

Las interacciones entre iguales en clase de matemáticas. Consideraciones acerca del principio de complementariedad en educación matemática*

Martín M. Socas♦

RESUMEN

Determinar modelos de competencia formal, que expliquen y describan los fenómenos educativos o aspectos de estos fenómenos es un reto y una constante en Educación Matemática. Los investigadores en Educación Matemática miran y observan los modelos teóricos de otras disciplinas, y en algunas ocasiones los trasladan y adaptan a los fenómenos educativos, tal es el caso del principio de complementariedad, importado por Steiner (1985) desde la Mecánica Cuántica.

La discusión entre las ideas que proceden de las teorías de Piaget y Vygotsky tienen una notable actualidad, unas veces, por las consecuencias divergentes que parecen resultar de las dos teorías, y otras, por la posibilidad de utilizarse como dos teorías complementarias en la orientación de la práctica educativa.

En este trabajo analizaremos cómo el principio de complementariedad es aplicado inadecuadamente, en diferentes contextos de investigación educativa en el área de Matemática, a las teorías que proceden de Piaget y Vygotsky, en particular a la “interacción entre iguales” en clase de Matemáticas.

ABSTRACT

To determine models of formal competence explaining and describing educational phenomena or aspects of them it is a permanent challenge in Mathematical Education. Researchers in Mathematical Education watch and observe the theoretical models of other disciplines, and in some opportunities they transfer and adapt them to the educational phenomena. That is the case of the complementarity principle, imported by Steiner (1985) from the quantum mechanics.

The discussion between the ideas that come from the theories of Piaget and Vygotsky deserve the maximum interest in the present time, sometimes, for the divergent consequences that seem to follow from both theories; in other instances, for the possibility of being used as two complementarity theories in the orientation of the educational practice.

In this work we will analyze how the complementarity principle is improperly applied, in different contexts of educational investigation in the Mathematics area, to the theories that come of Piaget and Vygotsky, in particular when dealing with the interaction between “student pairs” in Mathematical classrooms.

RESUME

Déterminer des modèles de compétence formel qui expliquent et décrivent les phénomènes pédagogiques ou aspects de ces phénomènes il est un défi et une constante dans Éducation Mathématique. Les investigateurs dans Éducation Mathématique regarde et observent les

* Fecha de Recepción: Marzo 2001

♦ Departamento de Análisis Matemático, Área de Didáctica de la Matemática, Universidad de La Laguna, España.

modèles théoriques d'autres disciplines, et dans quelques occasions ils les transfèrent et ils adaptent au phénomènes pédagogique, tel c'est le cas du principe du complémentarité, s'est introduisant par Steiner (1985) de la quantique.

La discussion entre les idées qui viennent des théories de Piaget et Vygotsky mérite l'intérêt maximal dans le présent temps, quelquefois, pour les conséquences divergentes qui paraissent être des deux théories, et autre, pour la possibilité d'être utilisé comme deux théories complémentaires dans l'orientation de l'entraînement pédagogique.

Dans ce travail nous analyserons comme le principe du complémentarité est appliqué improprement, dans contextes différents d'enquête pédagogique dans la région de les mathématiques, aux théories qui viennent de Piaget et Vygotsky, en particulier à l'interaction parmi même dans classe de les mathématiques.

RESUMO

Determinan modelo de competencia formal, que expliquem e descrevem os fenômenos educativos ou aspectos destes fenômenos é um desafio e algo constante Educação Matemática. Olham e observam os modelos teóricos de outras disciplinas, e em algumas ocasiões se transferem e adaptam aos fenômenos educativos, tal é o caso do princípio de complementariedade, derivado de Steiner (1985) da mecânica Quântica.

A discussão entre as ideias que são originárias das teorias de Piaget e Vygotsky y algunas veces resultam teorias, cuyas consecuencias educativas difieren entre si e em outras ocasiões costumam a ser utilizadas de manera complementares na orientação da prática educativa.

Neste trabalho analisaremos como o princípio de complementariedade é aplicado inadequadamente em diferentes contextos de pesquisa educativa na área de matemática, as teorias que são originárias de Piaget e Vygotsky, em particular à "interação entre iguaes" em aulas de matemáticas

INTRODUCCIÓN

Como es bien conocido, los investigadores en Educación Matemática, observan modelos teóricos de otras disciplinas, con la intención de encontrar modelos de competencia formal, que expliquen y describan los fenómenos educativos o aspectos de estos fenómenos. En algunas ocasiones trasladan y adaptan estos modelos a los fenómenos educativos, como es el caso del "principio de complementariedad", importado por Steiner (1985) para la Educación Matemática desde la Mecánica Cuántica.

Este principio de complementariedad incorporado por Steiner, se ha utilizado como una herramienta adecuada para interpretar las relaciones entre los diferentes tipos y niveles de conocimiento y actividad, en contraposiciones como "cuantitativo frente a cualitativo", "teoría científica frente a conocimiento diario", "metaconocimiento frente a conocimiento primario", "empírico frente a formal", "individual frente a social", etc.

En general se usa este principio, cuando, por ejemplo, en los marcos teóricos de una investigación específica o de una línea de investigación se intenta incorporar a la teoría Piagetiana ideas de la teoría de Vygotsky o viceversa, entendiendo como complementarias ambas teorías. Como Sierra (1999) señala, este principio de complementariedad es fundamental para comprender el sentido de la Investigación para la Innovación, que según este autor, constituye un intento claro de desarrollo de dicho principio. Por ejemplo, en el proyecto del grupo de investigación encabezado por Bartolini Bussi sobre *Discusión Matemática en la Educación Primaria*, el fondo de las ideas es piagetiano, pero posteriormente, el grupo asume ideas de la teoría de Vygotsky produciendo una adaptación de las mismas que continuamente son revisadas. Sin embargo, la misma investigadora reconoce que este proyecto no es una aplicación de la teoría de Vygotsky, sino un ejemplo de progresiva interacción entre teoría y práctica

por medio de la apropiación de las herramientas teóricas correspondientes.

En relación con los métodos de investigación, es común encontrar propuestas de trabajo que pretenden superar posiciones extremas entre los aspectos cualitativos y cuantitativos de los paradigmas de investigación, que recogen métodos y técnicas de ambos, que resultan útiles y complementarios, en función de los tipos de estudio que se realicen (metodología convergente). Encontramos así investigaciones que analizan interacciones, unas veces controladas por una investigación cuasi-experimental (pretest y post-test) con medidas multidimensionales, y otras, controladas por métodos descriptivos (encuestas) o estudio de casos con entrevistas videograbadas. Si bien es cierto que, en la mayoría de los casos, se suele poner mayor énfasis, por las necesidades del trabajo, en los métodos y técnicas del paradigma simbólico/cualitativo, no descuidan los análisis basados en estudios estadístico/cuantitativos considerados como necesarios y complementarios para entender los procesos y resultados implicados en la investigación (Socas, Hernández, Afonso y Palarea, 1994).

En este trabajo reflexionamos sobre el principio de complementariedad y mostramos cómo es considerado inadecuadamente en diferentes contextos de la investigación educativa en el área de Matemática, en particular cuando se trata de conjugar teorías que derivan de Piaget y Vygotsky.

Presentamos unas consideraciones introductorias acerca del contexto en que es formulado el principio de complementariedad de Bohr, enunciado en 1928 para la Mecánica Cuántica. Este principio está relacionado con la dualidad onda-partícula que en 1924 formuló De Broglie y afirma que las partículas elementales (especialmente los electrones) tienen también un aspecto ondulatorio (se comportan, bajo ciertas circunstancias, como ondas electromagnéticas), y presentan una dualidad onda-partícula semejante a la que Einstein había propuesto para la luz. En 1928 Bohr anunció el principio de la complementariedad de la mecánica cuántica, en los siguientes términos, la luz (fotones) y los electrones actúan unas veces como ondas y otras como partículas, pero sus propiedades no pueden observarse simultáneamente, aunque son complementarias entre sí y necesarias para una interpretación correcta. Bohr, presenta dos ideas básicas a tener en cuenta en la adaptación del modelo a la Educación Matemática, la primera es el concepto específico de complementariedad. La segunda es la imposibilidad de ser simultáneamente observados los fenómenos por sus propiedades. Examinemos la traducción del concepto en términos lógicos. Si consideramos U , el universo de fenómenos que se dan en la Mecánica Cuántica, éstos pueden estar caracterizados por U_1 (universo de fenómenos de las ondas) y U_2 (universo de fenómenos de las partículas), que verifican los principios de no contradicción y del tercero excluido, caracterizado porque la intersección de U_1 y U_2 es vacía y porque la unión de U_1 y U_2 es U . Esto es debido a la imposibilidad de observar, simultáneamente, el fenómeno onda y el fenómeno partícula, dándose por tanto una relación de complementariedad.

Las condiciones anteriores no son fácilmente extrapolables a Educación Matemática.

En este trabajo analizaremos aspectos de las teorías de Piaget y Vygostky como ideas complementarias, en el sentido que se ha venido considerando en Educación Matemática, en particular estudiaremos, desde las dos perspectivas, una situación muy específica del trabajo cooperativo en la clase de Matemática, cuando los alumnos interactúan en parejas.

Conviene señalar, como indicaba Laborde en 1994, que los procesos cognitivos de los alumnos en situaciones interactivas con los mismos alumnos, o, de éstos con el profesor, resolviendo problemas o en proceso de instrucción, son líneas de trabajo incipientes que parecen aportar datos relevantes a los procesos de enseñanza/aprendizaje de las Matemáticas y que necesitan avanzar en el marco teórico y en las metodologías de investigación apropiadas.

INTERACCIONES EN EL AULA DE MATEMÁTICA

La enseñanza individualizada y personalizada ha sido una meta permanente de la educación escolar. La perspectiva constructivista muestra, como señala Coll (1990), una visión del alumno como sujeto activo que construye su propio conocimiento y es un marco coherente que permite interpretar los procesos interactivos que constituyen la actividad de los alumnos y profesores en la institución escolar.

Enseñar y aprender constituyen un todo inseparable cuyo resultado es la interactividad entre el profesor y

el alumno, entre los alumnos mismos y entre éstos y los contenidos objeto de aprendizaje. En todas las situaciones, la figura del profesor es determinante para contribuir a un ambiente de trabajo que fomente la confianza, la participación, el diálogo, la cooperación y el respeto mutuo.

La organización social de las actividades de aprendizaje ha sido abordada desde diferentes perspectivas teóricas, pero los estudios se han centrado prioritariamente en tres formas básicas de organización social de las actividades escolares denominadas: cooperativa, competitiva e individualista. La característica que distingue las situaciones cooperativas de otras situaciones de aprendizaje es la interacción entre los estudiantes, que se da con la finalidad de completar tareas; mientras que los estudiantes que trabajan en otras situaciones lo hacen en general individualmente desde sus asientos, y, la mayor parte de la interacción tiene lugar entre el profesor y el estudiante.

Si tomamos como referencia los estudios realizados hasta principio de los años ochenta, Johnson (1981), como resultado de las investigaciones sobre el tema, se puede concluir que la organización cooperativa de las actividades de aprendizaje es claramente superior si se compara con organizaciones de tipo competitivo e individualista. Sin embargo, las variables que afectan a la mayor o menor superioridad de la organización cooperativa de las tareas escolares siguen siendo desconocidas. Este desconocimiento relativo sucede porque la mayor parte de los trabajos empíricos que se han ocupado de las relaciones alumno-alumno se han centrado fundamentalmente en el análisis de sus repercusiones sobre el proceso de socialización en la clase y han descuidado estudiar los efectos de la interacción entre iguales sobre el desarrollo cognitivo y los procesos de aprendizaje (Coll, 1990).

Tradicionalmente se ha considerado la interacción profesor/alumno como la más decisiva para el logro de los objetivos didácticos (aprendizaje de contenidos y desarrollo cognitivo y social). Sin embargo, en los últimos veinte años se ha puesto de manifiesto igualmente que la interacción entre los alumnos juega un papel de primer orden en la consecución de los objetivos educativos.

En el marco de las dos teorías generales citadas, la de Piaget y la de Vygotsky, nos centraremos, ahora, en un aspecto concreto del trabajo interactivo: las interacciones entre pares de alumnos, por ser una de las formas más comunes de interacción en clase.

INTERACCIÓN ENTRE PARES DE ALUMNOS Y LA CONSTRUCCIÓN DEL CONOCIMIENTO MATEMÁTICO

En los últimos veinte años la discusión entre las ideas de Piaget y Vygotsky han tenido una notable actualidad, unas veces, por las consecuencias divergentes que parecen resultar de las dos teorías, y otras, por la posibilidad de utilizarlas como dos teorías complementarias en la orientación de la práctica educativa.

Para situarnos en la discusión: Piaget/Vygotsky, que queremos plantear, conviene señalar de entrada algunas ideas generales. Resaltar que Piaget, pone en primer término el desarrollo operatorio o funcionamiento cognitivo general, enfatiza la producción individual del conocimiento y minimiza la intervención docente; mientras que Vygotsky, centra el funcionamiento cognitivo general en la transmisión de los contenidos escolares, adjudica gran importancia a la construcción social y considera la intervención del docente como fundamental para el aprendizaje. Podemos señalar, además, que para Vygotsky la interacción social y el instrumento lingüístico son decisivos para comprender el desarrollo cognoscitivo, mientras que en Piaget este último es interpretado a partir de la experiencia con el medio físico, dejando esos factores en un lugar subordinado.

Ambas teorías desarrollan, por tanto, temas no compartidos como aprendizaje y desarrollo, o la formación de conceptos cotidianos y científicos, y también, temas compartidos como el enfoque genético, en cuanto que las funciones psicológicas en Vygotsky y los sistemas de conocimientos en Piaget, sólo pueden ser estudiados en su proceso de formación, o el énfasis que ambos autores ponen en la actividad del sujeto en la adquisición de conocimientos específicos.

Un marco teórico, para el estudio de las interacciones entre parejas en clase de Matemática, que se coloque entre las dos posiciones que derivan de Piaget y Vygostky, se

sitúa entre dos polos que pasamos a analizar: “Interacción social entre pares de alumnos y el conflicto socio-cognitivo” e “Interacción social entre pares de alumnos y el proceso de interiorización”.

INTERACCIÓN SOCIAL ENTRE PARES DE ALUMNOS Y EL CONFLICTO SOCIO-COGNITIVO

Esta línea de investigación tiene su origen en los trabajos de Perret-Clermont (1979) y colaboradores, que resaltan las experiencias sociales como uno de los cuatro factores básicos para una teoría del desarrollo cognitivo, además de la maduración, la experiencia con el medio físico y la equilibración o autorregulación, sin perder de vista que este último es el más fundamental de los cuatro.

El conflicto socio-cognitivo se presenta en el trabajo como un constructo que se pone de manifiesto en las interacciones sociales y es facilitador del aprendizaje y del desarrollo cognitivo. El conflicto cognitivo es básico en la teoría genética y aparece en las primeras publicaciones de Piaget. En sus versiones más extendidas surge como resultado de la falta de acuerdo entre los esquemas de asimilación del sujeto y la contradicción entre los observables físicos correspondientes, o bien como resultado de las contradicciones internas entre los diferentes esquemas del sujeto (Piaget, 1975). En el caso que nos ocupa, tomado de Perret-Clermont (1979), la naturaleza del conflicto es sustancialmente distinta pues se concibe como el resultado de la confrontación entre esquemas de sujetos diferentes que se produce en el curso de la interacción social (conflicto socio-cognitivo).

INTERACCIÓN SOCIAL ENTRE PARES DE ALUMNOS Y EL PROCESO DE INTERIORIZACIÓN

Vygotsky formula en este marco lo que él considera como la ley más importante del desarrollo psíquico humano, la hipótesis de la regulación: “Todas las funciones psicointelectivas superiores aparecen dos veces en el curso del desarrollo del niño: la primera vez en las actividades colectivas, en las actividades sociales, o sea, como funciones interpsíquicas; la segunda, en las actividades individuales, como propiedades internas del pensamiento del niño, o sea, como funciones intrapsíquicas” (Vygotsky, 1973, p. 36). En la interacción social, el niño aprende a regular sus procesos cognitivos siguiendo las indicaciones y directrices de los adultos, produciendo un proceso de interiorización mediante el cual lo que puede hacer o conocer en un principio con la ayuda de ellos (regulación interpsicológica), se transforma progresivamente en algo que puede hacer y conocer por sí mismo (regulación intrapsicológica). Queda totalmente de manifiesto el origen social de la cognición y el estrecho vínculo existente entre la interacción social por un lado y el aprendizaje y desarrollo, por otro. Para Vygotsky el desarrollo tiene lugar cuando la regulación interpsicológica se transforma en regulación intrapsicológica.

No podemos dejar de mencionar, en estas breves referencias, el papel decisivo que juega el lenguaje como instrumento regulador por excelencia de la acción, y, el pensamiento en la hipótesis de la regulación.

En relación con las interacciones entre pares de alumnos hemos de resaltar que, aunque estas investigaciones no han sido abundantes, la mayor parte de ellas se han basado en las ideas de Piaget. Él daba más importancia a las interacciones entre iguales que a las interacciones entre adulto/niño.

Podemos situar los inicios de la investigación acerca de la cooperación entre pares de alumnos, en las investigaciones dirigidas por un grupo de psicólogos ginebrinos (Doise, Mugny y Perret-Clermont, 1975, 1976; Perret-Clermont, 1979), que han llevado a cabo diferentes investigaciones encaminadas a estudiar los efectos de la colaboración entre iguales sobre el razonamiento lógico asociado con el estadio piagetiano de las operaciones concretas.

Ahora bien, la pregunta es: ¿Puede aplicarse la hipótesis del conflicto socio-cognitivo a la adquisición de conocimientos, que no son reducibles en su totalidad a componentes operatorios, sino que poseen una fuerte carga social y cultural? La respuesta en la actualidad es que sí, al estar respaldada por una base empírica de considerable solidez (Schubauer-Leoni, 1989).

En los estudios de las potencialidades que ofrece las interacciones entre pares de alumnos en clase de Matemática, el punto de partida es la teoría piagetiana en el marco del conflicto socio-cognitivo, algunos autores parecen adoptar en sus trabajos una posición conciliadora entre las dos teorías: Piaget y Vygostky.

Vamos a considerar como ejemplo dos investigaciones sobre las interacciones entre pares de alumnos, César (1999) y Forman (1981), comentado este último en Forman y Cazden (1983), que tienen como referencia inicial los estudios de Doise, Mugny y Perret-Clermont entre 1975 y 1979.

La línea de trabajo de César (1999) es semejante a las desarrolladas por Perret-Clermont y Schubauer-Leoni (1988, 1997), en la que se abandona la línea inicial de laboratorio de la escuela ginebrina y se opta por una investigación contextualizada en el aula, con un objetivo general de la investigación centrado en: “crear un puente entre el conocimiento de la psicología y los problemas concretos a nivel de aprendizajes escolares”. Presenta la autora un Proyecto de investigación: “Interacción y Conocimiento”, que ha sido implementado durante cinco años, del 5° al 11° año de escolaridad, teniendo como principal objetivo promover las interacciones entre parejas de alumnos en el aula de Matemática, como medio para desarrollar una autoestima positiva por parte de los alumnos, conseguir que ellos tengan una actitud más positiva hacia la Matemática, facilitar su pleno desarrollo socio-cognitivo y alcanzar éxito escolar en esta disciplina. Los resultados que se presentan y discuten pretenden aportar datos sobre el papel que las interacciones entre parejas pueden desempeñar en la aprehensión de conocimientos y adquisición de competencias matemáticas, así como lo que es necesario cambiar, a nivel del contrato didáctico, para que esta forma de trabajo pueda ser utilizada en las prácticas cotidianas del aula. El proyecto tiene dos niveles de trabajo, uno dirigido a los alumnos, en el que se analiza las interacciones entre parejas de alumnos en clase de Matemática y, otro, en el que se investiga a los profesores que implementan el trabajo en parejas durante uno o más años lectivos, en el marco de la Investigación/Acción. Nos estamos refiriendo en este trabajo al primer nivel, es decir, a las interacciones entre parejas de alumnos.

En concreto, César (1999) estudia las potencialidades que ofrece las interacciones entre pares por ser ésta una forma habitual de organizarse los alumnos en la mayoría de las clases de Matemática. Aunque el punto de partida es la teoría piagetiana en el marco del conflicto socio-cognitivo, César parece adoptar en sus trabajos una posición conciliadora entre las dos teorías: Piaget y Vygostky, y ante la definición de problemas didácticos comunes, trata de esclarecer cuáles son las coincidencias y cuáles, los auténticos puntos de confrontación.

El marco teórico de referencia en el que aparentemente se coloca esta investigadora está situado en los dos polos anteriores: de la interacción social entre parejas al conflicto socio-cognitivo, y de la cooperación entre parejas al proceso de interiorización.

La hipótesis del conflicto socio-cognitivo presenta dificultades al tener que recurrir a la confrontación de puntos de vista divergentes, que obviamente es uno de los caminos a través de los cuales la interacción entre los alumnos repercute sobre el desarrollo intelectual y el aprendizaje escolar, pero no es probablemente el único camino; también presenta dificultades esta hipótesis, para dar detalles de los mecanismos psicológicos responsables de la influencia que ejerce la interacción y la comunicación entre iguales, sobre la adquisición y utilización del conocimiento matemático.

Para superar estas dificultades parece necesario ampliar el marco teórico de referencia y dotarlo de los instrumentos adecuados que permitan observar detalladamente el proceso de coordinación social que tiene lugar entre los dos participantes en la realización colectiva de la tarea; de esta manera es posible discernir sobre las variables interactivas directamente

responsables del progreso cognitivo. En esta dirección se sitúa teóricamente la investigación que César presenta, inspirada especialmente en los trabajos de Vygotsky, incorporando aspectos de su teoría, que se concretan en: “los desempeños de los sujetos no son independientes de los contextos y las situaciones”; señalando que: “para que en una interacción social sea posible negociar significados es necesario ser capaces de establecer una intersubjetividad común” (Daniels, 1990; Wertsch, 1991). Para paliar estas dificultades César incorpora una de las contribuciones básicas de la teoría de Vygotsky como es la “Zona de Desarrollo Próximo”, entendida como “la diferencia entre el nivel de las tareas realizables con la ayuda de los adultos y el nivel de las tareas que pueden realizarse con una actividad independiente” (Vygotsky, 1973, p. 34), es decir, la diferencia entre el nivel de desarrollo potencial, determinado por la capacidad de resolución de problemas bajo la dirección de un adulto o compañero más capaz, y el nivel de desarrollo real, determinado por la capacidad de resolución individual de problemas. Esta noción aparentemente obvia permite extraer varias conclusiones originales de las que sobresalen dos por su interés. Primero, la zona de desarrollo próximo puede ser utilizada para identificar aquellas habilidades más predispuestas para la instrucción, y segundo, que el aprendizaje consiste en la interiorización de procesos sociales interactivos. Como consecuencia de estas conclusiones el aprendizaje se sitúa en esta zona; esto es, lo que un alumno es capaz de hacer o conocer con la ayuda de un adulto, llega a ser capaz de hacerlo o conocerlo por sí solo. Se llega de este modo a concebir las relaciones entre desarrollo, aprendizaje y enseñanza en una perspectiva radicalmente distinta a la de Piaget.

Veamos dos tipos de ejemplos de interacciones que se manifiestan en los trabajos de César (1998 y 1999) y analicemos sus explicaciones.

Situación A:

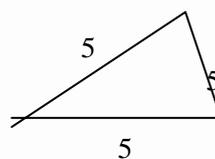
Las longitudes de los lados de un triángulo son tres números enteros consecutivos. ¿Cuál es la longitud de cada uno de ellos sabiendo que el perímetro es de 15 cm?

César (1998) relata la actuación de una pareja de alumnos que están en el noveno año de escolaridad que identifican como Cat. y Est.

Cat. y Est. empiezan a leer y a resolver el problema. Sus estrategias de resolución son diferentes.

Cat.:

$$15 : 3 = 5$$



Cat.: ¡No da!

Durante ese tiempo, Est. ya había encontrado la solución:

$$x + x + 1 + x + 2 = 15$$

$$x + x + x = 15 - 3$$

$$3x = 12$$

$$x = 12 : 3$$

$$x = 4$$

$$R: 4, 5 \text{ y } 6.$$

Est. Mira hacia Cat., ve lo que está haciendo e intenta convencerla para que continúe.

Est. toma la actitud de enseñar a Cat. y le dirige la tarea y le proporciona explicaciones sobre la misma que acepta Cat. y que le conduce a entender y resolver el problema.

...

Cuando, en la discusión general, Cat. va al encerado a explicar las estrategias de resolución que

su pareja había escogido, comienza por la que ella misma utilizó y la ejemplifica rápidamente. Después añade, pero también podemos usar una ecuación que plantea y resuelve.

Situación B:

Un mercader vendió la mitad de un queso, después un cuarto y finalmente una sexta parte. Comprobando que aún le quedaba 125 g. ¿Cuántos Kilos pesaba el queso? (César, 1999).

En este ejemplo César (1999) relata la actuación de una pareja de alumnos que están también en el noveno año de escolaridad y que identifica como M. alumna bien considerada por su trabajo en Matemática, y V. al alumno que había suspendido con frecuencia Matemática y consideraba que no valía la pena intentar la resolución del problema puesto que él no sabía Matemática.

V. empieza a dibujar una circunferencia y después pasa a leer nuevamente el problema.

M. resuelve el problema mediante números fraccionarios.

Cada uno usa su estrategia de resolución. V. usa una estrategia de representación gráfica asociada a una estrategia aritmética; M. usa una estrategia aritmética. V. es el primero en acabar.

Al principio M. y V. no comprenden el método usado por cada uno. Al final M. y V. terminan aceptando y comprendiendo los respectivos procedimientos.

Existen entre M. y V. puntos de vista moderadamente divergentes sobre el problema y se produce un conflicto cognitivo entre las dos soluciones aportadas, llegando a aceptar ambas.

Como comentario al trabajo de César (Socas, 1999), podemos decir, que ésta incorpora a la hipótesis del conflicto socio-cognitivo, la hipótesis de la regulación en la forma de Zona de Desarrollo Próximo de Vygotsky, y termina encontrando una aparente novedad: “el par más competente también se beneficia de este proceso interactivo”, lo que contradice el supuesto básico de Vygotsky del par más competente (adulto/niño), y trata de explicar en su investigación, las situaciones A y B, en términos de la hipótesis del conflicto socio-cognitivo.

Parece más razonable aceptar que cuando suceda A en la interacción entre parejas, la hipótesis del conflicto socio-cognitivo muestra, que si se supera el conflicto el par más competente también se beneficia de este proceso interactivo, pero de ninguna manera parece razonable aceptar que la confirmación de la hipótesis del conflicto socio-cognitivo niegue la hipótesis de la regulación, como parece haber encontrado César en sus investigaciones, ya que entendemos que ambas hipótesis no son reducibles entre sí. La hipótesis del conflicto socio-cognitivo no parece adecuada para dar cuenta de los efectos positivos de las situaciones tutoriales o del trabajo en parejas genuinamente cooperativo; e inversamente, la hipótesis de la regulación no explica con claridad efectos de la superación de conflictos y controversias conceptuales. Lo que sí queda del todo claro, a través de los resultados, es que la gama de situaciones de colaboración interindividual que contribuyen al progreso del conocimiento es más amplia que lo que supuso Vygotsky.

Desde este punto de vista surgen dudas acerca de la investigación de César. Por ejemplo, no parece razonable limitar la cooperación entre parejas interactivas en el contexto de una clase de Matemática, solamente a la situaciones A y B y que éstas se puedan explicar en término de la hipótesis del conflicto socio-cognitivo. No queda claro el papel que juega la Zona de Desarrollo Próximo en el marco teórico de la investigación, o de manera más general, no queda claro la contribución de las aportaciones de Vygotsky a la investigación como teoría complementaria.

La línea de trabajo de Forman (1981) es semejante a las desarrolladas por Perret-Clermont (1979), y al igual que ella, Forman pidió a los alumnos que cooperasen en la resolución de una tarea piagetiana de razonamiento lógico. Pero a diferencia con el trabajo de Perret-Clermont (alumnos de cuatro a siete años), Forman trabajó con alumnos mayores, aproximadamente de nueve años y, además, seleccionó una tarea utilizada para verificar el razonamiento operacional formal, un problema químico de combinación. Participan sujetos individuales y tres parejas durante 11 sesiones de resolución de problemas, aproximadamente, una vez por semana. El problema de combinación química era una adaptación de una tarea de Inhelder y Piaget (1958), conocida como combinación de cuerpos químicos con color e incoloros, que eran en total siete problemas ordenados en término de su complejidad lógica. En el estudio se analizaron diferentes códigos de comportamiento social y se observaron tres tipos de estrategias de experimentación: azar, aislamiento de variables y combinatoria.

Nos vamos a referir, en lo que sigue, al código de comportamiento social denominado interacciones de procedimiento y a las tres parejas en las sesiones de resolución de problemas.

Se identificaron tres niveles de interacciones de procedimiento: paralela (las parejas comparten materiales e intercambian comentarios, pero ninguno intenta controlar el trabajo del otro o de informar al otro de sus propios pensamientos o acciones), asociativas (las parejas intentan intercambiar información acerca de las combinaciones químicas que cada uno ha seleccionado, sin mostrar ningún intento de coordinar el papel de cada compañero), y cooperativo (existe en ambos compañeros controles del trabajo del otro, jugando papeles coordinados en la realización de los procedimientos de trabajo).

Mostramos, a continuación, la tabla resumen del tiempo dedicado por las tres parejas a actividades paralelas, asociativas o cooperativas

Parejas	Tipo de actividad (%)		
	Paralela	Asociativa	Cooperativa
George y Bruce			
Sesión 3	61	39	0
Sesión 5	0	0	100
Sesión 8	0	0	100
Sesión 11	0	0	100
Lisa y Linda			
Sesión 3	42	26	32
Sesión 5	0	44	55
Sesión 9	0	0	100
Sesión 11	0	0	100
Matt y Mitch			
Sesión 3	90	10	0
Sesión 5	85	15	0
Sesión 8	100	0	0
Sesión 10	100	0	0

Se plantea, en la discusión de los resultados, la siguiente pregunta ¿Qué pueden decir estos resultados acerca de la hipótesis propuesta por Perret-Clermont según la cual las interacciones entre compañeros puede inducir un conflicto cognitivo, que a su vez, desemboca en una reestructuración cognitiva y en el progreso intelectual?

La respuesta que dan Forman Cazden (1983), es que no se pudo evaluar el conflicto cognitivo puesto que los indicios claros de conflicto, por ejemplo las discusiones, eran

relativamente escasas durante las sesiones de resolución de problemas examinadas, que fue especialmente la fase de planificación de la tarea.

En esta parte de la tarea los alumnos trabajaban separadamente o juntos, ordenando y compartiendo los materiales de trabajo y planeando y eligiendo los experimentos. Cuando interactuaban a nivel cooperativo, se intercambiaban materiales, se corregían errores, se daban ánimo, etc. En lugar de darse puntos de vistas conflictivos se veía a dos personas intentando construir y llevar a cabo un plan de experimentación conjunto para verificarlo más tarde.

Los puntos de vista conflictivos aparecían después de la resolución del problema, cuando la mayor parte o todos los resultados de los experimentos, eran visibles. En este momento era cuando se podía observar a los alumnos elaborando conclusiones distintas y a veces opuestas sobre la solución del problema. Presentan el caso de George y Bruce, en el que este último se vio obligado a revisar sus conclusiones ante las evidencias que George le proporcionó, pero a pesar del esfuerzo George no convenció a Bruce para que aceptase sus conclusiones.

Los autores observan en estas experiencias dos tipos diferentes de procesos sociales interactivos. El primero tiene lugar durante la planificación de la tarea en el que aparece tanto el trabajo por separado (paralelo) como el trabajo cooperativo; el segundo, tiene igualmente lugar, cuando se examinan las evidencias experimentales, en el que cada alumno parece llegar a conclusiones independientes sobre la solución de la tarea basada en las evidencias empíricas de que disponen cada uno.

Ante la imposibilidad de encontrar respuestas convincentes en la hipótesis del conflicto socio-cognitivo, optan por incorporar las ideas de Vygotsky, señalando que siempre aportan claridad sobre algunos de los procesos que forman parte de la colaboración entre iguales.

Señalan, aunque aparentemente sin mucha convicción, que de los datos de Forman (1981), “parece que se puede producir un proceso similar de regulación interpsicológica a intrapsicológica en contextos cooperativos en los que ninguno de los compañeros puede verse como objetivamente “más capaz”, pero en los que los compañeros pueden asumir roles sociales separados aunque complementarios”. Indican como ejemplo, “un niño puede adoptar un rol de observación, de guía y corrección, mientras el otro realiza la tarea propiamente dicha”. Y concluyen, la ayuda que proporciona un compañero observador parece permitir a los dos colaboradores la resolución conjunta de problemas antes de que sean capaces de resolver el mismo problema por separado.

La primera cuestión que planteamos es que la regulación social cooperativa es mucho más, como ellos mismos determinan, que asumir únicamente los roles de observador/realizador, y segundo, que la exposición a esta forma de regulación social puede permitir a los niños el dominio de problemas difíciles antes de que sean capaces de resolverlos individualmente, pero no queda claro que esta forma social de regulación pueda suministrar a los niños herramientas necesarias para dominar, por ellos mismo, dichos problemas, salvo cuando los roles complementarios comienzan a parecerse a tutorías entre compañeros. Señalamos como apoyo a esta argumentación los datos que aportan Forman y Cazden, “uno de los descubrimientos más sorprendentes del estudio de Forman es la discrepancia que hay en la manera de funcionar el par como unidad y la manera de funcionar sus componentes por separado. Sin duda alguna, indican, George y Bruce eran los colaboradores con más éxito y, sin embargo, no mostraron el mismo alto nivel de funcionamiento cuando realizaron el postest por separado”.

Forman y Cazden (1983), discuten los hallazgo de Forman (1981) a la luz de las hipótesis de Perret-Clermont y de la teoría de Vygotsky, a su juicio esencial y complementaria.

DISCUSIÓN DE LOS CONTEXTOS INTERACTIVOS ENTRE PARES DE ALUMNOS EN CLASE DE MATEMÁTICA

Las relaciones entre alumnos en el trabajo cooperativo en parejas, tomando los ejemplos de los dos estudios anteriores, muestran que los contextos interactivos entre parejas en clase de Matemática pueden situarse en un continuo, de tal manera que en un extremo encontraríamos a un alumno que sabe más que el otro y se espera que actúe de compañero/tutor, y en el otro extremo nos encontraríamos con dos alumnos de conocimientos análogos, o al menos, no intencionadamente desiguales y se espera una colaboración en ambos sentidos y con un estatus de igual, pasando por una situación intermedia de alumnos con perspectivas moderadamente discrepantes, con intención de alcanzar un consenso.

En el siguiente cuadro resumen recogemos las tres situaciones anteriores y las relacionamos con las hipótesis del conflicto socio-cognitivo y de regulación.

Cuadro:

Relaciones entre alumnos en el desarrollo del trabajo cooperativo por parejas en el salón de la clase.	Mediador	Ejemplos
A) Cuando uno de los participantes enseña o instruye al otro proporcionándole explicaciones, instrucciones o directrices sobre la tarea. (Dirección del trabajo)	Hipótesis de regulación. Vygotsky (1973)	P. Las longitudes de los lados de un triángulo son tres números enteros consecutivos. ¿Cuál es la longitud de cada uno de ellos sabiendo que el perímetro es de 15 cm? (César, 1998).
B) Existen puntos de vistas moderadamente divergentes sobre la tarea a realizar y se produce conflicto cognitivo. Características: - Los alumnos poseen evidencias empíricas. - Los alumnos son capaces de sugerir dos soluciones distintas. Se exige una solución de consenso. (Conflicto socio-cognitivo)	Hipótesis del conflicto Socio-Cognitivo. Piaget (1975) Perret-Clermont (1979)	P. Un mercader vendió la mitad de un queso, después un cuarto y finalmente una sexta parte. Comprobando que aún le quedaban 125 g. ¿Cuántos Kilos pesaba el queso? (César, 1999).
C) Cuando hay una coordinación de los papeles asumidos por el par, un control mutuo del trabajo y un reparto de responsabilidades en la ejecución de la tarea (cooperación genuina entre parejas). (Ayuda mutua)	- ¿Hipótesis de regulación? Vygotsky (1973) - ¿Hipótesis del conflicto Socio-Cognitivo? Piaget (1975) Perret-Clermont (1979)	Problemas de mezclar. “Se agregan a frascos con soluciones incoloras, preparadas de antemano un reactivo y un cambio de color es observado en uno de los recipientes. Se trata de lograr, por ejemplo, el mismo color, usando uno o todos los frascos. Problemas de combinaciones sistemáticas de posibilidades Forman (1981).

Hemos de resaltar en primer lugar que en el análisis de estas tres situaciones no parece razonable hacer intervenir la misma hipótesis, bien sea la del conflicto socio-

cognitivo, bien sea la de regulación, puesto que ambas responden a preguntas de investigación diferentes.

La hipótesis del conflicto socio-cognitivo no parece adecuada para dar cuenta de los efectos positivos de las situaciones tutoriales o del trabajo en parejas genuinamente cooperativo; e inversamente, la hipótesis de la regulación se aplica con incomodidad a los efectos de la superación de conflictos y controversias conceptuales. Lo que sí queda del todo claro, a través de los resultados, es que la gama de situaciones de colaboración interindividual que contribuyen al progreso del conocimiento es más amplia que lo que supuso Vygotsky.

CONSIDERACIONES FINALES

Aunque en estos comentarios, no hemos pretendido apuntar o formular criterios epistemológicos de comparación de las teorías de Piaget y Vygotsky, si se ha querido hacer sugerencias sobre la necesidad de indagar en temas educativos precisos y puntuales desde el interés común que pueden aportar ambas teorías. Eso sí, aceptando como hipótesis de trabajo que sus planteamientos no son incompatibles para la Educación Matemática a la vez que no son teorías complementarias.

LAS TEORÍAS DE PIAGET Y VYGOTSKY NO SON TEORÍAS INCOMPATIBLES:

Es cierto que encontramos algunas ideas opuestas entre Piaget y Vygotsky que saltan inmediatamente a la vista: por un lado, el desarrollo se prolonga en el aprendizaje, y por otro, el aprendizaje orientando el desarrollo; por un lado, un mecanismo “interno” para el desarrollo y el aprendizaje, y por otro, un proceso de internalización de la cultura.

La cuestión básica acerca de la compatibilidad o no, de ambas teorías, no está en la determinación de ideas opuestas descontextualizadas, sino en preguntarse si Piaget y Vygotsky, se plantearon los mismos problemas respecto al desarrollo cognitivo (Castorina et al., 1996).

Una tesis razonable del planteamiento de Vygotsky sobre el desarrollo cognitivo, es que los sistemas de signos producidos en la cultura en la que viven los alumnos no son meros “facilitadores” de la actividad psicológica, sino que son sus formadores. Desde este punto de vista, Vygotsky se propone precisar cómo los individuos que pertenecen a una determinada cultura llegan a controlar el sistema de signos correspondientes y cómo éstos llegan a ser internalizados (hipótesis de regulación y zona de desarrollo próximo).

Para Piaget su indagación básica sobre el desarrollo cognitivo está vinculado a la problemática epistemológica, y pretende averiguar: ¿Cómo pasa un individuo de un estado menor de conocimiento a un estado mayor de conocimiento? (maduración, experiencia con el medio físico, experiencias sociales y equilibración (hipótesis de conflicto cognitivo)).

De forma directa parece que Piaget no pretende responder a la pregunta ¿Cómo se constituye la subjetividad en la internalización de la cultura?, y Vygotsky tampoco pretende responder a ¿Cómo cambia el punto de vista del sujeto en la constitución del objeto de conocimiento? Por lo tanto, el afirmar o refutar una teoría en el marco de la otra no parece una tesis adecuada.

LAS TEORÍAS DE PIAGET Y VYGOTSKY NO SON TEORÍAS COMPLEMENTARIAS

Tampoco nos parece razonable plantearse las relaciones de complementariedad de ambas teorías, como por ejemplo, si el desarrollo universal de los esquemas de conocimiento en Piaget o la teoría de la equilibración pueden asumir o no las condiciones sociales de dicha producción. En consecuencia la teoría de Vygotsky sobre la internalización de la cultura, vendría a completar la teoría de Piaget o a llenar sus lagunas en lo concerniente a la intervención de los factores sociales en la formación de los conocimientos.

La cuestión es otra. De los datos empíricos aportados, podemos señalar que:

- La hipótesis del conflicto socio-cognitivo está destinada a la búsqueda de la evidencia del desequilibrio, no le interesa describir o explicar los procesos sociales interactivos como un todo. Esta hipótesis es de gran ayuda para explicar aquellas situaciones en las que el conflicto cognitivo se da de forma clara y abierta en comportamientos sociales externos como las discusiones, es por tanto útil para analizar y comprender el papel de los factores sociales en las interacciones entre pares en las cuales se presentan claros indicios de conflicto cognitivo (situación B). Pero no es de gran ayuda en aquellas situaciones en las cuales el conflicto no es aparente y si hay dirección o ayuda mutua.

- Análogamente la hipótesis de la regulación está destinada a analizar y comprender los procesos interactivos sociales como un todo, que se dan en situaciones de dirección y en la que se pone en juego lo intersíquico y lo intrapsíquico. Pero no es de gran ayuda para aquellas situaciones de conflicto aparente o de ayuda mutua.

Y no queda claro, a pesar de los indicios que señalan Forman y Cazden (1983), que se produzca un proceso similar de regulación interpsicológica a intrapsicológica en contextos cooperativos en los que ningún compañero pueda verse como objetivamente “más capaz”, aunque sólo asuman papeles sociales de observador/realizador, separados y complementarios.

Podemos señalar entonces que las situaciones A y B son explicables mediante las hipótesis de regulación y del conflicto socio-cognitivo respectivamente, y la situación C, no es explicable por ninguna de ellas.

Piaget y Vygotsky no se plantearon los mismos problemas respecto al desarrollo cognitivo. La equilibración es una explicación del modo en que el sujeto se construye el objeto de conocimiento, y la formación de los conocimientos se puede interpretar como “internalización” de los instrumentos culturales. Se trata entonces de articular dos niveles de explicación diferentes, no de completarlos entre sí.

Compartiendo la tesis del *International Group of the Psychology of Mathematics Education* (PME): “no debemos comenzar las investigaciones en Educación Matemática desde una teoría General y Neutral respecto del contenido y derivar de ella una teoría específica para el caso de la Matemática, sino por el contrario se deberá comenzar por el estudio de los procesos específicos de cada contenido”. Desde su constitución en 1976, en el Tercer congreso del ICME (International Congress on Mathematics Education) celebrado en Karlsruhe, planteada por Bauersfeld & Skowronek (1976), resultó ser una cuestión determinante que caracteriza a este grupo en estos últimos 25 años.

Es razonable considerar para la investigación en Educación Matemática la construcción de marcos teóricos conceptuales que tengan como soporte teorías como las que proponen Piaget y Vygotsky, en el sentido que :

- 1) Exista compatibilidad entre las ideas que proceden de las dos teorías puestas en juego, basada en el principio de no contradicción, es decir, estas ideas no deben implicar la aceptación o el rechazo entre sí.
- 2) Permita la búsqueda de marcos teóricos conceptuales que procedan de las dos teorías al potenciar los puntos en común, especialmente relativos a la naturaleza del funcionamiento cognitivo, con nuevas preguntas de investigación. Y,
- 3) Si estas situaciones no son posibles, es necesario la búsqueda de nuevas teorías que contemplen los fenómenos no analizadas por las anteriores.

Es obvio pensar que las tres situaciones anteriores de interacciones entre pares de alumnos no son las únicas que permiten incidir favorablemente sobre el aprendizaje escolar en Matemática, y que, por tanto, las investigaciones futuras deben tender a la búsqueda de nuevos marcos teóricos en el sentido señalado en 2) y 3), para explicar mejor las situaciones empíricas de que disponemos (por ejemplo la C), o para nuevas situaciones.

En cualquier caso, por el momento, estas dos teorías son las que permiten dar cuenta de los resultados disponibles, eso sí, usadas consistentemente en el sentido descrito en 1).

Desde Educación Matemática podemos considerar las teorías de Piaget y Vygostky, como dos grandes teorías cognitivas del siglo XX, y referirnos a la primera como una teoría de naturaleza microscópica o individual y a la segunda como una teoría de naturaleza macroscópica o social, que responden a cuestiones diferentes; en el primer caso se explica cómo un individuo pasa de un nivel de conocimiento a otro y en el segundo cómo se constituye la subjetividad en la internalización de la cultura.

BIBLIOGRAFÍA

Bauersfeld, H. & Skowronek, H. (1976). Research Related to the Mathematical Learning Process. En H. Athen & H. Kunle (Eds.): *Proceedings of Third International Congress on Mathematical Education*. Universität Karlsruhe, Zentralblatt für Didaktik der Mathematik: Karlsruhe.

Castorina, J. A. et al. (1996). *Piaget-Vygotsky: contribuciones para replantear el debate*. Buenos Aires, Argentina: Paidós.

César, M. (1998). Y si aprendo contigo? Interacciones entre parejas en el aula de matemáticas. *Uno 16*, 11–23.

César, M. (1999). Interacções sociais e apreensão de conhecimentos matemáticos: a investigação contextualizada. En J. P. Da Ponte & L. Serrazina (Eds.) *Educação Matemática em Portugal, Espanha e Itália*. (pp. 5-46). Actas da Escola de verão. Santarém. Lisboa: Sociedade Portuguesa de Ciências de Educação. Secção de Educação Matemática.

Coll, C. (1990). *Aprendizaje escolar y construcción del conocimiento*. Barcelona, España: Paidós.

Daniels, H. (1990). Number Competence and Communication Difficulty: A Vygotskian Analysis. *Educational Studies 16* (1), 49-59.

Doise, W., Mugny, G. & Perret-Clermont, A. N. (1975). Social interaction and the development of cognitive operations. *European Journal of Social Psychology 5* (3), 367-383.

Doise, W., Mugny, G. & Perret-Clermont, A. N. (1976). Social interaction and cognitive development: further evidence. *European Journal of Social Psychology 6* (2), 245-247.

Forman, E. A. (1981). *The role of collaboration in problem-solving in children*. Tesis doctoral no publicada. Harvard University.

Forman, E. A. & Cazden, C. B. (1983). Exploring Vygotskian perspectives in education: the cognitive value of peer interaction. En J. V. Wertsch (Ed.) *Culture, communication and cognition: Vygotskian perspective*. Nueva York: Cambridge University Press. (versión castellana: Perspectivas vygotkianas en la educación: el valor cognitivo de la interacción entre iguales. *Infancia y Aprendizaje*, 1984, 27/28, 139-157).

Inhelder, B. & Piaget, J. (1958). *The growth of logical thinking from childhood to adolescence*. Nueva York, USA: Basic Books.

Johnson, D. W. (1981). Student-student interaction: the neglected variable in education. *Educational Researcher 10*, 5–10.

Laborde, C. (1994). Working in Small Groups: A Learning Situation? En R. Biehler et al. (Eds.). *Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline*, (pp. 147-158). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Perret-Clermont, A. N. (1979). *La construction de l'intelligence dans l'interaction social*. Berna: Peter Lang. (versión castellana: *La construcción de la inteligencia en la interacción social.*, Madrid: Visor/Aprendizaje. 1984).

Perret-Clermont, A.-N. & Schubauer-Leoni, M-L. (1988). *The Social Construction of Meaning in Math Class Interaction*. Paper presented in the Sixth International Congress on Mathematical Education, Budapest, Hungary.

Perret-Clermont, A.-N. & Schubauer-Leoni, M-L. (1997). Social Interactions and Mathematics Learning. In Nunes, T. & Bryant, P. (Ed.), *Learning and Teaching Mathematics: An International Perspective* (pp. 265 - 283). Sussex: Psychology Press.

Piaget, J. (1975). *L'équilibration des structures cognitives. Problème central du développement*. París. Presses Universitaires de France. (versión castellana: *La equilibración de las estructuras operatorias*. Madrid. Siglo XXI, 1978).

Schubauer-Leoni, M. L. (1989). Problématisation des notions d'obstacle épistémologique et de conflit socio-cognitif dans le champ pédagogique. En M-L Schubauer-Leoni, (Ed.). *Construction des savoirs. Obstacles et Conflits*. Québec, Cirade: Agence d'Arc.

Sierra, M. (1999). Comentarios a la conferencia: "Linee di tendenza della ricerca per l'innovazione in Italia: Quadro di riferimento teorico" de Ferdinando Arzarello. (pp. 225-230). En J.P. Da Ponte & L. Serrazina (Eds.) *Educação Matemática em Portugal, Espanham e Itália*. Actas da Escola de verão. Santarém. Lisboa: Sociedade Portuguesa de Ciências de Educação. Secção de Educação Matemática.

Socas, M. M. (1999). Comentarios a la conferencia: "Interacções sociais e apreensão de conhecimentos matemáticos: a investigação contextualizada" de Margarida César. (pp. 53-63). En J.P. Da Ponte & L. Serrazina (Eds.) *Educação Matemática em Portugal, Espanham e Itália*. Actas da Escola de verão. Santarém. Lisboa: Sociedade Portuguesa de Ciências de Educação. Secção de Educação Matemática.

Socas, M. M.; Hernández, J.; Afonso, C. & Palarea, M. (1994). Un modelo de investigación convergente en Educación Matemática desde una perspectiva curricular. *Revista Interuniversitaria de Formación del Profesorado*. vol. 21, 45-58. Zaragoza.

Steiner, H. (1985). Theory of Mathematics Education (TME): an Introduction. *For the learning of mathematics* 5 (2), 11-17.

Vygotsky, L. S. (1962). *Thought and Language*. Cambridge MA: MIT Press. (versión castellana: *PENSAMIENTO Y LENGUAJE*. Buenos Aires: Fausto. 1992).

Vygotsky, L. S. (1973). Aprendizaje y desarrollo intelectual en la edad escolar. En Luria, Leontiev, Vygotsky y otros. *Psicología y Pedagogía*. Madrid. Akal.

Wertsch, J. V. (1991). *Voices of mind. A sociocultural approach to mediated action*. Hemel Hempstead: Havester Wheatsheaf.