2001
Sonsoles Blázquez / Tomás Ortega
LOS SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN EN LA ENSEÑANZA DEL LÍMITE
Revista Latinoamericana de Investigacion en Matematica Educativa, noviembre, año/vol. 4, número 003
Comité Latinoamericano de Matemática Educativa
Distrito Federal, México
pp. 219-236

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa
Vol. 4, Núm. 3, noviembre, 2001, pp. 219-236

Los sistemas de representación en la enseñanza del límite•

Sonsoles Blázquez*
Tomás Ortega*

RESUMEN

En este artículo se reporta una investigación, que forma parte de otra mucho más amplia en la que se investiga la noción de "límite" en alumnos de Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales (MACS), de 17-18 años, en el Sistema Educativo Español (LOGSE). En el trabajo general se hace una revisión de las publicaciones afines al tema, se examina el currículo de MACS y se analizan todos los libros de texto que existían en España, para lo que se diseñó un sistema de categorías apropiado.

Se fijan las hipótesis de trabajo y, dentro del marco teórico del pensamiento matemático avanzado, se desarrolla una metodología de tipo cualitativo que, entre otras cosas, permitió establecer una nueva conceptualización de "límite funcional" e investigar el papel que ocupa en la enseñanza la representación del concepto de "límite de una función".

Aquí, en el primer epígrafe, se establece el significado de "representación" y su relación con la comprensión; en el segundo, se considera el papel de las representaciones en la enseñanza actual; y, por último, se reportan los resultados de la investigación sobre las representaciones del límite funcional, destacando que el aprendizaje del concepto de límite choca con las dificultades del cambio de sistema de representación y que el uso de distintas representaciones favorece el aprendizaje.

ABSTRACT

This article, part of a much more ambitious research project, provides details of a study dealing with the concept of "limit" as found in the course of study for 17-18-year-old students of Mathematics for Social Scientists in the Spanish educational system (LOGSE). The first part of the general study reviews the literature related to the subject before going on to examine the syllabus and to analyse the textbooks available in Spain. This involved setting up a system of categories to be scrutinized.

The research project was carried out in the realm of advanced mathematical thinking. After stating the hypothesis on which this particular study is based, the authors go on to develop a qualitative methodology which, among other findings, permits him to identify a new conceptualisation of "functional limit", while at the same time following up how the concept "the limit of a function" affects the teaching–learning process.

•*Fecha de recepción: enero de 2001*

* *Departamento de Análisis Matemático y Didáctica de la Matemática, Universidad de Valladolid. España.*

Here the study is divided into three sections. The first establishes the meaning of "representation" and how it relates to comprehension, while the second ponders the role of representations in present-day teaching. Finally we are given the results of the study carried out on representations of the functional limit, which highlights the fact that grasping the concept of "limit" encounters difficulties when the system of representation changes and that the use of different systems of representation facilitates the learning process.

RESUME

Cet article rend compte d'un des aspects d'une vaste recherche sur la notion de "limite" chez les étudiants en Mathématiques appliquées aux sciences sociales (MACS), de 17 à 18 ans, dans le système éducatif espagnol (LOGSE). Ce travail examine les publications sur ce thème, étudie le programme de MACS et analyse tous les manuels existants en Espagne selon un système approprié de catégories.

Les hypothèses de travail sont fixées et une méthodologie qualitative est élaborée dans le cadre théorique de la pensée mathématique avancée. Cette méthodologie permet, entre autres choses, d'établir une nouvelle conceptualisation de la "limite fonctionnelle" et d'étudier le rôle que joue, dans l'enseignement, la représentation du concept de "limite d'une fonction".

La signification de "représentation", ainsi que son rapport avec la compréhension, fait l'objet d'une première partie ; dans la seconde partie, le rôle des représentations est envisagé dans le contexte de l'enseignement actuel. Enfin, il est rendu compte des résultats de la recherche sur la représentation de la limite fonctionnelle et l'accent est mis sur le fait que l'apprentissage du concept de limite se heurte aux difficultés du changement de système de représentation et que l'utilisation de différentes représentations favorise l'apprentissage.

RESUMO

Este artigo faz referência a uma pesquisa que forma parte de outra, muito mais abrangente, onde se realiza a pesquisa da noção de "limite" em alunos de Matemáticas Aplicadas às Ciências Sociais (MACS), de 17-18 anos, no Sistema Educacional Espanhol (LOGSE). O trabalho geral envolve uma revisão das publicações afins ao tema, se examina o currículo do MACS e são analisados todos os livros de texto que existiam na Espanha, para o qual foi desenhado um sistema de categorias apropriado. São estabelecidas as hipóteses de trabalho e, dentro do marco teórico do pensamento matemático avançado, é desenvolvida uma metodologia do tipo qualitativo que, entre outras coisas, permitiu estabelecer um novo conceito de "limite funcional" e pesquisar o papel que ocupa no ensino a representação do conceito de "limite de uma função". Aqui, na primeira epígrafe, é estabelecido o significado de "representação" e sua relação com a compreensão; na segunda, é considerado o papel das representações no ensino atual e finalmente são apresentados os resultados da pesquisa sobre as representações do limite funcional, salientando que a aprendizagem do conceito de limite choca com as dificuldades da mudança de sistema de representação e que o uso de diferentes representações favorece a aprendizagem.

REPRESENTACIÓN DE LOS CONCEPTOS

Una de las preocupaciones de los investigadores en Didáctica de la Matemática se centra en averiguar cómo se produce el conocimiento de los alumnos. Una vez que el investigador establece lo que entiende por conocimiento, inevitablemente, éste estará vinculado a las representaciones de los conceptos, ideas o relaciones. De ahí la importancia que, en investigación, se le da hoy en día a las representaciones en Educación Matemática.

Castro y Castro (1977) hacen una revisión bibliográfica sobre la noción de representación y muestran cómo para pensar y razonar sobre ideas matemáticas es necesario hacer representaciones internas de las mismas (para que así la mente pueda operar sobre ellas), mientras que para comunicar estas ideas se necesitan representaciones externas de las mismas por medio de signos. Según Duval (1993) las primeras se desarrollan al interiorizar las segundas y la diversificación de representaciones del mismo objeto o concepto aumenta la capacidad cognitiva de los sujetos sobre ese objeto o concepto, y en este sentido, para Castro y Castro (1997, p. 103), *dominar un concepto matemático consiste en conocer sus principales representaciones y el significado de cada una de ellas, así como operar con las reglas internas de cada sistema y en convertir o traducir unas representaciones en otras, detectando qué sistema es más ventajoso para trabajar con determinadas propiedades.*

En la investigación general se ha considerado en modelo de comprensión de Sierpinska (1990), que propone la comprensión como un acto que está inmerso en un proceso de interpretación, y que se desarrolla en forma de dialéctica, lo que produce un nuevo conocimiento, ligado a cuatro actos de comprensión (identificación, discriminación, generalización y sintetización). Aquí se considera la comprensión en el sentido que el proceso de interpretación está relacionado con sus representaciones y, por tanto, con el dominio del concepto como indican Castro y Castro. Para estos autores, los conceptos matemátieos se pueden expresar por varios sistemas, dando lugar a lo que Janvier et al (1993) llaman representaciones sinónimas (las representaciones diferentes de un mismo objeto matemático). En el concepto de límite nosotros consideramos estos cuatro sistemas de representación: verbal, numérico, gráfico y simbólico.

Como ya se ha indicado, la idea de comprensión está ligada a los sistemas de representación y, según Romero (2000), la comprensión se caracteriza a partir de una serie de actividades asociadas a los sistemas de representación, como las que se enuncian a continuación, actividades que se ilustran con referencias a la didáctica del concepto de límite, que será objeto de nuestra investigación:

Formación de representaciones identificables en un sistema dado: Dentro de un mismo sistema hay multitud de representaciones que caracterizan cada uno de los sistemas de representación. Dreyfus (1991) alerta que las distintas representaciones mentales podrían entrar en conflicto, si bien, utilizando un proceso de abstracción, se consigue complementarlas e integrarlas en una representación más simple. Así, por ejemplo, las figuras 1, tomada de Robinet (1983), 2 y 3 usuales en análisis, 4 y 5, tomadas de Ortega (1998), son representaciones diferentes de límite funcional en un sistema gráfico. En la Figura 4, que tiene más que ver con el proceso didáctico, se trata de representar un proceso explicativo de localización de los puntos de la gráfica dentro de la zona orlada (lo que debe ocurrir en esa zona) en el sentido de que la existencia de límite condiciona la localización de la gráfica y no al revés, mientras que en la Figura 5 las tendencias secuenciales de la variable independiente y las correspondientes de la variable dependiente pueden sustituir o fijar esta localización gráfica con precisión.

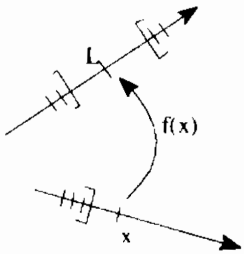


Figura 1

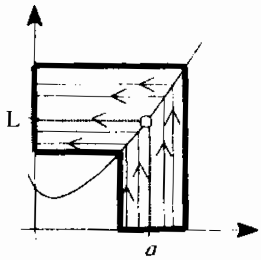


Figura 2

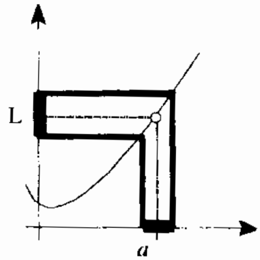


Figura 3

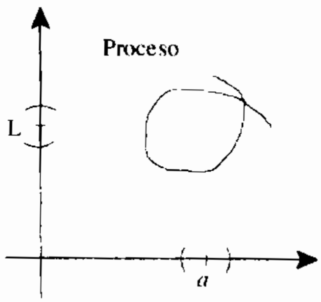


Figura 4

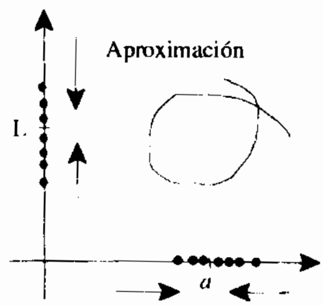


Figura 5

· *Transformación dentro de un sistema de representación:* Puesto que existen distintas representaciones dentro de un mismo sistema es necesario considerar las transformaciones de unas a otras. Por ejemplo, un sistema algebraico para representar el límite debe incluir una serie de reglas para pasar de la definición topológica a la definición métrica.

· *Traducción entre sistemas de representación:* Además de existir distintas representaciones dentro de un sistema, existen pluralidad de sistemas de representación vinculados a un mismo concepto, con lo que la traducción de un sistema a otro se hace imprescindible. Por ejemplo, los cuatro sistemas considerados (verbal, numérico, gráfico y simbólico) representan el mismo concepto, aunque algunos destacan unos aspectos más que otros.

· *Cristalización*: Un paso más general que la simple traducción entre sistemas de representación supone la formación de relaciones entre objetos de la estructura conceptual considerada. Una vez que se consigue la traducción entre todos los sistemas de representación asociados, el concepto surgirá como aquello que tienen en común todas sus representaciones y el campo conceptual de límite habrá cristalizado.

· *Modelización*: Aún más general es el hecho de traducir situaciones a uno o varios sistemas de representación, de utilizar la estructura conceptual creada en la mente para modelizar determinadas situaciones. La estructura conceptual asociada al límite sirve para modelizar muchas situaciones, por ejemplo, aquellas en las que existe una variación relativa entre magnitudes.

Como indica Rico (2000) son muchos los investigadores que han puesto de manifiesto la necesidad, ya indicada, de utilizar distintas representaciones de un mismo concepto para captar la complejidad del mismo. Esto es así porque los sistemas de representación se complementan, muestran distintos aspectos del concepto o los mismos, con mayor o menor claridad, y porque todos ellos son limitados y necesitan de otros (Romero, 2000). De hecho, Dreyfus (1991) considera que el éxito en matemáticas implica poseer representaciones mentales ricas, que contengan muchos aspectos del concepto relacionados entre sí. De ahí la importancia de coordinar los distintos sistemas.

SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN EN LA ENSEÑANZA

Como destaca Romero (2000), en la enseñanza tradicional se ha dado poca importancia a las distintas representaciones, puesto que se ha atendido a las dos primeras actividades mencionadas en el epígrafe anterior y se ha descuidado el resto. Sin embargo, el aspecto de la representación tiene cada vez más peso en la enseñanza. Así, Dreyfus (1991) considera necesario utilizar sistemáticamente varios sistemas de representación e incidir en sus relaciones desde el principio de la enseñanza para evitar que los alumnos obtengan visiones sesgadas de los conceptos.

Los *Estándares Curriculares y de Evaluación para la Educación Matemática* del NCTM (1989) señalan la importancia de las conexiones en Matemáticas en todos los niveles educativos. Estas conexiones incluyen las que se producen entre dos representaciones equivalentes y los correspondiente procesos de cada una. Propone, por ejemplo, trabajar intuitivamente el área bajo una curva utilizando dos sistemas de representación distintos: mediante aproximaciones numéricas formadas con áreas de trapecios, y mediante un modelo probabilístico que sitúa aleatoriamente puntos bajo la gráfica.

Esta filosofía de los *Estándares* subyace en el currículo LOGSE. Este currículo incluye algunas referencias a distintas representaciones de los conceptos de número y función, que se tratan en Enseñanza Secundaria Obligatoria (ESO), tanto en los conceptos, como en los procedimientos y actitudes (poco explicativo), y, también en Bachillerato:

· *Conceptos:* Notaciones numéricas. Sistema de Numeración Decimal. Notación científica. Orden y representación de los números en la recta. El lenguaje algebraico. Significado y uso de las letras para representar números. Formas de expresar la dependencia entre variables: descripción verbal, tabla, gráfica y fórmula.

· *Procedimientos:* Utilización e interpretación del lenguaje gráfico teniendo en cuenta la situación que se representa y utilizando el vocabulario y los símbolos adecuados. Utilización de expresiones algebraicas para describir gráficas en casos sencillos. Interpretación y elaboración de tablas numéricas a partir de conjuntos de datos, de gráficas o de expresiones funcionales, teniendo en cuenta el fenómeno al que se refieren.

· *Actitudes:* Reconocimiento y valoración de las relaciones entre el lenguaje gráfico y otros conceptos y lenguajes matemáticos.

· En Bachillerato se indica expresamente que las funciones deben ser tratadas tanto en forma de tablas como en forma de gráficas, y que deben hacerse identificaciones de la expresión analítica y de la gráfica de algunas familias de funciones.

El concepto de límite está basado en los de número y función, es imprescindible que se trate en los cuatro sistemas de representación señalados y, sin embargo, el currículo español de MACS no lo contempla.

La consideración explícita en los currículos de los sistemas de representación no significa que en la práctica se instruya a los alumnos en este sentido, sino que, más bien, a tenor del tratamiento que hacen los libros de texto, sucede lo contrario. Pocos textos tratan los conceptos utilizando diferentes sistemas de representación, y, como indica Blázquez (2000), los pocos que lo hacen descuidan la traducción entre ellos.

Una prueba de la tendencia de los investigadores a utilizar diversos sistemas de representación para un mismo concepto en la enseñanza, la encontramos en Tall (1996), que propone tres sistemas para trabajar con conceptos de cálculo, relacionados directamente con la utilización de los ordenadores como herramienta didáctica:

· Representaciones interactivas, como la simulación de las relaciones entre espacio, tiempo y velocidad que proporciona el programa *MathCars*. Estas representaciones están vinculadas a la acción y proporcionan una base intuitiva para el Cálculo elemental.

· Representaciones numéricas (usando software que escriba tablas de valores, hojas de cálculo o estudiando la programación de rutinas numéricas, por ejemplo para aproximar el área bajo una curva), simbólicas (como los símbolos para la derivada, la integral o las funciones) y visuales (como la ampliación del grafo de una función, utilizando el *zoom*, para ver que cada vez la función se parece más a una recta). Todas ellas muestran el funcionamiento proceptual (como proceso y como concepto), y constituyen el *Cálculo elemental.*

· Representaciones formales (a través de la programación o el uso de los manipuladores simbólicos) donde los objetos se manipulan a través de definiciones y no de descripciones, y que constituyen el *Análisis matemático.*

En cuanto a la traducción entre distintas representaciones, Tall, en consonancia con las representaciones anteriores, observa que en las formales es donde se produce el análisis conceptual más intenso, que éste es más profundo que el simple formalismo simbólico, y que, por tanto, implica construcciones significativas y reconstrucción del conocimiento.

Estos sistemas de representación son similares a los que otros autores (Castro & Castro, 1997) identifican para trabajar el concepto de función: verbal, tabular (numérica), gráfica (visual) y algebraica (simbólica y formal), orientaciones prácticas que ya aparecían en el texto del Shell Centre (1990), que contiene multitud de actividades para trabajar el concepto de función, basadas en la utilización de estos cuatro sistemas de representación y de las conexiones entre ellos.

Por otra parte, la problemática de la enseñanza del concepto de límite está directamente relacionada con la dificultad del propio concepto, que ya ha sido reconocida por numerosos autores, como por ejemplo: Cornu (1983) investiga las concepciones y obstáculos epistemológicos y la dificultad que entraña la transición de una aproximación cualitativa a la formal, mientras que en un artículo posterior (Cornu, 1991) resalta la transmisión didáctica de estos obstáculos; Sierpinska (1985) propone una serie de obstáculos epistemológicos, basándose en la génesis histórica del concepto, y posteriormente (Sierpinska, 1990) presenta una relación de obstáculos asociados al límite secuencial y los actos de comprensión necesarios para superarles; Artigue et al (1995) describen tres grupos de dificultades en el aprendizaje, asociadas a la complejidad de los objetos, al concepto de función y al número real.

UNA INVESTIGACIÓN SOBRE REPRESENTACIONES DEL LÍMITE

Una cuestión importante a la hora de considerar los sistemas de representación en la enseñanza es la selección de los sistemas de representación adecuados para cada concepto y cada edad (Rico, 2000). Esto nos lleva a plantear qué representaciones se deben utilizar para la enseñanza del concepto de límite en Educación Secundaria. Existen una serie de consideraciones que guían la elección:

- El concepto de límite funcional parte del concepto de función y, por tanto, utiliza sus representaciones. Las distintas investigaciones sobre este tópico y sus representaciones sugieren considerar los siguientes sistemas: verbal, numérico, gráfico y algebraico.

- La utilización de representaciones verbales para trabajar el concepto de límite choca con las dificultades que entraña la asociación del término límite con su significado en el lenguaje habitual. Cornu (1983) señala distintas concepciones que los alumnos tienen de tendencia y de límite, muchas de ellas influenciadas por su uso en otros contextos: a la expresión "tender a" asocian las ideas de aproximarse, aproximarse sin llegar, aproximarse hasta que se alcanza y semejanza (sin variación, como en la expresión "este azul tiende a violeta"), mientras que junto a la palabra límite aparecen las ideas de punto al que uno se acerca sin alcanzarlo, punto al que uno se acerca y alcanza, máximo o mínimo, lo que viene "inmediatamente después" de lo que se puede alcanzar, restricción y fin.

- Es necesario clarificar previamente qué aspectos del límite se desean resaltar. En Educación Secundaria el currículo propone un tratamiento intuitivo de los conceptos, pero no se puede renunciar a presentar el límite como la potente herramienta que es para resolver problemas de variación de funciones. Así, la opción intermedia de presentar el límite finito como aproximación óptima, Blázquez y Ortega (2000), permite aprovechar el aspecto intuitivo y cercano a la realidad sin reducir el límite a una simple aproximación. Esto implica que, en principio, la representación a utilizar debe ser numérica, puesto que este registro es el que muestra mejor los aspectos de la aproximación. La visión numérica se complementa con la gráfica y, en etapas avanzadas se puede completar con la algebraica, si bien esto supondría una visión más formal y abstracta, a la que no es preciso llegar en este nivel educativo.

- Ya se ha señalado que el marco curricular de Educación Secundaria, LOGSE, establece una serie de representaciones para el concepto de función y, asimismo, explicita una serie de criterios para la introducción del límite. Uno de ellos es el estudio previo e intuitivo de tendencias (que identificamos con límites infinitos o en el infinito) como paso al límite funcional, por lo que para éstas se escogen estudios gráficos y numéricos.

Así pues, para trabajar el concepto de límite en Secundaria se consideran los sistemas verbal, numérico, gráfico y algebraico, y en ellos se consideran estas representaciones: en el sistema verbal, el concepto de límite de una función en un punto se representa como la aproximación óptima de los valores de la función en un entorno del punto; en el sistema numérico como un proceso de tendencia basado en una tabla de valores e imágenes de éstos, en la que cualquier aproximación del límite, distinta de él, se podría mejorar con las imágenes de valores cercanos al punto de interés; en el sistema gráfico, el límite se representa como un punto del eje *OY*, tal que: a todo segmento que le contiene le corresponde otro en torno al punto de interés, que se proyecta (la gráfica de la función, Figura 3, actúa como proyección de valores de x en valores de y) dentro de él; y, finalmente, en el sistema algebraico aparece la definición métrica de límite en los términos usuales de ε y δ, que no son otra cosa que los controles de las aproximaciones, o la definición topológica de entornos. Además de éstas, se han considerado otras representaciones sinónimas, lógicamente, siempre encaminadas hacia la concepción de límite como aproximación óptima.

La elección de estas representaciones en estos sistemas de representación es el primer paso para llevar a cabo una investigación sobre la importancia de la representación del concepto de límite en el Bachillerato de Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales. Nuestra experiencia docente, el aval de estudios realizados por otros investigadores, ya mencionados, y, sobre todo, la investigación sobre la enseñanza y aprendizaje de esta noción en dicho Bachillerato llevada a cabo en el seno de nuestra Universidad (Blázquez, 2000), nos permiten formular la siguiente hipótesis de trabajo:

> *La utilización de distintos registros (algebraico, numérico, gráfico, verbal) mejora la comprensión del concepto de límite.*

Se realizó una investigación cualitativa completando tres ciclos de investigación-acción trabajando sobre una secuencia didáctica, que aparece completa en Blázquez (2000), incluyendo un considerable número de registros con el fin de estudiar no sólo la comprensión en cada uno de ellos (unos serán más ventajosos que otros), sino de comprobar si la imagen conceptual que el alumno tiene de límite se enriquece al considerar éste desde distintas perspectivas, aún siendo conscientes de las dificultades que pueden generar las traducciones de un registro a otro. La secuencia se centra, por tanto, en la identificación de sistemas y en la traducción entre los mismos, si bien en algunas tareas, además, se trabajaron aspectos de modelización. En el anexo figura parte de las tareas que se han utilizado en el tercer ciclo de investigación-acción, que tienen que ver con las representaciones.

Los distintos sistemas de representación se utilizan en tareas que resuelve el alumno, de forma individual o colectiva, y que se ponen en común en el aula. Las tareas facilitan la detección de dificultades en torno al concepto y sus representaciones, que fueron contrastadas con dos entrevistas semiestructuradas. Algunas tareas incluyen varios sistemas de representación a la vez con el fin de que pudieran relacionarlos. Éstas se clasifican según su función:

- *Estudio de tendencias infinitas*. En una práctica se utilizan simultáneamente, con ayuda del ordenador, los sistemas gráfico y numérico para proponer tendencias y asíntotas de funciones expresadas de forma algebraica. De esta manera también pueden vincular la observación al cálculo de límites infinitos.

- *Motivación del límite finito*. Una de las tareas de motivación presenta tres funciones de crecimiento de la población, cada una en un sistema distinto de representación, y se propone a los alumnos que investiguen qué ocurre con la población en un momento donde la función no toma ningún valor, lo que lleva al estudio de valores próximos y a manejar la idea de mejor aproximación a partir de la expresión numérica, gráfica y algebraica.

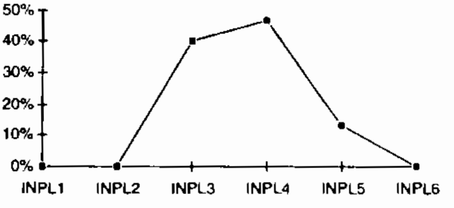
- *Ilustración del límite finito*. Una vez definido el concepto de límite como aproximación óptima de los valores que una función toma cerca de un punto, se ilustra ésta mediante un ejemplo numérico, otro gráfico y otro algebraico.

- *Propiedades del límite finito*. Mediante una tarea en la que una función definida a trozos modeliza una situación real, descrita en forma verbal, se pretende que los alumnos construyan una expresión gráfica, una tabla y una expresión algebraica de dicha función, y que utilicen estas representaciones para estudiar si la función dada tiene límite o no. El mismo razonamiento que se utiliza para probar la no existencia se puede utilizar también para probar la unicidad.

Los tres ciclos de I-A han aportado multitud de datos que han sido analizados con minuciosidad y como ejemplo se presentan los resultados de los niveles de respuesta de los alumnos a las categorías de contenido matemático (INPL, IGPL y IAPL), que corresponden a las tareas 3, 4 y 5 que aparecen en el anexo:

- ***INPL: Idea numérica precisa de límite** de una función en un punto.*

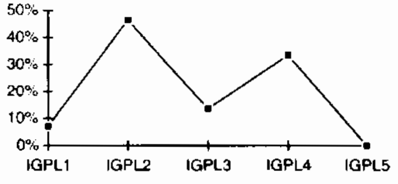
  1. *Dan todos los pasos correctamente para determinar el límite y el entorno pedido y lo justifican.*
  2. *Dan todos los pasos correctamente y lo justifican de forma errónea o no lo justifican.*
  3. *No trabajan bien con entornos.*
  4. *Buscan las imágenes que aproximan mejor, en lugar de sus contraimágenes o no entienden lo que es mejorar la aproximación.*
  5. *No trabajan bien con aproximaciones y errores.*
  6. *No contestan o contestan sólo lo más intuitivo.*



- ***IGPL: Idea gráfica precisa de límite** de una función en un punto.*

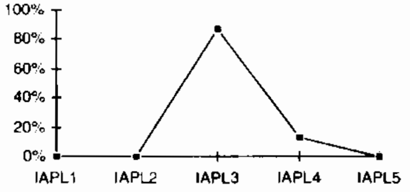
  1. *Dan los pasos correctamente y relacionan el proceso con el límite.*

2. *Representan correctamente los entornos y observan la relación entre el entorno del punto y el del límite.*
3. *Señalan los entornos correctamente, pero no son capaces de generalizar lo que hacen en los ejemplos.*
4. *Lo hacen mal en los ejemplos o se fijan sólo en entornos del límite.*



- ***IAPL: Idea algebraica precisa de límite** de una función en un punto.*

1. *Obtienen una expresión general para el error y son capaces de relacionarlo con el entorno del punto.*
2. *Obtienen una expresión general para el error y lo relacionan con el entorno correspondiente en un caso concreto.*
3. *No obtienen una expresión general para el error, sólo calculan errores concretos.*
4. *No saben calcular errores.*
5. *No hacen nada.*



Las producciones escritas de los alumnos son muy extensas y ricas en matices, ponen en evidencia sus dificultades respecto de la representación verbal. Asimismo, se hicieron entrevistas por parejas de alumnos y en ellas se vuelven a manifestar sus dificultades. A título de ejemplo se reproduce una breve secuencia de la entrevista realizada a la pareja A. Por P se identifica a la profesora y por A1 y A2 a las alumnas. En ella se evidencia la pérdida de la idea de función (PIF), la idea de límite como resultado de un cálculo (LCRC), la de que el límite no se puede alcanzar (LNA), y la confusión entre tendencia dinámica y aproximación estática (TDAE):

P. Pero, ¿no sabéis cómo?
A2. Pero, es que yo creo que..., o sea, por ejemplo, éste..., por las tendencias puedes llegar al límite, ¿no?
A1. O sea, por el límite puedes llegar a las tendencias (hablan las dos a la vez). Por ejemplo si tienes la ecuación de la recta.
A2. La tendencia que tenga menos error o algo así.
A3. Si tienes la ecuación de la recta puedes llegar al error.
P. Si tienes la ecuación...(PIF).
A1. Sí.
P. ¿Y si no, no?
A1. Y si no, pues..., simplemente a ver las tendencias en... (se pierde)
P. Confundis...
A1. O sea, yo para hallar el límite tengo que saber la ecuación, ¿no? (LCRC)
P. Por qué, ¿no puedes hallar el límite gráficamente?
A1. Sí, pero...
P. ¿O numéricamente?
A1. Pero sería la tendencia sólo, sin el límite, ¿no? (LNA)
P. ¡Ah! O sea, que tú dices que el límite es cuando te doy la ecuación y si no..., son tendencias...

A2. Pues yo creo que por las tendencias llegas al límite..., porque vimos algo de tendencias, estudiabas una tabla de tendencias y luego hallabas los errores..., creo que hicimos una tarea así, ¿no?, y aquí estudiábamos las tendencias, hallábamos los errores y el límite era la mejor aproximación.
P. O sea, que vosotros entendéis las tendencias como la aproximación. Cuando yo os pregunto, ¿a qué se aproxima?, es cómo si yo os preguntase, ¿a qué tiende?
A2. Sí, yo creo que sí.
A1. Sí. (TDAE)

Algunas reflexiones que surgen del análisis de los datos recogidos a través de la puesta en práctica de la secuencia de enseñanza dan respuesta a las cuestiones que Rico (2000) plantea sobre la diversidad de representaciones:

- A la hora de proponer a qué valor se aproxima una secuencia dada, la dificultad que consiste en observar la forma de los números, y no su magnitud o la distancia entre dos valores, se puede abordar con mayor eficacia si se complementa esta identificación con una gráfica donde no aparecen números.

- El excesivo dinamismo que sugiere la definición de límite como aproximación óptima en el sistema numérico se atenúa utilizando el registro gráfico, que sugiere menor dinamismo, y se pasa a una representación estática al traducir dicha definición al sistema algebraico.

- Las deficiencias en habilidades numéricas constituyen un obstáculo, que, a veces, ha sido fomentado por la enseñanza, al descuidar el registro numérico. Por otra parte, resulta muy difícil que el alumno adquiera el concepto de límite si éste sólo se trabaja en el sistema numérico, por lo que es necesario complementar dicho concepto, al menos, con una visión gráfica, en la que los alumnos encuentran otra problemática diferente.

- El cálculo de errores, cuando se trabaja con la expresión algebraica o gráfica de una función, resulta demasiado complicado para los alumnos, en general, por lo que es necesario trabajar previamente con expresiones numéricas, donde para ellos éstos cálculos son mucho más sencillos.

- La multitud de errores que cometen los alumnos en las manipulaciones algebraicas constituyen uno de los mayores obstáculos para la comprensión del concepto, por lo que es necesario un trabajo previo de tipo numérico y gráfico para que les ayuden a captar la idea de límite.

- El carácter local de los conceptos de tendencias infinitas y asíntotas no se puede "analizar" mediante una gráfica, ya que la visión que los alumnos tienen del gráfico de una función es más bien global. El registro numérico muestra mejor ese carácter local.

- El sistema gráfico de representación tiene evidentes limitaciones (no se puede observar "toda la gráfica a la vez") e, incluso, muchos alumnos no comprenden el significado de la gráfica como forma de relacionar dos magnitudes, confundiéndola con un dibujo. Por tanto, es necesario considerar además representaciones numéricas e incluso la representación algebraica, que tiene menos limitaciones, aunque es mucho más abstracta.

- También el sistema numérico se ve limitado, ya que una tabla no proporciona suficientes valores para comprobar que un número es el límite de una función. La expresión algebraica de la función lleva consigo la potencialidad de extraer cualquier valor sin necesidad de acudir a la representación algebraica del límite.

La expresión gráfica impide en algunos casos que sea comprendida la lateralidad del límite pues los alumnos asocian la tendencia a un movimiento por la recta; así por ejemplo, tender por la derecha suele asimilarse a la tendencia a infinito. Relacionar esta tendencia gráfica con la tendencia numérica evita esta identificación errónea.

- ¿Cómo profundizar sobre los conceptos?

o Las tendencias infinitas de una función se introducen de forma muy intuitiva en el sistema gráfico como comportamientos de la función donde la gráfica "se sale" del papel. El registro numérico completa al gráfico vinculando esta idea gráfica con la de límite infinito o en el infinito y ampliando la idea de tendencia secuencial, que es fácil trabajar a partir de tablas de valores. El aspecto algebraico se puede introducir en el cálculo e incluso, en una fase más avanzada, se puede dar la definición formal de este tipo de límites.

o En lo que se refiere al límite finito en un punto se comienza con situaciones expresadas en forma verbal, que se traducen al estudio tabular de la aproximación. Se compara este estudio numérico con el gráfico, y se ejemplifica también utilizando el algebraico, que en una etapa más formal puede pasar de ser una ejemplificación a una definición.

o La visión global del proceso de identificación del límite (elección de una aproximación del supuesto límite y de los valores de la variable independiente cuyas imágenes mejoran dicha aproximación) es más comprensible en forma gráfica y numérica que en la algebraica para los alumnos de Educación Secundaria, con lo que estos sistemas ayudan a la asimilación del concepto.

- ¿Qué oculta y qué muestra cada sistema de representación?

o El sistema verbal muestra una concepción de límite dinámica, tan rigurosa y tan abstracta como la definición algebraica, pero sin el formalismo de ésta, más vinculada a fenómenos reales, y más próxima al desarrollo cognitivo del alumno de Educación Secundaria.

o El sistema algebraico muestra una concepción formal de límite, un aspecto estático y abstracto. El grado de precisión es inmejorable, si bien muestra poca vinculación con fenómenos reales.

o El sistema numérico muestra claramente el aspecto de aproximación del límite, sugiere una idea dinámica, local, y vinculada con la realidad (por ejemplo, se puede trabajar la velocidad instantánea como proceso de límite a partir de la observación de una tabla de espacios recorridos y tiempos), pero muestra una cierta desvinculación de tendencias de x e y.

o El sistema gráfico es más estático que el numérico y menos formal que el algebraico, recoge el aspecto visual y ayuda a vincular las tendencias de ambas variables (siempre que se entienda la gráfica como vía de relación entre ellas).

CONCLUSIÓN

La investigación llevada a cabo nos permite enunciar dos conclusiones generales que redactamos de forma muy concisa:

- La utilización de distintos sistemas de representación a la hora de trabajar el concepto de límite choca con las dificultades del cambio de sistema de representación, que puede ser, en parte, un obstáculo didáctico, puesto que en la enseñanza tradicional se ha abusado del registro algebraico y, además de descuidar el resto de representaciones, no se ha incidido en los cambios entre ellos. Esta dificultad se subsana, en gran parte, si se utiliza el ordenador para traducir unos sistemas de representación a otros.
- En la secuencia de enseñanza se puso de manifiesto cómo el uso de distintas representaciones favorece el aprendizaje, y lo hace de dos formas: por un lado, compensa las limitaciones de unas representaciones con otras, y, por otro, permite que los alumnos se formen una imagen conceptual más rica, pudiendo escoger la representación más apropiada para cada situación.

BIBLIOGRAFÍA

Artigue, M., Douady, R., Moreno, L. & Gómez, P. (Ed.) (1995). *Ingeniería didáctica en educación matemática.* Bogotá, Colombia: Grupo Editorial Iberoámerica.

Blázquez, S. (2000). *Noción de límite en Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales.* Tesis doctoral. Universidad de Valladolid. Valladolid, España.

Blázquez, S. & Ortega, T. (2000). *Nueva definición de límite funcional.* En prensa.

Castro, E. & Castro, E. (1997). Representaciones y modelización. En L. Rico (Coord.) *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria* (pp. 95-124). Barcelona, España: Horsori-ICE Universitat de Barcelona, España.

Cornu, B. (1983). *Apprentissage de la notion de limite: conceptions et obstacles.* Thèse de 3ème cycle, Mathématiques. Université I de Grenoble, Grenoble, Francia.

Cornu, B. (1991). Limits. En D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 153-166) Dordrecht: Kluwer.

Dreyfus, T. (1991). Advanced Mathematical Thinking Processes. En D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 25-41). Dordrecht: Kluwer .

Duval, R. (1993). *Sémiosis et Noésis.* Conference A.P.M.E.P.I.R.E.M.

Janvier, C., Girardon, C. & Morand, J. (1993). Mathematical Symbols and Representations. En P. Wilson (Ed.), *Research ideas for the classroom.* Reston VA: N.C.T.M.

NCTM. (1989). *Estándares Curriculares y de Evaluación para la Educación Matemática.* Sevilla, España: Sociedad Thales.

Ortega, T. (1998). Algunos apuntes sobre el uso de gráficas cartesianas. *Actas del II SEIEM*. Pamplona, España.

Rico, L. (2000). Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en Educación Matemática. *IV Simposio SEIEM*. Huelva, España.

Robinet, J. (1983). Un experience d´ingenierie didactique sur la notion de limite de fonction. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 4(3), 223-292.

Romero, I. (2000). Representación y comprensión en Pensamiento Numérico. *IV Simposio SEIEM*. Huelva, España.

Shell Centre for Mathematical Education (1990). El lenguaje de funciones y gráficas. Traducción de *The Language of Functions and Graphs*. Ministerio de Educación y Ciencia, Universidad del País Vasco, España.

Sierpinska, A. (1985). Obstacles epistemologiques relatifs a la notion de limite. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 6(1), 5-67.

Sierpinska, A. (1990). Some remarks on understanding in mathematics. *For the Learning of Mathematics* 10(3), 24-36.

Tall, D. (1996). Functions and Calculus. En A. Bishop (Ed.), *International Handbook of Mathematics Education* (pp. 289-325). Dordrecht: Kluwer.

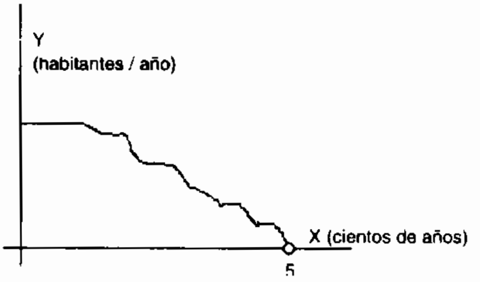
ANEXOS

TAREA 2: El crecimiento de la población de tres países A, B y C viene dada por las siguientes funciones:

País A

x (cientos de años)	*y (miles de habitantes por año)*
4	10´7846
4´9	10´7613
4´99	10´7621
4,999	10´76203
4´9999	10´7620002

País B



País C (x en cientos de años, y en miles de habitantes por año)

$$y = \frac{10 - 2\sqrt{5x}}{5 - x}$$

Vamos a estudiar lo que ocurre en cada país al cabo de 500 años:

- ¿A qué valor se aproxima el crecimiento en cada país? Comprueba que las imágenes de la función son aproximaciones cada vez mejores del valor anterior, calculando el error de la aproximación.

- Deduce qué es lo que ocurre al cabo de 500 años en cada país.

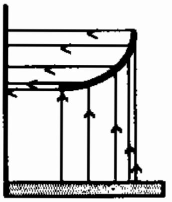
TAREA 3 (de ilustración numérica): Observa la tabla siguiente:

x	$f(x)$
0,87	3´59
1´02	2´41
1´005	2´7
0´9997	3´01
1´0001	3´0025
0´999995	2´9994
1´0000002	3´0001
0´999999996	2´999995
1´00000000341	2´9999999998
1´000000000007	3´000000000001

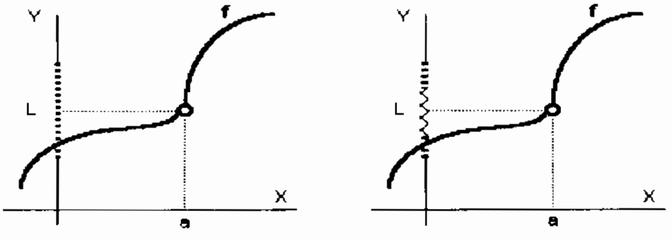
- Contesta ahora, observando la tabla:
  - ¿A qué número A se aproxima x? (Calcula los errores) ....
  - ¿ A qué número L se aproximan sus imágenes $f(x)$? ....
  - Busca una aproximación de L ....

- Calcula el error que se comete con dicha aproximación ....
- Busca en la tabla valores de x cuyas imágenes mejoren la aproximación anterior................
- Busca un entorno de A donde se encuentren los valores anteriores ....
- Repite el proceso con distintas aproximaciones de L hasta que encuentres el entorno correspondiente.

TAREA 4 (de ilustración gráfica): Podemos ver una función como la lente que proyecta lo que está sobre una mesa (el eje X) sobre la pared (el eje Y). Así, existe una zona donde se puede situar la hoja para que se proyecte en una región determinada, y todo lo que no se encuentra en esa zona no se proyecta (Ver figura).

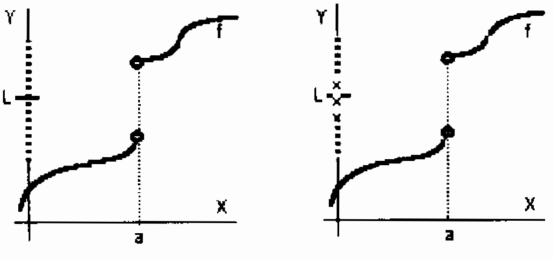


Observa la función f de las dos figuras, que no está definida en el punto a -la función es la misma en las dos figuras, así como los puntos a y L-



· Busca un entorno de a que se proyecte dentro de la zona punteada del eje Y de la primera figura. Pinta del mismo color el entorno y la zona. Repite el procedimiento anterior con la zona de cruces de la segunda figura. ¿Qué puntos se proyectan ahora ? El conjunto de tales puntos, ¿es menor o mayor que el anterior? ¿Podrías repetir el procedimiento con cualquier zona que incluya a L?

· Haz lo mismo para la siguiente función:



TAREA 5 (de ilustración algebraica): *Se considera la función* $e(x) = 3'6\,x^2 - 0'001$ *que relaciona el tiempo x, en horas, con los kilómetros recorridos en x horas por el conductor de la tarea 1. La función velocidad media viene dada por:*

$$v_m(x) = \frac{e(10) - e(x)}{10 - x} = 3'6(x + 10)$$

· ¿A qué se aproxima la función $v_m(x)$ cuando x se aproxima a 10?

· Calcula la expresión algebraica del error que se comete tomando $v_m(x)$ en lugar de 10,
a) Si $x > 10$ b) Si $x < 10$

· ¿Cómo debe ser $x > 10$ para que el error sea menor que 0'0001? ¿Y si $x < 10$? ¿Y si x es cualquiera?

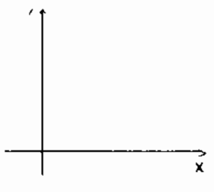
Repite el apartado anterior pero con un error menor que un valor

TAREA 7 (de existencia y unicidad):

· Escribe dos funciones distintas que tengan el mismo límite en $x = 2$:

$f(x) =$ $g(x) =$

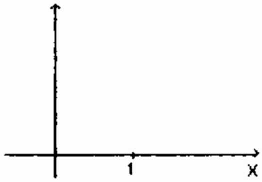
Dibuja dos funciones distintas que tengan el mismo límite en $x = 2$



· Escribe una función que tenga límite 3 en dos puntos diferentes:

$\lim_{x \to \bigcirc} \boxed{} = 3$ $\lim_{x \to \triangle} \boxed{} = 3$

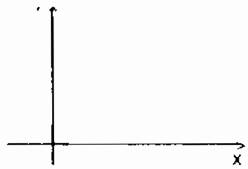
· Dibuja una función que tenga límite 3 en dos puntos diferentes:



· Escribe dos funciones que en x = -2 tengan distinto límite:

$$\lim_{x \to -2} \boxed{\qquad\qquad} = \bigcirc \neq \bigcirc = \lim_{x \to -2} \bigcirc$$

· Dibuja dos funciones que en x = -2 tengan distinto límite:

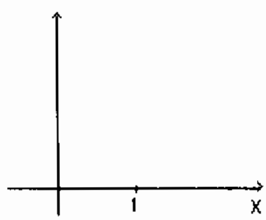


· ¿Puede tener dos límites distintos una función en un mismo punto? Razona la respuesta.

· Escribe la expresión algebraica de una función que no tenga límite en x = 1:

$f(x) =$

· Dibuja la gráfica de una función que no tenga límite en x = 1:



· Elabora una tabla de valores de una función que no tenga límite en x = 1:

Los autores:

Sonsoles Blázquez y **Tomás Ortega**

Departamento de Análisis Matemático y Didáctica de la Matemática.
Universidad de Valladolid. c/ Geólogo Francisco Hernández Pacheco, 1
47014. Valladolid. España.
Email: ortega@am.uva.es