



Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa  
Comité Latinoamericano de Matemática Educativa  
relime@mail.cinvestav.mx  
ISSN (Versión impresa): 1665-2436  
MÉXICO

2002

Crisólogo Dolores Flores / Gabriel Alarcón Bello / Delia Faustina Albarrán Millán  
CONCEPCIONES ALTERNATIVAS SOBRE LAS GRÁFICAS CARTESIANAS DEL  
MOVIMIENTO: EL CASO DE LA VELOCIDAD Y LA TRAYECTORIA  
*Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, noviembre, año/  
vol. 5, número 003  
Comité Latinoamericano de Matemática Educativa  
Distrito Federal, México  
pp. 225-250



## **Concepciones alternativas sobre las gráficas cartesianas del movimiento: el caso de la velocidad y la trayectoria**

Crisólogo Dolores Flores\*

Gabriel Alarcón Bello\*

Delia Faustina Albarrán Millán\*

### **RESUMEN**

En el presente estudio se investigaron las concepciones alternativas acerca de la lectura de las gráficas cartesianas que representan movimiento físico. En especial, la atención se enfoca en las concepciones relativas a la velocidad media, velocidad instantánea y la trayectoria de cuerpos en movimiento que se desprenden de la lectura de gráficas cartesianas de coordenadas tiempo-distancia. La exploración fue realizada sobre la base de un cuestionario diseñado exprofeso que fue aplicado a 80 estudiantes del 3er. grado de Secundaria, 100 del 3er. grado de Preparatoria y 15 universitarios; también participaron 13 profesores de secundaria y 40 de física del nivel preparatoria. Después de haber estudiado el movimiento en física escolar, normalmente los profesores esperan que sus estudiantes puedan leer las gráficas y obtener información de ellas, sin embargo en esta investigación se muestran varias evidencias de que las interpretaciones que hacen los estudiantes no son las que comparten los expertos y los textos. Uno pensaría que las cosas son mejores en los profesores, pero los resultados que aquí se exponen no parecen confirmar esta hipótesis.

**PALABRAS CLAVE:** concepciones alternativas, pensamiento variacional, gráficas, velocidad, trayectoria.

### **Alternative conceptions about cartesian graphs of motion: The case of velocity and trajectory**

### **ABSTRACT**

In this article we studied alternative conceptions concerning the reading of Cartesian graphs that represent physical motion. In particular, we focus our attention on the conceptions related to average velocity, instantaneous velocity and trajectories of bodies in motion that follow from the reading of the Cartesian graphs with time-distance axes. The exploration was based on a specially designed questionnaire that was administered to students and teachers. 80 students from 3rd year in secondary school, 100 students from preparatory school and 15 university students participated. As for teachers, 13 secondary school teachers and 40 physics teachers from preparatory school took part. Normally teachers expect that after studying motion in a physics class, their students can read graphs and obtain information from them. However,

---

*Fecha de recepción: enero de 2002.*

♦ *Centro de Investigación en Matemática Educativa (CIMATE), Universidad Autónoma de Guerrero, México.*

\**Escuelas del Centro del Estado de Guerrero, México.*

in this research we show evidence that the students' interpretations are not those that are accepted by the experts and the textbooks. One would think that things work better with teachers, but the results that are presented here do not seem to confirm this hypothesis

## **Conceptions alternatives des graphiques cartésiens du mouvement : le cas de la vitesse et la trajectoire**

### **RESUME**

Dans l'étude ici présent se sont recherchés les alternatives au sujet de la lecture de graphiques cartésiens qui représentent des mouvements physiques. En spécial, l'attention d'envisager dans les conceptions relatives de la vitesse moyenne, vitesse instantanées et la trajectoire des corps en mouvement qui se détachent de la lecture des graphiques cartésiens de coordonnées temps-distance. La recherche fut réalisée sur les bases d'un questionnaire dessinée ex professo qui fut appliqué aux élèves et professeurs, ayant participé 80 élèves de 3<sup>ème</sup>, 100 de terminale et 15 universitaires; du côté des professeurs ont participé: 13 du collège et 40 professeurs de physique du lycée. Après avoir étudié le mouvement en physique scolaire, normalement les professeur attendent que leurs élèves y puissent lire des graphiques et en sortir des informations ci dessus, cependant dans cette recherche se montrent plusieurs évidences où les interprétations qui réalisent les élèves ne sont pas compatibles avec celles des experts et des textes.

On penserait que chez les professeurs les choses marchent mieux, mais les résultats ici exposés ne semblent pas nous confirmer cette hypothèse.

**MOTS CLES:** Palabras clave: conceptions alternatives - pensée variationnelle – graphiques – vitesse - trajectoire.

## **Concepções alternativas sobre das gráficas cartesianas do movimento: velocidade e trajetória**

### **RESUMO**

Neste estudo foram pesquisadas as concepções alternativas sobre a leitura das gráficas cartesianas que representam movimento físico. Em especial, a atenção se focaliza nas concepções relativas à velocidade média, velocidade instantânea e na trajetória de corpos em movimento, que se deduzem da leitura de gráficas cartesianas de coordenadas tempo-distância. A pesquisa foi realizada sobre a base de um questionário especialmente projetado, que foi aplicado a estudantes e professores. Participaram 80 estudantes do 3<sup>o</sup> ano do curso ginásial, 100 do 3<sup>o</sup> ano do ensino médio superior e 15 estudantes universitários; por parte dos professores participaram: 13 do curso ginásial e 40 professores de física do ensino médio superior. Depois de ter ensinado o movimento em física escolar, normalmente os professores esperam que os estudantes possam ler as gráficas e obter informação delas, no entanto, nesta pesquisa são mostradas várias evidências de que as interpretações que os estudantes fazem não são as dos

espertos e dos textos. Poderíamos pensar que as coisas são melhores quando se trata dos professores, mas os resultados aqui expostos não parecem confirmar tal hipótese.

**PALAVRAS CHAVE:** concepções alternativas – gráficas – velocidade - trajetória

## 1. INTRODUCCIÓN

El presente trabajo se inscribió en la línea indicada por Cantoral y Farfán (2000) tendiente al estudio del pensamiento y lenguaje variacional. Éste, en tanto espacio de conocimiento, estudia los fenómenos de enseñanza, aprendizaje y comunicación de saberes matemáticos propios de la variación y el cambio en el sistema educativo y el medio social. Particular atención merece en el estudio de los diferentes procesos cognitivos y culturales con que las personas asignan y comparten sentidos y significados utilizando diferentes estructuras y lenguajes variacionales.

En tanto vertiente investigativa posee una triple orientación: por un lado se ocupa de estructuras variacionales específicas desde un punto de vista matemático y fenomenológico; en segundo término, estudia las funciones cognitivas que los seres humanos desarrollan mediante el uso de conceptos y propiedades de la matemática del cambio y en tercer lugar, toma en cuenta los problemas y situaciones que se abordan y resuelven en el terreno de lo social mediante las estructuras variacionales consideradas en la escuela y el laboratorio.

La matemática del cambio, o matemática de las variables, como la llamó Aleksandrov et al (1985), se caracteriza porque, a diferencia de la matemática de las constantes, ésta in-

corpora al movimiento en forma de variables y las relaciones que se dan entre ellas. Históricamente el cambio de la matemática de las constantes a la de las variables se produjo a principios del siglo XVII por Descartes con la introducción de las magnitudes variables, lo que propició la creación de la Geometría Analítica y el desarrollo de los principios del Análisis.

Este viraje influyó de manera decisiva en la teoría de las secciones cónicas, ya que como lo afirmó Wusing (1989), éstas eran en la antigüedad, además de una cuestión matemática, un simple sistema mental libre de referencias físicas. Con el desarrollo de las ciencias naturales las secciones cónicas obtuvieron existencia objetiva: elipses y parábolas eran las trayectorias de las órbitas del movimiento real de los cuerpos celestes y los proyectiles.

Con la Geometría Analítica muchos fenómenos físicos pudieron ser modelados y estudiados a través de fórmulas algebraicas y representaciones geométricas en el plano, misma que se caracterizó por la fusión objetivamente necesaria del álgebra y la geometría.

Según los **programas oficiales** de la educación en México (SEP, 1993), la matemática de las variables se enseña desde el cuarto grado de primaria\* siguiendo el eje temático

\* La primaria en México comprende del 1° al 6° grado de escolaridad; la secundaria los grados 7°, 8° y 9°, mientras que el bachillerato los grados 10°, 11° y 12°. El nivel medio superior es denominado también como bachillerato, preparatoria, vocacional dependiendo del subsistema y orientación al que se suscriba el alumno.

“Procesos de Cambio”. En la escuela secundaria (SEP, 1993) se prosigue con el estudio de este tema; en el 7º grado se estudia la variación directa e inversa mediante tablas y gráficas; en 8º se estudia explícitamente el plano cartesiano, la representación de intervalos de variación y gráficas de funciones elementales; en el 9º grado se hace énfasis en las razones de cambio, especialmente la de variación con tasa constante y al crecimiento geométrico o exponencial.

Es en el Bachillerato donde se estudia, de manera formal, la matemática de las variables con la Geometría Analítica, el Cálculo Diferencial e Integral y la Probabilidad y Estadística en donde se incluyen los temas relativos al estudio de las cónicas, la graficación de funciones y el análisis de sus gráficas, así como las medidas de tendencia central y cuestiones básicas de probabilidad.

De acuerdo con los **programas de Ciencias Naturales** en la educación primaria en México, desde el tercer grado se plantea el estudio del desplazamiento de objetos; en el cuarto, el movimiento de los cuerpos que incluye la noción de velocidad y en el quinto grado se estudia el movimiento pendular, rectilíneo y ondulatorio.

El estudio del movimiento de los cuerpos, en particular el rectilíneo continúa en el segundo grado de la enseñanza secundaria en la asignatura de Física I, de éste se recomienda su caracterización e identificación a través de la representación gráfica del cambio de posición en el tiempo, asociando a la velocidad con la inclinación de la recta que lo representa. Prácticamente todos los bachilleratos mexicanos (SEP, DEGTE, SEIT, COSNET, 1988; UAG, 2000) que constituyen el nivel preuniversitario y cuya orientación son las ciencias o la ingeniería, incluyen al menos un curso de Física, en el cual está inmersa la Cinemática que estudia el movimiento rectilíneo uniforme y el uniformemente variado.

Tanto la matemática como la física manifiestan un interés por el estudio del movimiento; hipotéticamente la variación directamente proporcional tratada desde la escuela primaria en la asignatura matemática es el marco general en el que caben las modelaciones particulares de movimiento rectilíneo con velocidad constante tratadas en la física escolar. Lo anterior presupone el establecimiento de correlaciones entre estas asignaturas por parte de los estudiantes así como de los profesores. ¿Pero este tipo de correlaciones realmente tiene lugar en la mente de los alumnos? Por lo que indican los programas, se espera que los estudiantes puedan interpretar *aceptablemente* las representaciones cartesianas del movimiento, tanto en el contexto matemático, como en el físico.

## 2. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Sin duda la interpretación de las gráficas pasa necesariamente por su visualización, ya en este sentido Einseberg & Dreyfus (1991) señalaron que, aunque existen muchos partidarios de los beneficios que se obtienen de la visualización de los conceptos matemáticos, la mayoría de los estudiantes están renuentes a aceptarla ya que prefieren el trabajo algorítmico al pensamiento visual. Una de las razones radica en que el pensamiento visual requiere poner en juego procesos cognitivos superiores a los que demanda el pensamiento algorítmico.

Diversas investigaciones han reportado que los estudiantes no pueden usar las gráficas para comunicar o extraer información (Wainer, 1992), y otros más no aplican lo aprendido en las clases de matemática, física u otras materias (Mc Dermot, Rosenquist & Van Zee, 1987). Una clasificación de las dificultades de los estudiantes en la comprensión de las gráficas realizada por Leinhardt et al. (1990) planteó cuatro tipos de categorías: la

confusión entre la pendiente y la altura; la confusión entre un intervalo y en un punto; la consideración de una gráfica como un *dibujo* y la concepción de una gráfica como construida por un conjunto discreto de puntos.

Algunas de estas dificultades también se hallaron en los trabajos de 112 estudiantes de bachillerato que recién habían terminado su curso de Cálculo Diferencial, reportándose en Dolores (1998) que al presentarles la gráfica y la fórmula de la función:  $s(t) = 5t^2$ ,  $t \geq 0$  (que de manera aproximada da la distancia que recorre un cuerpo en caída libre) y preguntarles por la velocidad del cuerpo exactamente en el primer segundo más del 74% respondieron 5 m/s.

Los alumnos contestaron dando el valor de la función en  $t = 1$  y sólo el 8% dio como respuesta: 10 m/s. Estos datos son indicativos de que la gran mayoría de estudiantes no relaciona a la derivada con la velocidad, en cambio la asocian con la ordenada:  $s(t_0)$ . Orton (1983) obtuvo resultados similares al preguntar por la razón de cambio instantánea, en donde los estudiantes dieron mayoritariamente el valor de la función en el punto en cuestión. Dicho resultado coincidió con la confusión entre la pendiente y la ordenada, sólo que aquí se estableció entre la velocidad y la ordenada.

Resultados similares se encontraron en la diferenciación (a partir de gráficas) entre la derivada y la ordenada de una función (Dolores, Guerrero y Medina, 2001). En especial las gráficas cartesianas del espacio en función del tiempo fueron la mayoría de las veces mal interpretadas, (Azcarate, et al. 1996) lo ejemplifica con el caso estudiado en Janvier (1978) relativo al lanzamiento de una piedra hacia arriba: el alumno da a la representación una interpretación iconográfica como si fuera el gráfico de la trayectoria de un tiro parabólico. En este documento se encontró, además, que

este tipo de concepciones están presentes no sólo en los estudiantes, sino incluso, en la mente de los profesores de física de secundaria y de bachillerato.

En la práctica escolar los profesores de matemáticas y de física utilizan gráficas cartesianas o las representaciones figurales para la enseñanza del tiro parabólico, la caída libre de los cuerpos, la graficación de funciones y el análisis de su comportamiento, etc. La mayoría de profesores de ciencias comparten la idea de que las representaciones gráficas son los medios que *hacen visibles* aspectos intrínsecos de las fórmulas matemáticas y su operatoria algebraica. ¿Pero cómo *interpretan* o *leen* las gráficas los estudiantes y los profesores? ¿Para los profesores y estudiantes tienen el mismo significado que el que se acepta en los textos de matemáticas y física? En este artículo se presentarán algunos resultados de una exploración tendiente a engrosar la información acerca de la lectura que, de gráficas cartesianas sobre el movimiento físico, hacen profesores y estudiantes.

### 3. REFERENTES TEÓRICOS

Desde hace tiempo Vigotsky (1996) dejó en claro que los procesos del conocimiento son procesos mediatizados por el lenguaje. Un enunciado verbal, un segmento, un símbolo, una figura, una gráfica o una fórmula matemática son representaciones de objetos matemáticos; estos últimos son de naturaleza ideal y se hacen visibles y comprensibles a los demás a través de aquellos. Sin embargo, frecuentemente esas *visualizaciones* y los significados que los estudiantes atribuyen a las gráficas en particular, no son congruentes con los significados aceptados por la ciencia. La falta de congruencia causa conflictos en la comprensión y aceptación de los significados, por ello ha recibido varias denominaciones como: errores, errores sistemáticos, preconcepciones y concepciones alternativas.

El término *error* enfatiza la incongruencia entre el conocimiento de los alumnos y el conocimiento científico aceptado; las *preconcepciones* se caracterizan por aquel tipo de conocimiento precientífico formado por las experiencias cotidianas y que se arraiga fuertemente en la mente de los estudiantes, en este orden de ideas las preconcepciones pueden manifestarse mediante errores conceptuales. Las concepciones de los estudiantes pueden o no ser acordes con lo aceptado por la ciencia, en este artículo se utilizará el término *concepciones alternativas* de la manera como lo caracterizan Confrey (1990), Mevarech y Kramarsky (1997), que denota el tipo de conocimiento de los estudiantes que difiere con aquél que debiera ser aprendido.

De acuerdo con Duval (1999), las gráficas, figuras, esquemas, las expresiones lingüísticas o las simbólicas son representaciones semióticas que no sólo permiten la comunicación, sino que son esenciales para la actividad cognoscitiva del pensamiento. Cumplen un importante papel tanto en el desarrollo de representaciones mentales, pues éstas dependen de una interiorización de las representaciones semióticas así como en el empleo de diferentes funciones cognitivas como la objetivación,

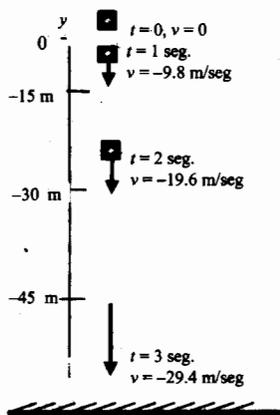


Figura 1 Posición y velocidad de cuerpo en caída libre

la comunicación y el tratamiento, y en la producción de conocimientos ya que permiten representaciones radicalmente diferentes de un mismo objeto en la medida que pueden hacer surgir sistemas semióticos totalmente diferentes.

El funcionamiento cognitivo del pensamiento humano requiere de una relación inseparable entre la aprehensión o producción de representaciones semióticas y la aprehensión conceptual por medio de aquellas. Particularmente en la enseñanza y aprendizaje de la matemática y la física esta relación es esencial para movilizar diversos sistemas de representación para elegir un registro en lugar de otro. De hecho el aprendizaje en este contexto puede manifestarse como la habilidad de poder transitar de un registro de representación a otro. La lectura o interpretación de gráficas utilizando el lenguaje analítico, verbal o numérico, implica a su vez, transitar y coordinar al menos dos registros de representación.

Las representaciones semióticas del movimiento utilizadas con frecuencia en cinemática hacen *visibles* las trayectorias y en la matemática escolar las gráficas cartesianas. Por ejemplo el fenómeno de la caída libre, es representado como se muestra en la Figura 1 y el tiro parabólico como se muestra en la Figura 2.

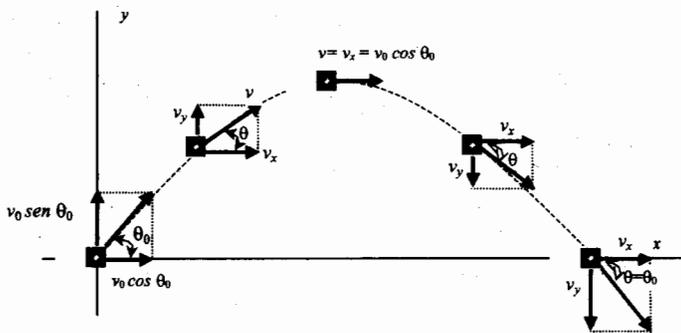


Figura 2 Trayectoria de un cuerpo lanzado con velocidad inicial  $v_0$  y ángulo de inclinación  $\theta_0$

En la representación de la caída libre, debida a los efectos que produce la gravedad, la altura  $y$  está representada por un segmento vertical, las flechas representan al vector velocidad variable cuya dirección apunta hacia la superficie del suelo. Como se sabe, la distancia  $d$  que recorre el cuerpo en su caída se calcula aproximadamente mediante la fórmula:  $d = \frac{1}{2} g t^2$ .

En el caso del movimiento que describe un proyectil lanzado con una velocidad inicial  $v_0$  (tiro parabólico), la trayectoria es determinada por el vector velocidad ( $v$ ), el cual es variable para cada uno de los puntos por donde pasa el cuerpo y es definida sobre la base de la ley del paralelogramo por medio de componentes vectoriales.

La componente de velocidad horizontal ( $v_x$ ) permanece constante durante todo el movimiento y se calcula por medio de la ecuación:  $v_x = v_0 \cos \theta_0$ , la velocidad vertical  $v_y$ , se obtiene de:  $v_y = v_0 \sin \theta_0 - gt$ , el vector velocidad  $v$  resultante es tangente en todo instante a la trayectoria, ya que  $v_x$  es constante. Hasta aquí el tiro parabólico tiene un modelo analítico expresado para las velocidades (como vectores) mediante ecuaciones paramétricas, para transformarla a una ecuación cartesiana se requiere de la introducción de una nueva

variable y el cambio de ésta por la variable tiempo.

Veamos: la abscisa  $x$  en un instante  $t$  es:  $x = (v_0 \cos \theta_0)t$  y la ordenada  $y$  es:  $y = (v_0 \sin \theta_0) - \frac{1}{2} g t^2$ , estas dos últimas ecuaciones dan la ecuación de la trayectoria en función de parámetro  $t$ ; haciendo un cambio de variable,  $x$  en lugar de  $t$ , se llega a que:

$$y = \frac{v_0 \sin \theta_0}{v_0 \cos \theta_0} x - \frac{g}{2(v_0 \sin \theta_0)^2} x^2$$

que es la ecuación cartesiana de la parábola:

$$y = ax - bx^2$$

Las figuras 3 y 4 son las gráficas cartesianas respectivas de los mismos movimientos anteriores. Las Figuras 1 y 2 son representaciones de magnitudes vectoriales en los que la trayectoria está determinada por los vectores de velocidad y coincide con la dirección del movimiento, y las Figuras 3 y 4, de magnitudes escalares (las distancias o alturas  $f$  que recorren los cuerpos con relación al tiempo  $x$ ); las primeras son representaciones muy cercanas a lo que nuestros ojos perciben, las segundas están más alejadas de nuestras percepciones inmediatas. Algunas, como los casos de las figuras 2 y 4 son parecidas, pero en general difieren.

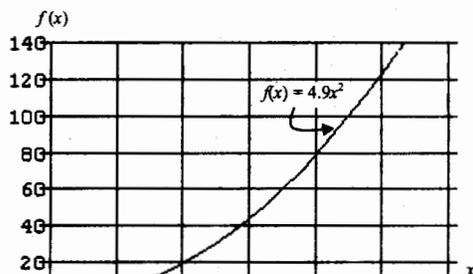


Figura 3 Gráfica cartesiana de la distancia ( $f$ ) en caída libre de un cuerpo respecto del tiempo ( $x$ )

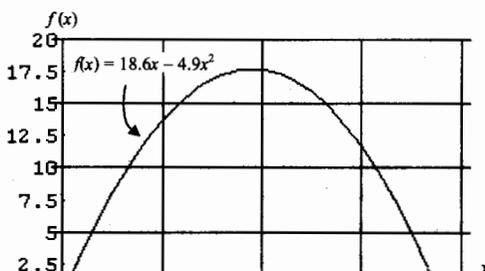


Figura 4 Gráfica cartesiana de la altura ( $f$ ) respecto del tiempo ( $x$ ) que alcanza un cuerpo al ser lanzado hacia arriba con una velocidad inicial de 18.6 m/s

Dada la naturaleza de los tipos de gráfica en las representaciones cinemáticas y cartesianas, la transferencia de información de unas a otras no puede ser inmediata, pues son aspectos diferentes los que en ambas se representan, en las primeras se indican movimientos físicos que intentan retratar el movimiento como tal y para ello interesan la dirección, la trayectoria, el tiempo, la distancia, la fricción del aire, etc. En el segundo caso se reduce el número de variables y sólo se representa la distancia recorrida en función del tiempo. La necesidad de transferir los modelos físicos a funciones matemáticas tiene sus ventajas, en este sentido Ríbnikov (1987) señala que el concepto de función tiene dos aspectos importantes: la función como correspondencia y la función como expresión analítica, sin embargo, la posibilidad de realizar operaciones con ellas está relacionada con sus expresiones concretas: con los medios de la geometría o las expresiones analíticas simbólicas.

Por otra parte la velocidad es un concepto que emerge de la física, en especial la velocidad media  $v$  de una partícula se define en Sears y Zemansky (1977) como la razón del desplazamiento de magnitud:  $x_2 - x_1 = \Delta x$ , al intervalo de tiempo:  $t_2 - t_1 = \Delta t$ , de manera que:

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t};$$

y la velocidad instantánea  $V$  como:

$$V = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$

Tanto  $v$  como  $V$  son vectores, puesto que la razón de un vector a un escalar es así mismo un vector y su dirección es la misma que la del vector desplazamiento. La velocidad media en cualquier gráfica de coordenadas distancia-tiempo es igual a la pendiente de la secante a la curva y la velocidad instantánea equivale a la pendiente de la tangente a la gráfica en un punto.

Por tanto para leer una gráfica distancia-tiempo es necesaria la ubicación de las coordenadas  $(t, d)$  pues indican la distancia que recorre la partícula en movimiento en el tiempo  $t$ , además para estimar la velocidad, dado que es un concepto de variación relativa (Dolores, 1999), se requiere analizar la gráfica en zonas o vecindades para averiguar qué pasa con la inclinación o pendiente de la curva, ya esta última en términos físicos equivale a la razón entre los cambios de distancia respecto a los cambios del tiempo.

#### 4. ASPECTOS METODOLÓGICOS DE LA INVESTIGACIÓN

El presente trabajo de investigación tiene un carácter exploratorio en el sentido que indica Hernández et al. (1997) y su objetivo es conocer las concepciones alternativas sobre las gráficas cartesianas del movimiento físico, en particular las relativas a la velocidad y a la trayectoria. Para tal logro se siguió el esquema metodológico que a continuación se enlista:

- Diseño y validación del instrumento de exploración.
- Aplicación del instrumento de exploración.
- Discusión y análisis de resultados.

El cuestionario se diseñó en el marco de la física presuponiendo que las gráficas cartesianas son, por un lado, representaciones a partir de las cuales se pueden explorar las concepciones de profesores y alumnos acerca del movimiento físico al plantearles preguntas problemáticas sobre ellas; y por otra parte, para dar respuesta a dichas preguntas se requiere poner en juego el pensamiento visual y los conocimientos de física y matemáticas de las personas cuestionadas.

El cuestionario estuvo conformado por el planteamiento de seis situaciones, cada una

acompañada por una o varias gráficas que sirvieron de referente de varias preguntas problemáticas. Las situaciones presentes en el cuestionario, en el orden en que ahí aparecieron, fueron diseñadas con el objetivo de explorar las concepciones que tienen alumnos y profesores de la materia de física acerca de:

1. La velocidad de un automóvil en un intervalo de la gráfica cartesiana de coordenadas tiempo-distancia.
2. La estimación de velocidades en gráficas cartesianas paralelas de coordenadas tiempo-distancia o posición.
3. El discernimiento de velocidades iguales, mayores o menores, dadas tres gráficas; dos de las cuales son paralelas.
4. El análisis de varias gráficas en un mismo plano cartesiano, con el fin de determinar la velocidad, rapidez y el orden temporal de sucesos. En cada una de las preguntas se exploraron concepciones acerca de:
  - a) Qué gráfica representa al movimiento con velocidad no constante.
  - b) El orden temporal de inicio del movimiento.
  - c) La mayor velocidad inicial.
  - d) Las gráficas que representan velocidad negativa.
  - e) Mayor rapidez del movimiento.
5. La posibilidad de que dos gráficas (una en el plano de coordenadas tiempo-distancia y la otra en el plano de coordenadas tiempo-velocidad) representen al mismo movimiento.
6. El discernimiento entre la representación cartesiana de coordenadas del movimiento de caída libre debido a la gravedad y su trayectoria.

El cuestionario fue diseñado para examinar concepciones no para medir niveles de desempeño, por tal razón su validación fue de tipo empírico (Best, 1982). Las preguntas fueron elaboradas en el contexto de la física, tuvieron como referente gráficas cartesianas de

coordenadas tiempo-distancia (o posición) o tiempo-velocidad. Se realizaron varios ensayos mediante aplicaciones de las primeras versiones del cuestionario, a grupos pequeños e independientes de profesores de física y estudiantes de diferentes niveles; se modificó la redacción con el fin de mejorar la claridad, se redujo además la cantidad de preguntas iniciales y finalmente se optó por hacer preguntas *cerradas* con varias opciones incluyendo las que empíricamente fueron observadas como respuestas frecuentes. Después de los ensayos se notó en los cuestionados cierta tendencia a dar respuestas semejantes.

El cuestionario final se aplicó a estudiantes de secundaria, preparatoria, a otros que cursaban estudios universitarios y a sus profesores de física. La muestra se aplicó a 80 estudiantes del tercer grado de secundaria del Estado de Guerrero y poblaciones circunvecinas seleccionados de manera aleatoria. En el caso del bachillerato se realizó a 100 estudiantes del tercer grado de las escuelas preparatorias ubicadas en Chilpancingo y poblaciones aledañas los cuales ya habían cursado la asignatura de Física I (en tercer semestre) y Matemáticas IV (Geometría Analítica) por lo que se supone habían revisado temas como la graficación del movimiento, la pendiente de una recta y ángulo de inclinación, lo que les permitiría tener elementos para contestar el cuestionario. Éste también se aplicó a 15 estudiantes universitarios de la Licenciatura en Matemática Educativa en la Universidad Autónoma de Guerrero (UAG) que se preparan para ser profesores de matemáticas.

La población de 13 profesores de secundaria que contestó el cuestionario laboraban en igual número de escuelas del centro del Estado de Guerrero y son considerados buenos profesores en sus escuelas. También participaron 40 docentes representantes de casi la totalidad de preparatorias de la UAG (la UAG

PARTICIPANTES		RESPUESTAS					TOTAL
		A	B	C	D	NC	
Estudiantes	Secundaria	4 (5%)	5 (6.3%)	40 (50%)	30 (37%)	1 (1.3%)	80
	Preparatoria	17 (17%)	39 (39%)	19 (19%)	24 (24%)	1 (1%)	100
	Universitarios	6 (40%)	7 (46.7%)	2 (13.3%)	0	0	15
Profesores	Secundaria	3 (23%)	5 (38.5%)	3 (23%)	2 (15.4%)	0	13
	Preparatoria	21 (52.5%)	14 (35%)	0	5 (12.5%)	0	40

Tabla 1 ¿En qué intervalo de tiempo la velocidad es mayor?

tiene 39 planteles distribuidos en toda la entidad) y la mayoría de ellos tienen una amplia experiencia impartiendo la asignatura de física.

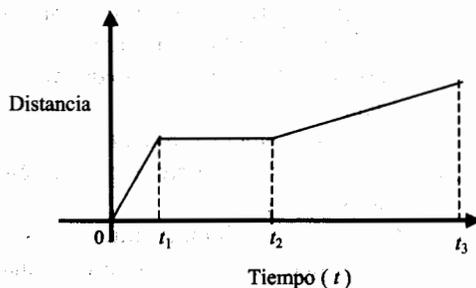
### 5. ANÁLISIS Y DISCUSIÓN DE LAS RESPUESTAS

Las primeras cinco situaciones planteadas en el cuestionario y sus respectivas preguntas exploraron concepciones acerca de la velocidad por medio de la comparación de la magnitud de velocidades, la estimación de velocidades, el discernimiento de la velocidad inicial mayor y el orden temporal de los movimientos.

Las dos últimas exploraron, por una parte, la posibilidad de que dos gráficas de coordenadas distintas pudieran representar al mismo movimiento y, por otra, la trayectoria en relación con su representación cartesiana. Para el análisis y sistematización de la información las respuestas fueron clasificadas en dos grupos: las de los estudiantes y las de los profesores. El primer grupo, a su vez, estuvo compuesto por alumnos de secundaria, de preparatoria y universitarios. De manera análoga se organizaron las respuestas de profesores.

**Situación 1.** Se mostró la gráfica de la derecha que representa la distancia recorrida por un automóvil en movimiento con relación al tiempo  $t$ . Se supone que el auto se mueve en

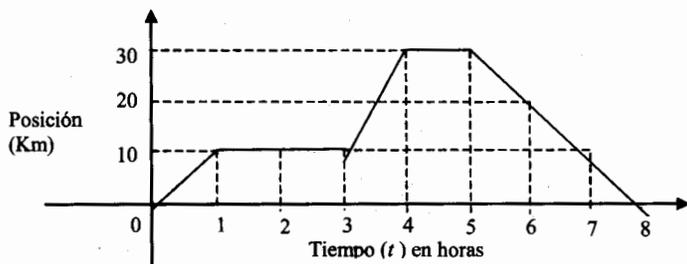
línea recta, en una carretera horizontal y no se consideran otras variables físicas que pudieran incidir en tal movimiento. Se preguntó en qué intervalo de tiempo la velocidad del auto es mayor, las opciones dadas como posibles respuestas aparecen abajo de la gráfica. Las respuestas de los estudiantes y profesores cuestionados se indican en la Tabla 1.



¿En qué intervalo de tiempo la velocidad fue mayor?

- a ( ) entre  $t = 0$  y  $t_1$
- b ( ) entre  $t_2$  y  $t_3$
- c ( ) entre  $t_1$  y  $t_2$
- d ( ) en  $t_3$

Los estudiantes de secundaria optaron mayoritariamente por los incisos C o D; los de preparatoria, universitarios e inclusive los



- a) Entre  $t = 1$  y  $t = 3$   
 $v =$  \_\_\_\_\_
- b) Entre  $t = 3$  y  $t = 4$   
 $v =$  \_\_\_\_\_
- c) Entre  $t = 5$  y  $t = 8$ ;  
 $v =$  \_\_\_\_\_

profesores de secundaria mayoritariamente eligieron el inciso B, nótese que un poco más de la tercera parte de los docentes de preparatoria se inclinaron también por esta alternativa. Tanto la opción B como la opción D (la primera señala un intervalo y la segunda un punto), correspondieron a las ordenadas de mayor longitud en la gráfica, por ello estas respuestas hicieron pensar en la presencia de dos tipos de interpretaciones subyacentes en los estudiantes y profesores, ya que por una lado, interpretaron la condición “mayor velocidad” como la representación gráfica de la “ordenada de mayor altura”, y por el otro, la asociaron con el segmento rectilíneo de “mayor longitud” de la gráfica que en este caso correspondió al intervalo:  $t_2 < t < t_3$ .

La mitad de los estudiantes de secundaria eligió la opción C que correspondió al segmento rectilíneo horizontal al eje de las  $t$ , quizá interpretaron la gráfica como el corte transversal de una carretera que en el intervalo:  $t_0 < t < t_1$ , tiene una pendiente más pronunciada que el segmento:  $t_2 < t < t_3$ ; como en el intervalo:  $t_1 < t < t_2$ , su pendiente es nula (una carretera sin subidas ni bajadas) el automóvil debe desplazarse con mayor velocidad. Un poco más de la mitad de los profesores de preparatoria seleccionó la opción correcta, probablemente basando su decisión en la pendiente de la gráfica en ese intervalo, todos los demás (excepto los estudiantes universitarios) manifestaron muy escasa inclinación por esta opción.

**Situación 2.** Dada la gráfica que aparece arriba, que muestra la posición de un automóvil que transita en un sendero rectilíneo y horizontal (una carretera que no tiene subidas ni bajadas), se pidió estimar su velocidad en los intervalos de tiempo indicados.

Se analizó cada una de las respuestas en el orden en que fueron planteadas las preguntas. En la primera se pidió la velocidad entre  $t = 1$  y  $t = 3$  (pregunta 2.a) y los estudiantes contestaron como se muestra en la Tabla 2. Como puede observarse, los alumnos (con mayor énfasis los universitarios), son proclives a dar el valor de la ordenada correspondiente a  $t = 1$ ,  $t = 3$  o bien de cualquier ordenada correspondiente al intervalo:  $1 \leq t \leq 3$ , otros dan 30 Km/h, 3.3 Km/h, 20 Km/h o 5 Km/h, quizá obtenidos de las operaciones:  $3 \times 10$ ,  $10 \div 3$ ,  $2 \times 10$  y  $10 \div 2$ , respectivamente; nótese que operaron con los extremos o el medio del intervalo de tiempo y con la ordenada constante correspondiente. Ningún estudiante, a excepción de algunos de preparatoria, contestó que la velocidad es de 0 Km/h.

Los resultados anteriores fortalecieron la hipótesis de que los alumnos consideran el valor de ordenada como la velocidad en el intervalo en cuestión. En cuanto a los profesores, la tendencia se conservó aunque fue más marcada en los de secundaria (véase la Tabla 3). Las respuestas de los profesores de preparatoria fue variada ya que muy pocos

contestaron que la velocidad es de 0 Km/h y en los profesores de secundaria la interpretación de la velocidad como pendiente de la gráfica pareció estar ausente.

En la Pregunta 2.b se cuestionó la velocidad del automóvil entre  $t = 3$  y  $t = 4$  y los estudiantes contestaron como se muestra en la Tabla 4. Nuevamente se notó la tendencia a dar como velocidad entre los 3 y 4 segundos el valor de la ordenada para  $t = 4$ . Hubo quienes dieron el valor de 20 Km/h, aunque es probable que lo hayan dado eligiendo el valor de la ordenada que correspondió a la abscisa de la mitad del intervalo y no porque hayan calculado el cociente:

$$\frac{d(4)-d(3)}{4-3}$$

Otros alumnos operaron con la mayor ordenada y su correspondiente abscisa:  $30 + 4$ , ya

que respondieron 7.5 Km/h. Algunos estudiantes de secundaria respondieron dando los valores de las ordenadas correspondientes a los extremos del intervalo, lo que puede ser indicativo de la asociación de la velocidad con las ordenadas. En general, se ofrecieron respuestas muy heterogéneas aunque fue notoria la preferencia por dar la magnitud de la ordenada de mayor altura. La tendencia observada en los estudiantes prevaleció también en los profesores, aunque fue más notoria en los de secundaria (ver Tabla 5). Con los maestros de preparatoria se obtuvo el mayor porcentaje de respuestas correctas, quizá basadas en la idea de la pendiente o el cociente de los incrementos de distancia respecto del incremento de tiempo.

Al preguntar por la velocidad del automóvil entre los 5 y 8 segundos (pregunta 2.c) los estudiantes dieron una gran variedad de res-

ESTUDIANTES	CANTIDAD	PORCENTAJE	RESPUESTA
Secundaria	25	31.3%	10 Km/h
	11	13.7%	30 Km/h
	8	10%	NC
	7	8.7 %	3 Km/h
	5	6.2 %	3.3 Km/h
	3	3.7 %	1.8 Km/h
	21	26.3 %	Otras
Preparatoria	26	26%	10 Km/h
	9	9%	3.3Km/h
	21	21%	NC
	7	7%	0 Km/h
	6	6%	20 Km/h
	5	5%	30 Km/h
	4	4%	5 Km/h
22	22%	Otras	
Universitarios	8	53.3 %	10 Km/h
	3	20 %	20 Km/h
	2	13.3%	30 Km/h
	2	13.3%	5 Km/h

Tabla 2 2.a. ¿Cuál es la velocidad del auto entre  $t = 1$  y  $t = 3$ ?

PROFESORES	CANTIDAD	PORCENTAJE	RESPUESTA
Secundaria	6	46.15 %	10 Km/h
	4	30.77 %	5 Km/h
	2	15.38 %	3.3 Km/h
	1	7.70 %	NC
Preparatoria	10	25 %	10 Km/h
	5	12.5 %	0 Km/h
	5	12.5 %	3.3 Km/h
	4	10 %	20 Km/h
	7	17.5 %	5 Km/h
	5	12.5 %	NC
	4	10 %	Otras

Tabla 3 2.a. ¿Cuál es la velocidad del auto entre  $t = 1$  y  $t = 3$ ?

puestas (véase Tabla 6), hubo quienes reportaron el valor de la ordenada para  $t = 5$  (equivalente a 30 Km); otros dieron el valor de 3.75 probablemente haciendo la operación:  $30 \div 8$ ,

dividen la magnitud de la ordenada mayor entre el extremo mayor del intervalo de tiempo; algunos más contestaron que era 10 Km/h o 15 Km/h (éstas son ordenadas intermedias

ESTUDIANTES	CANTIDAD	PORCENTAJE	RESPUESTAS
Secundaria	17	21.2 %	30 Km/h
	14	17.5 %	20 Km/h
	8	10 %	7.5 Km/h
	8	10 %	NC
	4	5 %	10 Km/h
	5	6.2 %	10 y 30 Km/h
	24	30	Otras
Preparatoria	25	25%	30 Km/h
	22	22%	NC
	11	11%	20 Km/h
	11	11%	7.5 Km/h
	3	3%	10 Km/h
	2	2%	15 Km/h
	2	2%	180 Km/h
	2	2%	50 Km/h
22	22%	40 Km/h	
Universitarios	3	20 %	30 Km/h
	3	20 %	20 Km/h
	2	13.3 %	10 Km/h
	7	46.6 %	Otras

Tabla 4 2.b. ¿Cuál es la velocidad del auto entre  $t = 3$  y  $t = 4$ ?

	PROFESORES	CANTIDAD	PORCENTAJE	RESPUESTAS
		6	46.1 %	30 Km/h
Secundaria		2	15.4 %	5 Km/h
		2	15.4 %	NC
		2	15.4 %	Otras
		1	7.7 %	20 Km/h
Preparatoria		13	32.5%	20 Km/h
		3	21.43 %	NC
		5	12.5 %	7.5 Km/h
		8	20%	30 Km/h
		11	27.5%	Otras

Tabla 5 2.b. ¿Cuál es la velocidad del auto entre  $t = 3$  y  $t = 4$ ?

	ESTUDANTES	CANTIDAD	PORCENTAJE	RESPUESTAS
Secundaria		11	13.7 %	NC
		9	11.2 %	30 Km/h
		7	8.7 %	3.75 Km/h
		6	7.5%	30 y 0 Km/h
		5	6.2 %	0 Km/h
		5	6.2 %	10 Km/h
		3	3.7 %	60 Km/h
		3	3.7 %	15 Km/h
		3	3.7 %	20 Km/h
		3	3.7 %	3.8 Km/h
Preparatoria		25	31.2%	150 - 0, 7.5, 8, 40, 120, 3, 150, 5, 24, 130, 0, 5 - 8, 180, 30, 35, 6.75, 2.75, 55, 3 y 0, 24.5, 27.5, 28.8
		22	22%	NC
		20	20%	30 Km/h
		9	9%	3.75 Km/h
		8	8%	10 Km/h
		4	4%	0 Km/h
		3	3%	15 Km/h
		3	3%	6 Km/h
		3	3%	$8 + 5 = 1.6$ Km/h
		28	28%	30 - 0, 20, 60, 100, 3.35, 25, 90, 8, 75, 3, 780, 300, 50, 2400, 50000, 24, 120, 30 + 8, 1.8, 1.5, 3.1, 24.6, 23, 70
Universitarios		4	26.67 %	10 Km/h
		3	20.00 %	NC
		2	13.33 %	30 Km/h
		6	40%	14; 10 a 0; 20; $\sqrt{600}$ ; en 5 es 6 y en $T(8) = 36 + 8; (10 - 5) + (20 - 5) + (30 - 5) + (10 - 6) + (20 - 6) + (30 - 6) + (10 - 7) + (20 - 7) + (30 - 7) + (10 - 8) + (20 - 8) + (30 - 8).$

Tabla 6 2.c. ¿Cuál es la velocidad del auto entre  $t = 5$  y  $t = 8$ ?

PROFESORES	CANTIDAD	PORCENTAJE	RESPUESTAS
Secundaria	4	30.7 %	NC
	2	15.3 %	3.3 Km/h
	2	15.3 %	3.7 Km/h
	1	7.69 %	-10 Km/h
	4	30.7%	0; 30-0,30, 10
Preparatoria	9	22.5 %	NC
	7	17.5 %	10 Km/h
	5	12.5 %	-10 Km/h
	3	7.5 %	30 Km/h
	2	5 %	-30 Km/h
	14	35 %	-2.7; 0; -6; 6 y 10; 0 a 15; 16; 60; 20; 20-70-0-10;
			$t_5$ a $t_6 = 20$ , $t_6$ a $t_7 = 10$ , $t_7$ a $t_8 = 10 \rightarrow 0$ , ( $v = 70$ Km/h $\rightarrow v = 0$ Km/h); -3.75; uniforme; 6, 3.3, -1.4, 0; decreciente hasta $v = 0$ ,

Tabla 7 2.c. ¿Cuál es la velocidad del auto entre  $t = 5$  y  $t = 8$ ?

del intervalo dado), aunque cabe la posibilidad que al 10 lo hayan obtenido mediante la división:  $30 \div 3$  y otros respondieron 0 Km/h sin embargo nadie insinuó siquiera que la velocidad fuese negativa.

Las respuestas de los profesores no fueron muy distintas a las de los alumnos (ver Tabla 7); algunos de secundaria dieron como resultado: 30 Km/h, 10 Km/h, uno de ellos contestó: -10 Km/h. En los docentes de preparatoria los resultados fueron parecidos ya que al menos dos de ellos indicaron que la velocidad *tiende* a cero en  $t = 10$  y solamente cinco del grado de preparatoria acertaron.

Las respuestas de las preguntas desprendidas de la situación 2 permitieron apreciar la tendencia, tanto en estudiantes como en profesores, a interpretar la velocidad como el valor de la ordenada mayor en el intervalo tiempo en cuestión. Cuando se les pidió la velocidad entre  $t_0$  y  $t_1$  contestaron dando el valor de la ordenada para  $t_0$ ; nótese que ésta es la ordenada de mayor altura. Al cuestionárseles por

la velocidad del auto en el intervalo  $5 < t < 8$ , estudiantes y profesores ofrecieron respuestas diversas: ninguno de los estudiantes sugirió velocidad negativa; menos del 10% respondió dando el valor de 10 Km/h quizá empleando alguna noción de rapidez para contestar tal cuestionamiento.

En los profesores de secundaria sus ideas al respecto son también muy variadas ya que nadie sugirió el valor de 10 Km/h como los estudiantes. Sólo un profesor de secundaria y cinco de preparatoria contestaron: -10 Km/h; en los docentes de ambos niveles, aunque con menor frecuencia que los estudiantes, fue notoria la asociación de la velocidad con el mayor valor de la ordenada.

Al pedirseles la velocidad en el intervalo donde la gráfica es un segmento rectilíneo horizontal (pregunta 2.a), las respuestas de estudiantes y profesores fueron más sugerentes ya que muchos de ellos respondieron como el valor de la ordenada de  $t = 1$  o  $t = 3$ , pues según la gráfica equivalen a 10. Lo anterior

RESPUESTAS	ESTUDIANTES			PROFESORES	
	Secundaria	Preparatoria	Universitarios	Secundaria	Preparatoria
F	53 (66.2%)	54 (54%)	7 (46.6%)	10 (77%)	21 (52.5%)
V	25 (31.2%)	44 (44%)	8 (53.3%)	3 (23%)	19 (47.5%)
NC	2 (2.5%)	2 (2%)	0	0	0
TOTAL	80	100	15	13	14

Tabla 8 3.a. La velocidad del auto B es igual que la de C en  $t_2$

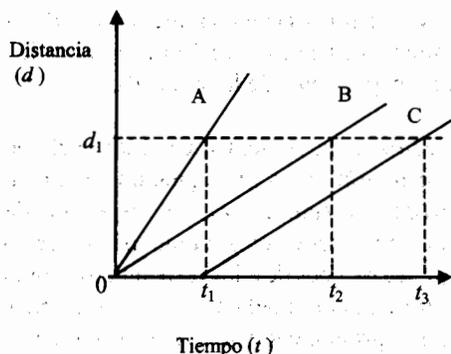
pone de manifiesto la concepción de la velocidad como el valor de la ordenada, sólo un porcentaje inferior al 10% de los estudiantes de preparatoria acertaron, de los demás nadie lo hizo.

**Situación 3.** Las preguntas correspondientes a esta situación estuvieron formuladas respecto a las gráficas que abajo aparecen, las cuales muestran la variación de las distancias que recorren los automóviles A, B y C, respecto del tiempo, de manera que se desplazan en línea recta y en senderos horizontales. Las preguntas se refirieron a las velocidades instantáneas y para contestarlas se debía escribir falso (F) o verdadero (V). Al lado derecho de la gráfica aparecen las proposiciones a juzgar.

En 3.a. se preguntó si la velocidad del automóvil B es igual que la velocidad del automóvil C en  $t_2$ . Con un análisis elemental de

la gráfica se pudo ver que la pendiente de la gráfica que correspondió al auto B en  $t_2$  era igual que la pendiente de la gráfica de C en ese mismo punto, por tanto la afirmación es cierta, aunque la ordenada para B en ese punto es mayor que la ordenada para C.

Los estudiantes de secundaria y preparatoria mayoritariamente aseveraron (ver Tabla 8) que la proposición era falsa aunque fue más notoria la proclividad en los estudiantes de secundaria. Los alumnos universitarios mostraron la misma tendencia que los anteriores aunque no rebasaron el 50%. De igual manera contestaron los profesores en donde la proclividad mayor se manifestó en los de secundaria ya que casi el 80% contestó que la afirmación era falsa. Es posible que ambos se hayan basado en la magnitud de la ordenada y no hayan considerado a la pendiente o la inclinación de las gráficas, nótese que las gráficas de B y C son paralelas en todos sus puntos.



- a) La velocidad del auto B en  $t_2$  es igual que la de C en el mismo punto... .. ( )
- b) El auto B arrancó con mayor velocidad..... ( )
- c) La velocidad del auto A en  $t_1$  es igual que la de B en  $t_2$ ... .. ( )

RESPUESTAS	ESTUDIANTES			PROFESORES	
	Secundaria	Preparatoria	Universitarios	Secundaria	Preparatoria
F	36 (45%)	39 (39%)	8 (53.3%)	8 (61.5%)	32 (80%)
V	42 (52.5%)	59 (59%)	7 (46.6%)	5 (38.5%)	8 (20%)
NC	2 (2.5%)	2 (2%)	0	0	0
TOTAL	80	100	15	13	14

Tabla 9 3.b. El auto b es el que arrancó con mayor velocidad

En lo que concierne a la pregunta 3.b, en la que se afirmó que *el auto B es el que arrancó con mayor velocidad*, los estudiantes y profesores contestaron como se muestra en la Tabla 9.

En esta cuestión, en términos físicos se preguntó acerca de la velocidad inicial; las gráficas de B y C tuvieron la misma pendiente en todos sus puntos, incluidos aquellos donde se iniciaba el movimiento. La pendiente mayor que las anteriores correspondió a los puntos donde empezaba el movimiento de A, por tanto la proposición era falsa.

La mayoría de los estudiantes de secundaria y preparatoria no opinaron así, las respuestas de los estudiantes universitarios estuvieron divididas en dos partes casi equilibradas. La gran mayoría de los docentes de preparatoria y secundaria también asumieron que la proposición era falsa, quizá en los primeros (dada la cantidad tan alta de aciertos) se haya decidido sobre la base de la inclinación o pendiente de las gráficas.

Respecto a la pregunta 3.c, en la que se afirmó que *la velocidad del auto A en  $t_1$  con la de B en  $t_2$  es la misma*, las respuestas que se obtuvieron aparecen en la Tabla 10.

Las ordenadas correspondientes a las gráficas de A y B para  $t_1$  y para  $t_2$  efectivamente tienen la misma magnitud, pero las pendientes correspondientes en esos mismos puntos son diferentes, la pendiente de A es mayor que la de B, por tanto la velocidad en la primera es mayor que en la segunda en esos puntos, de ahí que la proposición propuesta sea falsa. Las respuestas de estudiantes y profesores a este respecto son muy similares, la mayoría de ellos opinó que la afirmación es falsa, aunque cantidades significativas tanto de estudiantes como de profesores (más de la tercera parte en todos ellos) opinaron que la afirmación es verdadera, quizá estos últimos basaron su opinión en la comparación de las ordenadas, las cuales en efecto son iguales en los puntos indicados. Por las respuestas que han venido dando los cuestionados a preguntas anteriores, es posible que quienes

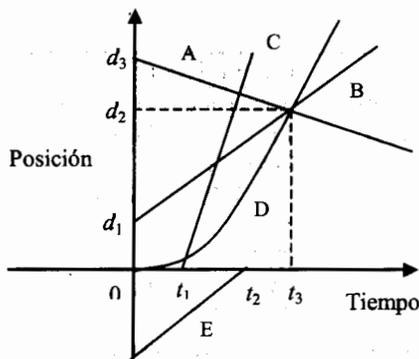
RESPUESTAS	ESTUDIANTES			PROFESORES	
	Secundaria	Preparatoria	Universitarios	Secundaria	Preparatoria
F	54 (67.5%)	62 (62%)	10 (66.7%)	11 (84.6%)	24 (60%)
V	24 (30%)	36 (36%)	5 (33.3%)	1 (7.7%)	16 (40%)
NC	2 (2.5%)	2 (2%)	0	1 (7.7%)	0
TOTAL	80	100	15	13	14

Tabla 10 3.c La velocidad del auto A en  $t_1$  con la de B en  $t_2$  es la misma

optaron por la falsedad no hayan basado su decisión en la pendiente de la recta (con la posible excepción de los profesores de preparatoria) sino que atendieron a que los puntos tienen abscisas distintas.

Una visión de conjunto de las respuestas a estas tres preguntas permite suponer que las interpretaciones de profesores y estudiantes, respecto de las velocidades son inducidas por la magnitud de la ordenada y no por la pendiente de la gráfica, esto es visible en las respuestas a la pregunta 3.a. Hay que considerar que las preguntas requieren centrar la atención en las velocidades instantáneas y esto requiere observaciones más acuciosas, además que en este tipo de preguntas no están exentas de las respuestas al azar. Es notorio que los profesores de preparatoria tienen la tendencia a realizar interpretaciones de las gráficas más acordes con lo que se acepta en física y matemáticas aunque la cantidad de los que no logran hacerlo no es despreciable.

**Situación 4.** Se presentan las gráficas que abajo aparecen, las cuales representan la posición de varios automóviles que se mueven en senderos rectilíneos y horizontales. De esta situación se plantean cuatro preguntas de opción múltiple que exploran concepciones sobre la velocidad y el orden temporal de los sucesos que ahí se representan. Las preguntas y sus respectivas opciones aparecen a la derecha de las gráficas.



Iniciaremos analizando las respuestas dadas a la pregunta 4.a, en ella se requiere discernir cuál de los autos no viaja con velocidad constante. Mediante un análisis somero de las gráficas se puede concluir que el auto D es el único que viaja a velocidad variable pues la pendiente de la gráfica que representa su movimiento cambia continuamente, el resto de las gráficas tienen (por separado) pendientes constantes. Veamos qué contestaron los estudiantes y profesores (ver Tabla 11).

Las respuestas de los estudiantes de secundaria y de preparatoria fueron muy variadas no así en el resto de los cuestionados, no obstante se nota que casi la mitad de los de secundaria eligen la opción D y casi el 60% de los de preparatoria también. Los porcentajes que eligen esta opción en los universitarios y en los profesores es mucho más alto. Estas respuestas sugieren un panorama halagador, sin embargo esta proclividad puede deberse a que la gráfica correspondiente al auto D es notoriamente diferente del resto (es curva, las demás son rectas), también puede ser que los estudiantes y profesores estén familiarizados con las gráficas del movimiento rectilíneo uniforme cuya gráfica se representa con una línea recta y la asocian con la velocidad constante.

La pregunta 4.b, explora el discernimiento de la gráfica correspondiente al auto que inició su movimiento con mayor velocidad, las respuestas dadas aparecen en la Tabla 12.

- a) ¿Cuál de los autos no viaja con velocidad constante?  
 A ( ) B ( ) C ( ) D ( ) E ( )
- b) ¿Cuál de los autos arrancó con mayor velocidad?  
 A ( ) A ( ) B ( ) C ( ) D ( ) E ( )
- c) ¿Cuál de los autos se mueve con velocidad negativa?  
 A ( ) A ( ) B ( ) C ( ) D ( ) E ( )
- d) ¿Cuál de los autos se mueve con menor rapidez?  
 A ( ) A ( ) B ( ) C ( ) D ( ) E ( )

OPCIONES	ESTUDIANTES			PROFESORES	
	Secundaria	Preparatoria	Universitarios	Secundaria	Preparatoria
A	5 (6.2%)	9 (9%)	0	0	0
B	8 (10%)	5 (5%)	0	1 (7.7%)	3 (7.5%)
C	12 (15%)	13 (13%)	0	0	0
D	38 (47.5%)	58 (58%)	11 (73.3%)	10 (77%)	34 (85%)
E	15 (18.7%)	14 (14%)	4 (26.7%)	0	0
NC	2 (2.5%)	1 (1%)	0	2 (15.4)	3 (7.5%)
TOTAL	80	100	15	13	14

Tabla 11 4.a. ¿Cuál de los autos no viaja con velocidad constante?

La pregunta está planteada de manera que se requiere de hacer comparaciones, pues no todos los autos (a juzgar por sus gráficas correspondientes) parten con la misma velocidad. Pero analicemos las respuestas, de inmediato se nota en la tabla una tendencia en estudiantes, que disminuye en los profesores, a elegir la gráfica de B, la tendencia es muy marcada en estudiantes de secundaria pues rebasa el 82% y en los de preparatoria es del 73%. Tal parece que las respuestas fueron guiadas más por la altura de la ordenada que por la inclinación o pendiente de las rectas, aunque esto tiene una objeción, si así fuera ¿Por qué no eligieron la gráfica de A? Esto es algo que merece más indagación.

En la pregunta 4.c, se explora la distinción de la gráfica que indica que el auto lleva veloci-

dad negativa, las respuestas dadas a esta pregunta aparecen en la Tabla 13.

A juzgar por las respuestas de los cuestionados, la proclividad de estudiantes y profesores a elegir la gráfica de E es notoria, esta es una evidencia clara de la asociación de gráficas con ordenadas negativas con la idea de velocidad negativa. La gráfica correspondiente al auto E tiene distancias negativas, éstas en física clásica son irreales, sin embargo para muchos estudiantes es condición necesaria para que el movimiento que representa tenga velocidad negativa.

En la pregunta 4.d, se explora la distinción de la gráfica que indica que el auto se mueve con menor rapidez. Las respuestas a esta pregunta aparecen en la Tabla 14.

OPCIONES	ESTUDIANTES			PROFESORES	
	Secundaria	Preparatoria	Universitarios	Secundaria	Preparatoria
A	2 (2.5%)	9 (9%)	0	1 (7.7%)	2
B	66	73 (73%)	10 (66.7%)	5 (38.4%)	11 (27.5%)
C	1	6 (6%)	4 (26.7%)	1 (7.7%)	19 (47.5%)
D	10	9 (9%)	1 (6.7%)	2 (15.4%)	3 (7.5%)
E	0	1 (1%)	0	0	1 (2.5%)
NC	1	2 (2%)	0	4 (30.1%)	4 (10%)
TOTAL	80	100	15	13	40

Tabla 12 4.b. ¿Cuál de los autos arrancó con mayor velocidad?

OPCIONES	ESTUDIANTES			PROFESORES	
	Secundaria	Preparatoria	Universitarios	Secundaria	Preparatoria
A	17 (21.2%)	19 (19%)	5 (33.3%)	2 (15.4%)	22 (55%)
B	1 (1.2%)	4 (4%)	0	2 (15.4%)	0
C	9 (11.2%)	3 (3%)	0	0	0
D	20 (25%)	21 (21%)	1 (6.67%)	1 (7.6%)	1 (2.5%)
E	33 (41.2%)	50 (50%)	9 (60%)	6 (46.1%)	13 (32.5%)
NC	0	3 (3%)	0	3 (23.1%)	4 (10%)
TOTAL	80	100	15	13	40

Tabla 13 4.c. ¿Cuál de los autos se mueve con velocidad negativa?

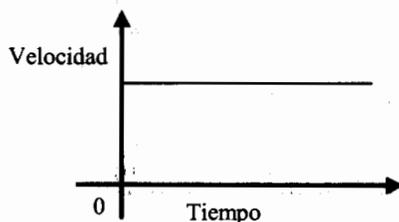
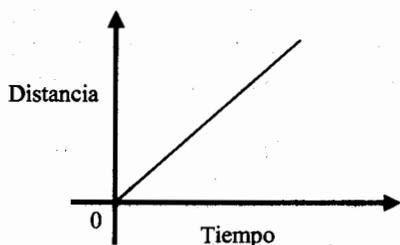
OPCIONES	ESTUDIANTES			PROFESORES	
	Secundaria	Preparatoria	Universitarios	Secundaria	Preparatoria
A	18 (22.5%)	16 (16%)	4 (26.7%)	1 (7.7%)	11 (25.5%)
B	3 (3.75%)	11 (11%)	1 (6.7%)	1 (7.7%)	7 (17.5%)
C	9 (11.25%)	20 (20%)	1 (6.7%)	2 (15.4%)	6 (15%)
D	12 (15%)	25 (25%)	4 (26.7%)	1 (7.7%)	7 (17.5%)
E	36 (45%)	28 (28%)	5 (33.3%)	4 (30.8%)	6 (15%)
NC	2 (2.5%)	0	0	4 (30.8%)	3 (7.5%)
TOTAL	80	100	15	13	40

Tabla 14 4.d. ¿Cuál de los autos se mueve con menor rapidez?

La rapidez es considerada en física como el valor absoluto de la velocidad, ésta en matemáticas es asociada con la pendiente de las gráficas con coordenadas distancia tiempo, de acuerdo con esto la gráfica cuya pendiente en términos absolutos es más pequeña en todo su dominio es la que corresponde al auto A, pero muy pocos (a excepción de los estudiantes universitarios y los profesores de preparatoria) eligieron esta opción. En los

estudiantes y profesores de secundaria la tendencia se inclina hacia la gráfica del auto E, quizá porque tenga ordenadas negativas. Hay que hacer notar que las respuestas de todos los cuestionados estuvieron muy dispersas.

**Situación 5.** Se presentan las gráficas que a continuación aparecen, se pregunta: ¿Podrían las dos gráficas corresponder al mismo movimiento?



	ESTUDIANTES			PROFESORES	
	Secundaria	Preparatoria	Universitarios	Secundaria	Preparatoria
Si	35 (43.75%)	45 (45%)	2 (13.3%)	5 (38.5%)	14 (35%)
No	33 (41.25%)	44 (44%)	11 (73.3%)	5 (38.5%)	23 (57.5%)
No se puede saber	12 (15%)	9 (9%)	2 (13.3%)	2 (15.4%)	3 (7.5%)
NC	0	2 (2%)	0	1 (7.7%)	0
Total	80	100	15	13	40

Tabla 15 ¿Podrían las gráficas corresponder al mismo movimiento?

La primera gráfica representa al movimiento rectilíneo uniforme, la segunda representa la velocidad respecto del tiempo, la primera atiende a la variación de las distancias y la segunda a la variación de las velocidades. Ambas pueden corresponder al mismo movimiento aunque de ese movimiento consideren variables diferentes. Los estudiantes y profesores contestaron como se muestra en la Tabla 15.

La cantidad de estudiantes de secundaria y preparatoria que contestaron con un *si* o un *no* fue muy equilibrada, los universitarios mayoritariamente opinaron que *no*. La cantidad de respuestas de los profesores de secundaria también fue equilibrada, los de preparatoria mayoritariamente opinaron que *no*. En virtud de que este tipo de respuestas difícilmente se pueden liberar de las decisiones azarosas, es aventurado hacer conjeturas, no obstante puede que los cuestionados no hayan atendido a que se trata de gráficas con coordenadas de diferentes naturaleza, quizá hayan interpretado a las gráficas como tra-

yectorias distintas. De cualquier manera las respuestas indican la fragilidad de las ideas de los cuestionados, acerca de las representaciones gráficas del movimiento, pues cantidades significativas de ellos creen que ambas no pueden representar al mismo movimiento.

**Situación 6.** Se presentan las cuatro gráficas que aparecen abajo, se pide seleccionar cuál de ellas corresponde al movimiento de un cuerpo que cae libremente solo por acción de la gravedad. Aquí se pretende explorar el discernimiento de estudiantes y profesores sobre las gráficas cartesianas y sobre las trayectorias, en particular de cuerpos que caen por efecto de la gravedad.

Las respuestas a este cuestionamiento aparecen en la Tabla 16.

A pesar que se les pidió a los alumnos y profesores que eligieran una sola opción ocurrieron varios casos en los que no fue así, entonces los totales se vieron alterados.

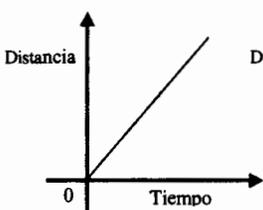


Figura 6.A

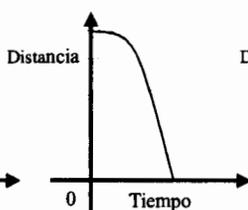


Figura 6.B

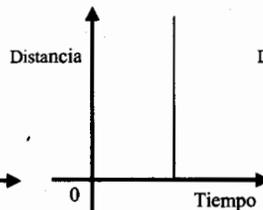


Figura 6.C

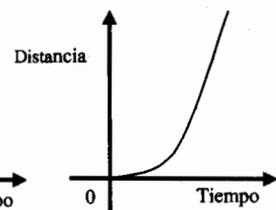


Figura 6.D

	ESTUDIANTES			PROFESORES	
	Secundaria	Preparatoria	Universitarios	Secundaria	Preparatoria
A	5 (5.9%)	6 (5.5%)	1 (6.7%)	1 (7.7%)	6 (15%)
B	33 (38.8%)	33 (30.3%)	3 (20%)	2 (15.4%)	5 (12.5%)
C	35 (41.2%)	61 (56%)	10 (66.7%)	8 (61.5%)	20 (50%)
D	12 (14.1%)	8 (7.3%)	1 (6.7%)	1 (7.7%)	8 (20%)
NC	0	1 (1%)	0	1 (7.7%)	1 (2.5%)
<b>TOTAL</b>	<b>85</b>	<b>109</b>	<b>15</b>	<b>13</b>	<b>40</b>

Tabla 16 ¿Qué gráfica corresponde al movimiento de un objeto que cae sólo por acción de la gravedad?

En la tabla se observa que en todos los grupos de profesores y estudiantes la opción que obtuvo mayor preferencia corresponde a la Gráfica 6.C. La opción que obtuvo el segundo lugar en preferencia en todos los grupos (excepto en los profesores de preparatoria), fue la que corresponde a la Gráfica 6.B. Esta última tiene mucha semejanza a la trayectoria que describe un cuerpo que es lanzado horizontalmente pero, que por la acción de la fuerza de gravedad, va *curvándose* hacia abajo a medida que avanza. Estas respuestas ponen de manifiesto la alta proclividad de los cuestionados a interpretar las gráficas cartesianas del movimiento como aquellas que se parecen a la trayectoria del mismo. Estas interpretaciones pueden deberse a que las trayectorias son más cercanas a nuestras percepciones inmediatas que las representaciones cartesianas. Muy pocos eligieron la opción D, solamente los profesores de preparatoria que eligieron esta opción alcanzó el 20%, en los demás casos los porcentajes fueron muy inferiores a este.

## 6. CONCEPCIONES ALTERNATIVAS DETECTADAS

Los estudiantes conciben la condición *mayor velocidad*, más precisamente *mayor velocidad media*, como asociada a: la representación gráfica de la ordenada de mayor altura o con el intervalo al que le corresponden las

ordenadas de mayor altura; con el segmento rectilíneo de mayor longitud de la gráfica (cuando está compuesta de varios segmentos de recta); el segmento rectilíneo horizontal al eje de las *t* (quizá interpretando la gráfica como el *corte transversal* de una carretera que cuando es *plana* el automóvil debe desplazarse con mayor velocidad); con el segmento de recta de mayor pendiente. Esta última concepción casi no se manifiesta en estudiantes de secundaria siendo más visible en los universitarios, en tanto que la proclividad a manifestar las restantes es más marcada en los de secundaria. En cuanto a los profesores, las tendencias notadas en los estudiantes se conservan sólo que hay preferencia por el intervalo de las ordenadas de mayor altura. Más de la mitad de los profesores de preparatoria la asociaron con el segmento de recta de mayor pendiente.

En cuanto a las *estimaciones de la velocidad media* cuando la gráfica es un segmento rectilíneo paralelo al eje de las *t*, las concepciones alternativas encontradas se asocian a: la magnitud de la ordenada, otros operan con los extremos o el medio del intervalo de tiempo con la ordenada constante correspondiente (los multiplican o dividen), ningún estudiante, a excepción de algunos de preparatoria, estimaron que la velocidad es de 0 Km/h; en los profesores las tendencias son similares, aunque la proclividad a asociar la velocidad con la ordenada es más acentuado en los pro-

fesores de secundaria, sólo algunos profesores de preparatoria estimaron que la velocidad es cero atendiendo quizá a la pendiente de la recta. Cuando el segmento rectilíneo de la gráfica tiene pendiente positiva los estudiantes y profesores asocian la velocidad media con la magnitud de las ordenadas de los extremos o de la ordenada intermedia, aunque tienen preferencia por la ordenada de mayor altura, operan con la magnitud de la ordenada mayor dividiéndola entre la magnitud de su correspondiente abscisa. Cuando el segmento rectilíneo de la gráfica tiene pendiente negativa aflora una amplia diversidad de concepciones, la asocian a las ordenadas de los extremos o con algunas ordenada intermedias (con inclinaciones visibles a la de mayor magnitud), dividen la magnitud de la ordenada mayor entre el extremo superior del intervalo de tiempo, otros (muy pocos) parecen utilizar el cociente:  $\Delta d/\Delta t$ , algunos dieron como respuesta 0 Km/h, nadie de los estudiantes insinuó que la velocidad fuese negativa; las manifestaciones encontradas en los profesores son semejantes, aunque muy pocos de ellos obtuvieron velocidades negativas.

En cuanto a la comparación de *velocidades instantáneas* en un par de gráficas paralelas de coordenadas distancia-tiempo, la mayoría de estudiantes y profesores cuestionados conciben que no pueden representar igual velocidad en un  $t_0$  común para ambas (esto es más acentuado en estudiantes y profesores de secundaria), estas decisiones fueron tomadas probablemente sobre la base de la comparación de las magnitudes de las ordenadas correspondientes a  $t_0$  que para ambas es diferente. Las concepciones no tienen el mismo comportamiento cuando se comparan dos gráficas que no son paralelas, pues la mayoría de estudiantes y profesores manifestó no estar de acuerdo con la proposición de que *llevan la misma velocidad* a pesar de que para los puntos  $t_0$  y  $t_1$  en cuestión las magnitudes de sus ordenadas son iguales.

Respecto a la identificación de gráficas que representan movimiento con *velocidad no constante* a partir de gráficas rectilíneas y curvilíneas, la mayoría de estudiantes y profesores eligieron éstas últimas y con menos frecuencia la gráfica rectilínea que está por debajo del eje de las  $t$ . Respecto a la *mayor velocidad inicial* se nota una tendencia muy marcada en estudiantes que disminuye en los profesores a elegir la gráfica que parte del origen pero con ordenada mayor que cero (la tendencia es muy marcada en estudiantes de secundaria y preparatoria), a juzgar por el tipo de respuestas, éstas fueron guiadas más por la altura de la ordenada que por la pendiente de las rectas. En cuanto a la *velocidad negativa* los estudiantes y profesores la asocian mayoritariamente con la gráfica cuyas ordenadas son negativas, pocos la asocian con gráficas de rectas con pendiente negativa, algo parecido ocurre cuando se les pide la menor rapidez.

Respecto a la posibilidad de que *dos gráficas*, una de coordenadas tiempo-distancia y otra coordenadas tiempo-velocidad, referidas al movimiento rectilíneo uniforme, *puedan representar al mismo movimiento* la cantidad de respuestas fueron muy equilibradas para el *sí* y para el *no* en los estudiantes y profesores de secundaria y en estudiantes de preparatoria, los estudiantes universitarios y profesores de preparatoria mayoritariamente opinaron que no. La tendencia apunta que a mayor nivel educativo corresponden concepciones menos consistentes acerca de la posibilidad de que representaciones gráficas tiempo-distancia y tiempo-velocidad modelen un mismo movimiento.

Finalmente la gran mayoría, tanto de estudiantes como de profesores que contestaron el cuestionario, asocian la gráfica cartesiana que se asemeja a la *trayectoria* para el caso de la caída libre de los cuerpos, este dato es sintomático de la concepción que equipara a la tra-

vectoria del movimiento físico con la gráfica cartesiana del mismo.

## 7. IMPLICACIONES DIDÁCTICAS

Los resultados arrojados por esta investigación ponen de manifiesto las concepciones alternativas de profesores de física con experiencia y de estudiantes de diversos niveles después de haber pasado por al menos un curso de física y varios de matemáticas que incluyen la graficación y análisis de gráficas. La enseñanza y el aprendizaje de las ciencias persigue, como uno de sus fines principales, el logro de cambios conceptuales o transformación de esas concepciones alternativas en conceptos científicos. ¿Pero es posible cambiar las concepciones alternativas por otras que sean aceptables por la ciencia? Los resultados obtenidos en este trabajo indican que en las condiciones de la enseñanza tradicional esos cambios no son visibles en una porción importante de estudiantes, inclusive la situación es parecida en los profesores.

Pozo (1996) plantea que los verdaderos conceptos sólo pueden adquirirse por reestructuración, pero ésta sólo es posible si se apoya en las asociaciones previas. He ahí la importancia de conocer las concepciones previas o

las alternativas pues la reestructuración no obra en el vacío. Agrega, además, tres condiciones en las que es posible un cambio conceptual: la existencia de una cierta conexión genética con la teoría alternativa del alumno y la teoría científica que se le pretende transmitir; enfrentar al alumno a situaciones conflictivas que supongan un reto para sus ideas para que pueda comprender la superioridad de la nueva teoría; los conceptos alternativos de los alumnos suelen ser implícitos, un primer paso para modificarlos será hacerlos explícitos mediante su aplicación a problemas concretos, además, es necesario que el alumno tome conciencia de las ventajas de la nueva teoría que se le propone.

Por nuestra parte presuponemos que la superación de las concepciones alternativas en la enseñanza y aprendizaje de la física y la matemática puede favorecerse, por un lado, si tal proceso se diseña teniendo como marco general las condiciones sugeridas en el párrafo anterior, y por otro, si se forma una rica gama de representaciones mentales en los estudiantes acerca de las gráficas espacio-tiempo y de las gráficas de funciones en general, y en especial acerca del análisis e interpretación de su comportamiento. Esto será tema de futuros trabajos de investigación.

## BIBLIOGRAFÍA

Aleksandrov, A., Kolmogorov, A., Laurentiev, et al. (1985) *La matemática; su contenido su método y su significado*. Madrid, España: Alianza Universidad.

Azcárate, C., Casadevall, M., Casellas, E., & Bosch, D. (1996). *Cálculo Diferencial e Integral*. Educación Matemática en Secundaria. Madrid, España: Editorial Síntesis.

Best, J. W. (1982). *Cómo investigar en educación*. Madrid, España: Ediciones Morata.

Cantoral, R. & Farfán, R. (2000). Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis. En R. Cantoral (Ed.), *El futuro del Cálculo Infinitesimal, ICME-8* (pp. 69-91). Sevilla, España: Grupo Editorial Iberoamérica.

Confrey, J. (1990). A review of the research on student conceptions in mathematics, science and programming. *Review of research in Education* 16, 3-56

Dolores, C. (1999). *Una introducción a la derivada a través de la variación*. México: Grupo Editorial Iberoamericana.

Dolores, C. (1998). Algunas ideas que acerca de la derivada se forman los estudiantes del bachillerato en sus cursos de Cálculo Diferencial. En F. Hitt (Ed.), *Investigaciones en Matemática Educativa II* (pp. 257-272). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Dolores, C., Guerrero, L. A. & Medina, M. (2001). Un estudio acerca de las concepciones de los estudiantes sobre el comportamiento variacional de funciones elementales. En C. Crespo (Ed), *Resúmenes de la 15ª Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp. 122-123). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Duval, R. (1999). *Semiosis y Pensamiento Humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Medellín, Colombia: Universidad del Valle.

Ensimberg, T. & Dreyfus, T. (1991). On the reluctance to visualize in mathematics. En W. Zimmerman & S. Cunningham (Eds.), *Visualization in Teaching and Learning Mathematics* (pp. 25-27). Washington, EE. UU.: Mathematical Association of America.

Hernández, S. et al. (1997). *Metodología de la investigación*. México: Editorial Mc Graw-Hill.

Leinhardt, G., Zaslavsky, O. & Stein, M.K. (1990) Functions, graphs and graphing: tasks, learning and teaching. *Review of Educational Research* 60, 1-64.

Janvier, C. (1978). *The interpretation of complex cartesian graphs representing situation-studies and teaching experiments*. Tesis Doctoral. University of Nottingham, U.K.

Mc Dermot, L.C., Rosenquist, M.L. & Van Zee, E. H. (1987). Student's difficulties in connecting graphs and physics: Examples from kinematics. *American Journal of Physics* 55, 503-513.

Mevarech, Z. & Kramarsky, B. (1997). From verbal description to graphic representation: stability and change in students' alternative conceptions. *Educational Studies in Mathematics* 32 (3), 229-263.

Orton, A. (1983). Students' Understanding of Differentiation. *Educational Studies in Mathematics* 14(3), 235-250.

Pozo, J. I. (1996). *Teorías cognitivas del aprendizaje*. Madrid, España: Ediciones Morata.

Ríbnikov, K. (1987). *Historia de las Matemáticas*. Moscú: Editorial Mir.

Secretaría de Educación Pública. (1993). Plan y Programas de Estudio 1993. Educación Básica. Primaria. México D. F.

Secretaría de Educación Pública. (1993). Plan y Programas de Estudio 1993. Educación Básica. Secundaria. México D. F.

SEP, DEGTE, SEIT, COSNET. (1988). *Programas Maestros del Tronco Común del Bachillerato Tecnológico*. Coordinación Estatal Guerrero.

Universidad Autónoma de Guerrero. (2000). *Programas de Estudio. Área: Físico-Matemáticas*.

Vigotsky, L. (1996). *Pensamiento y lenguaje*. México: Ediciones Quinto Sol.

Wussing, H. (1989). *Conferencias sobre Historia de las Matemática*. La Habana, Cuba: Editorial Pueblo y Educación.

Wainer, H. (1992). Understanding graphs and tables. *Educational Researcher* 21, 14-23.

Zears, F. & Zemansky, M. (1977). *Física General*. México: Editorial Aguilar.

### **Crisólogo Dolores Flores**

Centro de Investigación en Matemática Educativa

Universidad Autónoma de Guerrero, México

**E mail:** cdolores@guerrero.uagro.mx

### **Gabriel Alarcón Bello**

**Delia Faustina Albarrán Millán**

Escuelas del Centro del Estado de Guerrero, México