Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa
Vol. 5, Núm.1, marzo, 2002, pp. 27-44

Estudio de la evolución didáctica del punto de inflexión: una aproximación socioepistemológica*

Apolo Castañeda Alonso•

RESUMEN

Este trabajo forma parte del programa de investigación Pensamiento y Lenguaje Variacional, cuyo foco de interés son los procesos del pensamiento que inciden en el estudio de la matemática del cambio. El autor ha dirigido sus esfuerzos al análisis de la derivada, en particular la de segundo orden, y busca caracterizar en ella una de las propiedades de las curvas que se relaciona directamente con la segunda derivada: el punto de inflexión. Así, presenta primero un bosquejo socioepistemológico de tal idea y después una caracterización con base al estudio realizado.

ABSTRACT

The work presented hereunder is part of the research program of Thought and Variation Language, which is focused on the study of the processes of thought involved for the study of the mathematics of change. The attention has centered in the study of the derivative, particularly of the one of second order, as the intention is to characterize one of the properties that the curves have, and which is directly related with the second derivative: the inflection point. The research starts with a presentation of a social-epistemological outline of this idea, and then a characterization based on the study performed.

RÉSUMÉ

Le travail présenté ci-dessous fait partie du programme de recherche sur la pensée et le langage variationnel qui s'intéresse à l'étude des mécanismes de la pensée impliqués dans l'étude de la mathématique du changement. L'attention s'est portée sur l'étude de la dérivée et notamment de celle de la dérivée seconde. On cherche ici à caractériser l'une des propriétés des courbes directement en rapport avec la dérivée seconde, le point d'inflexion. La recherche présente tout d'abord une ébauche socio-épistémologique de cette idée puis un ensemble de précisions découlant de l'étude réalisée.

RESUMO

O trabalho a seguir faz parte do programa de pesquisa de Pensamento e Linguagem de Variação, que se interessa no estudo dos processos de pensamento envolvidos para o estudo da

* *Resumen de la Tesis de Castañeda, A. (2000).* Estudio de la evolución didáctica del punto de inflexión: una aproximación socioepistemológica. *Tesis de Maestría. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.*

• Programa de Matemática Educativa. Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del IPN.

matemática de mudança. A atenção centrou-se no estudo da derivada e, particularmente, na de segunda ordem. O propósito é caracterizar uma das propriedades das curvas diretamente relacionada com a segunda derivada: o ponto de inflexão. A pesquisa apresenta, primeiramente, um rascunho socio-epistemológico desta ideia e depois uma caracterização baseada no estudo realizado.

OBJETIVO

La investigación desarrollada por González (1998) ha dejado ver la importancia de estudiar el concepto de derivada a través de un acercamiento que enfatiza el tratamiento de cada uno de sus órdenes, atendiendo a sus propiedades y favoreciendo estrategias de análisis para lograr el tránsito entre una y otra, de manera que la derivada se asuma como la coordinación de las que le suceden.

Tal argumento emana de las reflexiones epistemológicas que hace Bos (1974), donde muestra el intrincado proceso por el cual se establece y construye la derivada como objeto matemático. Sin embargo, es dentro del programa de investigación Pensamiento y Lenguaje Variacional (Pulido, 1997; Cantoral R. et al, 2000; Farfán R., 1993 y 1997; Cantoral R. y Farfán R., 1998; Cantoral, R., 1997a) cuando se formula la tesis que sostiene enfáticamente que la noción de derivada no puede construirse sino hasta después de haber construido la de derivada sucesiva.

Ello significa que el concepto de derivada se construye a través de la síntesis que resulta del estudio de cada orden de derivada, donde se han identificado características y relaciones entre cada orden, así como la información que proporcionan, de manera que, al coordinar toda esa información, surgen elementos que posibilitan expresar el concepto de derivada como tal.

Un aspecto importante en todo este escenario es el que se refiere al tránsito entre derivadas. Ya algunos trabajos, como el del mismo González, han advertido que el estudio de la derivada en los sistemas didácticos se ha visto favorecida por la algoritmia, lo cual disminuye significativamente la posibilidad de coordinar las distintas órdenes entre derivadas, e inhibe algunas características que asocian la correspondencia entre la función y su derivada y viceversa; al verse limitado el estudio de gráficas y su análisis, se ven reducidas también las habilidades de predicción de comportamientos y formas gráficas. Al respecto, Cantoral R. y Farfán R. (1998) ponen especial énfasis en la importancia de integrar, previo al estudio del cálculo, un lenguaje gráfico como medio que permita la transferencia de campos conceptuales virtualmente ajenos a causa de las enseñanzas tradicionales.

Hay en el medio un generalizado distanciamiento entre la didáctica tradicional –que busca, con fines bien justificados, el dominio algorítmico de la derivada– y las actividades tendientes a favorecer el estudio de la derivada valiéndose del lenguaje gráfico como recurso, e incluso es común hallar en los libros contemporáneos de cálculo un tratamiento de la derivada que favorece y enfatiza las reglas de derivación, haciendo que su significado se constriña por ejemplo, a una regla de cuatro pasos o bien a un cociente.

La investigación que se presenta tiene como interés ampliar y reconstruir el significado de los conceptos del cálculo, buscando escenarios alternativos donde se exhiban características, propiedades o relaciones, de tal forma que el proceso para acercarnos a un concepto sea a través de múltiples referencias y no sólo por las definiciones. Más concretamente, este trabajo se aboca al análisis de la segunda derivada y muy particularmente sobre el punto de inflexión, concepto que mantiene un vínculo muy cercano con la segunda derivada y establece puentes de comunicación con la primer derivada y la función primitiva.

Los textos escolares muestran una relación entre la segunda derivada y el punto de inflexión basada en criterios en los que se hacen implicaciones a partir de las propiedades analíticas. Granville (1986), apunta que "...la segunda derivada cambiará de signo en ese punto [al hacer referencia al punto de inflexión] y si es continua debe anularse... luego se verifica la siguiente igualdad: En puntos de inflexión $f(x) = 0$"

Dicho criterio se verifica mediante las propiedades de las derivadas que fortalece la algoritmia, mas no desarrolla una idea clara del punto de inflexión, es decir, no atiende al regreso en la implicación, pues no importa realmente el punto, sino el uso de algoritmos para determinarlo en la curva.

Tal circunstancia genera en nosotros la siguiente inquietud: ¿Es posible establecer las condiciones que caractericen a un punto de inflexión? Con la intención de dotar de significados múltiples a la segunda derivada, nos preguntamos también por las nociones que se asocian, y es evidente que el punto de inflexión tiene un sitio relevante en el estudio de la segunda derivada. Ahora, parece natural que nuestra búsqueda de referentes con el fin de determinar el punto de inflexión se hallan en los procesos de construcción de la obra matemática, en aquellos momentos en que se problematizaron situaciones, se fundamentaban propiedades geométricas y se estudiaron a las segundas variaciones, precisando así una base de significados primarios, entendidos como las reflexiones que son la parte fundamental en la construcción del conocimiento, así como las prácticas asociadas.

Nuestra reflexión parte de considerar las aportaciones de los trabajos clásicos de cálculo, pero también otros textos que han intervenido en la constitución del cálculo. Para la historia de las matemáticas, algunos estudios que no se consideran "obras eruditas" han pasado olvidados durante años, y son juzgados por la comunidad como materiales de segunda. Consideremos por principio que, en general, no ha existido una sensibilidad para aceptar que la obra matemática no es de unas cuantas personas, sino del sistema cultural, y que los conocimientos se difunden y heredan. Hay procesos de difusión del saber que, si bien no son explícitos, pueden predecirse debido a la característica social que tiene el conocimiento.

Las obras de L'Hospital y Agnesi, poco conocidas (algunas veces brevemente citadas en la historia) están inmersas en un momento de suma importancia. Poco después de haberse publicado los primeros trabajos de Leibniz en 1684 y 1686, y de Newton en 1687, referentes al nuevo cálculo, el ambiente erudito –un tanto tenso– manifestaba preguntas sobre la legitimidad de ese saber al cuestionar los fundamentos, sobre todo respecto a los infinitesimales. L'Hospital, quien mantuvo cierta relación y cercanía con Bernoulli, escribió en 1696 su Analyse des infiniment petits, tratado de cálculo diferencial que representa el primer libro editado específicamente para fines de divulgación. María Agnesi, por su parte, redactó en 1748 Institutioni Analitiche, volumen que incluía un tratado de cálculo diferencial.

Es posible distinguir una demarcación entre los trabajos de Agnesi y L'Hospital respecto a los de Newton y Leibniz, tomando en cuenta su intencionalidad e inevitable cambio de referente epistemológico. En este sentido, nuestro estudio también incorpora una reflexión teórica, al analizar la naturaleza epistemológica de los conceptos matemáticos que aparecen en los libros de L'Hospital y

Agnesi –pensados con fines didácticos–, de manera que se pueda precisar la existencia de una base de significaciones sobre tales nociones que haya determinado alguna reorientación en las ideas matemáticas eruditas de siglos posteriores. Se busca, así, hacer un estudio transversal y vertical basándonos en la socioepistemología como fundamento teórico y que, además, permita determinar los principios fenomenológicos que caracterizaron a los trabajos de la época, referentes a L'Hospital y Agnesi.

JUSTIFICACIÓN

Los productos de investigación de la matemática educativa pretenden incidir positivamente en la marcha del sistema didáctico, al proponer condiciones para un funcionamiento óptimo de quienes lo componen en una relación dinámica (profesor, estudiante y saber). Sin embargo, no se reducen a proponer e implantar "formas alternativas para una mejor enseñanza", como otras tradiciones teóricas asumen, sino que considera como objeto de estudio a los procesos escolares de construcción, transmisión y adquisición de contenidos matemáticos en el contexto del salón de clase. Así, es posible que atiendan a varios aspectos que subyacen en la complejidad de las ideas y los procesos de las matemáticas.

La matemática educativa, al propugnar por una investigación basada en el análisis sistémico de las regularidades didácticas y de los fenómenos de aprendizaje en general, da lugar a estrategias y fundamentos para afrontar situaciones de enseñanza-aprendizaje, a fin de mejorar sus prácticas, sugerir métodos y enfoques u organizar contenidos escolares. Dicho ejercicio se ha visto apoyado por tres factores: el interés de los matemáticos por involucrarse en asuntos referidos a la enseñanza y el aprendizaje, la formación de comunidades de investigación en el seno de grupos con paradigma propio, y la labor de difusión a través de revistas especializadas y publicación de trabajos, constituyendo lazos entre la investigación y la realidad del aula.

En el nivel superior, los trabajos que abordan tal vertiente se han centrado en el estudio de problemáticas relacionadas con la matemática de ese grado educativo, olvidando al sistema didáctico en su conjunto y obviando la explicación del fenómeno educativo desde la perspectiva social (y, en consecuencia, las referidas a la construcción social del conocimiento). Lo anterior se traduce en limitaciones de esos productos de investigación, pues dan un muestrario de dificultades que tienen los estudiantes sobre nociones vistas en clase, sin analizar, por ejemplo, el vínculo de los conceptos matemáticos con las prácticas sociales y culturales, así como el conjunto de significados y sentidos que se les otorgan en la cotidianidad de los estudiantes (Cantoral, 1998a).

En el caso de los estudios concernientes al cálculo, Cantoral asevera que una gran mayoría se ubica en la exploración de nociones matemáticas, exponiéndose los problemas de aprehensión generados por una complejidad intrínseca que tienen los conceptos estudiados. Entre algunas investigaciones que reporta, están los acercamientos estadísticos de Anderson y Orton donde se muestra una relación de problemas detectados con sugerencias didácticas, apoyadas con materiales diversos en clase, a fin de lograr la apropiación de las ideas. Basándose en la dicotomía imagen del concepto-definición del concepto, Vinner y Tall explican algunas problemáticas de aprendizaje, al referirse a la conducta que manifiestan los estudiantes en relación con la imagen del concepto. Thompson realiza una elucidación más amplia con sus categorías de análisis, proceso y objeto, sustentadas en la aproximación teórica de Piaget.

Cornu y Sierpinska, por su parte, hablan de las dificultades que muestran los estudiantes en términos de obstáculos epistemológicos, intentando "equipararlas" con las reportadas en la historia del desarrollo conceptual de la matemática. De tal manera, sus trabajos ofrecen listas de obstáculos epistemológicos que afrontan los alumnos al estudiar algunos conceptos, hallazgos que han podido ser utilizados como referencia, pues anticipan algunos comportamientos de los estudiantes durante situaciones de aprendizaje.

Desde la perspectiva que ofrece una visión incluyente, sensible al reconocimiento de que el conocimiento es una construcción social, los acercamientos socioculturales dirigen sus esfuerzos a revelar la naturaleza epistemológica del saber, mediante un análisis de las circunstancias sociales y culturales que han permitido su consolidación; asimismo, identifica situaciones que contribuyeron al desarrollo conceptual de la ciencia. No se trata de investigación histórica, aunque se sirve de ella, sino hay la intención de aprehender y precisar el origen del conocimiento, en términos de advertir los usos sociales que se le asocian desde su misma génesis, los sentidos y significados de los conceptos, evolución y desarrollo, al igual que su incursión en las instituciones educativas. Así, es posible utilizar estos hallazgos para el diseño de situaciones donde el saber se presente desde su propia epistemología.

MARCO TEÓRICO

En sentido tradicional, la transposición didáctica explica el tránsito del saber sabio al susceptible de ser enseñado, o con un carácter didáctico (Chevallard, 1991). Estas clases de conocimiento se distinguen por su naturaleza: el saber enseñable se encuentra alejado de la epistemología del sabio, y en razón de que sus orígenes parecen estar sepultados, da la impresión de no pertenecer a ningún tiempo y no es legitimado por nadie, excepto por el profesor que imparte clase.

Si bien ambos tipos de saber están íntimamente relacionados, son distintos y no podrían aceptarse como isomorfos. Bajo tal premisa, los libros manejan conocimientos de distinta índole y no pueden ser catalogados en un mismo estatus, ya que responden a intereses de difusión diferentes. El interés de nuestro estudio, cifrado en esta distinción, señala dos niveles para la difusión del saber: el erudito, generado dentro de un ambiente científico, y pensado para fines didácticos, que se incrusta en una textura social.

El saber erudito proviene del trabajo intelectual de una elite científica. Aun encarnado en algún autor, mantiene una riqueza conceptual compuesta de problemas, situaciones y significados que se reduce gradualmente cuando es compartido a una comunidad científica en un primer proceso de transposición, al requerirse para ello un cierto grado de despersonalización. Asimismo, conserva una naturaleza propia del ámbito erudito donde fue creado, ya que no responde a intereses o preocupaciones generalizadas dentro de la sociedad, sino pertenece a un grupo y nace de sus prácticas y sus necesidades.

Un objeto que emerge del saber sabio sólo puede llegar a tener existencia como tal dentro de su propio ámbito, cuando su inserción a la ciencia lo hace como útil; su trascendencia social deviene en el momento en que responde a ciertas prácticas sociales y constituye un medio eficaz para resolver problemas de otras esferas.

La investigación socioepistemológica (Cantoral & Farfán, 1998) reconoce ese hecho; no obstante, busca otorgar un estatus de constructor de conocimiento matemático al sistema social y a sus actores –que no necesariamente pertenecen a la élite erudita–, admitiendo sus prácticas cotidianas y el saber que de ellas se deriva, como el de las etnias , el producido por sociedades que son sometidos mental o físicamente, el que desarrollan grupos sociales específicos (obreros, campesinos, comerciantes, políticos, etc.), e incluso aquel que constituyen los educadores, a través de pedagogías o libros para la enseñanza de una determinada área.

Todo este conocimiento, al no ser visto con el mismo estatus que el de carácter científico, se halla olvidado o menospreciado debido a sus raíces epistemológicas; sin embargo, tiene una realidad objetiva y mantiene una influencia, más o menos explícita, sobre el sistema social en que está incrustado. Al integrarlo al saber enseñable es posible, por una parte, respetar la diversidad cultural de los pueblos, por otra, desarrollar situaciones de aprendizaje mejor adaptadas a sus condiciones.

Se tiene, así, una caracterización de la fluencia del saber. El erudito, que deviene en enseñable, ambos ejercen una notable influencia sobre el conocimiento erudito, al reclamar, por ejemplo, el fundamento teórico de un saber, no a través de la mediación de la noosfera que refiere Chevallard cuando explica el proceso de transposición del saber erudito al escolar, sino por el sistema social, que otorga al conocimiento un estatus y un reconocimiento a través de su uso generalizado.

La dignificación del saber sociocultural por la que aboga la socioepistemología exhibe la posibilidad de una relación entre el saber sabio y el surgido de la textura social (Figura 1), a través de la identificación de lazos de filiación y demostrar que no son plenamente autónomos; es decir, hay una base social de significados, creencias o costumbres colectivas (Durkheim, 1895) que ejerce coacción. Si bien la transposición didáctica explica cómo el saber erudito deviene en uno de carácter didáctico, una de las preguntas que aborda este trabajo consiste en determinar los mecanismos por los cuales ocurre un proceso inverso: si un saber que emerja de la textura social pueda afectar al conocimiento erudito.

Tal inquietud se sustenta en las explicaciones de Durkheim sobre los fenómenos sociales

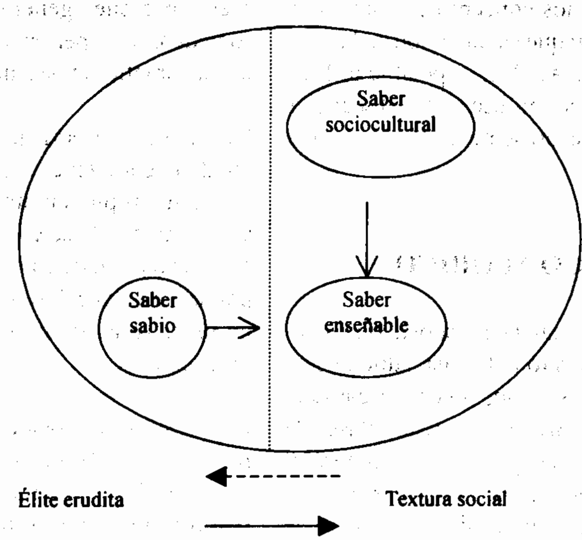


Figura 1

(Timasheff, 1955), que pueden ser de dos tipos: los aspectos colectivos de creencias y los aspectos colectivos de prácticas de grupo. El primero se centra en reconocer una base de valores colectivos que concede más o menos importancia al saber, de acuerdo con sus normas y paradigmas, respecto a lo que es o debe ser ciencia; por ejemplo, en la Edad Media las universidades tenían un programa de estudio que incluía a la filosofía griega y, bajo ciertos argumentos, se le concedía un alto valor para la formación de los estudiantes; esto no se da en las instituciones del XIX, o en el hecho de reconocer que la sociedad ha aceptado como útil el conocimiento científico (Cantoral, 2000). El segundo fenómeno considera que existen necesidades humanas de supervivencia y, a través de la ingeniería y otras actividades, se produce un conocimiento que casi siempre es heredado a las futuras generaciones. Dichas situaciones son intrínsecas a cualquier tipo de organización social, y su importancia trasciende hacia todo el sistema social, incluyendo a la élite erudita.

La construcción de la matemática responde a ciertos intereses o preocupaciones, ya sea eruditos o socioculturales, pero no se crea con el propósito expreso de ser enseñable, al grado de que no tendría sentido un conocimiento de tal naturaleza. De ahí que la disposición del saber para la transmisión o incorporación a un sistema de enseñanza no sea del todo transparente; es un imbricado proceso donde los conceptos sufren un conjunto de transformaciones adaptativas (Chevallard, 1985) que desemboca en la formulación de un saber dispuesto a ser enseñado, al cual se le agregan otras nociones para que logre consistencia. A estas nociones Chevallard las define como paramatemáticas y protomatemáticas.

Así, el proceso de transposición didáctica es cultural, puesto que las formas como se ajusta un saber a un escenario didáctico responden a variables de tipo social (desarrollo tecnológico, descubrimientos geográficos o política económica de un país), y en él también participan los elementos para la transposición, según la terminología de Chevallard. Uno de ellos es la desincretización, donde las explicaciones o el uso de ciertos símbolos o instrumentos mediante los cuales el saber se asocia con una cultura de cierta época le son desprovistos cuando se modifica su escenario sociocultural inicial. Ello da como resultado un saber que parece no pertenecer a ningún momento de la historia de la humanidad; es atemporal y acultural porque no contiene elementos que pudieran concederle una raíz o base de significados sociales.

La despersonalización, en un nivel distinto al que tiene cuando un nuevo conocimiento matemático se construye y difunde, explica la forma en que un saber es disociado de las problemáticas originales que le daban sentido y razón (o, quizá, necesidad) de ser. Entonces, el saber transpuesto no muestra su génesis epistemológica y su naturaleza queda reducida a definiciones, lemas y teoremas que sólo presentan un concepto finamente construido, sin permitir recrear los conflictos, conjeturas e interpretaciones originales que le dieron los primeros significados. Chevallard apunta que la textualización es una forma de despersonalización; los libros de texto desproveen de situaciones asociadas con el saber original. Citemos el caso de dos tipos de libros de texto: para quienes se interesaron por difundir las ideas del cálculo, las obras antiguas intentaban esclarecer aquellas tesis oscuras mediante un tratamiento más homogéneo y con un simbolismo unificado, a diferencia de los tratados originales, que resultaban ser sumamente complicados, mientras que los contemporáneos presentan con pulcritud y rigor matemático ejemplos, definiciones, teoremas, una extensa lista de problemas de aplicación y, en ocasiones, ejercicios. Esto pone en evidencia dos formas distintas del sentido de la textualización, aunque es preciso reconocer que se trata de dos diferentes niveles de difusión del saber.

Los libros de texto posibilitan, además, el control social de los aprendizajes, ya que al tener un reconocimiento social y cultural importante funcionan como una autoridad moral con un estatus de verdad en cuanto al contenido que tratan y a la forma como plantean problemas o aplican conceptos, de tal forma que, implícitamente, autorizan el uso de una didáctica sustentada a partir de los principios sobre los que se fundamenta el libro, filosófica o psicológicamente, o bien atendiendo a la forma en que se presentan sus contenidos, lo cual lleva a creencias muy generalizadas acerca de que el aprendizaje es isomorfo en relación con el orden de exposición del saber (Chevallard, 1985).

Otro de los requisitos para la transposición didáctica, de acuerdo con Chevallard, es el relativo a la programabilidad de la adquisición del saber, pues el conocimiento es recortado de su tamaño original a fin de adaptarlo, más o menos prolíficamente, a un tiempo escolar, haciéndolo también coherente con su nueva estructura en los tiempos estimados.

Sin embargo en muchas ocasiones el sistema educativo es moldeado por buenas voluntades humanas, al buscar una óptima organización del saber para su presentación en el salón de clase, se apoya en criterios que proceden de la psicología, la pedagogía, las teorías de aprendizaje, o de la intuición basada en la tecnología, entre otras disciplinas. Desde el punto de vista de la didáctica de las matemáticas, algunos de estos acercamientos, procedentes de supuestos o de la fe, no tienen un sustento que les permita asegurar que su exposición de contenidos reditúe en un mejor logro del aprendizaje. La transposición didáctica se convierte, entonces, en una guía cuando se hace uso de la epistemología para dotar de significados al saber que dispuesto a ser enseñado. Chevallard concede otras virtudes a la transposición didáctica: 1) como herramienta que permite recapacitar, es decir, tomar conciencia de la naturaleza del saber y de su significado primero, así como de los que adquirió en el momento de su introducción al sistema escolar; 2) como argumento de distancia, al distinguir la disparidad entre el saber erudito y el escolar, reconociendo sus enfoques y significados; 3) como recurso legitimador. El saber que aparece con el título de "escolar" posee por sí mismo una validez, por la raíz epistemológica de la cual procede y por la compatibilidad necesaria (fruto de transposiciones didácticas), para ser adaptado a su entorno didáctico; así, hablar de la génesis de un saber escolarizado como tal –sus filiaciones, rupturas o reformulaciones– resulta un ámbito, pues el saber escolar se constituye como un objeto cerrado y se legitima desde la propia escuela cuando aparece incrustado en un currículo y avalado por un proyecto que lo justifica. Incluso Chevallard explica que el profesor se enfrenta a sus estudiantes diciendo "pueden creerme" ante la ausencia de argumentos para legitimar el saber.

En conjunto, a través de la transposición didáctica se puede ejercer una vigilancia epistemológica sobre el conocimiento escolar: entre más se conoce la naturaleza de las cosas, tantas más posibilidades se tienen de utilizarla eficazmente. Bajo tal supuesto, esta metodología percibe la identidad del conocimiento, su fin y los significados que la didáctica ha olvidado; recupera explicaciones que no habían sido tomadas en cuenta; dota de significados a los conceptos; repersonaliza el saber; resignificar nociones, además de que puede rescatar aspectos para la preparación didáctica del saber.

Por ejemplo, cuando el saber envejece y se percibe que se ha vuelto obsoleto e incluso está en desacuerdo con la sociedad, es necesario llevar a cabo un proceso de reinstauración del conocimiento escolar a través de un análisis del saber sabio; de esta manera, se logrará nuevamente una compatibilidad entre el sistema de enseñanza y su entorno. O bien, cuando el saber parece estático y los estudiantes ya no lo asimilan con la frescura que otras generaciones lo hicieran, el análisis científico del proceso de transposición, basado en un estudio epistemológico, evita caer en la visión simplista de borrar y suprimir contenidos para subsanar las fallas al sistema educativo.

METODOLOGÍA

Enmarcado en el acercamiento socioepistemológico, Pensamiento y Lenguaje Variacional es un programa de investigación que se interesa por estudiar los fenómenos relativos a la enseñanza, aprendizaje y comunicación del saber matemático propio de la variación y el cambio en la situación escolar, y en referencia al medio social que le cobija (Cantoral & Farfán, 1998). Los conceptos matemáticos adquieren un significado en el seno de determinado grupo social; son productos culturales, legitimados a partir de las prácticas humanas y de su relación con otros dominios científicos, de ahí que resulte importante describir y caracterizar los escenarios donde los estudiantes aprenden matemáticas, en un intento por entender los fenómenos de socialización del conocimiento en el salón de clase.

El análisis desde una postura sociocultural requiere de una aproximación sistémica robusta que incorpore argumentos para el estudio de la construcción social del conocimiento, atendiendo a la epistemología, a los planos cognitivo y didáctico, así como a la dimensión sociocultural; dicho proceder, en conjunto, no se entiende como una compartamentalización, sino como una entidad metodológica que se articula a partir de argumentos de índole sociocultural. Así, el estudio epistemológico incorpora explicaciones sociales respecto a la construcción del conocimiento: el cognitivo considera los procesos del pensamiento como base de las explicaciones de las funciones mentales; la didáctica se muestra en estrecha relación con el escenario sociocultural y las prácticas humanas asociadas con la construcción del conocimiento, mientras que la sociocultural eventualmente participa como integradora de las demás.

Por su propia naturaleza, la dimensión sociocultural es quizá una componente de transición que habría de desaparecer una vez que las anteriores reformulen sus propias preguntas, atendiendo a variables de tipo sociocultural. El acercamiento socioepistemológico, como lo ha llamado Cantoral (1998a), cobija a una epistemología que no se reduce a una eventual clasificación de obstáculos, sino se encamina, por una parte, a proporcionar una base de significados a los conceptos matemáticos mediante el análisis del origen social del conocimiento, en términos de determinar su naturaleza dentro de un sistema sociocultural, es decir, atender a aquellas preguntas fundamentales (ya sean de carácter empírico o racional) que permitieron el surgimiento de un conocimiento y su eventual desarrollo.

Tal metodología, que rescata una base de significados primarios de los conceptos matemáticos, se basa en estudios de tipo sociológico, intentado, a través de sus planteamientos, descubrir la dinámica de las relaciones sociales en torno a un conocimiento para tratar de esclarecer los mecanismos por los cuales se constituye, como los criterios de validez o los paradigmas que controlaron las opiniones en cuanto a la consistencia lógica de ese saber. Dicho proceso no está controlado por voluntades humanas individuales, dado que es intrínseco al sistema social, y aunque los individuos forman parte de él, son estos paradigmas y criterios socialmente aceptados (a veces no explícitamente) los que moldean la forma de pensar. A la distancia en el tiempo, es posible determinar que este tipo de fenómenos tiene una realidad objetiva, un poder coercitivo y una difusión generalizada sobre los individuos. A tales prácticas colectivas de grupo Durkheim las caracterizó como hechos sociales, incluyendo a las instituciones que favorecen el desarrollo de creencias o modos de conducta que, al igual que los paradigmas, tienen existencia externa al individuo y lo coaccionan.

Esta epistemología también contribuye a formular explicaciones sobre la vida del conocimiento erudito, y su eventual introducción a un sistema de difusión o enseñanza dentro de un ámbito social. Apoyándonos en la transposición didáctica, el análisis intenta ampliar las explicaciones sobre la naturaleza social del conocimiento y aporta al estudio los procesos mediante los cuales un conocimiento erudito se incorpora, a través de reformulaciones, a la enseñanza.

PRINCIPAL HIPÓTESIS DEL TRABAJO

Es importante reconocer que aunque L'Hospital y Agnesi realizaron un trabajo en referencia a otros, sus obras no son simples reducciones del saber original del Cálculo, sino complejos ajustes didácticos que, evidentemente, deben diferir de los originales en virtud de su intencionalidad por llevar el saber erudito a otro ámbito. Dicho punto nos conduce a la tesis central sobre la que se basa este trabajo: primero, que el cálculo no es una colección de verdades estructuradas por una lógica erudita, sino un sistema dinámico conformado por transposiciones que determinan significados sucesivos, dado que los conceptos matemáticos no se definen de una vez y para siempre. Ello posibilita creer que los trabajos de Agnesi y L'Hospital generaron repercusiones a un nivel teórico-conceptual sobre la actividad matemática posterior; de tal forma, nuestra investigación se centra en determinar si las contribuciones de Agnesi y L'Hospital, que conducen a una transposición en un cierto sentido inversa a la convencional, al considerar al cálculo como un sistema organizado, despersonalizado y descontextualizado de su origen, constituyen una fuente referencial de conocimiento, adicional a los trabajos de Newton y Leibniz, para ser incorporada a otros estudios teóricos de matemáticos de siglos posteriores.

Probar esta hipótesis lleva a confirmar el papel que juega el sistema cultural como variable dentro del proceso de selección y organización de conocimiento, y concederle un estatus dentro de la construcción conceptual del cálculo y de las ciencias en general. Sin embargo, cabe hacer la siguiente distinción: las obras de L'Hospital y Agnesi tienen un estatus distinto a las de Newton y Leibniz debido a su naturaleza epistemológica; así, llamaremos a las primeras libros de cálculo antiguo, y a las segundos libros originales de cálculo. Conviene reconocerlas y ofrecerles una apreciación diferente, sin catalogar su importancia por la condición que poseen.

La actividad matemática, de hecho, no está separada del sistema cultural; se admite que la producción científica corresponde a una práctica humana. Entonces, los avances matemáticos se encuentran asociados con la dinámica del sistema cultural, que participa como variable en el proceso de formulación del conocimiento. Los trabajos de L'Hospital y Agnesi constatan esto, pues se conciben como obras de difusión que hagan accesible el conocimiento del cálculo a un número mayor de personas.

PRINCIPALES RESULTADOS

Los tratados de L'Hospital (1696) y Agnesi (1748) constituyen los primeros concebidos, específicamente para la difusión del Cálculo, por lo cual su tratamiento del saber, como ya hemos señalado, trata de ser didáctico y claro, incluyendo además ejemplos, problemas y amplias explicaciones, de tal forma que un lector no necesariamente experto en la materia podría acercarse sin problema a ellos.

Una parte importante de los textos que hemos citado se refiere a las caracterizaciones de los conceptos, a la preocupación de Agnesi y L'Hospital por no restringir los conceptos a una definición formal, en su intento por acercar las nociones a situaciones ya conocidas, como la representación de curvas geométricas, o conocimientos previos, como las nociones procedentes del mundo sensible (concavidad y convexidad).

Las dos obras, que distan entre sí 52 años, tienen semejanza en el manejo del conocimiento, pero también demarcan interesantes cambios. Habría que considerar que L'Hospital vivió un periodo de conformación del cálculo aún más difícil; medio siglo después, el cálculo había tomado ya un papel en el escenario matemático, e incluso la historia registra la publicación de otra obra de cálculo de difusión, aunque de menor importancia: Analiza demontre, del italiano Rampinelli.

Agnesi tuvo la virtud de no sólo recoger el saber desarrollado por la escuela leibniziana, sino también el generado por Newton, lo cual se aprecia al concebir en su obra una dinámica en la concepción de las curvas, y cuando argumenta siempre está pensando en el dibujo que hace un punto al moverse o en la fluxión de una ordenada para devenir en otra.

Estas dos versiones muestran la vida de un saber dispuesto para la difusión, sus eventuales transformaciones y nuevas caracterizaciones. Nuestra atención a ellas, se debe, entre otras cosas al reconocimiento social que tuvieron, tal es el caso del libro de Agnesi el cual fue reconocido por la Académie des Sciences como un trabajo de importancia y trascendencia, un título que merece ser considerado por cualquiera que desee incursionar en el estudio del cálculo.

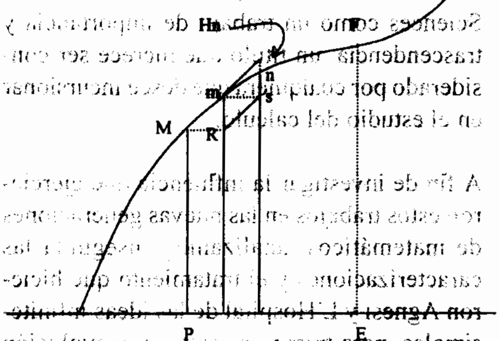
A fin de investigar la influencia que ejercieron estos trabajos en las nuevas generaciones de matemáticos, analizamos enseguida las caracterizaciones y el tratamiento que hicieron Agnesi y L'Hospital de las ideas infinitesimales, para trazar una ruta en la evolución de los conceptos: cómo el saber erudito devino en uno destinado a la difusión, y la manera en que éste permitió una evolución conceptual hacia teorías analíticas del cálculo propias de un ámbito erudito.

CARACTERIZACIÓN DEL PUNTO DE INFLEXIÓN

Las caracterizaciones de Agnesi y L'Hospital son de dos tipos. Las geométricas, que usan argumentos geométricos como magnitud, y las analíticas, que atienden a las propiedades infinitesimales que exhiben. Agnesi realiza más caracterizaciones del punto de inflexión, aunque algunas tienen mucha cercanía con las que mostró L'Hospital. La presentación de las ideas de L'Hospital se hacen en el recuadro de la izquierda, y las de Agnesi en el de la derecha (Figuras 2 y 3).

Un rasgo de los libros analizados es su carácter geométrico, que prevalece en las presentaciones y argumentaciones; incluso los títulos de los capítulos evocan el uso del cálculo como un instrumento para resolver ciertas problemáticas ya conocidas por la geometría. Algunas caracterizaciones de los conceptos del cálculo tienen fundamento geométrico,

Propiedad infinitesimal



Si los segmentos, Rm y Sn fueran iguales, entonces su diferencia, Hn=d^2y, sería nula. En la curva se observa que a medida que se obtienen segundas diferencias a ordenadas más cercanas al punto de inflexión, éstas van tendiendo a cero.

Respecto a su forma

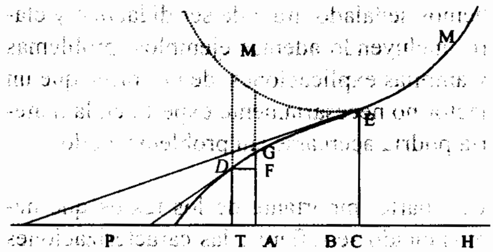
Definition II

Lors qu'une ligne courbe AFK est en partie concave & en partie convexe vers une ligne droite AB ou vers un point fixe B, le point F qui sépare la partie concave de la convexe, & qui par conséquent est la fin de l'une & le commencement de l'autre, est appellé point d'infléxion.

(página 59)

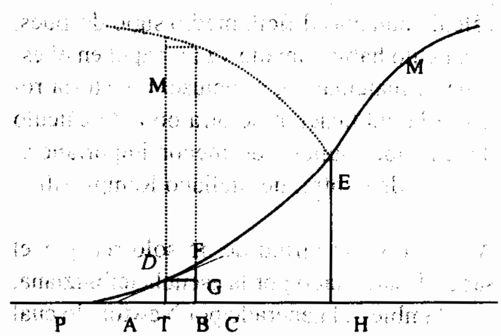
Propiedad infinitesimal

Caso A (mínimas diferencias)



El punto de inflexión determina un punto donde las diferencias después de venir decreciendo ahora empiezan a crecer. En este punto la *dy* será mínima, por lo cual *ddy* = 0, o bien *ddy* = ∞.

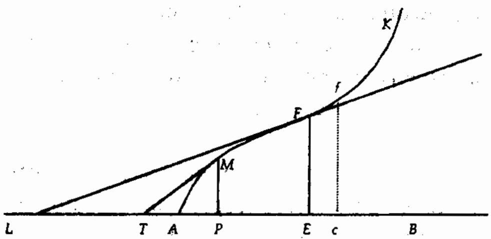
Caso B máximas diferencias



Las diferencias crecen hasta el punto E, llamado punto de curvatura contraria o de regreso, después del cual decrecen, por lo que el punto *dy* determina un máximo.

Figura 2

Referente a la subtangente



En su modelo, explica que cuando AP crezca continuamente, AT lo hará también, hasta que P llegue a caer en E, después del cual AT irá disminuyendo. Esto supone que el punto L es un punto "extremo" o máximo de la subtangente en el momento en que P cae sobre E.

Signo de las segundas diferencias

Cuando la curva es primero cóncava, entonces la segunda diferencia será negativa hasta el punto de inflexión contrario; si la curva primero es convexa, entonces las segundas diferencias serán positivas hasta antes del punto de inflexión.

Cambio de signo en la segunda diferencia

El punto de inflexión se determina cuando su segunda diferencia cambia de positiva a negativa o de negativa a positiva

Respecto a su forma

Cuando una curva es primero convexa y después cóncava, el punto que determina el cambio representa el punto de flexión contraria.

Referente a la subtangente

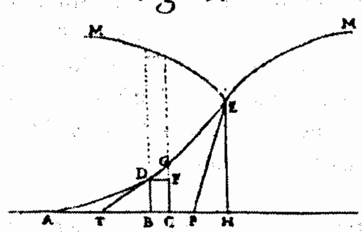
Dada una curva AEM, primero cóncava y después convexa, se determina en el punto D la recta DT y en el punto E la recta EP. Cuando la abscisa AB crezca continuamente y B caiga en H, entonces AT (la subtangente) habrá crecido; E determina en el punto de inflexión, a lo cual AT dejará de crecer y, pasando el punto, irá decreciendo, determinando así la relación

$$AP = \frac{ydx}{dy} - x.$$

Al diferenciar y tomar dx constante, tenemos

$$\frac{dy^2dx - ydxddy - dy^2dx}{dy^2},$$

Fig. 65.



al igualarlo a cero o a infinito, dividiendo por $-ydx$ y multiplicando por $-dy^2$, obtendremos $ddy = 0$, o bien $ddy = \infty$.

(Agnesi: 1748. Figura de Tom. II, Lib. II, TXII)

Figura 3

por lo cual no se requiere disponer de mayores argumentos que algunas nociones de la geometría; de hecho, hemos de recordar que la propia Agnesi explicó que el uso de la geometría dentro de su obra proporcionaba sencillez al estudio de las nociones del cálculo.

La exposición de los contenidos no parece ser aleatoria. Tanto Agnesi como L'Hospital se ocuparon por presentar el saber matemático en forma lógica, es decir, atendiendo a una evolución y de una manera gradual, primero por las caracterizaciones, la formulación de definiciones, la presentación de ejemplos y, en el caso de Agnesi, algunos problemas resueltos. Así, las obras tienen autonomía propia y no dependen de otros tratados o artículos.

La inclusión de ejemplos en cada capítulo intenta ilustrar al lector. No se trata sólo de ejercicios resueltos; en nuestra opinión, tienen un fin más profundo: distinguir la naturaleza de la obra respecto a la de otros trabajos, como los de carácter erudito. Sistemáticamente, L'Hospital y Agnesi incorporaron ejemplos con la intención de ampliar las explicaciones.

Respecto al papel que desempeñaron estos libros, hemos identificado, en principio, la importancia que tienen al abordar y aclarar ideas del oscuro cálculo, como Bos señala. L'Hospital vino a aclarar ideas y a organizarlas, y fue un medio importante para quien quisiera acercarse a las ideas del cálculo. Como dijimos, Agnesi apareció en la escena medio siglo después que L'Hospital, con un tratado que resultó ser de gran impacto, notable profundidad y orden, al grado que la Academia de Ciencias de París lo reconociera como la mejor obra de cuantas se habían escrito hasta ese entonces.

Admitimos que estas obras sirvieron para fines de difusión, ya que la restringida edición de textos eruditos limitaba enormemente las posibilidades para que las personas del ámbito no académico se acercaran a la producción de los intelectuales. Por tal motivo, tuvieron el mérito de hacer asequible el saber, desprenderlo de la élite erudita y ponerlo al alcance de más personas.

En otro sentido, la producción de L'Hospital y Agnesi fue referencia inmediata para quienes quisieron acercarse al estudio del cálculo en un nivel inicial. Bos (1974) habla acerca de las propiedades didácticas de la obra de L'Hospital; debido a que las notas de Leibniz eran poco claras, este nuevo trabajo vino a dar luz a las nuevas ideas. Por su parte, el libro de Agnesi, que no necesitó de mayores referencias que las que la Academia de Ciencias le otorgara, gozó de reconocimiento y de amplia aceptación, por lo cual su lectura fue indispensable para quien se quisiera acercarse a hacer teoría erudita.

En nuestra búsqueda de una base de significaciones para los conceptos del cálculo, encontramos que algunos han desaparecido del escenario, como la caracterización del punto de inflexión a través de la subtangente máxima; sin embargo, otros continúan vivos en los libros de textos contemporáneos. Citemos los siguientes:

a) La caracterización del punto de inflexión a través de argumentos geométricos. L'Hospital y Agnesi llamaron al punto de inflexión como el lugar geométrico donde ocurre un cambio de concavidad.

b) La caracterización del punto de inflexión a partir de observar el signo de las segundas diferencias. Agnesi observó la propiedad que guardan las segundas diferencias en un intervalo que contiene al punto de inflexión; cuando éstas modifican su signo, es porque la curva geométrica contiene un cambio de cóncava a convexa, o viceversa, por lo que el sitio donde se tiene cero de la segunda diferencia es el punto inflexión en la curva.

c) La caracterización del punto de inflexión analíticamente, donde se cumple que la segunda diferencia es igual a cero.

Al considerar la estructura y organización de las obras de L'Hospital y Agnesi, pensadas y escritas en forma clara, así como tomando en cuenta las caracterizaciones de los conceptos, y que algunas todavía se hallan en los actuales libros de texto, concluimos que el desarrollo del cálculo no se dio de forma lineal dentro de una élite erudita. Para constituir una base de significados del cálculo, se requirió del cuidado en la organización, caracterización y argumentación desde distintos planos, incluyendo las ideas que aportaron los autores de obras de difusión, a quienes se debe un grado de originalidad.

Para términos teóricos de esta investigación, consideramos a este fenómeno como una transposición didáctica en forma inversa, ya que el saber que organizado y reformulado dentro de un ambiente no erudito sirvió de base para el desarrollo teórico de orden formal del cálculo. Así, hemos determinado un puente que parte de la academia erudita, deviene en el saber dispuesto para la difusión, y nuevamente ejerce algún tipo de influencia sobre la gente del ámbito erudito de años posteriores, preocupada por otorgar al cálculo un fundamento teórico.

Por supuesto, no negamos un tránsito directo de las obras clásicas a los trabajos eruditos de fundamentación. Tal flujo, en sentido inverso de la transposición didáctica, no responde a los mecanismos de control que ejerce la noosfera; se determina por otras variables totalmente independientes como los reclamos de la sociedad, que conforma a través de sus individuos un estatus y determinado valor al conocimiento, por lo que el ámbito erudito reconoce, valida y crea la necesidad de dotar de sustento a un saber ampliamente usado.

BIBLIOGRAFÍA

Agnesi, María (1748). *Institutioni Analiliche*.

Albert, A. (1998). Introducción a la epistemología. En Farfán (Coord. Edit), *Antologías, número II* (pp. 1-28). México: Cinvestav-IPN (programa editorial, área de Educación Superior, Departamento de Matemática Educativa).

Albert, A. (1996). *La convergencia de series en el nivel superior. Un acercamiento sistémico.* Tesis de doctorado, Cinvestav-IPN, México.

Artigue, M. (1998). Épistémologie et didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 2 (3), 241-286.

Artigue, M. (1995). Ingeniería didáctica. En Gómez, P. (Ed.), *Ingeniería didáctica en educación matemática.* (pp. 33-59). Santafé de Bogotá, Colombia: Grupo Editorial Iberoamérica.

Bachelard, G. (1981). *La formación del espíritu científico* (9a, edición). México: Siglo XXI Editores.

Berkeley, G. (1980). *Principios del conocimiento humano.* Buenos Aires, Argentina: Aguilar Argentina, SA.

Bos, H. J. M. (1974). Differentials, higher-order differentials and the derivative in the Leibnizian calculus. *Arch. His. Exact. Sci.* 14, 1-90.

Brousseau, G. (1983). Les obtacles épistémologiques et les problémes en mathematiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 4 (2), 165-198.

Cantoral R., *et al* (2000). *Desarrollo del pensamiento matemático*. México: Trillas.

Cantoral, R. (2000). Pasado, presente y futuro de un paradigma de investigación en Matemática Educativa. En *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, Relme-13, Santo Domingo, República Dominicana* (volumen 13, pp. 54-62). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Cantoral, R. (1998a). La aproximación socioepistemológica a la investigación en matemática educativa: el caso del pensamiento y lenguaje variacional. En *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, Relme-12, Santafé de Bogotá, Colombia.* (volumen 12, tomo I, pp. 41-48). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Cantoral, R. (1998b). Enseñanza y aprendizaje en ambientes tecnológicos: el caso de la matemática escolar. En Cordero, F. (Coord. Edit), *Antologías, número III* (pp. 105-127). México: Cinvestav-IPN (Programa Editorial, Área de Educación Superior, Departamento de Matemática Educativa).

Cantoral, R. (1997a). *Pensamiento y lenguaje variacional.* México: Cinvestav-IPN (cuadernos del Seminario de Investigación del área de Educación Superior, Departamento de Matemática Educativa).

Cantoral, R. (1997b). Matemática educativa. En Farfán, R. (Coord. Edit), *Antologías, Número I* (pp. 81-98). México: Cinvestav-IPN (Programa Editorial, Área de Educación Superior, Departamento de Matemática Educativa).

Cantoral, R. (1995). Acerca de las contribuciones actuales de una didáctica de antaño: el caso de la serie de Taylor. *Mathesis* 11 (1), 55-101.

Cantoral, R. (1990). *Categorías relativas a la apropiación de una base de significados propios del pensamiento físico de la teoría elemental de las funciones analíticas*. Tesis de doctorado, Cinvestav-IPN, México.

Cantoral, R. y Farfán, R. (1998). Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis. *Épsilon* 42, 353-369.

Cantoral, R. y Farfán, R. (1997). *Historia de la Matemática* (manual para el curso de maestría). México: ITESM.

Cantoral, R, y Mirón, H. (2000). Sobre el estatus de la noción de derivada: De la epistemología de Joseph Louis Lagrange al diseño de una situación didáctica. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa* 3 (3), 265-292.

Cambray, R. y Cantoral, R. (1990). *Lecciones de cálculo antiguo*. México: Cinvestav-IPN (sección de Matemática Educativa).

Cambray, R. (1998). L'Hospital y el primer libro de texto de cálculo diferencial. En L'Hospital, *Análisis de los infinitamente pequeños para el estudio de las líneas curvas* (pp 1-14). México: UNAM (colección Mathema).

Chevallard, Y. (1991). *La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado.* Buenos Aires, Argentina: Aique Grupo Editor SA.

Chevallard, Y. (1985). *La transposition didactique.* Grenoble, France: La Pensée Sauvage.

Descartes, R. (1997). *La geometría* (traducción de García, R.). México: Limusa-IPN (colección Textos Politécnicos).

Díaz, L. (1999). *Concepciones en el aprendizaje del concepto de límite: Un estudio de caso.* Tesis de doctorado, Facultad de Educación, Universidad Católica de Chile, Chile.

Euler, L. (1835). *Introduction a l'analyse infinitesimale.* Paris, France: Chez Bachelier, Imprimeur-Libraire de l'École Polytechnique.

Farfán, R. (1998). Perspectivas y métodos de investigación en matemática educativa. En Farfán (Coord. Edit), *Antologías, Número II* (pp. 55-119). México: Cinvestav-IPN (programa editorial, área de Educación Superior, Departamento de Matemática Educativa).

Farfán, R. (1997). *Ingeniería didáctica: Un estudio de la variación y el cambio.* México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Farfán, R. (1997). Ingeniería didáctica. En Farfán (Coord. Edit) *Antologías, Número I* (pp. 63-69). México: Cinvestav-IPN (programa editorial, área de Educación Superior, Departamento de Matemática Educativa).

Farfán, R. (1993). *Construcción de la noción de convergencia en ámbitos fenomenológicos vinculados a la ingeniería: estudio de casos.* Tesis doctoral, Cinvestav-IPN, México.

Grattan-Guinness, I. (1984). *Del cálculo a la teoría de conjuntos: 1630-1910. Una Introducción histórica.* Madrid, España: Alianza Editorial.

González, R. (1998). *La derivada como una organización de las derivadas sucesivas. Estudio de la puesta en funcionamiento de una ingeniería didáctica de resignificación.* Tesis de maestría, Cinvestav-IPN, México.

Kline, M. (1985). *La pérdida de la certidumbre.* Madrid, España: Siglo XXI Editores.

L'Hospital, A. (1696). *Analyse des infiniment Petits pour L'intelligence des lignes courbes* (primera reimpresión ,1988). Paris, France, ACL-Editions.

L'Hospital, A. (1998). *Análisis de los infinitamente pequeños para el estudio de las líneas curvas* (estudio introductorio, traducción y notas de Rodrigo Cambray Núñez). México: UNAM (colección Mathema).

Protagonistas de la civilización, *Newton* (1983). Madrid, España: Debate, SA.

Pulido, R. (1997). *Un estudio teórico de la articulación del saber matemático en el discurso escolar: la transposición didáctica del diferencial en la física y la matemática escolar*. Tesis de doctorado, Cinvestav-IPN, México.

Sierpinska, A. (1984). Obstacles épistémologiques relatifs a la notion de limite. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 6, 5-67.

Struik, D. (1998). *Historia concisa de las matemáticas* (traducción de Fco. Lezama, 3a edición). México: Instituto Politécnico Nacional.

Timasheff, (1955). *La teoría sociológica.* México: Siglo XXI.

Youschkevitech, (1976). The concept of function up to the middle of the 19th century. *Arch. Hist. Exact. Sci.* 16, 37-85

Apolo Castañeda Alonso
Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del IPN
Avda. Legaria 694
Col. Irrigación, C.P. 11500, México D.F.

Tel. 57296300 ext. 67791
e-mail: apcastane@yahoo.fr
url: http://geocieties.com/apcastane