



Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa

Comité Latinoamericano de Matemática Educativa

relime@mail.cinvestav.mx

ISSN (Versión impresa): 1665-2436

MÉXICO

2002

Liliana Siñeriz

LA ENSEÑANZA DE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE REGLA Y COMPÁS.  
DEL MUNDO DE LA PURA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS A LA ESCUELA MEDIA  
ARGENTINA: ESTUDIO DE DOS CASOS

*Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, marzo, año/vol.  
5, número 001

Comité Latinoamericano de Matemática Educativa

Distrito Federal, México

pp. 79-101



## **La enseñanza de la resolución de problemas de regla y compás. Del mundo de la pura resolución de problemas a la Escuela Media Argentina: estudio de dos casos\***

Liliana Siñeriz •

### **RESUMEN**

Este trabajo indaga algunos aspectos de la enseñanza de resolución de problemas en situaciones donde se abordan construcciones geométricas de regla y compás, las cuales van dirigidas fundamentalmente al uso de métodos heurísticos. Se describe un modelo teórico que da cuenta de los diferentes elementos puestos en juego al enseñar a resolver esta clase de problemas y se detallan los pasos seguidos para su elaboración. Asimismo, se ilustra la forma en que ha sido utilizado dicho modelo para interpretar los datos obtenidos a partir de la observación de la actuación docente. Por último, se hace referencia a las aportaciones derivadas de la investigación, correspondientes a producciones teóricas, metodológicas y a conclusiones en torno a los datos empíricos.

### **ABSTRACT**

This work focuses on several aspects of training on mathematical problem solving, particularly in those cases where ruler and compasses are used for geometric constructions, and basically directed to the application of "heuristics methods". A theoretic model is described, which shows all the diferents elements that take part on this teaching process, and details of the model design is given. Furthermore, an example of data interpretation from obervations on teacher's performance is supplied in order to show the performance of the proposed model. Finally, reference to the principal contributions of this research is made, regarding theoretical and methodological issues and the outcoming results from empirical data.

### **RÉSUMÉ**

Dans ce travail l'ont recherche quelques aspects de l'enseignement sur la résolution des problèmes en situation ou l'ont aborde des problèmes en utilisant règle et compas. Les quelles sont dirigées essentiellement à l'usage des méthodes heuristiques. L'ont d'écrit un modèle théorique qui explique les différents éléments qui se mettent en jeu au moment d'enseigner à résoudre cette sorte de problèmes et l'ont détaille les pas à suivre pour son élaboration. De même l'ont illustre la forme que l'ont a utilisé en ce modèle pour interpréter les données

\* Este artículo es un resumen de Siñeriz, L. (2000). *La enseñanza de la resolución de problemas de regla y compás. Del mundo de la pura resolución de problemas a la escuela Media Argentina: estudio de dos casos*. Tesis de doctorado. Universidad de Valencia. España.

• Centro Regional Universitario Bariloche, Universidad Nacional del Comahue Río Negro. Argentina.

obtenues a partir de l'observation de l'actuation de l'enseignement. Finalement l'ont fait référence aux apports qui dérivent de l'investigation qui correspond aux productions théoriques, méthodologiques et aux conclusions qui proviennent des renseignements empiriques.

## RESUMO

Neste trabalho indagam-se alguns aspectos do ensino de resolução de problemas em situações onde são abordados problemas de regra e compasso, os que estão dirigidos fundamentalmente ao uso de "métodos heurísticos". Descreve-se um modelo teórico que desenvolve os diferentes elementos que interagem ao ensinar a resolver esta classe de problemas e se detalham os passos seguidos para sua elaboração. Ainda assim, ilustra-se a maneira em que foi utilizado esse modelo para a interpretação dos dados obtidos a partir da observação da atuação docente. Por último, faz-se referência às contribuições resultantes da pesquisa, correspondentes a produções teóricas, metodológicas e a conclusões derivadas dos dados empíricos.

## INTRODUCCIÓN

Desde las últimas décadas, diferentes sectores implicados en los sistemas educativos insisten en la necesidad de dar un énfasis particular a la resolución de problemas, tanto al diseñar el currículum como al organizar las actividades para los alumnos.

Así, distintas formulaciones referentes a los fines de la enseñanza de la matemática sostienen que ésta debe proveer a los estudiantes oportunidades para explorar no sólo un amplio rango de problemas y situaciones problemáticas, sino también de enfoques y técnicas, mediante la aplicación de diferentes métodos y estrategias de resolución. Estos fines tienen una inmediata implicación didáctica, ya que la actividad de resolución de problemas pasa a ser el centro de la tarea escolar. De tal modo, promover las habilidades para resolver problemas es un objetivo de enseñanza y, puesto que las prácticas escolares configuran el campo de experiencias sobre el cual los alumnos desarrollan competencias de esa naturaleza, entonces se hace necesario examinar cómo se adquieren y promueven dichas habilidades en el aula.

Hay una gran variedad de trabajos en el campo de resolución de problemas que resultan ser grandes aportes para el análisis del proceso de resolución, debido a que enfocan sus elementos y la manera de delinearlos. Aquí se hará referencia a dichos estudios porque han sido las bases sobre las cuales se apoyan nuestras elaboraciones teóricas. El foco de esos trabajos se encuentra en los resolutores; sin embargo, de alguna manera están señalando aspectos a considerar en situaciones de enseñanza de resolución de problemas.

En esta investigación, se analiza la intervención docente y qué sucede en la enseñanza de resolución de problemas cuando tal instrucción está vista desde los elementos que componen el proceso de resolución.

La atención se ha centrado en los *problemas de regla y compás* porque se parte de la idea de que esta clase particular de problemas puede ser utilizada en la enseñanza de ciertas formas de proceder propias de la heurística. Un profesor que pretende enseñar resolución de problemas puede recurrir a

ellos, ya que envuelven ciertos modos y medios de resolución heurísticos, los cuales no suponen una garantía para llegar al resultado y pueden describirse independientemente del contenido.

Así, este trabajo, de carácter exploratorio, indaga el mundo de la pura resolución de problemas con la intención de elaborar un modelo teórico para interpretar los procesos que se desarrollan cuando un docente enseña a resolver.

Con ello, se busca identificar los diferentes elementos que se ponen en juego en la enseñanza de resolución de estos problemas específicos, a fin de contribuir a su estudio dentro de los sistemas educativos.

## 1. PROPÓSITOS DEL TRABAJO

Se pretende identificar los elementos característicos de cierta pericia al enseñar a resolver problemas de regla y compás, al igual que elaborar un modelo de competencia para instruir sobre cómo solucionarlos. Éste corresponde a una manera de enseñar cuya meta es que los alumnos tengan un estilo heurístico al resolver problemas y, en la clase de problemas que estamos focalizando, tal comportamiento está fundamentalmente centrado en el uso de tres métodos. A partir de dicho modelo, se busca dar cuenta de los datos empíricos que se obtienen al observar el desempeño de una docente a quien se le ha impartido una cierta instrucción.

Al tener en cuenta que, por un lado, se tiene la competencia en resolver problemas, y por otro, la capacidad de enseñar a solucionarlos, se busca describir estas dos cuestiones en forma ligada, porque para la competencia en enseñar hay que saber cómo es lo que se va a enseñar. Por tanto, un objetivo complementario en la investigación es, mediante un es-

tudio teórico, establecer elementos característicos de la conducta competente al resolver los problemas de regla y compás a través de los métodos ya citados.

- a) En síntesis, podemos enunciar los objetivos de la investigación de la siguiente manera: Identificar elementos característicos de la conducta competente al enseñar a resolver problemas de regla y compás.
  - Enseñanza centrada en el uso de los métodos de resolución de problemas:
    - Método de los dos lugares.
    - Método de la figura auxiliar.
    - Método de la figura semejante.
  - b) Interpretar la actuación de una docente, a quien se le ha impartido cierta instrucción, a partir de los elementos identificados.
  - c) Establecer elementos característicos de la conducta competente al resolver problemas de regla y compás guiados por los métodos, a través de su estudio teórico.

## 2. MARCO TEÓRICO

Nuestro interés en los problemas de regla y compás radica en el estudio de los modos de comportamiento y medios de resolución que no brindan garantía de obtener la solución y que pueden tratarse e investigarse en forma independiente del contenido, es decir, examinarse desde el mundo de la pura resolución de problemas; de ahí que se hayan importado y adaptado algunos elementos teóricos de ese mundo para hacer el análisis del proceso de resolución de dichos problemas. También se ha recogido el concepto de modelo teórico local introducido por Filloy

(1999), lo cual permitió estructurar la presentación del trabajo.

## 2.1. Del mundo de la pura resolución de problemas

Hemos asumido que el proceso de resolución no se compone de conductas puntuales aisladas, sino que éstas tienen un sentido respecto a su totalidad, por lo cual lo consideramos para su análisis con objetivos específicos. Se ha examinado el proceso de resolución de problemas a partir de las fases por las que transitaría el resolutor ideal, cuyo perfil podemos extraer de los trabajos de Polya; sin embargo, la diferencia estriba en que para nosotros no habrá fases perfectas, ya que las concebimos como estados por los que se pasa y a los que se puede volver durante la etapa de resolución.

Se rescataron tres métodos que pueden ser utilizados en las construcciones de regla y compás —el de los dos lugares, el de la figura auxiliar y el de la figura semejante—, los cuales se presentan de una forma general en Polya (1962). Su examen minucioso nos ha permitido precisar los pasos de cada uno y establecer la forma en que modelan el proceso de resolución.

Sobre la base de la noción “espacio de problemas” utilizada por Puig (1996) —conjunto de problemas generados por herramientas, métodos y sugerencias heurísticas, así como las relaciones entre ellos—, se ha considerado a cada método como generador de una serie de problemas que le es propia.

La adaptación a los problemas de regla y compás de los tipos de heurísticas definidas por Puig (1996) nos permitió diferenciar los componentes de ese plano que se ponen en

juego al abordar esta clase de problemas y mostrar la atención que se les dispensa en la enseñanza. A tal respecto, se clasificaron las formas de trabajo heurístico en **destrezas, herramientas, métodos y sugerencias generales**. Más adelante, al comentar algunos componentes del modelo de competencia elaborado, se hace referencia al sentido asignado a cada una de ellas. Esta distinción permite analizar con detalle los elementos que intervienen en el proceso de resolución pero, además, arroja implicaciones para organizar la instrucción, ya que si el análisis muestra que son elementos de naturaleza distinta, entonces es de esperar que se aprenden en forma distinta y, por tanto, las situaciones de enseñanza también han de tener características diferentes.

Al atender al proceso de resolución, se extrapolan algunos resultados que se derivan de Schoenfeld (1985). De dichas investigaciones, basadas en una observación detallada del proceso de resolución de problemas por sujetos reales, se desprende que, a la hora de solucionarlos, intervienen ciertos elementos —recursos, heurísticas, gestor y creencias— que van a delinear el accionar de los resolutores, a los que llama “componentes del conocimiento y la conducta”<sup>1</sup>. Si tenemos en cuenta su presencia en el proceso de resolución de problemas y, en lugar de verlos como fuente de explicación de la conducta del resolutor los concebimos como factores necesarios para tener éxito al resolver problemas, podemos acordar que son elementos de la conducta competente. No obstante, si pretendemos avanzar más en la teoría y hacer análisis más refinados del proceso, no basta sólo con enunciar que son elementos de competencia, sino que se hace necesario examinar qué significa esto. A diferencia de ese autor, quien describe los comportamientos que hacen falta para resolver problemas, en esta investigación se

<sup>1</sup> Posteriormente, Schoenfeld (1992) se refiere a estos componentes como “aspectos de la cognición”.

caracteriza la conducta competente en función de ello.

Según Schoenfeld (1985), las estrategias heurísticas son reglas para tener éxito en la resolución de problemas, sugerencias generales que ayudan a comprenderlos mejor o hacer progresos hacia su solución; los recursos constituyen la información relevante en torno al problema que posee el resolutor, es decir, las herramientas y técnicas que puede utilizar para un problema particular; el gestor o control trata de las decisiones ejecutivas, que abarcan la selección e implantación de recursos y heurísticas a disposición del resolutor, mientras que el elemento restante, las creencias, establece el contexto en que operan los recursos, las heurísticas y el control y, en ese sentido, aquí se hace alusión a ellas: el análisis de su presencia en el proceso ha merecido la atención de muchos estudios que van en la línea de las concepciones del sujeto, pero esto escapa a los objetivos de esta investigación.

Ahora bien, el sentido que da Schoenfeld al término heurísticas es muy amplio, y abarca cuestiones de diferente naturaleza; por ende, habrá que diferenciarlas si se quiere analizar con cierto detalle los elementos que inciden en el proceso de resolución.

En pos de un análisis minucioso del proceso, se rescata la clasificación de heurísticas de Puig (1996). No obstante, si nos valemos de ella y al mismo tiempo consideramos los contenidos de los recursos que Schoenfeld identifica, llegamos a algunos puntos contradictorios. Hay ciertas destrezas y habilidades para aplicar algunas heurísticas que componen su lista de recursos y que corresponden a ese campo y, por tanto, en la investigación se pretende recogerlas en tal sentido.

Sin embargo, ¿cómo establecer criterios para considerar los aspectos recogidos en el esquema de Schoenfeld y sistematizar el análisis de su presencia en el proceso de resolución? Para ello, hemos distinguido tres grandes clases de elementos que intervienen en el proceso, a las cuales hemos denominado **contenido matemático**, **trabajo heurístico** y **gestor**. A ellas se hará referencia posteriormente.

## 2.2. De la estructura del trabajo

La presentación del trabajo está estructurada acorde con el concepto metodológico de modelo teórico local, descrito en Filloy (1999), que enfoca al objeto de estudio desde distintas componentes interrelacionadas, a fin de dar cuenta de la complejidad de los fenómenos observados, y pretende ser apropiado sólo para la interpretación de estos fenómenos específicos.

En el modelo teórico local de enseñanza de resolución de problemas de regla y compás, se ha contemplado un modelo de competencia, elaborado a partir del análisis de los problemas y de la conducta; uno de enseñanza, organizado sobre la base de algunos aspectos constitutivos de la competencia, y uno de actuación, donde se describe el hacer docente de acuerdo con la forma que adoptan los elementos del modelo de competencia<sup>2</sup>.

## 3. METODOLOGÍA

Inicialmente, se realizó el estudio teórico de los problemas y del proceso de resolución, lo cual permitió identificar algunos elementos que forman parte de una conducta competente al enseñar a resolver problemas de regla y compás.

<sup>2</sup> Los nombres que se han asignado a las componentes son los que se utilizan en Puig (1996). Filloy (1999) se refiere a ellas como modelo de competencia formal, modelo de enseñanza y modelo de los procesos cognitivos, o en algunos trabajos habla de tendencias cognitivas.

Sobre esta base se planificó e impartió la instrucción a una docente de escuela media. La investigación se centró en una sola profesora, la que tomamos como ejemplo paradigmático, ya que la intención no ha sido buscar regularidades en el accionar de los sujetos, sino caracterizar qué sucede en la escuela media al enseñar a resolver estos problemas cuando se le ha dado al maestro cierta instrucción previa.

Tras esto se observó su actuación y se grabaron en video las 18 clases impartidas por dicha profesora en un colegio de enseñanza media de la ciudad de San Carlos de Bariloche (provincia de Río Negro, Argentina), correspondientes a la asignatura de matemática para alumnos del primer curso (13 y 14 años).

En una instancia posterior, se buscaron más elementos de competencia a fin de analizar la actuación de esta docente y, para ello, se indagó la actuación de un profesor con amplia experiencia en la enseñanza de resolución de problemas, interpretando dicho hacer sobre la base de los elementos provenientes del estudio teórico.

Las fuentes de información han sido tomadas en cuenta para delinear el modelo de competencia provienen tanto de los análisis teóricos de los problemas y del proceso de resolución como de las observaciones de personas concretas.

Si bien cualquier sujeto puede ser fuente de información, a condición de reinterpretar lo observado, en este caso se indaga la actuación de un experto porque, a partir de su conducta, hay la posibilidad de descubrir algunos rasgos de competencia. El ámbito en que se ha llevado a cabo este estudio corresponde a clases de la asignatura optativa cuatrimestral Didáctica de la Resolución de Problemas y Heurística Matemática, en la Escuela de Magisterio de la Universidad de Valencia (Espa-

ña). Los problemas de regla y compás están incluidos en el programa de dicha asignatura, las clases de este profesor se grabaron en video y posteriormente se transcribieron.

Estos datos empíricos surgidos durante la exploración de la actuación del experto permitieron identificar ciertos rasgos de competencia al enseñar a resolver esta clase de problemas, por lo cual se incorporaron al modelo de competencia diseñado inicialmente.

Por último, se analizó la actuación de la docente de escuela media en función de los resultados desprendidos del anterior estudio, es decir, se interpretan los datos en términos del nuevo modelo teórico.

El esquema, que se presenta como Figura 1, puede ser representativo de la metodología utilizada:

### **3.1. Respecto al análisis teórico de los problemas y del proceso de resolución**

Hemos mencionado que el modelo de competencia se elabora a partir de la observación de sujetos y del análisis teórico de los problemas y del proceso; a continuación, nos centraremos en este último aspecto, dejando el tratamiento del primero hasta el momento de comentar resultados de la actuación.

El análisis teórico consistió en los siguientes puntos, que brevemente pasamos a comentar.

- Elaboración del espacio teórico de problemas generado por cada método.
- Distinción entre operaciones básicas y construcciones elementales, y realización de sus correspondientes espacios teóricos.
- Configuración del espacio teórico de problemas de las construcciones de regla y compás.

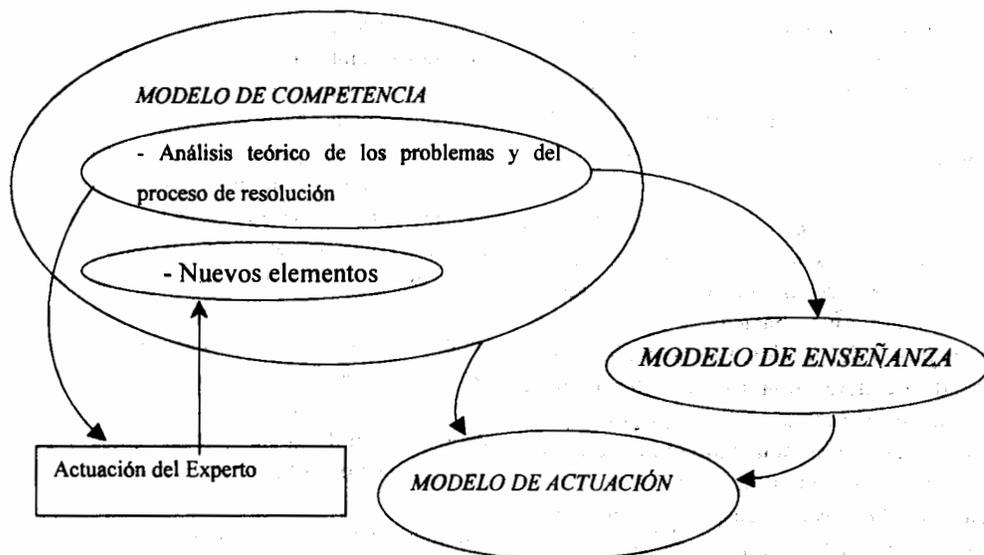


Figura 1

- Delimitación del uso de métodos.
- Establecimiento de una secuencia de uso de métodos.
- Identificación del contenido matemático, trabajo heurístico y tareas de gestión.

Los métodos plantean una serie de pasos a seguir que se traducen en la construcción de ciertos objetos geométricos; empero, no establecen pautas para su solución ni garantizan la solución del problema inicial, sino que lo transforman en otros más abordables: de ahí que los consideremos heurísticos.

La noción "espacio de problemas", rescatada de Puig (1996), nos lleva a considerar a cada método como generador de una serie de problemas que le es característico. A partir de esta idea, y a fin de apreciar la forma en que los métodos delinean el proceso de resolución, son elaborados dichos esquemas.

Se ha querido poner el acento en que uno de los aspectos cruciales del proceso es la transformación de un problema en otros, y ello se

representa a través de un diagrama que muestra sus transformaciones. Éste se compone por letras y flechas; las letras van a corresponder a los problemas generados por los métodos, y las flechas están puestas en la medida en que se generan problemas, yendo del que se tiene al que se genera y así sucesivamente, hasta que el esquema acaba en problemas que es necesario resolver.

El objetivo de hacer el estudio teórico de las construcciones de regla y compás ha sido diseñar el espacio teórico de problemas correspondiente a cada una. Éste se conforma examinando los procesos de resolución que generan los métodos ya citados, y determinando la serie de problemas por los cuales se atraviesa hasta llegar a la elaboración de ciertos lugares geométricos sobre los que descansan nuestras construcciones.

Tal accionar de los métodos en los problemas queda plasmado en la cadena de situaciones que genera, lo cual pone en evidencia la complejidad del entretreído de construcciones resultante de la conjunción de los métodos.

Como primer paso, y para sistematizar el análisis, se establecen los elementos mínimos de trabajo para las construcciones posteriores, haciendo la distinción entre operaciones básicas y construcciones elementales.

Dado que se trata de construcciones de regla y compás, resulta necesario trazar ciertas circunferencias y rectas. Por eso se consideran como operaciones básicas el transporte de segmentos y de ángulos, ya que posibilitan el trazado de determinadas circunferencias y rectas. La primera acción nos permite construir una circunferencia dado el centro  $O$  y un radio  $R$ , y la segunda trazar una recta en una determinada dirección respecto de otra. A su vez, se han interpretado estas operaciones básicas de acuerdo con el método de los dos lugares.

Asimismo, se establece un conjunto de construcciones elementales (mediatriz, perpendicular, bisectriz, paralela, arco capaz), llamadas así porque nos dan los elementos para diseñar los lugares geométricos que estarán implicados en los problemas. Sus algoritmos de construcción se han reinterpretado sobre la base de los métodos, lo que ha desembocado en la elaboración de los respectivos espacios de problemas. Cada uno de ellos está conformado por un entretejido de construcciones simples, cuyas terminales son o bien datos o construcciones de determinadas circunferencias y rectas donde se hallan implicadas las operaciones básicas.

El examen de los procesos de resolución generados por la aplicación de uno o varios métodos permite hacer corresponder a cada problema un espacio teórico. La serie de problemas que se desprende de la aplicación de los métodos es algo característico de ellos y, en este sentido, dicho espacio también resulta ser un instrumento de análisis de los distintos métodos.

Así, el producto final de nuestras elaboraciones teóricas ha sido el diseño de los espacios teóricos de las diferentes construcciones de regla y compás. A fin de reflejar claramente en el espacio de problemas lo característico de cada método, se identifica la serie de problemas por los que atraviesa y se detiene el análisis, cuando el problema al que se ha arribado es una de las construcciones elementales u operaciones básicas. De la amplia gama de posibilidades de resolución, en el análisis teórico se consideran aquellas que se reducen a las construcciones elementales, y al trazado de circunferencias y rectas que implican operaciones básicas.

Además, se han puesto los métodos en secuencia, asumiendo que cuando no puede aplicarse en forma inmediata el de los dos lugares, tiene lugar el de la figura auxiliar. El de la figura semejante es mucho más complejo y, por tanto, convenimos en recurrir a él en caso de que sea imposible aplicar los dos anteriores. De tal manera que inicialmente se intenta aplicar el método de los dos lugares, a condición de llegar a una de las construcciones mencionadas; si éste no es el caso, entonces se utiliza el de la figura auxiliar o, por último, el de la figura semejante.

Cabe señalar que a veces es preciso hacer doble uso de alguno de los métodos. Por ejemplo, en algunos problemas no es posible construir la figura requerida valiéndose de una figura auxiliar, entonces habrá que hacer una segunda, e incluso puede suceder que la construcción de una de ellas requiera la fabricación previa de la otra. En el trabajo se abordan estas alternativas y complejidades, presentando ejemplos de tal naturaleza, acompañados con los esquemas representativos de estos casos.

Así, hemos avanzado en la sistematización del análisis teórico del proceso de resolución de las construcciones geométricas.

Además del uso de métodos, la resolución de problemas de regla y compás va a implicar otras formas de trabajo heurístico, así como cierto conocimiento del contenido matemático y de tareas de gestión asociadas con el empleo de esos sistemas.

En esta investigación, se han discriminado los elementos que intervienen en el proceso en tres grandes clases, que conllevan a la identificación del **contenido matemático, heurísticas y tareas de gestión** implicadas en la resolución de los problemas. La combinación de estas tres componentes, junto con los espacios de problemas generados por la aplicación de los métodos, nos ha llevado a precisar las competencias que se ponen en juego al abordar dichos problemas, permitiendo así tener una idea cabal al respecto.

El **contenido matemático** se centra en el conocimiento de conceptos (ciertas definiciones y definiciones equivalentes), de algunas propiedades de las figuras, en la reformulación de conceptos como lugares geométricos, en el uso de algoritmos de construcción, y en el conocimiento de ciertas reglas de trabajo en el dominio (tales como criterios elementales para la construcción de figuras, normas de uso de los instrumentos de geometría, naturaleza genérica de la figura de análisis).

Por **trabajo heurístico** entendemos las formas de trabajo para avanzar y resolver el problema de manera eficaz. En la clase que estamos abordando, se encuentra centrado en el uso de los tres métodos, los cuales llevan a una transformación del problema original, y que es determinada de forma standard. Cada método consiste en una serie de pasos a seguir y, tal como los concebimos, cada uno se

traduce en un problema. El método permite que para cierto problema se puedan identificar otros particulares, generados debido a su aplicación, pero no brinda indicaciones sobre cómo resolverlos, por eso decimos que es heurístico.

Hacer una figura de análisis, otra peculiaridad del plano heurístico, resulta de dar el problema por resuelto y marcar en ella los datos; es un dibujo a mano alzada de la incógnita en el que se remarca lo dado. Ello permite hacer el examen previo de lo que se busca, y a partir de ahí se analizan los objetivos parciales o resultados intermedios que habría que plantearse para determinarlo. Dentro del análisis teórico, esta figura es un indicador de ciertos rasgos del método de análisis-síntesis en el proceso de resolución, y ha sido el punto de partida sobre el cual se apoya el uso de los distintos métodos.

Proveer de sugerencias generales de carácter heurístico va a tener la función de señalar una dirección de trabajo, sin evocar un procedimiento concreto. A veces llevarán a orientar búsquedas en la memoria a largo plazo (por ejemplo, "establecer diferencias y similitudes con problemas anteriores", "reducir el problema a uno resuelto anteriormente") y otras atenderán a una concepción de la disciplina y de la actividad de resolución de problemas, llevando a potenciar sus posibilidades (como las sugerencias que llevan a analizar el resultado o a solucionarlo de forma diferente).

La reformulación es la herramienta heurística<sup>3</sup> que más se ajusta a los problemas de regla y compás, ya que adopta su forma de acuerdo con el contenido matemático a que hace referencia. La consideración de ciertos conocimientos matemáticos lleva a realizar

<sup>3</sup> Una herramienta heurística es un procedimiento determinado que permite, a partir del problema que se tiene que resolver, formular un problema relacionado; queremos indicar con la palabra "herramienta" ese carácter de instrumento de transformación. (Puig, 1996, pág 45).

las reformulaciones encaminadas a la solución de los problemas. Algunas reformulaciones se desprenden de la consideración de los criterios de construcción de las figuras, de la aplicación de algún hecho; otras provienen de concebir a las figuras geométricas como lugar de puntos, lo cual se traduce en transformaciones del problema original basadas en las propiedades del conjunto de puntos implicado. Así, por ejemplo, el problema "trazar la paralela a una recta por un punto dado", se puede reducir a encontrar otro punto, si tenemos en cuenta el criterio para construir una recta. Entonces, la incógnita inicial se transforma en "encontrar un punto que esté en la paralela", y si se concibe a la paralela como lugar geométrico, dicho problema se transforma en "encontrar un punto que esté a la misma distancia que está el punto dado de la recta dada". Cabe señalar que cada una de las reformulaciones que se hacen durante el proceso persigue descubrir el problema asociado con un paso del método.

A las destrezas heurísticas, vistas como las formas adecuadas de trabajo que pueden ser útiles para descubrir, se las dividió en tres grandes grupos:

- 1) Instrumentales, referentes al uso de instrumentos de geometría, a la precisión en los trazados.
- 2) Organizativas, por ejemplo, hacer una figura para visualizar la información dada en el enunciado, hacer un dibujo para representar el plan, o marcar información complementaria en la figura de análisis.
- 3) Comunicativas, como el uso de notación adecuada.

En el curso de la resolución de un problema, puede darse una combinación de estas formas de trabajo heurístico. Así, luego de "hacer una figura de análisis" (método), se puede recu-

rrir a la destreza "marcar información complementaria en la figura de análisis", lo cual puede ayudar a descubrir una figura auxiliar y en este punto el "establecer diferencias y similitudes con problemas anteriores" (sugerencia general) puede conducir al resolutor a elegir la herramienta heurística "reformular basándose en datos y criterio de construcción", la cual lleva a descubrir los pasos del método de los dos lugares implicado en la construcción de la figura auxiliar.

Asimismo, y atendiendo al elemento que resta examinar, podemos indicar que cuando se está usando un método, el conocimiento de los efectos de su uso permite que la tarea de gestión esté apoyada en él. Al elaborar el modelo de competencia, se ha querido ir más allá de enunciar que uno de los elementos corresponde a los métodos y otro al gestor del proceso. Es por eso que se han incluido los análisis de los efectos del uso de los métodos y de la concreción de las tareas del gestor asociadas.

El gestor se va a centrar en las evaluaciones locales y/o globales, en el trabajo con el error, en los cambios de punto de vista, la toma de decisiones y en el control de la relación del problema que se está trabajando con el resto de los problemas del espacio.

Situados en un proceso de resolución guiado por un método, podemos establecer que las tareas del gestor son las derivadas de saber los pasos, cómo se organizan y cuáles son los problemas generados. Además, puesto que muchas veces hay implicado más de un método, es el gestor quien organiza su secuencia de uso.

### 3.2. Respecto a la enseñanza impartida a la docente

Si se atiende al componente de enseñanza del modelo teórico local, al que se hace referen-

cia en este trabajo como modelo de enseñanza, se dará cuenta de la enseñanza que efectivamente se ha impartido a la docente cuya actuación va a observarse y, además, se comentarán los pasos hechos en tal dirección.

En una instancia previa a la instrucción se diseña una secuencia didáctica, a fin de proporcionar a la docente un punto de partida al abordar los problemas de regla y compás en la enseñanza escolar, el cual busca integrar el contenido matemático que se trata en la escuela con algunos procedimientos propios de la actividad de resolución de problemas.

La secuencia apunta a la apropiación de ciertas formas de trabajo heurístico, y la metodología de trabajo propuesta está acorde con orientaciones ministeriales para abordar los contenidos curriculares de la escuela media en el sistema educativo argentino. Intenta brindar un enfoque donde se puedan utilizar los conceptos geométricos y sus propiedades en la resolución de problemas, posibilitando la reformulación de conceptos como lugares geométricos, utilización de métodos de resolución tanto en las construcciones elementales como en las de triángulos, y la aplicación de otras heurísticas y reglas de trabajo en el dominio. Su propósito en el plan general de esta investigación fue brindar un medio de organización de la enseñanza que ponga en juego los elementos implicados en la resolución de esta clase de problemas, sobre los cuales se va a examinar la actuación docente.

Sigue un estilo de presentación abierto, en el que se propone un orden para tratar los conceptos, propiedades y problemas; se compone de enunciados directos que la docente debe adaptar, teniendo en cuenta las intenciones de enseñanza y el grupo de alumnos con los que va a abordar el tema. En ella se incluyen definiciones, propiedades y problemas, así como algunos comentarios para llamar la atención de la maestra en un determinado punto. La

estructura global de tal secuencia didáctica, que comentaremos en líneas generales, es la siguiente.

- Conocimientos preliminares.
- Idea de lugar geométrico.
- Construcciones elementales:
  - Problema motivador.
  - Definición del concepto.
  - Reformulación como lugar geométrico a partir de actividades de plegado.
  - Construcción con regla y compás.
- Triángulos: Elementos. Clasificación. Propiedades. Rectas notables y puntos notables. Construcciones de triángulos dados temas de lados y ángulos. Criterios de congruencia de triángulos.
- Construcciones de triángulos caracterizados por otras temas.

En principio, se indica una serie de conocimientos preliminares con los que se aborda la temática (ciertas reglas de trabajo en el dominio y las nociones de rectas paralelas y secantes). Luego se trabajan las construcciones elementales, siguiendo el esquema “presentación de un problema motivador, definición del concepto, reformulación como lugar geométrico a partir de actividades de plegado y construcción con regla y compás”, y se organiza el estudio del triángulo a través de los problemas de regla y compás, para lo cual se incluyen comentarios acordes con el nuevo enfoque, señalando los métodos heurísticos implicados en los problemas. El análisis de los resultados provenientes de temas de datos, compuestas por lados y ángulos, lleva a inferir los criterios de congruencia de triángulos. Por último, se tratan otras

construcciones de triángulos caracterizados por ternas que, además de lados y ángulos, implican alturas, medianas, etc., lo cual permite el uso de los distintos métodos de resolución.

Esta secuencia fue la base sobre la cual la docente confeccionó su propia planificación de clases, y tras su elaboración se imparte la instrucción a la profesora de escuela media. Ésta fundamentalmente consistió en el uso de los métodos y otras formas de trabajo heurístico, en el análisis de la secuencia didáctica y resolución de los problemas que la conforman, y en la presentación de ciertos elementos teóricos relativos con el proceso de resolución.

La enseñanza impartida a la docente se ha organizado en tres etapas, que se corresponden con cada una de las semanas de trabajo conjunto: la primera abarca los dos primeros encuentros, la segunda los dos siguientes, y la tercera tiene lugar en el último.

Así, la etapa inicial se centra en el uso de los métodos heurísticos, para lo cual se sigue el orden de presentación establecido en la teoría. En todos los casos, se lleva a resolver el problema a partir de una figura de análisis, y en general se rescata el procedimiento automático que la docente conoce para resolver un cierto problema, y se hace su reinterpretación de acuerdo con el método implicado, lo que lleva a formular sus pasos. Una vez explicitados, se plantean otros problemas en los que el método a enseñar es de aplicación inmediata y en los que se conjugan diversos lugares geométricos. En ocasiones, una vez hecha la formulación de los pasos del método, se pasa a la tarea de enunciar ejemplos de aplicación del método sin llevar a cabo la resolución.

De una primera etapa, donde la profesora actúa como resolutora, se pasa a una segunda

fase de la instrucción, donde se vale de su experiencia docente y de los elementos heurísticos presentes en los problemas trabajados para discutir y reflexionar acerca de una propuesta didáctica presentada por la investigadora. Aquí, el trabajo se centra en la "secuencia didáctica". Se fueron interpretando los algoritmos de construcciones elementales y de operaciones básicas de acuerdo con los métodos implicados en ellas, y se discutieron distintas formas de resolver los problemas de la secuencia, analizando la presencia de los métodos a medida que aparecían y explicitando las transformaciones del problema original surgidas por su aplicación. En algunos problemas se indujo a plantear distintos caminos de solución sin llegar a ejecutarlos, a compararlos examinando ventajas y desventajas, y en otros a analizar el resultado, ya sea la unicidad o la existencia, lo cual depende de la medida de los datos. A su vez, se previeron algunas dificultades de los alumnos que podrían generarse a raíz de un determinado enfoque. Se trataron algunas reglas del dominio, tales como el significado de "lo dado", el significado de solucionar el problema y los criterios de construcción sobre los que se basan las reformulaciones de los problemas. Se acentuó el rol de la figura de análisis—representación del resultado en la cual se refleja todo aquello que se conoce— como herramienta útil en la resolución de problemas, señalando la irrelevancia de su forma y posición, y destacando también algunas actividades de la secuencia que tienden a la reconceptualización de las figuras geométricas.

La tercera etapa apunta a que la docente delinee su propia estrategia de enseñanza. Para ello, en el último encuentro se presentaron nuevos elementos de la teoría que le permitieron indagar el proceso, con el objetivo de llamar su atención en cuestiones que influyen en el proceso de resolución y que debieran ser consideradas en la organización de la

enseñanza. En esta dirección, se presentó el modelo multifase de Polya y se explicitaron los objetivos por fase; además, se comentaron los trabajos de Schoenfeld, particularmente su esquema de episodios y los componentes del conocimiento y la conducta, explicando a partir de ellos algunas dificultades de los resolutores con ejemplos puntuales.

### 3.3. Respecto al análisis de la conducta

Se hará referencia a la forma en que se analizaron ambas actuaciones —la del experto y la de la profesora de educación media—, describiendo inicialmente los instrumentos diseñados para tal fin, y luego mostrar su funcionamiento en un ejemplo concreto.

El esquema de generación de problemas, asociado con los métodos y adecuado a una situación proporciona una representación de la estructura del espacio en el que se debería desarrollar la actuación del sujeto ideal. Es lo que se ha llamado **espacio teórico de problemas**, el cual, como ya se comentó, se construye a partir del examen de los procesos de resolución generados por los métodos.

Ubicados en una situación de enseñanza se pasa a otro nivel de análisis, en el que, además del problema, se consideran a los otros personajes que componen la situación: los alumnos y el docente. En tal contexto, se hablará de **espacio real de problemas**, que va a permitir la descripción de comportamientos y, dar cuenta de la estructura de la actuación docente, al adaptarse tanto a las demandas cognitivas de la tarea como a los conocimientos y al nivel de los alumnos a quienes está impartiendo la enseñanza. Dicho vector se elabora a partir del análisis de la actuación, contiene el examen de la presencia de los métodos (elementos del modelo de competencia generadores de problemas) en situacio-

nes de enseñanza, y de la forma particular que adoptan en la actuación, lo cual permite interpretar la conducta y aumentar el conocimiento de los métodos.

Si bien el espacio real de problemas ha permitido hacer la comparación entre la actuación ideal y la de los sujetos, no da cuenta del conjunto de actuaciones relacionadas con otros elementos del modelo de competencia; es por eso que se hace necesario elaborar un nuevo instrumento.

En tal dirección, se realiza una redefinición de los componentes del conocimiento y la conducta que surgen de la obra de Schoenfeld, la cual se hace ya no en torno al resolutor, sino a los propios problemas. La redefinición de estos componentes —o aspectos cognitivos, como los llamara este autor más recientemente— y la consideración del proceso dividido en fases para su análisis, ha permitido determinar los conocimientos matemáticos, las heurísticas y las tareas de gestión que pueden estar implicadas en el tránsito por las fases.

La **lista de descriptores de la actuación** es el producto de las elaboraciones hechas en este sentido, y ha sido uno de los pilares para analizar las transcripciones.

Asimismo, la incorporación de la idea de espacio de problemas de Puig al modelo multifasético de Polya introduce una nueva complejidad al análisis, pues lleva a considerar las fases no sólo respecto al problema original, sino al problema del espacio que se está abordando.

En la idea de **episodio** hemos querido plasmar todas estas consideraciones, y aunque es homónima a la del esquema de análisis de Schoenfeld, viene a ser distinta. Surge como consecuencia de la introducción de la noción de espacio de problemas, de la división en fases y de los componentes de la cognición,

y apunta a brindar información detallada acerca del sentido local y global que toda conducta puntual tiene respecto al proceso. En lugar de tener grandes bloques de conducta que poco dicen acerca de lo que sucede en su interior, esta idea ha llevado a segmentar las transcripciones en tipos de conductas descriptibles según la fase y el aspecto cognitivo al que hacen referencia, y además se ha utilizado el espacio real de problemas en el que se está ejerciendo dicha conducta para establecer el sentido que tiene en el proceso.

El análisis del proceso de enseñanza de resolución de problemas basado en los descriptores de la actuación y en el espacio real de problemas desemboca en la fragmentación de las transcripciones y en la asignación de episodios, los cuales se enumeran según el orden de aparición.

Una presentación tal de la transcripción debería acompañarse con algún medio que facilite la reconstrucción del proceso, que muestre las fases por las que se transita y la forma que toman las sugerencias docentes relativas con los aspectos cognitivos, así como que dé cuenta del problema del espacio donde se está actuando.

La tabla de episodios es el medio gráfico ideado para volcar la información que se desprende del análisis y para visualizar los diferentes episodios que conforman el proceso. Se hace la representación del proceso a través de una tabla de doble entrada, cuyas filas son las cuatro fases y sus columnas los tres aspectos cognitivos. Además, se consideran los problemas del espacio real que han tenido alguna entidad durante el proceso, ya que han sido el centro de atención de algunos segmentos del protocolo, y se incorporan a las respectivas filas mediante letras mayúsculas que los identifican. En la tabla se insertan los episodios según su orden de aparición, ubicándolos en uno de los problemas del espa-

cio real y caracterizándolos de acuerdo con la lista de descriptores de la actuación. Los episodios de gestión global están situados bajo el problema en el que ocurren, sin pretender asociarlos sólo con ese problema particular, ya que, como ayudan a transitar por el espacio de problemas, su presencia involucra a todo el espacio o a gran parte de él. En la tabla de episodios llamamos P al problema original, y con otras letras mayúsculas a los problemas del espacio real que adquirieron mayor atención durante el proceso. Los episodios son denotados con el número asignado en la transcripción y con la expresión que los representa, la cual está incluida en la lista de descriptores, y son ubicados de acuerdo con el aspecto cognitivo, fase y problema al que corresponden. Cada una de las filas de la tabla tiene tantas subdivisiones como problemas haya involucrados en ella.

Las tablas de episodios han facilitado el análisis de la actuación docente, ya que muestran en forma precisa la naturaleza e intención de las intervenciones durante el proceso de resolución de un problema; sin embargo, se hace dificultosa la comparación de procesos entre diferentes problemas.

La intención de este estudio ha sido identificar los rasgos que componen la conducta competente, lo cual lleva a examinar el trabajo del docente en las distintas etapas de la enseñanza. Entre otras cosas, esto se traduce en equiparar los procesos correspondientes a los diversos problemas tratados en esas etapas y, por tanto, se hizo necesario disponer de un instrumento que facilite tal proceder. Si a lo anterior se suma la pretensión de describir la actuación de la docente de escuela media en función de los resultados que arroja el análisis del experto, se puede advertir que de alguna manera está subyacente la comparación de los procesos derivados de ambas actuaciones, lo cual confirma la necesidad de ese instrumento.

La **poligonal del proceso**, creada para favorecer la indagación en ese aspecto, se trata de un esquema representativo del proceso de resolución. Los números que aparecen en dicho esquema permiten construir la poligonal y corresponden a los episodios que previamente se han volcado en la tabla de episodios asociada con un determinado proceso de resolución. Es un medio que posibilita mirar al espacio de problemas como a un todo, brindando una visualización inmediata del número de transformaciones del problema, de la cantidad de indicaciones y de su distribución en el espacio de problemas, del tipo de orientaciones en las fases recorridas y en los distintos problemas, así como de las fases que efectivamente se recorren y el modo en que lo hacen.

En conclusión, los diferentes instrumentos que fueron diseñados para el análisis de la actuación permiten brindar una mirada microscópica del proceso de enseñanza de resolución de problemas, centrada en las intervenciones docentes relacionadas con los elementos del modelo de competencia.

Vamos a exponer un ejemplo, a fin de ilustrar el funcionamiento de tales instrumentos al examinar la actuación. Se trata de un problema abordado por la docente de media en sus últimas clases. Como hemos procedido en cada uno de los problemas trabajados, se realiza la reconstrucción del proceso —descripción del proceso en forma de narración— y, como en este caso se examina lo que sucede en la escuela media, se incluyen comentarios que devienen de confrontar las intervenciones de la profesora con las del experto; ade-

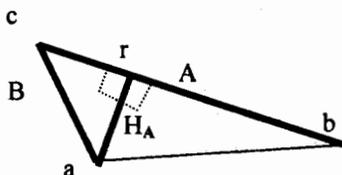
más, se presenta la tabla de episodios con su poligonal correspondiente, así como los espacios de problemas teórico y real.

### Reconstrucción del proceso:

La profesora dibuja los segmentos que serán considerados como datos. En general, los alumnos tienden a considerar que la altura tiene un extremo en el punto medio del lado, por lo cual los comentarios siguientes apuntan a clarificar dicho aspecto. Luego, la docente se vale de un dibujo para representar el plan, que llama figura de análisis. Las primeras indicaciones están dirigidas por el método de figura auxiliar, aunque tal método se aplica a partir de una recta de apoyo.

El problema se retoma en la clase siguiente. Pasa una alumna a ejecutar el plan sugerido en la clase anterior. Hace una semirecta y su intención es fijar  $H_A$ . A modo de organizar la ejecución, la docente explicita los problemas auxiliares. La alumna hace una perpendicular con escuadra y sus compañeros evocan el uso de regla y compás; entonces otra alumna lleva a cabo la construcción de la perpendicular con regla y compás. La docente focaliza el método de los dos lugares en el trazado de la perpendicular. La chica que comenzó la ejecución del plan prosigue la resolución del problema, apoyándose en el método de la figura auxiliar (se fija la altura y se halla el vértice  $c$  y, a partir de éste, el vértice  $b$ ). Luego se revisa la solución analizando posibles alternativas en los pasos seguidos. Finalmente, otra alumna dice haber encontrado otra resolución y la explica. Cambia el problema, sólo considera dos datos y construye un trián-

**“Construir un triángulo dados dos lados y la altura respecto a uno de ellos” ( $A, B, H_A$ )**



gulo isósceles de lado  $A$  y altura  $H_A$  —caso particular—, por lo cual la docente lleva a evaluar la pertinencia del resultado.

Dicho ejemplo es muy apropiado para mostrar las diferencias entre las actuaciones en la escuela media, donde la enseñanza apunta a los conceptos, y en el curso de resolución de problemas, donde el objeto de enseñanza va centrado en el uso de los métodos.

El experto aborda el problema intentando guiar a los alumnos por el espacio teórico de problemas, y entonces sus sugerencias se dirigieron a la aplicación del método de los dos lugares. No obstante, ante otro enfoque propuesto por un alumno, organizado bajo el de la figura auxiliar, rescata la nueva solución y lleva a reinterpretarla sobre la base de dicho sistema y destaca el uso del método de los dos lugares al hallar la figura auxiliar; en forma inmediata orienta a retomar el plan inicial que pretendió insinuar.

En la escuela media se trata el problema de forma diferente. A partir de una recta en la que se va a apoyar la construcción, se comienza a trabajar desde los datos y, a la vez, pareciera que se hace la síntesis y el análisis. Hay un análisis oculto que lleva a descubrir la figura auxiliar, la cual se construye utilizando los resultados parciales de los distintos problemas del espacio, y la intervención docente llevaría a acentuar la presencia del método en las construcciones elementales que integran dicho espacio.

**Tabla de episodios:**

(Ver Tabla 1)

**Poligonal del proceso:**

(Ver Tabla 2)

Siendo

P el problema original;

F<sub>2</sub>: construir recta perpendicular

D: construir el triángulo rectángulo  $\triangle acr$  conocida la hipotenusa  $B$  y el cateto  $H_A$

**Espacio real de problemas:**

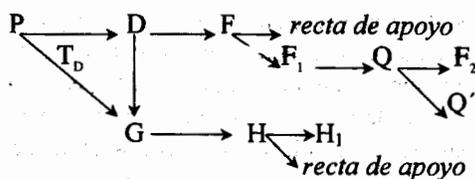


Figura 2.

Siendo

F: determinar  $c$

F<sub>1</sub>: construir circunferencia  $C(a, B)$

G: construir  $\triangle abc$  teniendo construido  $\triangle acr$

H: determinar  $b$

H<sub>1</sub>: construir circunferencia  $C(c, A)$

Q: determinar  $a$

Q': construir circunferencia  $C(r, H_A)$  (con  $r$  intersección de recta de apoyo con la perpendicular)

El operador  $T_D$  indica "transformar con el resultado de D".

**Espacio teórico de problemas:**

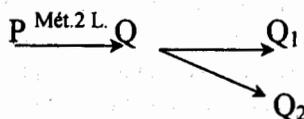


Figura 3.

Siendo

Q: determinar  $a$

Q<sub>1</sub>: construir la paralela al lado  $A$  a una distancia  $H_A$

Q<sub>2</sub>: construir la circunferencia  $C(c, B)$

	CONTENIDO MATEMÁTICO	TRABAJO HEURÍSTICO	GESTOR
COMPRESIÓN DEL PROBLEMA P	2 - Hechos (la altura no tiene por qué pasar por el punto medio del lado)	1-Establecer lo dado	
ELABORACIÓN DE UN PLAN P		4 -Indicaciones dirigidas por método de la figura auxiliar	3 - Evaluar la secuencialidad en que se considerará lo dado
EJECUCIÓN DEL PLAN P	7- reglas de juego: regla y compás	<p>► Pasa una alumna a ejecutar el plan. Fija la semirrecta que contendrá al lado A, y con abertura <math>H_A</math> apoya el compás en un punto de la semirrecta y hace un arco</p> <p>6.- Establecer problemas auxiliares ( Trazar perpendicular; determinar a)</p> <p>9- Fijar un dato y reformular (copiando la altura se tiene un vértice del triángulo buscado)</p>	<p>5 - Afianzar la comprensión del plan antes de ejecutarlo</p> <p>► La alumna continúa la construcción. La solución está dirigida por la condición</p> <p>10- acarreo de información de un problema a otro</p>
VISIÓN RETROSPECTIVA Q P	12 - Concepto y hecho implicados en la solución (def. de la altura; la altura en general no pasa por el punto medio del lado)	<p>8- Reinterpretar el algoritmo de construcción elemental basándose en intersección de lugares geométricos</p> <p>11- Analizar alternativas que pueden presentarse en los pasos de solución</p> <p>13 - Resolver el problema de forma diferente</p>	14 - Evaluar pertinencia del resultado

Tabla 1. Tabla de episodios.

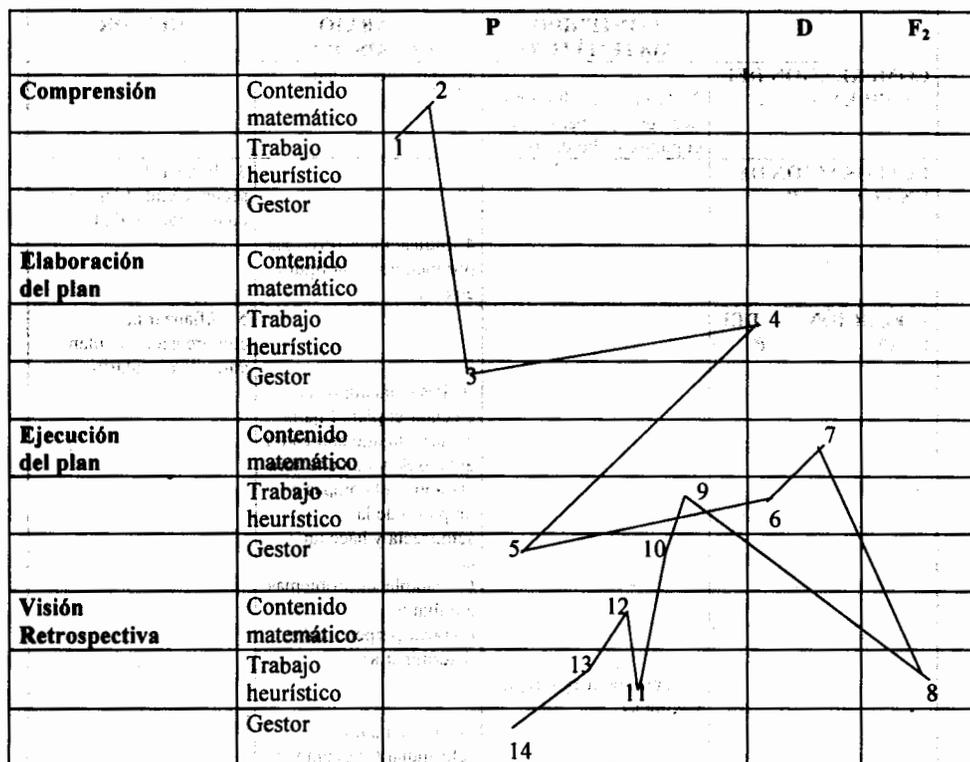


Tabla 2. Poligonal del proceso.

#### 4. RESULTADOS

La naturaleza del trabajo nos ha llevado ya a comentar –del mismo modo que lo hicimos a lo largo de los capítulos que conforman la memoria–, las aportaciones de distinta índole que se derivan de esta investigación.

##### 4.1. En relación con las producciones teóricas

Dichas producciones brindan una mayor comprensión de los diferentes elementos que intervienen en el proceso de resolución y que se ponen en juego al enseñar a resolver problemas de regla y compás.

Los esquemas de generación de problemas de cada uno de los métodos permiten apre-

ciar la forma en que delinean el proceso de resolución; la elaboración del espacio teórico de problemas correspondientes a las construcciones elementales lleva a la interpretación de sus algoritmos de construcción sobre la base de los métodos y se plasma en un entretreído de problemas que terminan en construcciones de circunferencias y rectas, mientras que la delimitación del uso de los métodos y el establecimiento de una secuencia teórica de su uso conduce a la sistematización del análisis teórico del proceso de resolución de los problemas.

Por su parte, la identificación del contenido matemático, heurísticas y tareas de gestión implicadas en la resolución de construcciones geométricas de regla y compás ayuda a precisar las competencias que se ponen en juego al abordar estos problemas. La discri-

minación de estos componentes por fase permite profundizar el conocimiento que se tiene de ellos, y la idea de "figura de análisis" lleva a establecer el punto de partida sobre el que se apoya el uso de los distintos métodos.

Asimismo, la conjunción de los resultados teóricos posibilita la *caracterización de la conducta competente prescindiendo de los sujetos concretos*. Los análisis teóricos facilitan la identificación de los problemas involucrados y los elementos para la competencia. Se enfocó al resolutor ideal, construyendo el espacio teórico de problemas, a partir de lo cual se tienen todos éstos, operaciones básicas y construcciones elementales implicadas y, además, se detectaron las nociones matemáticas que hay que considerar, el tipo de heurísticas a utilizar, por dónde se debe transitar y las tareas de gestión asociadas con ello. Por ende, no es necesaria la observación del resolutor para descubrir estos elementos de competencia, ya que todo está definido para cada problema.

La *caracterización de la conducta competente en función del espacio teórico de problemas y de los aspectos relacionados al contenido matemático, al trabajo heurístico y a las tareas de gestión* implicadas en los problemas, es uno de los resultados más importantes de este trabajo, debido a que sobre tal base se ha interpretado la actuación. Como la enseñanza apunta al uso de los métodos, entonces la conducta del ideal competente se puede caracterizar por estar organizada mediante un método, lo cual se traduce en hacer un recorrido a través de un espacio de problemas. Así también, el uso de los métodos implica el conocimiento de cierto contenido matemático, de algunas formas de trabajo heurístico y de ciertas tareas de gestión, haciendo necesaria la consideración de estos factores al organizar la enseñanza y, por ende, se transforman en elementos necesarios de la conducta competente al enseñar a resolver esa clase de pro-

blemas. Por tanto, podemos asumir que las acciones que caracterizarán a una conducta competente estarán orientadas a poner en juego dichos elementos en la enseñanza, cuya presencia puede traducirse en indicaciones que da el docente al respecto.

## 4.2. Respecto a las conclusiones de tipo metodológico

En este orden, los resultados proporcionan diferentes instrumentos de análisis de la actuación docente, complementarios entre sí, que permiten examinar en forma detallada el accionar docente y comprender el sentido que las distintas conductas puntuales tienen durante el proceso.

El espacio teórico de problemas correspondiente a diferentes construcciones de regla y compás *ha permitido hacer la comparación entre la actuación ideal y la de los sujetos*. Los *espacios reales de problemas* elaborados a partir del análisis de la actuación posibilitan tanto la interpretación de la conducta como el aumento del conocimiento acerca de los métodos.

Por su parte, la *redefinición de los componentes del conocimiento y la conducta* que surgen de la obra de Schoenfeld, realizada ya no en torno al resolutor, sino a los propios problemas, permite diferenciar los aspectos relacionados al contenido matemático, a la heurística y a la gestión del proceso implicados en las construcciones geométricas y, en función de ello, se ha podido caracterizar la conducta competente y analizar la actuación docente. La *incorporación al modelo multifásico de Polya de la idea de espacio de problemas de Puig* lleva a considerar las fases respecto al problema del espacio que se está abordando, en tanto que la *resignificación de la noción de espacio de problemas de un proceso de resolución*, noción que se desprende

de los análisis de Puig hechos con resolutores, en esta investigación se plasma en la idea de *espacio real de problemas*, lo cual da cuenta de la estructura de la actuación docente al adaptarse tanto a las demandas cognitivas de la tarea como a los conocimientos y al nivel de los alumnos a quienes se está impartiendo la enseñanza.

Concerniente a la *modificación de la idea de episodios del esquema de análisis de Schoenfeld*, efectuada como consecuencia de la introducción de la noción de espacio de problemas, de la división en fases y de los componentes de la cognición, brinda información detallada sobre el sentido local y global que toda conducta puntual tiene respecto al proceso; la *elaboración de una lista de descriptores de la actuación según fases y aspectos relativos al contenido matemático, al trabajo heurístico y a tareas de gestión*, ha sido uno de los pilares para realizar la clasificación de episodios, y la *incorporación de la tabla de episodios como instrumento de análisis* permite observar la naturaleza e intención de las indicaciones docentes durante el proceso.

El *diseño de un esquema representativo del proceso de enseñanza de resolución de un problema, "la poligonal del proceso"* dota de un medio para observar al espacio de problemas como a un todo, facilitando una visualización inmediata del número de transformaciones del problema, de la cantidad de indicaciones y de su distribución en el espacio, así como del tipo de orientaciones en las fases recorridas y en los distintos problemas, de las etapas que efectivamente se recorren y el modo en lo que hacen.

La *interpretación desde la heurística de una docencia que persigue un estilo heurístico de resolución de problemas* ha posibilitado examinar la actuación docente en la escuela media desde un referente de actuación.

### 4.3. En referencia a los resultados que provienen de los datos empíricos

De los resultados surgidos del análisis de la conducta del experto y de la docente de educación media —que responden a objetivos diferentes en esta investigación—, aquéllos que se desprenden de la observación de la actuación competente han sido utilizados para identificar elementos del modelo de competencia y nos hemos valido de ellos para examinar la actuación docente en la escuela media.

Estos datos permiten confrontar teoría y práctica. Los que se derivan del análisis de la conducta del experto dan cuenta de la forma que adoptan los elementos teóricos en una docencia que apunta a ciertas competencias heurísticas, mientras que los de la escuela media proporcionan información sobre cómo se acoplan a la actuación de una docente que recibió cierta instrucción y que, además, lleva a cabo su práctica en un ámbito donde, por lo general, los problemas se utilizan para dar sentido a los conceptos.

Así, los resultados responden a dos mundos distintos de la resolución de problemas, lo cual debe considerarse al hacer su interpretación. Los primeros están situados en el ámbito de la "pura resolución de problemas", donde los problemas se miran desde ellos mismos, y los otros pertenecen al de la "resolución de problemas y conceptos", en el cual los problemas se miran desde los conceptos. La forma diferente de concebirlos repercute en la organización de la enseñanza y en el tipo de orientaciones que se dan a los alumnos.

En líneas generales, en el primer caso la tarea es el uso de los métodos para construir la figura requerida y, en ese sentido, la intervención docente ha girado en torno a ciertas destrezas, a la reconceptualización de las nociones como lugares geométricos, a las construcciones elementales y a los pasos del

método. El esquema general del proceso estuvo marcado por el método de análisis-síntesis y la "figura de análisis" fue el punto de partida para descubrir el método a utilizar.

En el segundo, el objetivo de la enseñanza son los conceptos y, por ello, las orientaciones se centraron en la noción de lugar geométrico, en la reconceptualización de las figuras como lugares geométricos, en las definiciones de los conceptos implicados y sus propiedades, así como en los criterios de congruencia de triángulos. No obstante, se advierten algunas indicaciones que apuntan a ciertas destrezas, a una concepción de las construcciones elementales más allá del terreno algorítmico y al uso de una versión de los métodos de resolución organizada por el "trabajo hacia adelante".

## 5. FUTURAS INVESTIGACIONES

Si bien la instrucción impartida a la docente estuvo centrada en el terreno heurístico, el análisis de la conducta arroja que los contenidos curriculares han sido el verdadero propósito de la enseñanza escolar; no obstante, también se advierten ciertos rasgos propios de la heurística. Por tanto, una perspectiva a investigar es el modo en que el profesor —posiblemente debido a restricciones impuestas por la rigidez del currículum— transforma los elementos que se le enseñan para utilizarlos en la impartición de conceptos y en el uso implícito de elementos de pura resolución de problemas.

El examen de la actuación indica que se ha hecho el paso de un mundo a otro. La docen-

te ha reinterpretado, a partir de un ámbito en que se pretende enseñar conceptos, los elementos de pura resolución de problemas que se le han enseñado. Así, otra línea a examinar es qué han aprendido los alumnos de pura resolución de problemas y, para ello, tendría que hacerse un montaje experimental totalmente diferente, pues en este caso habría que examinar a los alumnos.

Por otra parte, el trabajo tal como está diseñado podría replicarse, pues lo que se ha hecho se encuentra descrito con gran detalle. Este estudio, de carácter exploratorio, nos da una idea de lo que sucede en la escuela media cuando se abordan los problemas de regla y compás, habiéndolo dado al docente una previa instrucción; por tanto, puede ser importante recabar más datos al respecto. Lo que hemos observado con el ejemplo paradigmático se podría enriquecer mediante la discusión por parte de un mayor número de personas, lo cual nos llevaría a examinar más detalles de esta cuestión. Esta es la extensión mínima de la investigación, y probablemente en el examen minucioso de las actuaciones podrían surgir algunas diferencias, situación que daría más complejidad al fenómeno observado.

Por último, cabe señalar que el análisis de los resultados llevaría a una nueva revisión de las competencias, así como a realizar ajustes en la organización de una instrucción que persigue brindar al docente los elementos necesarios para ayudar a sus alumnos a apropiarse de ciertas formas de trabajo heurístico. Tales cuestiones han quedado fuera del alcance de este trabajo, aunque el carácter cíclico del modelo teórico local hace que se vuelva una y otra vez a ellas.

## BIBLIOGRAFÍA

- Beppo, Levi (1947). *Leyendo a Euclides*. Buenos Aires, Argentina: Ed. Rosario, S. A.
- Butts, T. (1980). Posing problems properly. En S. Krulik & R. Reys (Eds.), *Problem solving in school mathematics* (pp. 23-33). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

- Chartnay, R. (1994). Aprender por medio de la resolución de problemas. En C. Parra & I. Saiz (Eds.), *Didáctica de matemáticas: Aportes y reflexiones* (pp. 51 - 63). Bs. As., Argentina: Paidós Educador.
- Chevallard, Y. & Jullien, M. (1991). Autour de l'enseignement de la géométrie au collège (première part). *Petit x*, 27 (1), 41-76.
- Euclides (1991). *Elementos*. Madrid, España: Gredós.
- Eves, H. (1969). *Estudio de las geometrías* (tomo I). México: Unión Tipográfica Editorial Hispanoamericana.
- Filloy Yague, E. (1999). *Aspectos teóricos del álgebra educativa*. Colección Sociedad Mexicana de Matemática Educativa. México: Grupo Editorial Iberoamérica.
- Kilpatrick, J. (1985). A retrospective account of the past twenty-five years of research on teaching mathematical problem solving. En E. Silver (Ed.), *Teaching and learning mathematical problem solving: Multiple research perspectives* (pp. 1 - 15). Hillsdale, NJ, USA: Lawrence Erlbaum Associates.
- Lakatos, I. (1981). El método de análisis y síntesis. En *Matemáticas, ciencia y epistemología* (Vol. 2). Madrid, España: Alianza Editorial.
- Lester, F. K. (1985). Methodological considerations in research on mathematical problem solving instruction. En E. Silver (Ed.), *Teaching and learning mathematical problem solving: Multiple research perspectives* (pp. 41 - 69). Hillsdale, NJ, USA: Lawrence Erlbaum Associates.
- Newell, A. & Simon, H. (1972). *Human problem solving*. Englewood Cliffs, NJ, USA: Prentice Hall.
- Polya, G. (1945). *How to solve it*. Princeton, NJ, USA: Princeton University Press [Traducción castellana de J. Zugazagoitia (1965). *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Trillas].
- Polya, G. (1954). *Mathematics and plausible reasoning* (2 Vols). Princeton, NJ, USA: Princeton University Press. [Traducción castellana de J. L. Abellán (1966). *Matemáticas y razonamiento Plausible*. Madrid, España: Tecnos].
- Polya, G. (1962-1965). *Mathematical discovery* (2 Vols). New York, USA: John Wiley and Sons.
- Puig, L. (1994). *Semiótica y matemáticas*. Valencia, España: Episteme, Col. Eutopías.
- Puig, L. (1996). *Elementos de resolución de problemas*. Granada, España: Editorial Comares.
- Puig, L. & Cerdán, F. (1988). *Problemas aritméticos escolares*. Madrid, España: Síntesis.

Puig, L. & Cerdán, F. (1996). Un curso de heurística matemática para la formación del profesor. *UNO. Revista de Didáctica de las Matemáticas* 8, 83-90.

Scandura, J. M. (1977). *Problem solving. A structural/process approach with instructional implications*. New York, USA: Academic Press.

Schoenfeld, A. H. (1979). Explicit heuristic training as a variable in problem solving performance. *Journal for Research in Mathematics Education* 10, 173-187.

Schoenfeld, A. H. (1980). Heuristics in the classroom. En S. Krulik & R. Reys (Eds.), *Problem solving in school mathematics* (pp. 9-22). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Schoenfeld, A. H. (1983). *Problem solving in the mathematics curriculum: a report, recommendations and an annotated bibliography*. Washington, DC, USA: Mathematical Association of America.

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. Orlando, FL, USA: Academic Press.

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. En Grows (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 334-370). New York, USA: Mc Millan.

Schroeder, L. & Lester, F. (1989). Developing understanding in mathematics via problem solving. En P. R. Trafton (Ed.), *New directions for elementary school mathematics* (pp. 31-56). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

**Liliana Siferiz**

Centro Regional Universitario Bariloche

Universidad Nacional del Comahue

Río Negro. Argentina

lsineriz@bariloche.com.ar