y entender, desde ese marco, el sentido de lo convencional.

d) La función intelectual de las herramientas semióticas.

- El álgebra, por la posibilidad de generalización que supone es un dominio fértil para el desarrollo de los alumnos. El len-

guaje algebraico, en la medida en que está descontextualizado obliga a la explicitación de relaciones que pueden quedar implícitas en el lenguaje natural. Esto también es una contribución al crecimiento intelectual.

- Existe entre la aritmética y el álgebra una relación de continuidad y a la vez de ruptura.

Si bien todos los conocimientos aritméticos no pueden considerarse conceptos espontáneos, ese marco de relación entre conceptos espontáneos y conceptos científicos puede servir para pensar la relación aritmética y álgebra:

- La apropiación de las herramientas del álgebra genera una reestructuración del pensamiento aritmético anterior ubicándolo como un cuerpo teórico de conocimientos.
- Recíprocamente, los instrumentos de pensamiento anteriores (aritméticos) que posee el sujeto condicionan la apropiación de las herramientas del álgebra. Si el sujeto posee hábitos de generalización a partir del trabajo con problemas numéricos se ve favorecida esta posibilidad de continuidad entre los procesos de pensamiento de ambos dominios.

e) Primeras instancias en el aprendizaje del álgebra.

- El lenguaje algebraico no puede pensarse de la misma manera que el natural, porque su circulación social es completamente diferente.

Sin embargo, en algún punto puede establecerse una relación entre ambos. Vigotsky plantea que en el proceso de apropiación del

signo existe una primera etapa de aprehensión de la estructura externa del signo o del uso correcto de las formas y estructuras gramaticales del lenguaje antes de que el niño haya entendido las operaciones lógicas en las cuales se apoyan, en esta etapa habría coincidencias provisorias de los referentes del adulto y del niño y no del significado de los signos.

Este tipo de explicaciones no justifica posturas didácticas que postulen una enseñanza "mecánica" del álgebra previa a otra instancia posterior de "significación" (mecánica en el sentido de que no recupera ningún significado, y en el sentido de que es un fin en sí misma). El manejo de la gramática del lenguaje sin un total manejo del significado en situaciones de interacción social que ofrecen permanentes retroacciones desemboca necesariamente en instancias en las que se comparten los significados convencionales de las palabras. Mientras que estas actividades mecánicas no tienen otro fin más que el de ma-

nipular reglas sin apelar a ningún sentido, no ofrecen medios de retroacción.

Sí valdría interpretar que esta primera etapa vigotskiana, de aprehensión de la estructura externa del signo, implica concebirlo provisoriamente como una propiedad de los objetos en lugar de un símbolo de dichos objetos. Como en el ejemplo que se planteó, es posible esperar una etapa en la que el niño concibe una ecuación como un "agregado" a una cuenta con números o una "verificación" de una tabla numérica, la ecuación sería una propiedad del objeto número. Ese modo de concebir los objetos del álgebra podrá evolucionar hacia considerarlos modelos matemáticos si existen (como en el lenguaje natural) variadas situaciones de interacción social (escolar) en las que un docente mediador genera interacciones con sus alumnos a través de actividades que pongan en evidencia justamente este aspecto modelizador de los símbolos algebraicos.

BIBLIOGRAFÍA

- Baquero, R. (1996). *Vigotsky y el aprendizaje escolar*. Buenos Aires, Argentina: Aique.
- Bolea, P., Bosch, M., Gascón, J. (2001). La transposición didáctica de organizaciones matemáticas en proceso de algebrización: el caso de la proporcionalidad. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 21(3), 247-304.
- Brousseau, G. (1986). Fondament et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7(2), 33-115.
- Brousseau, G. (1993). *Fundamentos y Métodos de la Didáctica de la Matemática*. (D. Fregona y F. Ortega Trads.). FaMAF. Universidad Nacional de Córdoba. Argentina.
- Brun, J. (1994). "Vingt ans de didactique des mathématiques en France". Francia: La pensée sauvage.
- Carretero, M. (1996). *Introducción a la Psicología Cognitiva*. Buenos Aires, Argentina: Aique.

Castorina J. A. et al. (1996). El debate Piaget – Vygotsky: La búsqueda de un criterio sobre su evaluación. En *Piaget – Vygotsky: Contribuciones para replantear el debate*. Argentina: Paidós Educador.

Chevallard Y. (1985). Le passage de l'arithmétique à l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège. Première partie. *Petit X*, vol. 5, 51-94.

Chevallard Y. (1989). Le passage de l'arithmétique à l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège. Deuxième partie. *Petit X*, vol. 19, 43-72.

Douady, R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil/objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 7(2), 5-32.

Drouhard, J. P. et al. (1995). Calculateurs aveugles, denotation des écritures algébriques y entretiens "faire faux". *Journal de la commission inter-IREM de didactique n°2*, IREM de Clermont-Ferrand.

Grugeon, B. (1995). *Etude des rapports personnels y des rapports institutionnels à l'algèbre élémentaire dans la transition entre deux cycles d'enseignement: B.E.P. et Première G*. These de doctorat, Université Paris 7.

Grugeon, B. (1997). Conception et exploitation d'une structure d'analyse multidimensionnelle en algèbre élémentaire. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 7(2), 167-210.

Kieran, C. & Filloy, E. (1989). El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica. *Enseñanza de las Ciencias* 7(3), 229-240.

Mason, J. (1996). Approaches to Algebra. En: *Expressing generality and roots of algebra* Mathematics Education Library vol. 18, (pp.65-86). Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Portugais, J. (1994). *Didactique des Mathématiques et formation des enseignants*. Francia: Peter Lang.

Vergnaud, G., Cortes, A. & Favre Artigue, P. (1987). Introduction d'algèbre auprès de débutants faibles. Problèmes épistémologiques et didactiques. *Actes du colloque de Sèvres. Didactique et acquisition des connaissances scientifiques*, 259-279.

Vergnaud, G. (1997). *Aprendizajes y didácticas: ¿Qué hay de nuevo?, Tercera parte: El aprendizaje y la enseñanza de la matemática*, (pp.61-105). Argentina: Referencias Pedagógicas.

Vygotsky, L. (1987). *Pensamiento y lenguaje* Teoría del desarrollo cultural de las funciones psíquicas. Comentarios críticos de Jean Piaget. Editorial La Pléyade.

Wertsch, J. (1988). El análisis semiótico de Vygotsky. En: *Vygotsky y la formación social de la mente*. Madrid, España: Ediciones Paidós.

Wertsch, J. (1998). Desarrollo y aprendizaje. En: *Un enfoque sociocultural de la acción mental* (pp. 29-38). Argentina: Aique.

Autora

María Cecilia Papini. Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires, Argentina.
mcpapini@exa.unicen.edu.ar