2002

Angel Contreras de la Fuente / María Contreras Quesada / Manuel García Armenteros

SOBRE LA GEOMETRÍA SINTÉTICA Y ANALÍTICA. LA ELIPSE Y SUS CONSTRUCCIONES

Revista Latinoamericana de Investigacion en Matematica Educativa, julio, año/vol. 5, número 002
Comité Latinoamericano de Matemática Educativa
Distrito Federal, México
pp. 111-132

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa
Vol. 5, Núm.2, julio, 2002, pp. 111-132.

Sobre la geometría sintética y analítica. La elipse y sus construcciones.*

Ángel Contreras de la Fuente*
María Contreras Quesada♦
Manuel García Armenteros*

RESUMEN

En el currículum del segundo curso del Bachillerato español aparece, en el bloque temático de geometría, una unidad didáctica denominada "Cónicas", cuyo desarrollo consideramos muy importante en la formación de los futuros estudiantes universitarios, puesto que en el nivel superior se parte de la base de que los programas de enseñanza secundaria son verdaderamente impartidos. Sin embargo, en algunos de los Institutos de Educación Secundaria de nuestro país la elipse ni siquiera llega a tratarse en clase, a lo más que se aspira en el desarrollo de la unidad es poder realizar un estudio de la circunferencia. Las consecuencias posteriores en el primer año universitario —ligadas al desconocimiento de las cónicas— obviamente son negativas para los estudiantes. En este trabajo se propone un estudio sintético-analítico de las construcciones con la elipse que consideramos motivador y formador para los alumnos de Bachillerato.

ABSTRACT

Within the curriculum for the second year in Spanish upper secondary schools (17-18 year old students, appr.) we can find a unit called "conicals", in the subject Geometry. We consider that the development of this unit is essential for the adequate training of prospective university students, since it is assumed in this institution that the programmes are actually fulfilled in secondary schools. Nevertheless, the fact is that, in some Spanish secondary schools, ellipses are not even dealt with in class, studying circumferences at the most. The subsequent consequences in the first year at the university —as a result of not knowing conicals— are obviously negative to the students. In this paper we suggest a synthetic-analytical approach to the constructions based on the ellipse that we think is motivating and training-orientated for upper secondary school students.

RÉSUMÉ

Les directives pour le curriculum de deuxième année du Bachillerato espagnol proposent, dans le groupement thématique de Géométrie, une unité didactique nommée "Coniques". Étant donné que l'institution "Université" entame ses enseignements sur la base que les programmes du secondaire sont vraiment expliqués, nous considérons l'importance du développement de

• *Fecha de recepción: Octubre del 2001.*
**Universidad de Jaén.*
♦ *Universidad de Granada.*

cette séquence en vue de la formation des futurs étudiants universitaires. Cependant, l'expérience nous démontre que, dans certains établissements de l'enseignement secondaire de notre pays, l'ellipse n'est point travaillée en classe et que l'on arrive, tout au plus, à étudier la circonférence. Les conséquences postérieures, liées à la méconnaissance des coniques, dans une première année universitaire, sont clairement négatives pour les étudiants. Le travail que nous proposons se veut une étude analytico-synthétique des constructions faites avec l'ellipse, que nous considérons motivant et formateur pour les élèves du secondaire.

RESUMO

No currículo do segundo curso do Bacharelato espanhol aparece, na matéria de Geometría, uma unidade denominada: "Cônicas", cujo desenvolvimento consideramos muito importante na formação dos futuros estudantes universitários, visto que na instituição "Universidade" se parte do princípio de que os programas do ensino secundario são, de fato, realizados. Não obstante, na realidade, em alguns dos Institutos d Educação Secundária do nosso país, nem sequer se fala da elipse nas aulas, podendo en alguns casos, se fazer o estudo da circunsferencia. As consequências disso no primeiro ano universitário, ligadas ao desconhecimento das cônicas, são obviamente negativas para os estudantes. Neste trabalho propõe-se um estudo sintético-analítico das construções com a elipse que consideramos motivadoras para os alunos do Bacharelato.

MÉTODOS SINTÉTICOS Y ANALÍTICOS EN LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Aunque en este trabajo nos referiremos a la geometría sintética típica del modelo euclídeo, con una base axiomática, y a la geometría analítica del modelo cartesiano, la utilización de métodos analíticos y sintéticos en el plano de la metodología matemática va más allá de la enseñanza de las construcciones de la elipse, implicando a todas las ramas de las Matemáticas. Por tanto, es conveniente definir y dar ejemplos de estos dos términos tan importantes en la Didáctica de la Matemática.

En general, por análisis se entiende la descomposición de la materia objeto de estudio para conocer con mayor facilidad cada una de sus partes. Ejemplo de ello lo tenemos en aritmética, cuando en la numeración se descompone cierto número en unidades de los diferentes órdenes, y en las operaciones de varias cifras que, en definitiva, se reducen a operar por separado con las unidades de diversos órdenes (aunque se acompañan además de pasos de síntesis). Otro caso típico es la descomposición en factores primos.

En geometría, para la contextualización del análisis se pueden citar los procedimientos de obtención de áreas, por ejemplo, para el trapecio, descomponiéndolo en dos triángulos por medio de una diagonal, o el polígono regular dividido en triángulos isósceles. El recortado de papel en la escuela primaria es un análisis materializado.

La síntesis consiste en la composición de elementos dados para obtener el conocimiento del conjunto. En geometría encontramos un ejemplo de esto en la obtención del área del triángulo componiendo un paralelogramo de cuya área se deduce la de aquél. Para hallar la suma de los ángulos de un triángulo se componen los tres ángulos en un mismo vértice trazando por él una paralela al tercer lado. El ensamblado del trabajo manual es la materialización de este método.

En la práctica, ambos métodos se utilizan conjuntamente formando el método analítico-sintético, como en el caso ya señalado de la obtención del área de un triángulo reduciéndolo a un paralelogramo, y cuya materialización tenemos en el plegado de los trabajos manuales.

Un interesante ejemplo en el nivel de educación primaria (Eyaralar, 1933, pp. 16-17), en el que se pueden observar perfectamente delimitados y coordinados ambos métodos en la resolución de problemas así como la potencialidad que adquieren con el uso conjunto, es el siguiente:

"Un propietario quiere cercar un jardín, de 99 m por 11 m, con una tapia que le cuesta 9 ptas. el metro. Permutando este jardín por otro de igual extensión, pero cuadrado, ¿cuánto se ahorra con la construcción de la tapia?"

Análisis

Ahorro = Costo 1.ª tapia – Costo 2.ª
Costo 1.ª = Perímetro 1.ª × 9 ptas.
Costo 2.ª = Perímetro 2.ª × 9 ptas.
Perímetro 1.ª tapia = (11 + 99) × 2
Perímetro 2.ª tapia = lado × 4
Lado del cuadrado: $\sqrt{Area}$
Área del jardín = 99 × 11

Síntesis

Área del jardín = 99 × 11 = 1089 m^2
Lado del cuadrado = $\sqrt{1089}$ = 33 m
Perímetro 2.ª = 33 × 4 = 132 m
Perímetro 1.ª = (11 + 99) × 2 = 220 m.
Costo 2.ª tapia = 132 × 9 = 1188 ptas.
Costo 1.ª tapia = 220 × 9 = 1980 ptas.
Ahorro = 1980 – 1188 = 792 ptas.

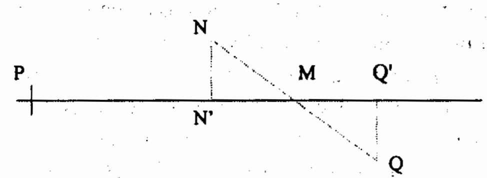
En el contexto de las construcciones geométricas elementales, un sencillo ejemplo que evidencia la coordinación de ambos métodos es el siguiente:

"Traza por un punto P una recta que equidiste de dos puntos dados N y Q."

Método analítico

Se supone el problema resuelto:

Se comienza por construir la figura trazando la recta, tomando en ella el punto P y, a un lado y a otro de la misma, los puntos N y Q, equidistantes de ella. Es decir, siguiendo la marcha a la inversa de lo indicado en el enunciado.



Siendo:

$$NN'=QQ' \Rightarrow \Delta MN'N = \Delta MQ'Q \Rightarrow NM=MQ$$

De aquí se deduce la construcción: Unir el punto dado P con el punto medio M de NQ.

Método sintético

Únase N con Q y tómese el punto medio M del segmento NQ y únase P con M. En efecto siendo:

$$MN=MQ \Rightarrow \Delta MN'N=\Delta MQ'Q \Rightarrow NN'=QQ'$$

Puede observarse cómo este método sintético, en cierto modo, sigue un camino opuesto al analítico. Además, podemos decir que mientras el segundo es el método de la invención, el sintético desempeña el papel de exposición de la verdad.

Pasando a otro contexto, el de los estudios teóricos sobre la Didáctica de la Matemática, es frecuente observar el importante papel que se asocia a la síntesis en la formación de conceptos. Así, por ejemplo, en Dreyfus (1991, p. 35), siguiendo la perspectiva del AMT (*Advanced Mathematical Thinking*), se considera la síntesis como un proceso cognitivo involucrado en la abstracción, al señalar: "Sintetizar significa combinar y componer partes de algo de tal manera que formen un todo, una entidad. Frecuentemente, esta entidad engloba más cosas que la suma de las partes. En álgebra lineal, por citar un caso, los estudiantes aprenden habitualmente una determinada cantidad de hechos aislados sobre la ortogonalización de vectores, cambios de base, soluciones de los sistemas de ecuaciones lineales, etc. Más adelante, en el proceso de aprendizaje, es de esperar que todos estos hechos, no relacionados previamente, se fundan en una única imagen dentro de la cual está todo incluido y relacionado. Este proceso es una síntesis".

Sierpinska (1997, p. 150), al analizar la comprensión, considera que está constituida por diversas categorías de operaciones mentales: identificación, discriminación, generalización y síntesis, y señala: "La elaboración de un concepto hace una importante llamada a la abstracción de rasgos distintivos y a la síntesis de estos rasgos en un todo coherente. Se puede hablar de pensamiento conceptual cuando 'la síntesis abstracta obtenida de este modo llega a ser la forma fundamental del pensamiento, permitiendo al niño captar la realidad que le rodea y darle sentido'. La síntesis en sí misma es el punto culminante de una serie de identificaciones, de discriminaciones y de generalizaciones".

Como puede observarse, en cualquier rama de las Matemáticas aparecen los métodos sintéticos y analíticos como elementos importantes en la resolución de problemas, en los razonamientos que conducen a las construcciones geométricas, en la formación de conceptos. En este trabajo nos centraremos en estos métodos en cuanto a las construcciones elementales de la elipse tratando de aportar conocimiento a las interrelaciones que se dan en la enseñanza entre técnicas sintéticas y analíticas.

REFLEXIONES ACERCA DE LA ENSEÑANZA DE LAS CÓNICAS EN 2.º DE BACHILLERATO

La enseñanza de las cónicas es un tema que, en la LOGSE (MEC, 1992), ha sido relegado a segundo curso de Bachillerato. El tratamiento que se observa en los libros de texto es de tipo analítico, casi exclusivamente, y no se encuentra explicación para tal comportamiento salvo que —como mucho nos tememos— se haya destinado para las Matemáticas de este nivel educativo la metodología y técnicas analíticas cuando se estudian temas de geometría. Esto parece corroborarse al analizar el currículo de geometría de la ESO, en el que únicamente se desarrollan contenidos de tipo sintético. Como señala Gascón (2001, p. 3): "... la presunta alternativa entre geometría sintética y geometría analítica es, en realidad, una falsa alternativa fruto de un análisis epistemológico superficial". Es decir, no se ven razones científicas que aconsejen impartir un tipo de geometría u otro, salvo la propia inercia de los programas y textos de "toda la vida".

Es posible que —a la hora de su transposición al aula— las razones para dividir la geometría en sintética y analítica puedan deberse a una desgraciada distinción que siempre se ha hecho: la geometría euclídea se impartirá en los niveles elementales, o en todo caso en la asignatura de dibujo, y la cartesiana en niveles posteriores de Bachillerato. Cuesta pensar que el hecho de que Euclides y Apolonio nacieran varios siglos antes de Cristo y Descartes dieciséis después, haya sido —y lo siga siendo— una poderosa razón para decidir la secuencia de contenidos de geometría en la educación secundaria.

En el citado trabajo (Gascón, 2001, p. 18) se puntualiza: "Queremos acabar reivindicando la necesidad imperiosa de seguir investigando cómo deberían conectarse, en la geometría de secundaria, las técnicas sintéticas con las analíticas". Es decir, las interrelaciones entre geometría sintética y geometría analítica son necesarias en la enseñanza de la geometría ya que, aunque ésta es un cuerpo de conocimientos teóricos, cuando se utilizan modelos de representación para interpretarlos es necesario distinguir entre objetos y relaciones geométricas, que son de naturaleza teórica, de sus manifestaciones en los diversos sistemas que conducen a realidades de tipo espacio-gráfico. Como señalan Capponi y Laborde (1995, p. 265): "Los objetos y relaciones de la geometría requieren, por parte del individuo, conocimientos y controles, mientras que las relaciones espacio-gráficas requieren primeramente una aprehensión y controles perceptivos".

Por otra parte, en las condiciones sociales actuales, con metodologías para impartir la enseñanza de las Matemáticas cada vez más alejadas del formalismo, es muy importante la motivación de los alumnos —en este sentido es interesante el trabajo de Río Sánchez (1994)—. Por tanto, el profesor debe alejarse de lo que supone una secuenciación rígida de los contenidos geométricos, en caso contrario la empresa de enseñar geometría puede resultar poco menos que inviable. De aquí que propuestas en las que se muestre la conveniencia de abordar determinados tópicos geométricos desde diversas perspectivas pueden ayudar a la construcción de situaciones de enseñanza capaces de interesar e integrar a los estudiantes en el discurso geométrico, un ejemplo de ello se refleja en Contreras et al. (2001).

Es decir, la enseñanza de la geometría necesita aportaciones que intenten clarificar los puntos débiles que impiden el avance. Como apuntan Figueiras y Colab. (2000, p. 46): "La enseñanza de la geometría ha sido objeto de numerosos estudios, ha generado varias experiencias, pero sigue siendo una asignatura pendiente. Cabría preguntarse dónde está el punto débil de la cuestión…"

En este trabajo se intenta ofrecer una propuesta integradora de la visión sintética y analítica de la geometría en el tema de la elipse, el cual se imparte en segundo curso del Bachillerato. Se desea mostrar la posibilidad —y quizás la conveniencia— de abordar dicho tema desde una doble perspectiva: la sintética y la analítica, complementándose entre sí.

Por otra parte, se realiza un pequeño estudio de tipo interdisciplinar entre la geometría y la óptica buscando dos objetivos. En primer lugar, contextualizar, por medio de una aplicación práctica, la cónica elipse. Como señala Van Reeuwijk (1997, p. 13): "…los contextos y la vida cotidiana deberían desempeñar un papel preponderante en todas las fases del aprendizaje y la enseñanza de las Matemáticas, es decir, no sólo en la fase de aplicación, sino también en la fase de exploración y en la de desarrollo, donde los alumnos descubren o aún mejor reinventan las Matemáticas". En segundo lugar, hacer notar cómo avanza el desarrollo de los conocimientos, no en forma aislada sino paralela y de modo cooperativo y complementario.

Por lo anterior, en este trabajo se ha destinado un apartado en el que se estudian dos conceptos físicos de gran utilidad —polarización y elipsometría— íntimamente conectados con la cónica elipse. Es decir, dado aquí sostenemos la necesidad de conexión entre los estudios pre y universitarios, nos ha parecido pertinente realizar un breve estudio de tipo motivador y contextualizador sobre esos dos conceptos físicos. En este sentido, Luelmo (1997, p. 7) puntualiza: "Las situaciones reales bien elegidas y adaptadas a los estudiantes, constituyen un elemento motivador. Por tanto, los contenidos matemáticos que en ellas pueden aprenderse, no sólo adquieren significado desde un punto de vista intelectual, sino relevancia, en cuanto que se aplican a una situación personal o profesional interesante. El reto para el profesorado estriba, por tanto, en seleccionar situaciones que movilicen emotiva e intelectualmente al alumnado".

ALGUNAS CONSIDERACIONES SOBRE LA ENSEÑANZA-APRENDIZAJE DE LA ELIPSE

El enfoque constructivista del aprendizaje sostiene que todo nuevo concepto se adquiere desde las estructuras conceptuales previas que ya posee el individuo, de tal forma que dicho aprendizaje será significativo si el conocimiento se construye a partir de las ideas que ya se tienen. Como señala Ernest (1994, pp. 1-2): "Lo que las diversas formas de constructivismo comparten es la metáfora de la carpintería, la arquitectura y el trabajo de construcción. Esto se refiere a la construcción de estructuras a partir de piezas existentes, posiblemente preparadas de modo especial para la tarea. La metáfora describe la comprensión como la construcción de estructuras mentales, y el término "reestructuración", con frecuencia usado como sinónimo de "acomodación" o "cambio conceptual", contiene esta metáfora".

Es frecuente que los alumnos desarrollen ideas respecto a fenómenos de la vida real antes de que se desarrolle su estudio en el currículo escolar. Vygotsky las denomina "conceptos espontáneos". Es posible que, en algunos casos, esas ideas previas sean correctas, pero en otros, aún siendo erróneas, son potencialmente correctas por lo que conviene tener conocimiento de las mismas de cara al desarrollo de situaciones de enseñanza que faciliten el aprendizaje del concepto implicado.

En Río (1994) se estudiaron las ideas previas de los alumnos de Bachillerato en torno a las cónicas. Algunos de los resultados obtenidos, tanto incorrectos como correctos, son los siguientes: a) Un óvalo construido con cuatro arcos de circunferencia es una elipse; b) Al achatar una circunferencia se obtiene una elipse; c) Dos arcos secantes de igual radio no constituyen una elipse; d) Los tres tipos de cónicas (elipse, hipérbola y parábola) son independientes, no guardan ninguna relación estructural entre sí, directa ni indirecta.

Al tratarse de conceptos espontáneos, las ideas previas reúnen un conjunto de características: a menudo son de carácter implícito; en algunos casos tienen un componente histórico; son resistentes al cambio. Por tanto, es conveniente utilizar las ideas previas en la enseñanza a fin de obtener un cambio conceptual en los estudiantes acerca de las mismas, facilitando experiencias que cuestionen dichas nociones.

Respecto al problema de la aproximación de la elipse por medio de arcos circulares, en el que quedarían incluidos las primeras ideas citadas, en Rosín y Pitteway (2001) se describen aproximaciones circulares de la elipse en los campos de la astronomía, del arte y de la arquitectura, señalando que: "Aunque la aproximación de la elipse por arcos circulares parece un problema simple, la investigación pone en evidencia una gran riqueza de posibilidades" (p. 23).

En Cantoral y Farfán (1998) se desarrolla una aproximación teórica a la Didáctica de las Matemáticas de naturaleza epistémica, que supone un avance respecto a los enfoques constructivistas de la Matemática —al reunir una gama más completa de elementos modelizadores del conocimiento matemático—. Se trata de una aproximación de tipo socioepistemológico que incorpora cuatro componentes fundamentales en la construcción de dicho conocimiento: su naturaleza epistemológica, su dimensión sociocultural, los planos de lo cognitivo y los modos de trasmisión vía la enseñanza. Aunque esta teoría se basa en el pensamiento y el lenguaje variacional, consideramos que muchas de sus ideas motrices pueden aplicarse a otros campos de la Didáctica de la Matemática, como en el caso de la enseñanza de la geometría. Así, ofrecer un universo de construcciones de la elipse a los estudiantes, tanto sintéticas como analíticas, extenso y rico en significados, incorporando elementos visuales como parte de su actividad matemática al enfrentar problemas, se facilitará el tránsito entre los métodos sintéticos y analíticos de esta cónica, con lo que se abre la posibilidad de poder ver, de modo significativo, construcciones de las cónicas de tipo unificador (Santos-Trigo y Espinosa-Pérez, 2002).

Por tanto, para lograr, por una parte, una ruptura con las ideas previas de los alumnos respecto a la elipse y, por otra, facilitar el paso fluido entre los métodos sintéticos y analíticos, se efectuará un recorrido por las distintas construcciones de la elipse. Comenzaremos el estudio acudiendo a la historia, describiendo algunos aspectos de la obra de Apolonio sobre las cónicas que es un modelo paradigmático de cómo usar el método de síntesis.

LA ELIPSE. APOLONIO–DESCARTES

Efectuaremos una sucinta incursión en la historia de las Matemáticas respecto a la cónica elipse, lo cual puede ayudarnos a centrar el tema que nos ocupa. Como señala Sierra (1997, p. 182) respecto al uso de la historia en la Didáctica de las Matemáticas: "Para el profesor constituye un antídoto contra el formalismo y el aislamiento del conocimiento matemático y un conjunto de medios que le permiten apropiarse mejor de dicho conocimiento, a la vez que le ayudan a ordenar la presentación de los temas del currículo". Además, Guichard (2001, p. 319), refiriéndose a las construcciones geométricas, apunta: "Investigar y encontrar ciertos problemas en la historia de nuestra disciplina nos debería permitir una mejor delimitación de este tipo de problemas (construcciones geométricas) y dar sentido e interés a esta actividad geométrica" (p. 319).

Para Apolonio (Douady, 1992), una elipse es la sección de un cono por un plano no perpendicular a su eje (Figura 1). Y razona de la forma siguiente:

Sean C y C' dos puntos cualesquiera de la elipse, y KCL y K'C'L' dos secciones circulares del cono perpendiculares al eje. Si consideramos los triángulos rectángulos KCL y K'C'L', se tendrá:

$$MC^2 = MK \, . \, ML; \; M'C'^2 = M'K' \, . \, M'L'$$

Además, los triángulos GMK y GM'K' son semejantes, por lo que:

$$\frac{KM}{K'M'} = \frac{GM}{GM'}$$

Los triángulos AML y AM'L' también son semejantes, por lo que:

$$\frac{ML}{M'L'} = \frac{MA}{M'A}$$

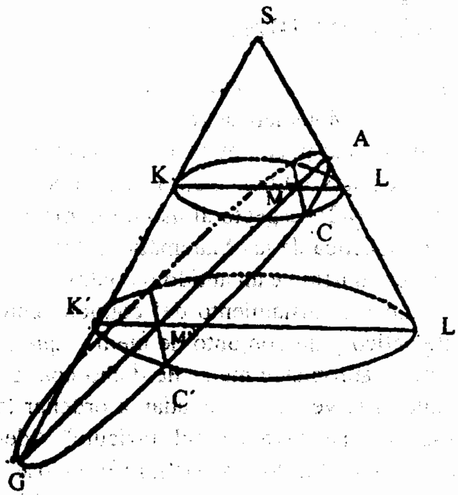


Figura 1

Por tanto, al multiplicar miembro a miembro:

$$\frac{KM \cdot ML}{K'M' \cdot M'L'} = \frac{MA \cdot MG}{M'A \cdot M'G}$$

Pero, por el teorema de la altura:

$$\left(\frac{MC}{M'C'}\right)^2 = \frac{MA \cdot MG}{M'A \cdot M'G}$$

Se obtiene, por tanto:

$$\frac{MC^2}{MA \cdot MG} = \frac{M'C'^2}{M'A \cdot M'G}$$

Es decir, la relación

$$\frac{MC^2}{MA \cdot MG}$$

es constante para todo punto C de la elipse.

Para mostrar cómo el método sintético de construcción de la elipse realizado por Apolonio fue utilizado por Descartes, muchos siglos después, al obtener la ecuación cartesiana de esta cónica (con lo que mostramos la continuidad y complementariedad histórica de ambas técnicas), acudiremos al segundo libro de la *Géométrie* de Descartes, a los párrafos precedidos por el título: "Manera general para encontrar líneas rectas que corten las curvas dadas, o sus tangentes, en ángulos rectos". Aunque el cálculo sobre la tangente y la normal que vamos a efectuar pudiera parecer desconectado de la ecuación de la elipse, hay que observar que es totalmente necesario para, posteriormente, poder utilizar una de las relaciones obtenidas –en concreto la (1)– a fin de eliminar la variable x, tal como se muestra a continuación.

Para calcular la normal a CP a la curva C en P, Descartes (Douady, 1992) refiere los puntos de una curva con la ayuda de dos números positivos y y x. Toma una recta AG como diámetro de la curva (siempre que ésta lo admita) y llama M a la proyección ortogonal de un punto C de la curva sobre AG. Descartes denomina y = AM y x = CM (como puede observarse, esto no es aún la referencia que nosotros llamamos "cartesiana"). La ecuación de una curva es una relación, algebraica en general, entre x y y.

Descartes calcula la normal a una curva en un punto de la forma siguiente (Figura 2):

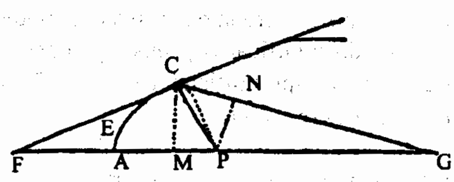


Figura 2

Llama AM = y; CM = x; CP = s; PA = v. De donde: PM = v - y.

Como $CP^2 = CM^2 + MP^2$, se tendrá que:

$$s^2 = x^2 + (v - y)^2 = x^2 + v^2 - 2vy + y^2$$

De aquí se obtienen las dos relaciones que han de verificar las coordenadas de todo punto P perteneciente a la recta AG:

(1) $$x = \sqrt{s^2 - v^2 + 2vy - y^2}$$

y $$y = v - \sqrt{s^2 - x^2}$$

Para calcular la ecuación de la elipse (Figura 3), Descartes sigue la definición de Apolonio de que

$$\frac{\mathrm{MC}^2}{\mathrm{MA} \cdot \mathrm{MG}}$$

es constante, designando a esta razón por

$$\frac{r}{q},$$

donde q es la longitud del eje AG (o lado transversal de la elipse), lo cual equivale a referir la ecuación de la elipse a sus vértices.

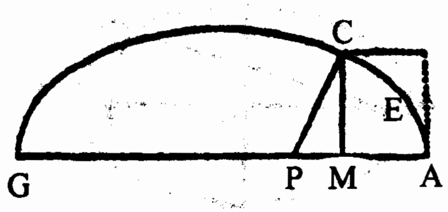


Figura 3

Con las notaciones elegidas por Descartes, la ecuación de la elipse es:

$$\frac{x^2}{y(q-y)} = \frac{r}{q} \text{ o bien } x^2 = ry - \frac{r}{q} y^2 \,(*)$$

Eliminando x entre esta ecuación y la relación (1), se obtiene la ecuación fundamental de la elipse:

$$s^2 - v^2 + 2vy - y^2 = ry - \frac{r}{q} y^2,$$

o bien

$$y^2 + \frac{qry - 2qvy + qv^2 - qs^2}{q-r} = 0,$$

o incluso

$$y^2 + \frac{qr - 2qv}{q-r} y + \frac{q(v^2 - s^2)}{q-r} = 0$$

Al comparar ambos métodos, observamos el contraste de aquel que se basa en los teoremas de la geometría de Euclides —con la elegancia y rigor de sus deducciones— con respecto al segundo de Descartes, en el que está presente un "rebuscado" cálculo algorítmico. Sin embargo, como se ha podido observar, Descartes necesitó de la relación sintética de Apolonio para obtener la ecuación de la elipse. Es decir, se trata de métodos no enfrentados, sino complementarios y como tales consideramos que se han de presentar en las situaciones de enseñanza.

Si queremos obtener de la ecuación anterior con asterisco (*) una expresión para la elipse similar a su ecuación canónica, hay que considerar la elipse referida a su centro O. Es decir, para enlazar esta ecuación con la conocida, referida al centro O, se tendrá:

$$\frac{\mathrm{OM}^2}{a^2} + \frac{\mathrm{CM}^2}{b^2} = 1.$$

Si ponemos: OM = $a - y$; CM = x, se obtiene:

$$\frac{(a-y)^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1,$$

es decir:

$$x^2 = \frac{2b^2}{a} y - \frac{b^2}{a^2} y^2.$$

Si se toman:

$$q = 2a \text{ y } \frac{r}{q} = \frac{b^2}{a^2},$$

se obtiene la ecuación de la elipse de Descartes.

Por tanto, se sostiene la tesis de que cualquier estudio sobre la elipse ha de abordarse desde la óptica de sus propiedades sintéticas y analíticas, en una labor de coordinación de ambos sistemas de representación como medio para lograr que el objeto matemático elipse pueda emerger de un sistema de tareas creado para tal fin.

DISTINTAS CONSTRUCCIONES DE LA ELIPSE

En este trabajo, el tema de 2.º de Bachillerato relacionado con el estudio de las cónicas se establece con un diseño basado en la dicotomía geometría sintética-geometría analítica, buscando un proceso dialéctico de aplicación de técnicas que —siguiendo un camino heurístico— sea capaz de hacer ver al alumno la necesidad de disponer de ambas estrategias: la sintética y la analítica. Sin embargo, si se consulta cualquier libro de texto de este nivel académico (De la Llave y Peral, 1998; Bescós y Pena, 1999; Monteagudo et al., 1998; Colera et al., 2001), observamos que prevalece el estudio analítico, mientras el sintético queda relegado únicamente para la definición. De este modo se pierde la ocasión de facilitar al lector la oportunidad de efectuar un paralelismo entre ambas técnicas, lo cual oculta su complementariedad.

El estudio centrado en construcciones gráficas elementales de la elipse (Alonso-Misol, 1933; Cámara, 1945; Puig Adam, 1973; Olabarrieta, 1945), mostrará que es posible introducirse en un mundo dialéctico de construcciones —basadas en técnicas sintéticas y analíticas— que conduce al estudiante de Bachillerato a un conocimiento de cierta profundidad sobre esta interesante cónica. Asimismo, se eludirán complicados mecanismos de cálculo al utilizarse razonamientos basados en unos cuantos pasos fáciles de explicar. Únicamente en las construcciones finales aparece cierta complicación, aunque se podrían utilizar como "paso" frontera entre los niveles pre y universitario.

A. CONSTRUCCIONES POR TRAZADO CONTINUO:

A-I. Datos: focos, F y F′, y la longitud del eje mayor, $2a$ (Figura 4), *(método del jardinero).*

Construcción sintética:

Esta construcción se basa en una técnica *sintética*, mediante la cual se toma un hilo de longitud $2a$ que queda fijado por sus extremos en ambos focos. Manteniendo el hilo tenso, se dibujará la elipse, ya que todo punto P de la figura verifica que su suma de distancias a los focos es constante, y vale $2a$ (por ser la longitud del hilo): $FP + F'P = 2a$.

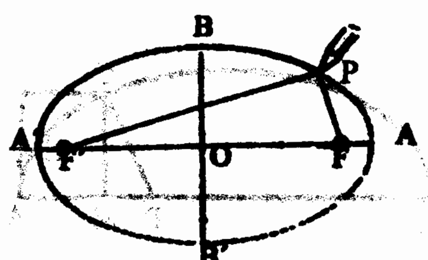


Figura 4

Otra variante de este método sería la siguiente:

A-II.- Datos: semiejes, a y b.

Conocida la relación $c^2 = a^2 - b^2$, haciendo centro en B, con radio $OA' = a$, se traza un arco sobre AA′ que cortará al eje mayor en los focos, F y F′ (Figura 5). A continuación se procede siguiendo el método anterior, con lo que el punto P describirá la elipse.

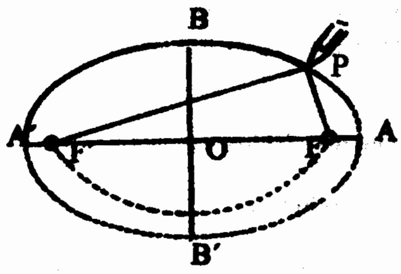


Figura 5

A-III .- (Por medio del compás elíptico). **Datos**: se conocen los semiejes, *a* y *b*.

Construcción sintética

Consiste en un dispositivo con dos reglas perpendiculares y una tercera regla, conectada a ambas por los extremos, de longitud $a + b$ (Figura 6).

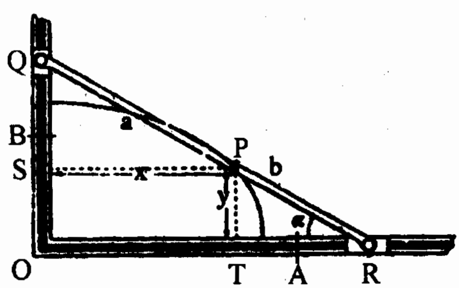


Figura 6

Manteniendo los extremos Q y R sobre OQ y OR, respectivamente, un punto P sobre esta regla QR, que siempre dista *a* de Q y *b* de R, describe un cuarto de elipse al moverse.

Con el dispositivo de dibujo, se observan dos puntos que necesariamente pertenecen a la elipse (A y B). Sin embargo, no se puede asegurar que los puntos que describe P sean de la elipse.

Argumentación analítica:

Se supone que cada una de las reglas perpendiculares son, respectivamente, los ejes de abscisas y ordenadas. A las proyecciones del punto P sobre los ejes se les denomina *x* y *y*.

Sea α el ángulo que, en una posición determinada, forma QR con OR.

En el triángulo rectángulo QPS tenemos: $x = a \cos \alpha$.

De la misma manera, en el triángulo rectángulo PRT tendríamos: $y = b \operatorname{sen} \alpha$.

Despejando de ambas expresiones:

$$\frac{x}{a} = \cos\alpha; \quad \frac{y}{b} = \operatorname{sen}\alpha$$

Y, por último, recordando la relación fundamental de trigonometría:

$$\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

que es la ecuación reducida de una elipse.

Por último, colocando el dispositivo en los cuadrantes segundo, tercero y cuarto, el punto P describirá la elipse completa.

A-IV. (Por medio del elipsógrafo de Mannhein.) **Datos: se conocen los dos semiejes** $a = \alpha + \beta$, $b = \alpha - \beta$ (donde α y β son las medidas de los lados del paralelogramo articulado).

Construcción sintética:

Sobre dos rectas perpendiculares se sitúa un paralelogramo OPQR articulado en sus vértices, de lados α y β, los cuales se conocen en función de *a* y *b* —donde:

$$\alpha = \frac{a+b}{2} \text{ y } \beta = \frac{a-b}{2},$$

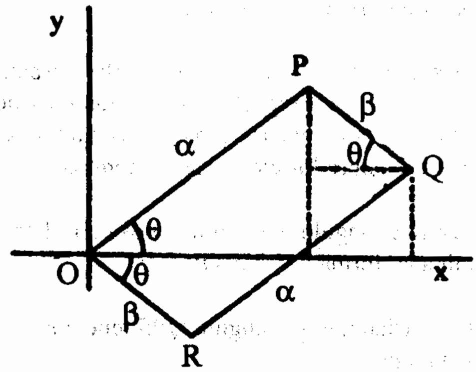


Figura 7

respectivamente—, con el vértice O en el punto de intersección de las dos rectas perpendiculares (Figura 7).

Una vez situado el paralelogramo, se hace mover Q de modo que los ángulos POx y ROx se mantengan iguales. La figura descrita será una elipse de semiejes $\alpha + \beta$ y $\alpha - \beta$.

Los puntos sobre las rectas perpendiculares o ejes, tienen una explicación evidente. No así el resto de los puntos descritos por Q.

Argumentación analítica:

Si llamamos a las coordenadas de Q por (x, y), se tendrá:

$$x = \alpha cos\theta + \beta cos\theta \text{, } y = \alpha sen\theta - \beta sen\theta$$

Sacando factor común y despejando tenemos:

$$cos\theta = \frac{x}{\alpha + \beta} \text{ y } sen\theta = \frac{y}{\alpha - \beta}.$$

Recordando de nuevo la relación fundamental de trigonometría, concluimos:

$$\frac{x^2}{(\alpha + \beta)^2} + \frac{y^2}{(\alpha - \beta)^2} = 1$$

Por tanto, el vértice Q describirá una elipse de semiejes $\alpha + \beta$ y $\alpha - \beta$.

B. CONSTRUCCIONES POR PUNTOS AISLADOS :

B-I.- (Utilizando el concepto de anomalía excéntrica). Datos: semiejes , a y b.

Construcción sintética:

Se trazan dos círculos de radios a y b, como indica la Figura 8, y sea OR = a un radio arbitrario.

El ángulo que forma OR con b, α, se llama *anomalía excéntrica.*

Por R se traza una paralela a OB, y por C (intersección de OR con la circunferencia de radio b), una paralela a OA. El punto P, de corte entre ambas, está en la elipse.

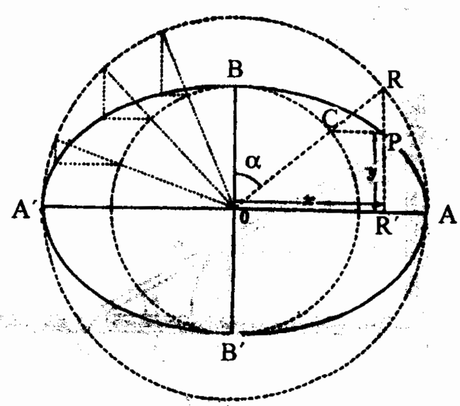


Figura 8

Argumentación sintético-analítica (sin usar la anomalía excéntrica):

Los triángulos Δ RPC y Δ RR'O son semejantes, por lo que se tendrá:

$$\frac{\text{RC}}{\text{RO}} = \frac{\text{RP}}{\text{RR'}}$$

Si ahora consideramos x y y las coordenadas del punto P, en un sistema de referencia con ejes AA' y BB', al sustituir obtendremos:

$$\frac{a-b}{a}=\frac{\sqrt{a^2-x^2}-y}{\sqrt{a^2-x^2}},$$

de donde, realizando operaciones:

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$$

es decir: $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

Argumentación analítica (utilizando la anomalía excéntrica):

Si llamamos x y y a la abscisa y ordenada, respectivamente, del punto P, tendríamos:

$$x=a\,sen\,\alpha;\,y=b\cos\alpha.$$

De nuevo, despejando:

$$\frac{x}{a}=sen\alpha\,;\,\frac{y}{b}=\cos\alpha\,.$$

Elevando al cuadrado ambas expresiones y sumándolas, concluimos que:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

B-II.- (Utilizando los focos). Datos*:* ejes y focos.

Construcción sintética:

Sean AA′= $2a$, BB′= $2b$, FF′= $2c$, y sea X un punto arbitrario de AA′ (Figura 9).

- Con centro en F′y radio XA′ describimos un arco.
- Con centro en F y radio XA describimos otro arco.
- Ambos arcos se cortan en un punto P que es de la elipse.

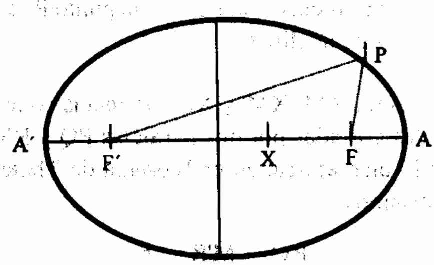


Figura 9

En efecto: PF′ + PF = XA′ + XA = $2a$.

B-III. (Por afinidad con el círculo principal.) Datos*:* semiejes, *a* y *b*.

Definición: Se denomina círculo principal al que tiene por centro el de la elipse y radio al parámetro *a*.

Construcción sintética (Figura 10):

- Sean P, un punto del círculo principal, y X, un punto del eje mayor, arbitrarios.
- Por C se traza una tangente al círculo, que se corta con la recta XP en un punto M.
- Por B se traza una paralela a CM, y por M, una paralela a OB, cortándose ambas en M′.

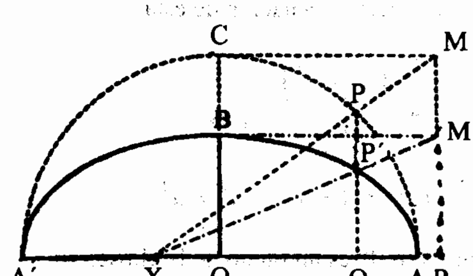


Figura 10

- Unimos M′ con X y por P trazamos una paralela a OB.

- Ambas rectas se cortan en un punto P′ que es el de la elipse.

En efecto, XM, XM' y XR son rectas concurrentes cortadas por dos paralelas PQ y RM, por lo que, aplicando el Teorema de Thales, tendríamos:

$$\frac{P'Q}{PQ}=\frac{M'R}{MR}=\frac{b}{a}$$

Argumentación analítica:

De la relación anterior, deducimos:

$$P'Q=\frac{b}{a}PQ$$

Considerando que A'A es el eje de las abscisas y OB el de las ordenadas, las coordenadas del punto Q son $(x, 0)$ y, por tanto: al ser

$$PQ=\sqrt{a^2-x^2},$$

será $$P'Q=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2},$$

por lo que P' tendrá las coordenadas

$$\left(x,\ \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\right).$$

Veamos si P' es un punto de la elipse de semiejes a y b. Para ello, sus coordenadas han de satisfacer la ecuación de ésta:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{\frac{b^2}{a^2}\left(a^2-x^2\right)}{b^2}=1\Rightarrow$$

$$x^2+\left(a^2-x^2\right)=a^2\Rightarrow a^2=a^2$$

Por tanto, P' es un punto de la elipse.

Se puede observar la relevancia de la complementariedad de ambas técnicas, sintética y analítica, en el trazado de la elipse y su justificación.

B-IV. (Utilizando los círculos directores.)
Datos: semieje a y los focos.

Definición: se llama círculo director a todo círculo con centro en uno de los focos y radio, la longitudes $2a$ (Figura 11).

Construcción sintética:

- Sea F'C un radio arbitrario del círculo director.
- Unamos C con F, y sea PM la mediatriz del segmento FC.
- Esta mediatriz cortará al radio F'C en un punto P que estará en la elipse.

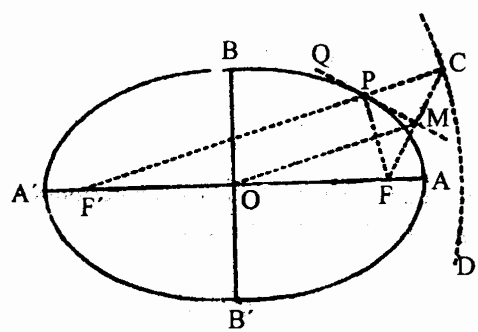


Figura 11

En efecto, $F'P + PC = F'P + PF = 2a$.

Además, la mediatriz PM será la tangente por M a la cónica (por ser el ángulo CPM igual al FPM y el ángulo CPM igual al QPF', se tendrá que: los ángulos FPM y QPF' serán también iguales).

PERSPECTIVAS UNIFICADORAS DE LA CONSTRUCCIÓN DE LAS CÓNICAS

Ya se ha expresado que una de las ideas previas sobre las cónicas, detectadas en alumnos de Bachillerato, consistía en estimar los tres tipos de cónicas (elipse, hipérbola y parábola) como independientes, sin guardar ninguna relación estructural entre sí, directa ni indirecta, por lo que desde el punto de vista didáctico, vemos necesario —aunque este trabajo se dedique a la elipse— hacer un breve estudio referencial a esta idea. El propósito es construir conocimiento a partir de cuestionar y romper con la misma.

En Santos-Trigo y Espinosa-Pérez (2002) se exploran las propiedades de las cónicas por medio de un software dinámico, generando estas tres curvas a través de un interesante dispositivo que permite unificar la construcción de las mismas.

Dado que puede consultarse en trabajo referido, únicamente damos una sucinta explicación: dada una circunferencia de centro O y de radio R, por un punto exterior (P) de su diámetro se traza una secante que corta a la circunferencia en los puntos M y N; se hallan los puntos simétricos de dichos puntos (M' y N'). Las rectas que unen cada punto simétrico con el centro de la circunferencia, cortan a la secante en dos puntos (I1 y I2) que son de una cónica. Según la distancia d del punto P a la circunferencia, se obtendrá la elipse ($d > 2R$), la parábola ($d = 2R$) o la hipérbola ($d < 2R$).

Es una elegante forma de construir las tres cónicas de modo unificado —con lo que se consigue la ruptura con la idea previa— y tiene el componente didáctico adicional de implicar a los estudiantes en un universo dialéctico interesante, muy en la línea de la construcción del conocimiento por el propio alumno. Sin embargo, si se busca una explicación analítica a esta construcción, es un asunto muy complejo al alcance de muy pocos alumnos de Bachillerato problema resuelto por Castro (2002), que no se describe en este trabajo dada su extensión. Lo mismo ocurre con la vía sintética, en la que el teorema de Pappus, muy desligado de la geometría elemental, planea como elemento teórico capaz de dar explicación a la construcción.

Por tanto, es obvio que para dar sentido a este tipo de construcciones se requiere un repertorio previo de otras construcciones más sencillas que preparen al estudiante para abordar empresas más complejas, de aquí que nuestra propuesta pueda ser un buen complemento a este tipo de aproximaciones. Sin duda, como punto final a los planteamientos sintético-analíticos, esta construcción unificadora sirve de

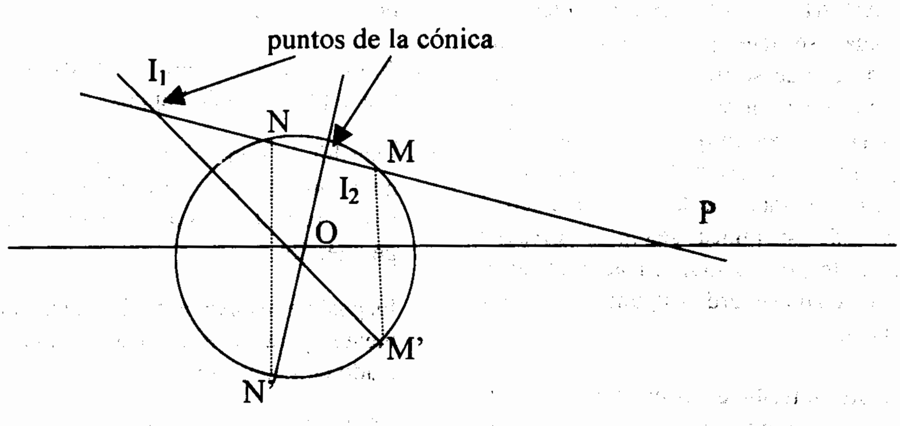


Figura 12

"síntesis" a la construcción de las diferentes cónicas.

En determinados casos se realizan trabajos de verdadera investigación en el aula sobre construcción de cónicas, aunque han de tratarse de asignaturas concebidas específicamente para profundizar en la materia. En el estado español existen centros de Bachillerato en los que se desarrollan experiencias de construcciones de cónicas de notable complejidad. Tal es el caso de la asignatura impartida por el Dr. Font en Barcelona (Cataluña): "*História de la Ciencia: Orígens de la Geometría Analítica*". En ésta se desarrollan métodos sintético-analíticos sobre las cónicas.

Así, en García, Pérez y Rivilla (2002) se ha realizado el siguiente estudio sobre construcción de cónicas:

PROBLEMA DE PAPPUS

"A continuación, dado que ya tenemos ciertos conocimientos sobre lugares geométricos y sus métodos de resolución, el tutor os va a proponer resolver el problema de Pappus que era nuestro principal objectivo."

Problema de Pappus:

"Sean AB, AD, AE, EF, GH, etc., diversas líneas dadas, se tiene que encontrar un punto C, desde el que se trazarán diversas líneas rectas sobre las líneas dadas como CB, CD, CF y CH, de manera que los ángulos CBA, CDA, CFE, CHG estén dados, y de manera tal que el resultado de la multiplicación de una parte de estas líneas sea igual al resultado obtenido por las multiplicaciones de los otros, o bien que guarden alguna otra proporción dada."

El párrafo anterior es el enunciado textual del problema, pero es muy complicado; para expresarlo de una manera más comprensible, el objetivo del problema es encontrar un punto cualquiera unido a los puntos de las rectas con determinados ángulos de manera que las distancias de dos rectas sean iguales a las otras dos multiplicadas por un número cualquiera.

Haremos la resolución del problema de Pappus con cuatro rectas, aunque puede hacerse con cualquier número de rectas.

Ésta es la representación gráfica del problema para el caso de cuatro rectas:

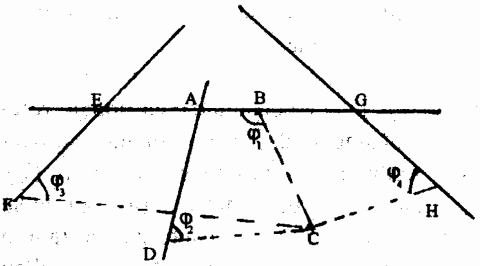


Figura 13

Método analítico

Para aplicar los métodos analíticos a la resolución del problema consideraremos tres fases:

a) Traducir el problema de Descartes a la notación actual.

b) Aplicar los conocimientos de trigonometría al problema de Pappus.

c) Escribir la condición del problema en notación moderna. Simplificar las condiciones para llegar a la ecuación del lugar geométrico.

1. Es posible resolver el problema analíticamente y para ello interpretaremos su enunciado con ecuaciones.

$$CB \cdot CD = K \cdot CF \cdot CH \qquad K \in \boldsymbol{R}$$

Para agilizar las cosas es más fácil traducir el problema con la notación actual y no con la de Descartes que habla de las rectas con letras y no utiliza ecuaciones. Sean:

$A_1x + B_1y + C_1 = 0$ recta que pasa por E y F.

$A_2x + B_2y + C_2 = 0$ recta que pasa por A y D.

$A_3x + B_3y + C_3 = 0$ recta que pasa por B y A.

$A_4x + B_4y + C_4 = 0$ recta que pasa por G y H.

El punto C tendrá coordenadas (x, y), suponiendo que se utiliza un sistema de coordenadas en el que se ha introducido una notación actual.

2. Tomando cualquiera de las rectas y la perpendicular de la recta al punto C, de manera que se forma un triángulo.

En este punto nos encontramos con un problema trigonométrico y geométrico, que hemos de relacionar.

A partir de la trigonometría llegamos a la siguiente conclusión:

$$sen\varphi_2 = \frac{d}{CD}$$

Después de llegar a esta ecuación sustituimos la distancia "d" por su fórmula:

$$d = \frac{|Ap_1 + Bp_2 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \rightarrow$$

$$CD = \frac{d}{sen\varphi_2} = \frac{\left|\frac{A_2x + B_2y + C_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}\right|}{sen\varphi_2}$$

$$CD = \left|\frac{A_2x + B_2y + C_2}{sen\varphi_2\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}\right|$$

Esta sustitución ha de hacerse con los segmentos de la ecuación:

$$CB \cdot CD = K \cdot CF \cdot CH$$

Sustituyendo los segmentos de esta fórmula obtenemos la siguiente:

$$\left|\frac{A_1x + B_1y + C_1}{sen(180 - \varphi_1)\sqrt{A_1^2 + B_1^2}}\right|\left|\frac{A_2x + B_2y + C_2}{sen\varphi_2\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}\right|$$

$$= K\left|\frac{A_1x + B_1y + C_1}{sen\varphi_1\sqrt{A_1^2 + B_1^2}}\right|\left|\frac{A_4x + B_4y + C_4}{sen\varphi_4\sqrt{A_4^2 + B_4^2}}\right|$$

Para trabajar trigonométricamente se ha de restar $180 - \varphi_1$ a fin de obtener el ángulo interior del triángulo formado por el segmento CB, en caso contrario la fórmula anterior para los segmentos no funcionaría.

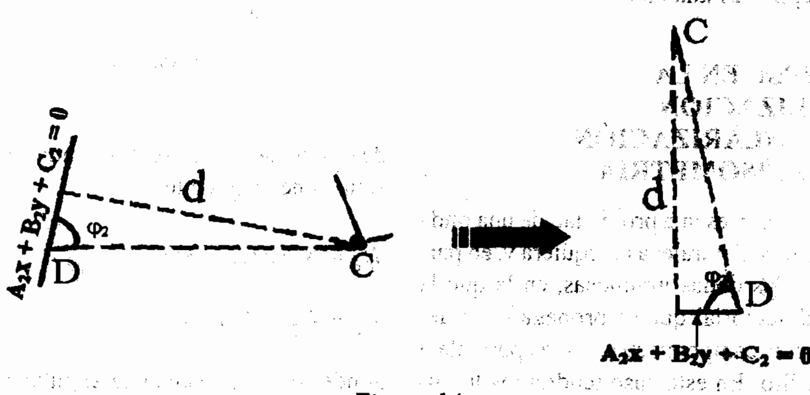


Figura 14

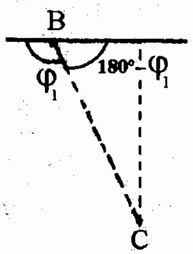


Figura 15

Simplificando los denominadores de la ecuación se obtiene un número real al que llamaremos Z para obtener una ecuación más sencilla.

$$\left|\frac{A_1x+B_1y+C_1}{Z_3}\right|\left|\frac{A_2x+B_2y+C_2}{Z_2}\right| = K\left|\frac{A_1x+B_1y+C_1}{Z_1}\right|\left|\frac{A_4x+B_4y+C_4}{Z_4}\right|$$

3. Después de hacer un gran número de cálculos se obtiene la siguiente ecuación:

$$Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$$

Ésta es la ecuación general de la familia de las cónicas; por tanto, la solución del problema de Pappus es una cónica.

LA ELIPSE EN LA MODELIZACIÓN DE LA POLARIZACIÓN Y LA ELIPSOMETRÍA

La polarización es una propiedad de una onda transversal de naturaleza cualquiera y, en particular, de las ondas luminosas, en la que la magnitud vectorial que se propaga —es decir, el vector campo eléctrico— es paralela a un plano fijo. En este caso tendremos luz lineal. Pero cuando se describe una curva en el plano perpendicular a la dirección de propagación, obtenemos luz elíptica o circular, según que dicha curva sea una elipse o una circunferencia, respectivamente.

Una de las mayores aplicaciones de la luz polarizada es la medida del índice complejo de refracción y del espesor de películas delgadas, tanto en Física como en Biología. El campo de la Óptica dedicado a dicha medida se denomina elipsometría, el cual se ocupa de la medida y del estudio de la polarización elíptica de la luz (Collet, 1993).

Veamos la elipse de polarización. Se superponen dos ondas planas con sus vectores eléctricos perpendiculares dirigidos según los ejes x e y, que se propagan en un medio homogéneo e isótropo en la dirección positiva del eje z y con una diferencia de fase δ entre ellas (Casas, 1994).

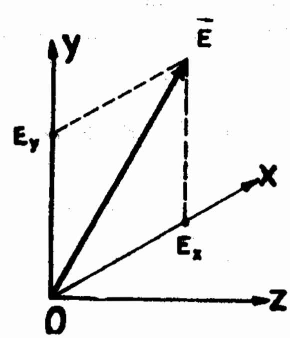


Figura 16

de modo que vienen representadas por las dos ecuaciones siguientes:

$$E_x = A_1 cos(\omega t - kz)$$

$$E_y = A_2 cos(\omega t - kz + \delta)$$

donde ω es la frecuencia angular y k el número de onda.

Para calcular el lugar geométrico del extremo del vector $\vec{E}$ hace falta hacer $z = 0$ en las ecuaciones anteriores:

$$E_x = A_1 cos(\omega t)$$

$$E_y = A_2 cos(\omega t + \delta)$$

y eliminando ωt entre las dos, desarrollando $cos(\omega t + \delta)$ en la segunda y sustituyendo en el desarrollo $cos\omega t$ por la expresión dada por la primera, obtenemos:

$$\frac{E_x}{A_1^2} cos\delta - \frac{E_y}{A_2} = sen\omega t sen\delta$$

Multiplicando la ecuación primera en la que hemos hecho $z = 0$ por $sen\delta$:

$$\frac{E_x}{A_1} sen\delta = cos\,\omega t sen\delta$$

Finalmente, elevando al cuadrado las dos ecuaciones anteriores y sumando tendríamos la ecuación de la elipse de polarización:

$$\frac{E_x^2}{A_1^2} + \frac{E_y^2}{A_2^2} - 2\frac{E_x E_y}{A_1 A_2} cos\delta = sen^2\delta$$

La ecuación anterior, tomando $E_x = x$ y $E_y = y$, representa la denominada elipse de polarización, cuya excentricidad y orientación de sus ejes en el plano x, y depende sólo de d, pero no del t. Por tanto, la luz resultante de esta superposición es luz polarizada elíptica.

En caso de que el desfase tomase los valores

$$\delta = (2m + 1)\frac{\pi}{2},$$

tendríamos la ecuación de una elipse referida a sus propios ejes.

$$\frac{E_x^2}{A_1^2} + \frac{E_y^2}{A_2^2} = 1$$

En resumen, haciendo un estudio de la elipse de polarización podemos saber con qué tipo

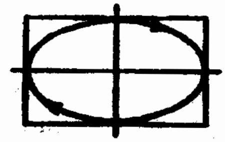


Figura 17

de luz trabajamos, cuestión muy importante en elipsometría.

CONCLUSIONES

En este artículo se ha realizado un conjunto de construcciones sobre la cónica elipse con técnicas propias de la geometría sintética, otras con técnicas de la geometría analítica y algunas otras que utilizan tanto las sintéticas como las analíticas. De esta forma, se ha probado la continuidad y la complementariedad existente entre ambas técnicas, mostrando, además, la posibilidad de coordinar las mismas y aflorando, por tanto, la falsa división curricular entre las dos geometrías: una, la sintética, presente en los programas de la Enseñanza Secundaria Obligatoria; y la otra, la analítica, propia del Bachillerato.

En el aspecto instruccional —si el tipo de metodología de enseñanza que se utiliza en la clase es de tipo constructivista—, al referir el estudio de la elipse en 2.° de Bachillerato a situaciones de construcción de diversas figuras, en las que conviven las técnicas sintéticas y analíticas, pueden conseguirse efectos positivos para los estudiantes, ya que por una parte, éstos pueden tener una participación más activa y reflexiva en la elaboración del objeto matemático elipse; por otra, se coloca al estudiante en disposición de afrontar los estudios universitarios con amplios conocimientos geométricos sobre las cónicas que, de otro modo, quedarían focalizados en aspectos puramente analíticos. Obviamente, habría que completar este tipo de estudios con planteamientos similares para la hipérbola y la parábola.

Por último, aunque en segundo término, se ha abordado el aspecto de la interdisciplinariedad como elemento motivador y contextualizador de la actividad matemática. Al conectar determinados conceptos de la Física con la cónica elipse creemos que, además de los elementos motivadores siempre presentes en este tipo de comportamientos, se consigue enlazar la realidad de las aplicaciones científicas —centradas en los conceptos de polarización y elipsometría, propios del mundo de la Óptica— con la modelización matemática centrada en la elipse.

BIBLIOGRAFÍA

Alonso-Misol, F. (1933). *Nociones de Geometría Proyectiva.* Madrid: España: Nuevas Gráficas.

Bescós, E. & Pena, Z. (1999). *Matemáticas de 2.° de Bachillerato. Ciencias de la Naturaleza y de la Salud/Tecnología.* Madrid, España: Oxford Educación.

Cámara, S. (1945). *Elementos de Geometría Analítica.* Madrid, España: El autor.

Cantoral, R. & Farfán (1998). Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis. *Epsilon*, núm. 42, pp. 353-369.

Capponi, B. & Laborde, C. (1995). Modélisation à double sens. En Robert Noirfalise y Marie-Jeanne Perrin-Glorian (Eds.), *Actas de VIIIe Ecole et Université d'Été de Didactique des Mathématiques*, (pp. 265-278). París, Francia: Equipe DIDIREM París VII; IREM de Clermont-Ferrand.

Casas, J. P. (1994). *Óptica*, Universidad de Zaragoza.

Castro, I. (2002). *Resolución analítica del problema de generación de cónicas*, Documento interno, Área de Geometría y Topología del Departamento de Matemática Aplicada de la Universidad de Jaén.

Collet, E. (1993). *Polarized light fundamentals and applications.* Editorial Dekker.

Colera, J., Oliveira, M. J. y García, R. (2001). *Matemáticas II. 2.° Bachillerato. Andalucía.* Madrid: Anaya.

Contreras, A. et al. (2001). Un estudio gráfico sintético-analítico de la hipérbola, Comunicación presentada en las *X Jornadas de Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas (JAEM)*, Zaragoza, 7-9 de septiembre.

De la Llave, A. & Peral, J.C. (1998). *Matemáticas 2. Bachillerato. Ciencias de la Naturaleza y de la Salud. Tecnología.* Madrid, España: Bruño.

Douady, R. (1992). *MNEMOSYNE, n° 2, Mathématiques Approche par les Textes Historiques (M.A.T.H.).* París, Francia: IREM de l'Université Paris VII.

Dreyfus, T. (1991). Advanced mathematical thinking processes. En D. Tall (Ed), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 24-41). Dordrecht: Kluwer.

Ernest, P. (1994). Variedades de constructivismo: sus metáforas epistemológicas e implicaciones pedagógicas, *Hiroshima Journal of Mathematics Education 2*,. 1-14. (traducción del Dr. Juan Díaz Godino).

Eyaralar, J.M. (1933). *Metodología de la Matemática*. Madrid, España: Reus.

Figueiras y colab. (2000). Una propuesta metodológica para la enseñanza de la Geometría a través de los fractales. *Suma 35*, 45-54.

García, K., Pérez, N., Rivilla, S. (2002). *Història de la Ciencia. Orígens de la Geometría Analítica*, Treball de recerca de 2n de Batxillerat tutorizado por Font, V., presentado a las III Jornades Científiques i Tecnológiques de L''Hospitalet de Llobregat, Barcelona (Cataluña).

Gascón, J. (2001). *Geometría sintética en la ESO y analítica en el Bachillerato. ¿Dos mundos completamente separados?* Barcelona, España: Seminario de Didáctica de las Matemáticas, Universidad Autónoma de Barcelona.

Guichard, J-P. (2001). Histoire des mathématiques: constructions géométriques. En P. Radelet & D. Janssenes (Eds.), http://ramses.umh.ace.be/noel/univete.htm, *Histoire et épistémologie dans l'éducation mathématique* (pp. 319-328). UCL Université Catholique de Louvain KU Leuven Katholieke Universiteit Leuven.

Luelmo, M.T. (1997). Un entorno para el aprendizaje de las Matemáticas. *UNO. Revista de Didáctica de las Matemáticas 12*, 5-7.

Mec (Ministerio de Educación y Ciencia) (1992). *Matemáticas: Secundaria obligatoria.* Madrid: El autor.

Monteagudo, F., Paz, J. & Cámara, M. T. (1998). *Matemáticas II. 2.° Bachillerato. Ciencias de la naturaleza y de la Salud/Tecnología*. Madrid, España: Edelvives.

Olabarrieta, L. (1945). *Geometría y trigonometría*. Bilbao, España: El autor.

Puig Adam, P. (1973). *Curso de Geometría Métrica (tomo II)*. Madrid, España: Biblioteca Matemática.

Río Sánchez del, J. (1994). *Lugares geométricos. Cónicas*. Madrid, España: Síntesis.

Rosín, P.L. & Pitteway, M.L.V. (2001). The ellipse and the fire-centered arch, *The Mathematical Gazete 85*(502), 13-24.

Santos-Trigo, M. & Espinosa-Pérez, H. (2002). Searching and exploring properties of geometric configurations using dynamic software. *International Journal Mathematical Education in Science and Technology 33*(1), 37-50.

Sierpinska, A. (1997). *La comprensión en mathématiques*. Bruxelles: De Boeck & Larcier, S.A., Departement De Boeck Université.

Sierra, M. (1997). Notas de historia de las Matemáticas para el currículo de secundaria. En L. Rico (Coor.), *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria* (pp. 179-194). Barcelona, España: ICE de la Universidad Autónoma de Barcelona, Horsori.

Van Reeuwijk, M. (1997). Las Matemáticas en la vida cotidiana y la vida cotidiana en las Matemáticas. *UNO. Revista de Didáctica de las Matemáticas 12*, 9-16.

Ángel Contreras de la Fuente y Manuel García Armentos
Facultad de Humanidades y Ciencias de la Educación
Universidad de Jaén, Pasaje las Lagunillas s/n, 23071 Jaén
España
Email: afuente@ujaen.es.

María Contreas Quesada, Universidad de Granada, Granada, España.