2001
Claudia Acuña
CONCEPCIONES EN GRAFICACIÓN, EL ORDEN ENTRE LAS COORDENADAS DE LOS PUNTOS DEL PLANO CARTESIANO
Revista Latinoamericana de Investigacion en Matematica Educativa, noviembre, año/vol. 4, número 003
Comité Latinoamericano de Matemática Educativa
Distrito Federal, México
pp. 203-217

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa
Vol. 4, Núm. 3, noviembre, 2001, pp. 203-217

Concepciones en graficación, el orden entre las coordenadas de los puntos del plano cartesiano*

Claudia Acuña[1]

RESUMEN

El objetivo del presente trabajo fue investigar el uso y las concepciones asociadas a la comparación de orden entre las coordenadas de puntos sobre el plano para entender mejor el proceso de graficación en el plano cartesiano, desde un punto de vista semiótico en el sentido de R. Duval, en los estudiantes de bachillerato. La aplicación de cuestionarios a estudiantes con 17 años de edad como promedio indicó el conflicto entre el significado práctico de la magnitud o cantidad asociada con los números con signo. Las tareas planteadas pueden ser resueltas mediante una estrategia figural o numérica, en ambas, el conflicto puede ser resuelto mediante la supresión del signo y por tanto de la orientación en el plano. La graficación que se apoya en el punteo no es suficiente para tener una visión global y bien orientada sobre el plano porque deja sin resolver los problemas de interpretación de la gráfica. Encontramos que la comparación de orden entre las coordenadas de los puntos no es una tarea homogénea, depende frecuentemente de la posición de los puntos en los distintos cuadrantes y por tanto de la interpretación de la orientación en el plano y/o del valor de los números asociados a las coordenadas.

ABSTRACT

The purpose of this work among high-school students was to do research into the use and conceptions associated with the comparison of order between the coordinates of dots over the plane, in order to better understand the process of grafication in the cartesian plane, seen from a semeiotic point of view in the R. Duval sense. Questionnaries were completed among students averaging 17 years old. The results indicated the conflict between the practical meaning of the size or amount associated with the numbers bearing signs. The proposed tasks can be solved through a figural or numeric strategy. In both, the conflict may be solved through the suppression of the sign, and therefore through the orientation in the plane. The graphication that is supported in the dotting is not enough to have a well oriented global vision on the plane, as it leaves the problems of interpretation on the graphic, unresolved. We find that the comparison or order between the coordenates of the dots is not an homogenous work, it frequently depends on the position of the dots within the different quadrants, therefore, of the interpretation and orientation within the plane and/or of e value of the numbers associated to the coordenates.

**Fecha de recepción: enero de 2001*

[1] *Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav-IPN, México.*

RÉSUMÉ

L'objectif du travail fut de faire des recherches sur l'usage et les conceptions associées à la comparaison de l'ordre entre les coordonnées des points sur le plan pour mieux comprendre le processus de graphication dans le plan cartésien, dans un point de vu sémiotique dans le sens de R.Duval, chez les élèves du lycée. L'application des questionnaires aux élèves ayant 17 ans en moyenne indique le conflit entre le signifié pratique de la grandeur ou quantité associé aux numéros portant un signe. Les travaux posés peuvent être résolus en utilisant une stratégie figure ou numérique, dans les deux, le conflit peut être résolu en utilisant la suppression du signe et par conséquent l'orientation dans le plan. La graphication qui s'appui dans le pointage n'est pas suffisant pour avoir une vision globale et bien orientée sur le plan puisqu'il laisse sans résoudre les problèmes d'interprétation du graphique. On a trouvé que la comparaison d'ordre entre les coordonnés des points n'est pas un travail homogène, comme ceci dépend fréquemment de la position des points dans les différents quadrants et alors de l'interprétation de l'orientation dans le plan et/ou de la valeur des numéros associes aux coordonnés.

RESUMO

Investigamos a respeito do uso e das concepções dos estudantes de 2° grau relacionados à comparação de ordem entre as coordinadas de pontos sobre o plano. Observamos que: entre nossos estudantes se apresenta o conflito entre os significado prático da magnitude ou quantidade associada com os números e o sinal, quando ignoram a orientação no plano . Os requisitos para a graficação através de pontos não são suficientes para ter uma visão geral e bem orientada sobre o mesmo e a comparação de ordem entre as coordenadas dos pontos não é uma tarefa homogênea, e depende da posição do puntos nos diferentes quadrantes.

INTRODUCCIÓN

La graficación en la enseñanza de las matemáticas es objeto de usos diversos; puede ser considerada en sí misma un objeto de estudio cuando se le da un tratamiento de tipo analítico, también puede ser un punto de apoyo para la enseñanza del concepto de función o de relación o puede, incluso, usarse como un modelo de procesos naturales o sociales donde su papel fundamental se asocia con la interpretación de dichos procesos y en este caso la graficación es un instrumento que debe estar disponible para poder participar del proceso de interpretación.

La graficación de ecuaciones es parte de la currícula en los niveles medio básico y medio superior, pero el uso e interpretación que los estudiantes hacen de la gráfica en si misma enfrenta problemas que se observan incluso en los niveles universitarios (Schoenfeld, 1989).

Dicha graficación es desarrollada con frecuencia y casi exclusivamente a través del método del punteo o tabulación, lo que representa una fuente de error en el aprendizaje e interpretación de las gráficas. La graficación que se apoya en el *punteo* localiza puntos sobre la gráfica en cuestión a partir de la elección de una abscisa para obtener una ordenada, mediada por la ecuación, para después hacer uso de la continuidad y construir la curva en su totalidad.

Actualmente se considera importante, en la enseñanza de las matemáticas, no sólo conocer los distintos representantes del objeto matemático sino también la posibilidad de establecer relaciones entre ellos, considerándose, en el presente caso, las representaciones gráficas y algebraicas involucradas en el proceso de graficación.

Para desarrollar un proceso que relacione las representaciones algebraica y gráfica del mismo objeto matemático, tomamos en cuenta el punto de vista semiótico donde se consideran a los signos de la gráfica y de la ecuación en sus mutuas relaciones significativas.

Una de las relaciones que se establece entre los objetos geométricos del plano es la que se refiere al orden que guardan entre ellas las ordenadas, o las abscisas, de los puntos graficados; la cual además de ser de gran importancia para la interpretación de la gráfica y sus elementos, se supone generalmente incluida en el conocimiento que el estudiante tiene del orden entre los reales. A continuación observaremos que las concepciones que la mayoría de los estudiantes tiene sobre el orden de las coordenadas de los puntos, se apoyan frecuentemente en la idea de magnitud física más que en su conocimiento del orden entre los reales.

MARCO CONCEPTUAL

Pese a la gran cantidad de estudios desarrollados por los investigadores desde diferentes perspectivas como la cognitiva-epistémica, la semiótica o la social, aún no se sabe a ciencia cierta cómo se desarrolla el proceso de aprendizaje de la graficación; de lo que no hay duda es que para desarrollar esta tarea se ha de tratar con una estructura matemática que puede ser abordada a partir de las distintas representaciones que toman lugar en su desarrollo y es en este proceso, donde se manifiestan algunas formas de conceptualización de nuestros estudiantes que responden a la formación matemática antecedente.

La construcción de la gráfica nos proporciona un conjunto de objetos geométricos relacionados entre sí analíticamente y cada elemento sobre la gráfica tiene un par expresado a través del lenguaje algebraico, un punto, una recta o una curva. De hecho, la graficación se desarrolla como la interacción de dos estructuras en mutua dependencia, el fondo y la forma o figura-fondo y figura-forma.

La graficación, a diferencia de la figura geométrica, está vinculada necesariamente a un marco de referencia que es aquel que sugieren los ejes coordenados además, la gráfica propiamente dicha está determinada por la ecuación se conozca o no.

La graficación es una tarea que puede ser propuesta a través de un procedimiento que requiere de la distinción de dos entradas en la pareja y de dos orientaciones en la gráfica: la primera entrada es para el eje horizontal y la segunda para el vertical y una vez elegidas las opciones correspondientes sólo resta contabilizar los valores sobre el eje respectivo, este procedimiento es la base del punteo.

En la graficación que se apoya en el punteo, la asociación entre puntos y parejas ordenadas es manejada con relativa facilidad por los estudiantes. Hemos observado (Acuña, 1999) que la localización de puntos sobre la gráfica a partir de una pareja no representa un problema importante para la mayoría de ellos, siempre y cuando la información sobre los nombres de las coordenadas, las posiciones de las entradas así como la posición de los ejes, esté disponible. Sin embargo, cuando la localización de los puntos depende además de las relaciones determinadas por los objetos geométricos de la gráfica, los aciertos en la tarea descienden notablemente (Acuña, 1999).

El punteo ha sido, hasta hace poco tiempo, el único método con el que ha contado el profesor y el estudiante para graficar, y si éste se utilizara como un instrumento para interpretar la gráfica desde el punto de vista analítico resultaría insuficiente, ya que no explica las relaciones entre los objetos matemáticos graficados como los puntos o las curvas, ya sea que estén expresados a través de la gráfica o de la ecuación.

Insuficiente resulta también reconocer las propiedades de los símbolos gráficos desligados de la ecuación así como las propiedades figurales que aparecen tales como pendiente, concavidad, inflexión, entre otras, que no explican por sí mismas sus cualidades.

En los últimos años muchas investigaciones han sido desarrolladas en torno de la formación del concepto de función, la graficación de ecuaciones ha tenido un papel importante debido a que la gráfica es una de las representaciones más utilizadas.

Por otro lado la *apariencia* de una gráfica depende de la escala con la que se construye; por ejemplo, dos rectas se *ven* iguales además de tener la misma ecuación, cuando la escala en los ejes es idéntica en ambas gráficas. Las relaciones geométricas y analíticas entre los componentes gráficos son invariantes; sin embargo, las relaciones analíticas de la gráfica no dependen de la escala, aunque todas las relaciones sobre aquella están referidas a ésta.

En el aprendizaje de la graficación la *apariencia* juega un papel fundamental debido a que es la base de la aprehensión perceptiva, es decir, el primer acercamiento a la tarea de graficación.

Distintos investigadores han dado cuenta de gran diversidad de obstáculos que se presentan en la interpretación de las gráficas tal como se observa en los trabajos de Hitt (1995), Dugdale (1993), Moschovich et al (1993) y Leinhart et al (1990).

El problema de la interpretación de la gráfica y la de la conceptualización asociada a ella ha sido planteado dentro de una problemática mucho más amplia, aquella en la que se observan las relaciones entre distintos representantes del mismo objeto matemático (Janvier, 1986; Kaput, 1991; Duval, 1999)[2]

En el caso de la graficación las diferentes representaciones que participan en su construcción son: las algebraicas, las gráficas y las de la lengua natural, este último tipo de representación puede expresarse de forma aislada o en combinación con cada una de los otros dos tipos.

Considerar la graficación como un proceso que tiende un puente de significados en dos sentidos[3], es un trabajo útil y necesario para la enseñanza de la matemática, en tanto que amplía y diversifica la información sobre las características asociadas a los objetos o conceptos lo cual contribuye a la construcción de los significados asociados a ellos.

Las distintas representaciones del mismo objeto matemático refieren historias también distintas sobre sus cualidades matemáticas;

[2] La relación entre distintos representantes del mismo objeto matemático han sido denominadas como conversión, traslación, conexión, interpretación o codificación, en cada caso se interpreta distintamente la forma cómo se establece esa relación.

por ejemplo, la linealidad en la ecuación de una recta se puede contemplar como una relación proporcional numérica en la representación algebraica, en tanto que en la representación gráfica es posible establecerla como una relación proporcional entre segmentos.

El objeto matemático puede ser observado con base en sus representaciones a partir de los símbolos que lo conforman así como a sus relaciones significativas. Desde este punto de vista algunas relaciones no explícitas de la gráfica como la relación gestalt entre la figura-forma y la figura-fondo adquieren una importancia que antes no tenían.

En el caso que nos ocupa, los representantes algebraicos de los puntos cartesianos son las parejas ordenadas y los representantes gráficos son los rasgos marcados sobre el papel obtenidos como la intersección de las coordenadas de la pareja.

La relación de orden entre ordenadas o abscisas sobre la gráfica (figura-forma) toma sentido respecto al marco de referencia analítico que está formado por los ejes coordenados (figura-fondo). Es importante hacer notar que en esta relación no se requiere, en principio, de la presencia de la escala para que la relación de orden pueda ser establecida por comparación relativa, pero por otro lado, la cuantificación de la diferencia entre coordenadas si requiere de la escala sobre los ejes.

Es usual que la escala aparezca marcada en los ejes, ésta puede ser distinta en cada uno de ellos, lo que no afecta las *relaciones* entre los objetos graficados debido a que ellos permanecen invariantes, la diferencia se aprecia en la *apariencia* de la gráfica la cual creará obstáculos adicionales a la tarea de interpretación de la gráfica, mismos que no serán abordados en este trabajo. Sin embargo, este hecho marca una diferencia importante desde el punto de vista de la aprehensión perceptiva[4] de ella.

Los procesos a través de los cuales se transforman las representaciones desde un registro semiótico a otro son los de las *conversiones*, que según Duval (1994) *son las operaciones que transforman las representaciones en el cambio de registro* (p. 223).

En la graficación de ecuaciones se efectúan conversiones cuando se ha de pasar de un tipo de registro semiótico a otro, por ejemplo del gráfico al algebraico, cuando realizamos una gráfica a partir de una ecuación o cuando construimos la ecuación a partir de la gráfica y se ha de insistir en la importancia de pasar de un tipo de representación a otro, pero en ambos sentidos, para relacionar plenamente las representaciones.

También se desarrollan relaciones entre representantes dentro del mismo registro y a este tipo de relaciones se les llama *tratamientos* (Duval, 1999).

ESTRATEGIAS FIGURALES Y NUMÉRICAS DE ORDEN

La relación de orden entre las coordenadas de los puntos graficados, que son la base de este trabajo, pueden desarrollarse como *conversiones* o como *tratamientos* dependiendo del tipo de elementos que participen en la comparación. La comparación entre ordenadas o abscisas puede desarrollarse esencialmente de dos maneras distintas (Fischbein,1993) o como combinación de ellas.

[3] Entre la ecuación y la gráfica e inversamente.

[4] La aprehensión perceptiva es aquella que se desarrolla de forma instantánea y global.

Cuando la comparación de orden se apoya en la oposición entre los segmentos de recta, ya sean reales o imaginarias, asociados a la posición de los puntos en cuestión, se trata de un *tratamiento* debido a que se establece una relación entre dos representantes gráficos y a este tipo de comparación la hemos llamado estrategia figural de orden.

Sin embargo la comparación de orden también puede hacerse de otra forma, en los casos en donde los ejes cuentan con una escala numérica marcada o donde es posible construirla, se compara, no sólo a los puntos gráficos a través de sus posiciones, sino también por medio de los valores de las coordenadas respectivas. Aquí la relación de orden se refiere a un proceso de *conversión* entre representantes: uno gráfico y otro numérico[5]. A este tipo de comparación la llamaremos en adelante: estrategia numérica de orden.

También es posible que los estudiantes transiten de una estrategia a otra varias veces dotando a los segmentos de los respectivos valores, o hien hasta que les permita tomar una decisión respecto a la comparación de orden.

La comparación de la estrategia figural de orden se puede apoyar en las consignas generales de los números reales sobre la recta numérica que dice: *"la abscisa del punto en cuestión es mayor que la otra si está a la derecha de ella, es menor si está a la izquierda"*. En cuanto a las ordenadas, la consigna es: *"la ordenada del punto es mayor si está arriba de la otra y menor si está abajo"*. En el caso de la estrategia figural de orden se realiza una diferencia cuantitativa, mientras que en la estrategia numérica la comparación se hace mediante una diferencia numérica[6]. En el de la estrategia numérica los estudiantes enfrentarían los problemas derivados del tratamiento de diferencias con números positivos y/o negativos.

En la enseñanza de la suma y diferencia de los números negativos es común utilizar el modelo de la recta numérica, la suma y la diferencia entre enteros; en los niveles básicos, los puntos son tratados a través de desplazamientos con dirección o considerando su posición relativa.

Este manejo del orden sobre la recta es un antecedente para el trabajo sobre el plano, sin embargo no significa que el plano se reduzca a una copia por duplicado de la recta numérica.

El orden que se refiere a las ordenadas o las abscisas, pese a que provoca una observación separada de las entradas, no suprime información sobre ninguna de ellas. Por ejemplo: si consideramos al semiplano $y > 0$, no sólo estamos hablando de los valores de las ordenadas del semiplano, la lectura de esta indicación debe hacerse con base en lo que aparece explícitamente y de lo que no aparece, en particular aquí también se indica, implícitamente, que las abscisas de todos los puntos del semiplano pueden tomar cualquier valor.

La posición de los puntos sobre el plano requiere instrucciones de las dos coordenadas de cada punto al mismo tiempo, a esta

[5] El registro numérico está incluido en el registro algebraico.

[6] En acuerdo con Thompson (1993) *Comparar dos cantidades con la intención de encontrar el exceso de uno contra otro, es una operación cuantitativa. La diferencia cuantitativa de dos cantidades, la cantidad por la cual una excede a la otra es el resultado de compararlos aditivamente. Mientras que las diferencias numéricas significarán el resultado de sustraer. La diferencia cuantitativa y la diferencia numérica no son sinónimas. Una diferencia cuantitativa no siempre es evaluada por sustracción, y la sustracción podría ser usada para evaluar otras cantidades que no fuesen diferencias cuantitativas* (p. 166).

propiedad la hemos llamado *bidimensionalidad.*

Utilizar el modelo de la recta numérica ha provocado contradicciones respecto a su uso, algunos lo consideran viable, especialmente como parte de una posible auto instrucción tal es el caso de Hativa y Cohen (1995). También hay quienes le consideran un instrumento muy complejo para el aprendizaje de los números negativos en el nivel básico como Küchermann (1981).

Algunos de los problemas que se presentan en el aprendizaje de los números negativos desde el punto de vista de Hativa y Cohen. (1995), son:

a) El conflicto entre el significado práctico de la magnitud o cantidad asociada con los números en la enseñanza temprana de la aritmética;

b) El conflicto entre dos diferentes significados (una operación y una dirección) del signo (-) como en -1 - (-2).

c) La ausencia de un buen modelo intuitivo y familiar que pueda satisfacer consistentemente todas las propiedades algebraicas de los números con signo (p. 401).

El conflicto al que hace referencia el inciso *a* puede considerarse como un ejemplo de la aplicación de la Ley Intuitiva[7] "Más de A - Más de B" de la que Tirosh y Stavy (1999) hablan y bajo esta ley un segmento mayor estaría asociado a un valor mayor e inversamente; en particular esta idea coincide con la relación de orden en el primer cuadrante pero resulta inadecuado para los tres restantes.

Es posible que los estudiantes que utilizaran la estrategia numérica de orden presentaran el conflicto comentado en *b*, pese a que, las preguntas en nuestros cuestionarios incentivan la estrategia de orden figural, en tal caso, la omisión del signo en la comparación de orden numérica da como resultado una omisión de la dirección y la posibilidad de aplicar nuevamente la Ley Intuitiva "Más de A - Más de B" en la comparación de orden a través de una diferencia entre números positivos.

Respecto al tercer conflicto comentado en el inciso *c* la respuesta sobre si el plano como espacio formado con dos rectas numéricas es o no, un buen modelo para la geometría analítica, requeriría de otro tipo de investigación la cual no es abordada en el presente trabajo.

Retomando el inciso *a*, observamos que la aplicación de la regla intuitiva antes mencionada aparece en la comparación de segmentos asociados a los valores de las coordenadas como se muestra en la Figura 1, por ejemplo.

La relación de orden entre A y B es la misma en ambas gráficas superiores, sin embargo, bajo la regla intuitiva (Más de A - Más de B) esto no parece ser así tal como se observa en las gráficas inferiores y bajo esta regla el orden de puntos con las mismas posiciones relativas

[7] Es pertinente la aclaración que sobre intuición hace E. Fischbein (1999): *Una nota importante: No todo conocimiento directo es una intuición. La percepción es directamente obtenida por los sentidos, pero ellas no son intuiciones. Las intuiciones son actos del conocimiento intelectual – expresan una concepción general una noción, un principio, una interpretación una predicción una solución) mientras que las percepciones son actos del conocimiento sensorial (por ejemplo: veo una silla un triángulo).*

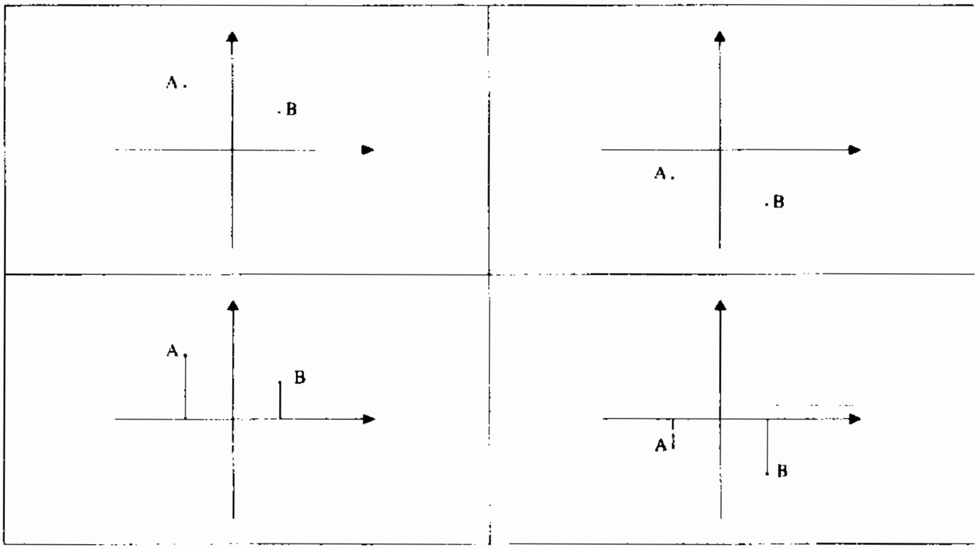


Figura 1

cambia dependiendo de la zona del plano sobre la que se encuentren las coordenadas de los puntos a comparar.

Este es un caso en el que la apariencia permite aplicar lo dicho por Noss: "*sabemos que cuando una poderosa imagen visual es presentada, los estudiantes tienden a exhibir una preferencia por resolver los problemas por simple percepción más que por la movilización de algún conocimiento matemático*" (Noss et al, 1997).

La desaparición del sentido en los segmentos asociados a las posiciones de las coordenadas es el origen del conflicto que se presenta en la comparación de segmentos cuando se utiliza la estrategia figural de orden.

Similarmente, la supresión del signo negativo de los valores de las coordenadas es el motivo del conflicto que surge en la comparación numérica cuando se hace uso de la estrategia numérica de orden.

METODOLOGÍA Y TAREAS PROPUESTAS

En investigaciones anteriores realizadas por nosotros sobre la graficación de puntos, rectas y semiplanos, propusimos cuestionarios a estudiantes de bachillerato que contenían tareas sobre las relaciones de orden entre coordenadas. Este trabajo previo apuntó sobre la necesidad de observar detenidamente la interpretación del orden entre las coordenadas en el plano, así como el uso que los estudiantes hacen de éste, especialmente cuando se pedía la tarea de descripción de objetos geométricos tales como rectas o semiplanos.

Trabajamos con dos grupos con un total de 77 alumnos de tercer semestre de bachillerato con una edad de 17 años como promedio en una escuela pública de bachillerato urbana. Un grupo está formado de estudiantes de clase media baja sin ninguna particularidad especial, pertenece al turno matutino. El segundo grupo es de la misma escuela y del turno vespertino, lo que significa que algunos de ellos trabajan y además un gran número de ellos cursa la materia por segunda vez.

Los cuestionarios tienen una introducción en donde se hace un recordatorio sobre la distinción entre ordenada y abscisa a través de sus denominaciones, su posición en la pareja ordenada y su relación con los ejes coordenados, de modo tal que la confusión entre ellos no fuese un obstáculo en las tareas solicitadas.

Los puntos utilizados como referencia en la tarea propuesta se situaron en coordenadas enteras y en los alrededores del origen ubicados siempre dentro de la hoja de papel. No es de extrañar que únicamente 3% de las respuestas gráficas de nuestros estudiantes se refirieran a coordenadas cuyos valores no corresponden a números enteros y la elección del tipo de números involucrados se debió a que deseábamos que éstos no fueran un obstáculo.

Las tareas propuestas tenían como objeto indagar sobre el manejo que los estudiantes hacían de tratamientos figurales por ello, se desalentó el uso de la estrategia numérica de orden a través de escasa información en las escalas sobre los ejes. Éstas fueron abordadas a través de preguntas que pretendían que los estudiantes respondieran mediante valoraciones visuales de la relación mayor-menor sobre el plano cartesiano, y describieran propiedades generales de orden entre las coordenadas de conjuntos de puntos.

Las actividades se referían fundamentalmente a la comparación de orden de las coordenadas de puntos gráficos, por lo que la estrategia de comparación figural era la más adecuada para contestar a las preguntas; sin embargo, la estrategia numérica de orden no se descarta, sobre todo, en las gráficas en las que aparecen marcas en los ejes coordenados[8].

Por otro lado ni las respuestas, ni la observación de la experiencia, evidenciaron el uso de la estrategia de orden numérico por parte de los estudiantes que participaron.

En observaciones anteriores, los estudiantes mostraron un uso correcto del procedimiento de punteo sobre el plano, tarea que tiene como requisitos: la distinción entre ordenada y abscisa, la orientación en el plano respecto al sentido positivo del negativo así como la identificación de los valores de los números sobre el eje coordenado (Acuña, 1999).

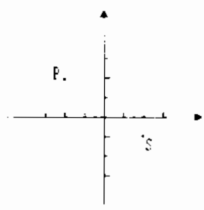
El cuestionario, base de nuestro trabajo, constó de tareas tales como: localizar puntos sobre el plano; dibujar un punto o conjunto con ciertas restricciones sobre el orden, elegir ciertos puntos o zonas a partir de determinados criterios que involucran también al orden.

A continuación mostramos una selección de las actividades propuestas en donde fue posible observar la concepción de una parte de nuestros estudiantes respecto al orden entre coordenadas. Las primeras tareas requieren de la colocación de puntos tomando como referencia otros, las condiciones para la construcción se relacionan con el orden de las coordenadas.

[8] Hacemos esta consideración apoyados en los hallazgos de Krutetskii (1969) en el sentido de las diferentes habilidades que los estudiantes desarrollan al resolver tareas geométricas.

6.Dibuja lo siguiente:

a. Un punto A con igual abscisa que P, pero con mayor ordenada.
b. Un punto C con menor abscisa y mayor ordenada que S.
c. Un punto D con mayor abscisa y menor ordenada que S.



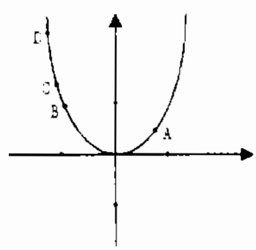
Las siguientes, son las tareas correspondientes a la elección de puntos bajo condiciones de orden

7. En la gráfica que tenemos enseguida, hemos marcado algunos puntos:

a. ¿Qué punto tiene menor abscisa?

____

b. Localiza el punto que tiene la mayor ordenada de todos los puntos marcados sobre la gráfica e indícalo con una cruz.

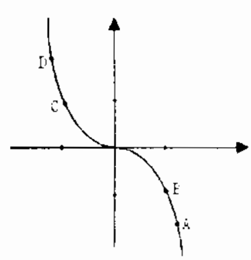


8. Aquí también hemos marcado algunos puntos

a. ¿Qué punto tiene mayor ordenada?

____

b. Localiza el punto que tiene la menor abscisa de todos los puntos marcados sobre la gráfica e indícalo con una cruz



DISCUSIÓN DE RESULTADOS

La Tabla 1 muestra los resultados de las tareas seleccionadas.

En el inciso 6a se solicitó decidir sobre la mayor ordenada de un punto, (-2, 2), elegimos este punto P en la zona de las abscisas negativas para observar si los estudiantes procedían bajo la regla general de "los mayores están a la derecha" o si la respuesta se veía influida por su posición respecto a los distintos cuadrantes.

Preguntas	Aciertos	Otra respuesta, la de mayor frecuencia
6 a	49.4%	(2,3), 15.5%
6 b	40.3%	(1, -3), 10.3%
6 c	22.1%	(3,0), 14.2%
7 a	D, 32.5%	A, 46.8%
7 b	D, 80.5%	A, 10.4%
8 a	D, 68.8%	A, 16.9%
8 b	D, 23.4%	C, 41.6%

Tabla 1: Resultados de las tareas seleccionadas.

Llama la atención que las respuestas más frecuentes (15.5%) den, erróneamente por correcto al punto (2,3), la abscisa igual a (-2) localizada sobre la recta puede verse como un desplazamiento de dos unidades, al hacerlo en el sentido opuesto se hace de lado el requisito de la dirección, mientras que la ordenada es correcta. Aquí observamos *el conflicto entre el significado práctico de la magnitud o cantidad asociada con los números en la enseñanza temprana de la aritmética* al que se refieren Hativa y Cohen (1999).

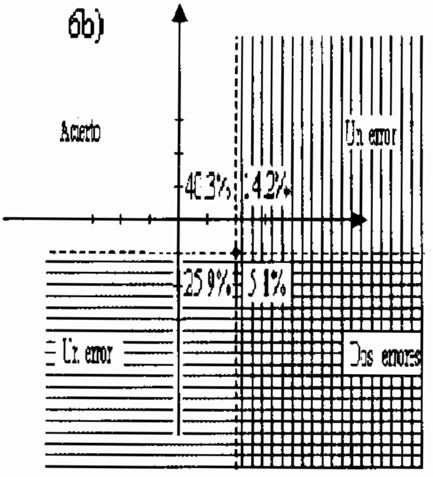
El hecho de no considerar el sentido, y por consecuencia, omitir el signo de la abscisa de la respuesta en el inciso a se vio influido por la posición del punto en el segundo cuadrante, esto sucedió porque no se aplica la regla general de orden entre abscisas.

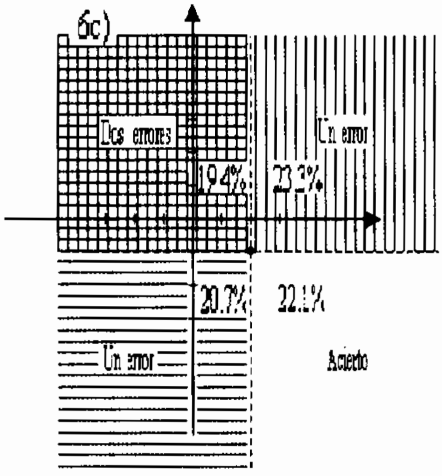
Las respuestas de los incisos b y c fueron lógicamente equivalentes en tanto que son preguntas complementarias, sin embargo las frecuencias correctas son muy distintas (40.3% y 22.1%, respectivamente), por lo que podemos afirmar que para una parte de los estudiantes la orientación de la relación *mayor que* no es la contraparte de la relación *menor que*.

El uso de la implicación *mayor a la derecha (o arriba), entonces menor a la izquierda (o abajo)* dispuso al estudiante para resolver, por un lado puntualmente cada indicación, y por otro, para no contar con un esquema global de orientación en el plano, como veremos enseguida.

Las respuestas pueden tener uno o dos errores, las siguientes gráficas nos muestras los resultados globales.

En el inciso 6b la frecuencia del error en la ordenada fue de 25.9%, en cambio en el inciso 6c la frecuencia de los aciertos fue del 22.1% y se acercó mucho a la de los errores en la ordenada y la abscisa (23.3% y 20,7% del I y III cuadrante). Las diferencias entre las respuestas del inciso 6a y 6b nos sugieren que una parte de los estudiantes hace una observación fragmentada de la relación mayor-menor y que





tampoco contó con una visión *global* de la orientación sobre el plano que implicaría poder desplazarse bajo las indicaciones del sentido positivo o negativo.

Las preguntas siguientes correspondieron a la elección de ciertos puntos a partir de sus relaciones de orden respecto a otros, pero estos puntos no están alineados y por ello no pudieron bacer una comparación colineal de los segmentos de recta, reales o imaginarios. Las coordenadas a comparar pertenecen a puntos que están sobre curvas familiares.

Las preguntas 7a y 8b fueron iguales y esta misma situación se repitió en 7b y 8a, si se tiene dominio de la consigna para la mayor ordenada y la menor abscisa de cualquier punto sobre el plano. Las tareas fueron las mismas desde el punto de vista lógico aunque la diferencia psicológica está en la apariencia de las curvas, la cual fue determinante ya que se obtuvieron frecuencias de éxito distintas. En el primer caso tuvimos 32.5% y 23.4% respectivamente, en el segundo caso 80.5% y 68.8%.

El último resultado 7b y 8a en donde los estudiantes se dejaron influir por la apariencia de la curva y permitieron el dominio de la ley Intuitiva antes mencionada. En la tarea 7b el punto de mayor ordenada coincidió con el segmento de recta más distante del eje horizontal (80.5%); en cambio, la posición de la ordenada mayor de la tarea 8a (D, 68.8%) la curva presentó dos segmentos igualmente distantes del eje horizontal por lo que podría pensarse en dos posibilidades, la respuesta correcta D tiene la frecuencia mencionada, en tanto que la segunda opción, considerando el tamaño del segmento (punto A), tuvo una frecuencia de 16.9%.

La parte de la curva que está en el segundo cuadrante coincidió en las dos gráficas, este hecho que podría ser útil para resolver la pregunta sobre las ordenadas no pareció ser detectado por nuestros estudiantes.

Respecto al otro par de preguntas iguales 7a y 8b vale la pena mencionar que las mayores frecuencias de respuestas erróneas fueron dadas en 7a, al punto A, que representa al (46.8%), y en 8b fue para C con el (41.6%). En ambos casos las abscisas sin signo coincidieron con el hecho de tener segmentos más cercanos al eje vertical, omitiendo el sentido. En las respuestas a 8b hay dos opciones con esta característica, nuevamente ignorando la dirección, la opción por encima del eje horizontal se vio más favorecida.

En estas soluciones a las tareas propuestas se está haciendo funcionar la ley Intuitiva *Más de A - Más de B* que en este caso se refiere al tamaño del segmento asociado al valor de la coordenada respectiva, enunciada anteriormente.

CONCLUSIONES

Las respuestas dadas a los ejercicios que se plantean en el cuestionario propuesto, indicaron que un sector de nuestros estudiantes padecen *el conflicto entre el significado práctico de la magnitud o cantidad asociada con los números en la enseñanza temprana de la aritmética* comentado por Hativa y Cohen (1995), al ignorar el sentido en el uso de los segmentos, reales o imaginarios, que asocian a los valores de las coordenadas. Este conflicto admite la aplicación de la ley intuitiva *Más de A - Más de B* que en este caso se traduce como: el segmento más pequeño se asocia al valor más pequeño e inversamente; esta consigna solamente sirve en el primer cuadrante pero no en los otros, de esta manera la comparación de orden sobre el plano no es homogénea ya que depende de la posición relativa a los puntos en los cuadrantes.

Observamos también que para algunos estudiantes el hecho de decidir en dónde se sitúan las coordenadas mayores no necesariamente implicó tener la certeza de la posición que ocupan las menores, lo que le dota de una visión fragmentada de la ubicación sobre lc plano.

La gráfica solicita relaciones de orden sobre las coordenadas que el estudiante no puede resolver con tan sólo los requisitos del punteo. Para establecer el orden entre coordenadas el estudiante debe hacer una valoración de su posición relativa, es decir, para saber cuál es mayor en este caso, hay que responder a la pregunta de cuál está por arriba del otro; sin embargo pareciera que el problema se plantea en términos de la oposición de los segmentos y sus relaciones, en esta apreciación observamos la preeminencia que se da al manejo del plano cartesiano en términos de la descripción de parejas de números negativos y positivos más que en el manejo de un espacio bidimensional orientado.

Las relaciones de orden en el plano se ven afectadas frecuentemente por el conflicto entre el significado práctico de la magnitud y los números con signo que permite la aplicación de la Ley Intuitiva antes comentada, que son sin duda parte de una instrucción relativa a la medida, intuición apoyada en la vida cotidiana que puede ser transformada a partir de una ampliación y enriquecimiento las experiencias disponibles para el estudiante.

Por ello es necesario incorporar explícitamente la noción de sentido en el caso de la asociación de segmentos a los valores de las coordenadas, o del papel del signo, en el caso del tratamiento directamente numérico de éstas para proceder a realizar la comparación de orden entre ellos.

BIBLIOGRAFÍA

Acuña, C. (1999). La Relación entre el Fondo y la Forma y la Bidimensionalidad de los Puntos entre Estudiantes de Bachillerato. En *Memorias del VII Simposio Internacional en Educación Matemática Elfriede Wenzelburger* (pp. 176-182), UPN, Grupo Editorial Iberoamérica.

Acuña, C. (1999 b). La Ubicación Espacial de Conjuntos de Puntos en el Plano. En F. Hitt (Ed.), *Investigaciones en Matemática Educativa II*, (pp. 203-223). Grupo Editorial Iberoamerica.

Dugdale, S. (1993). Functions and Graphs - Students Perspectives on Students Thinking. En A. Schoenfeld (Ed.) *Integrating Research on the Graphical Representation of Functions, Estudies in Mathematical Thinking and Learning series*, 101-130.

Duval, R. (1994). Les representations graphiques: functionnement et conditions de luer apprentissage. *Proceedings of the 46th CIAEM Meeting Representations graphique et symbolique de Maternelle à L'Université.*

Duval, R. (1999). Representation, Vision and Visualization Cognitive Functions in Mathematical Thinking. Basic Issues for Learning. *Proceedings of the Twenty First Annual Meeting of Psychology of Mathematics Education*, 3-26.

Fischbein, E. (1993). The theory of figural concepts. *Educational Studies in Mathematics* 24, 139-162.

Fischbein, E. (1999). Intuitions and Schemata in Mathematical Reasoning, *Educational Studies in Mathematics* 38, 11-50.

Hativa, N. & Cohen D. (1995). Self learning of negative number concepts by lower division elementary students through solving computer-provided numerical problems. *Educational Studies in Mathematics* 28, 401- 431.

Hitt, F. (1995). Intuición primera versus pensamiento analítico: Dificultades en el paso de una representación gráfica a un contexto real y viceversa, *Educación Matemática* 7(1), 63-75.

Kaput, J. (1991). Notation and Representations as Mediators of Constructive Processes. En E. von Glaserfeld (Ed.), *Radical Constructivism in Mathematics Education*, 53-74.

Krutetskii, (1969). The Structure of mathematical Abilities. En J. Kilpatrick & I. Wirszup (Eds.) *Soviet Studies in the Psychology of Learning and Teaching Mathematics*, Vol. II.

Küchermann, D. (1981). Positive and Negative Numbers, Children's Understanding of Mathematics. En J. Murray (Ed.), *The CSMS mathematics team*, Hart K., 11-16

Janvier, C. (1986). Translation Processes in Mathematics Education, . En. C. Janvier (Ed.), *Problems of Representation in the teaching and Learning of Mathematics*, 27-32.

Leinhart, G., Zaslavsky, O. & Stein, M. (1990). Fuctions and Graphing. *Review of Educational Reseach* *60* (1), 1-63.

Moschkovich, J., Schoenfeld, A. & Arcavi, A. (1993). Aspects of Understanding: On Multiple Perspectives and Representations of Linear Relations and Connections Among Them. En A. Schoenfeld (Ed.), *Integrating Research on the Graphical Representation of Functions, Studies in Mathematical Thinking and Learning series*, 69-100.

Noss, R., Healy, L. & Hoyles, C. (1997). The Construction of the Mathematical Meanings Connecting the Visual with Simbols, *Educational Studies in Mathematics* 33, 203-233.

Schoenfeld, A. (1989). Explorations of students' beliefs and Behavior. *Journal for Research in Mathematics Education 20*(4), 338-355.

Thompson, P. (1993). Quantitave reasoning, complexity, and additive structures, *Educational Studies in Mathematics* 25, 165-208.

Tirosh, D. & Stavy, R. (1999). Intuitive Rules: a way to explain and Predict Students' Reasoning, *Educational Studies in Mathematics* 38, 51-66.

La Autora:

Claudia Acuña Soto

Departamento de Matemática Educativa Centro de
Investigación y de Estudios Avanzados del IPN Avda.
IPN 2508, San Pedro Zacatenco C.P. 07300, México D.F.
E-Mail: cacuna@mail.cinvestav.mx