Revista Latinoamericana de Investigacion en Matematica Educativa
Comité Latinoamericano de Matemática Educativa
relime@mail.cinvestav.mx
ISSN (Versión impresa): 1665-2436
MÉXICO

2001
Alberto Camacho / Mónica Aguirre
SITUACIÓN DIDÁCTICA DEL CONCEPTO DE LÍMITE INFINITO. ANÁLISIS PRELIMINAR
Revista Latinoamericana de Investigacion en Matematica Educativa, noviembre, año/vol. 4, número 003
Comité Latinoamericano de Matemática Educativa
Distrito Federal, México
pp. 237-265

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa
Vol. 4, Núm. 3, noviembre, 2001, pp. 237-265

Situación didáctica del concepto de límite infinito. Análisis preliminar•

*Alberto Camacho**
*Mónica Aguirre**

RESUMEN

El objetivo del presente trabajo fue diseñar una Situación didáctica para introducir el concepto de límite infinito en el curso de Matemáticas I del nivel de enseñanza superior en las carreras de ingeniería del Sistema Tecnológico. Los estudiantes de estos niveles de enseñanza manifiestan, continuamente, concepciones poco confiables en la determinación algorítmica de expresiones en las que subyace la división por cero. En este escrito se plantea el Análisis Preliminar para el diseño de una Situación didáctica usando la Ingeniería Didáctica como metodología.

ABSTRACT

Our goal is to design a Learning Situation that would introduce the concept of finite limit in a first course of College Mathematics for Technological Systems Engineering. The students at this level frequently report inadequate conceptions of algorithmic determination of expressions containing a division by zero. In this paper, we present the preliminary analysis of the situation design by the method of didactic engineering

RÉSUMÉ

Notre objectif est dessiner une situation didactique avec laquelle on cherche d'introduire le concept de limite vers l'infini dans le cours de mathématiques I, particulièrement au niveau supérieur des carrières de génie des systèmes technologiques. Les étudiants de ce niveau manifestent, continuellement, des conceptions peu confiables dans la détermination algorithmique des expressions dans lesquelles la division par zéro est sous-jacente. Dans cet écrit on montre "l'analyse préliminaire" pour le dessin d'une situation didactique à partir de la méthodologie de l'ingénierie didactique.

RESUMO

Nosso objetivo é elaborar uma situação didática para introduzir o conceito de Límite infinito na disciplina de matemáticas I do nível superior de ensino dos cursos de engenharia de sistemas tecnológicos. Os estudantes desses níveis de ensino apresentam manifestam constantemente, concepçoes pouco confiáveis na determinação algoritmica de expressoes, as quais, reside a divisão por cero. No seguinte resumo presentamos um "Análisis Preliminar" para a elaboração da situação a partir da metodología da engenharia didática.

•*Fecha de recepción: noviembre de 2000*

**Instituto Tecnológico de Chihuahua II; México.*

TEORÍA DE SITUACIONES DIDÁCTICAS

La Teoría de Situaciones Didácticas fue establecida en Francia por G. Brousseau a finales de los años sesenta del siglo XX, ha tenido un amplio desarrollo en el ámbito internacional y fue concebida basándose en una hipótesis acerca de la construcción del significado de una noción:

> "*Una noción aprendida no es utilizable sino en la medida en la que ella es relacionada con otras, esas relaciones constituyen su significación, su etiqueta, su método de activación. Empero, no es aprendida si no es utilizable y utilizada efectivamente, es decir, sólo si es la solución de un problema*".

Fue adaptándola, a lo largo de más de veinte años, a diversas propuestas teóricas como la Transposición Didáctica de Y. Chevallard, (Chevallard & Johsua, 1982), el concepto de Obstáculo Epistemológico de G. Bachelard (1927) y la teoría de las Estructuras Cognitivas de J. Piaget (1975).

A finales del siglo XX otras nociones y conceptos como Contrato Didáctico, Institucionalización, Herramienta–Objeto, Situación A-didáctica, Memoria Didáctica, etc., la estructuraron con solidez (Perrin-Glorian, 1994, pp. 97-147).

Brousseau confiere al término Situación Didáctica dos significados:

> *i)"En el sentido clásico es una* ***situación que se usa con fines didácticos, que sirve para enseñar*** *(como un problema o un ejercicio), tanto si está dotada de virtudes didácticas autónomas, como si el profesor debe intervenir para que produzca su efecto.*
>
> *ii) Es* ***una situación que describe el entorno didáctico del alumno, comprende todo aquello que concurre para enseñarle algo****. En este sentido comprende al profesor, tanto si éste se manifiesta durante el desarrollo de la situación, como si no"* (Brousseau, 2000, pp. 21-22).

La teoría de las Situaciones Didácticas se concibe, ahora, como una red de conceptos, métodos de investigación y protocolos de experimentación que se apoyan sobre todo en una metodología de investigación llamada Ingeniería Didáctica. La Ingeniería Didáctica es utilizada para modelar la enseñanza de conceptos de la matemática que causan dificultades para su aprendizaje: el objetivo es llevar a los estudiantes a construir el conocimiento en juego a partir de la experimentación en clase. Con esta metodología la figura del profesor pasa a ser, de un reproductor de la información, a un controlador de las distintos componentes del proceso de aprendizaje.

Las primeras aportaciones de la enseñanza elemental francesa congruentes con el concepto de Situación, refieren dificultades en el aprendizaje de los números decimales, en la comprensión del concepto de área y su relación con superficie (Perrin-Glorian, 1992).

Otras tesis plantean resultados que desinhiben la enseñanza de la noción de convergencia en el nivel superior (Robinet, 1984) o bien la didáctica del concepto de *espacio* en los cursos de geometría (Berthelot & Stalin, 1992) en tanto que algunas investigaciones plantean dificultades persistentes en el campo conceptual del Análisis (Artigue, 1998, pp. 40-54).

En México la teoría de las situaciones fue adoptada por investigadores del Departamento de Matemática Educativa del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados (Cinvestav) del Instituto Politécnico Nacional, I.P.N., a principios de los años noventa. Actualmente se cuenta con importantes contribuciones como la *construcción de la noción de convergencia en ámbitos fenomenológicos vinculados con la ingeniería* de R. M. Farfán (1993); el texto *Las gráficas de funciones como una argumentación del cálculo* de Farfán y Albert (1993), así como los resultados que arrojan un número considerable de tesis de maestría y doctorado sujetas todas al diseño de situaciones.

Una descripción de la metodología se expone en la obra de Farfán (1997). En esencia se contemplan tres grandes fases: un Análisis Preliminar de la situación; el diseño de la ingeniería en la que se eligen las estrategias, usos de tecnología y los medios con los que se validarán los resultados y finalmente, la puesta en escena de la situación, el análisis de resultados y el rediseño. Se destaca la precisión con que se debe abordar el análisis preliminar a partir de sus componentes: Epistemológica, Cognitiva y Didáctica (Artigue, 1992, pp. 43-65):

> *"Es decir se refiere al diagnóstico sobre el funcionamiento del sistema de enseñanza, de los efectos que produce en las concepciones de los estudiantes y esencialmente a la naturaleza intrínseca del saber matemático que se pone en escena en la situación escolar".*

La Dimensión Epistemológica es el preámbulo que guiará al investigador a controlar las distintas evoluciones de los conceptos que en la historia se estudian a través de su ubicación en la enseñanza. Tales evoluciones forman parte de la aproximación del saber hacia un estado científico propio de la época en estudio, o bien del estado técnico del concepto en la actualidad.

La distancia entre los saberes técnico y didáctico contribuye para conocer no solamente la aproximación en la que se coloca el conocimiento enseñable, sino, además, los modos en que incide en la formación social y cultural de los educandos. Las fuentes para el análisis conceptual son: los fondos documentales, exámenes, textos, tesis, entre otros, que tuvieron vigencia, uso y evolución social al seno de las instituciones educativas que anteceden a las actuales.

En las formas de aproximación del conocimiento es factible reconocer aquellos obstáculos para el aprendizaje que se encuentran en el desarrollo histórico y su devenir en la enseñanza actual. Los obstáculos didácticos son consecuencia del propio sistema de enseñanza, así como también aquellos ligados a la resistencia de un saber mal adaptado, es decir, obstáculos epistemológicos, como les ha llamado Brousseau (1976).

Las exploraciones y análisis para estudiar la Dimensión Cognitiva tienen que ver con los diversos puntos de vista que profesores, estudiantes y, en general, la comunidad académica tienen del concepto en estudio. Los puntos de vista son las concepciones[1], representaciones y modos en que los involucrados abordan e interpretan el concepto: objeto, noción, representación gráfica, etc. Los resultados de esta etapa rinden cuenta, principalmente, del estado erróneo que guarda el conocimiento del concepto en la institución educativa; por ejemplo, alumnos de los primeros semestres

[1] Vemos las concepciones como modelos del proceso de aprendizaje donde se colocan los comportamientos cognitivos de los alumnos.

de ingeniería del Sistema Tecnológico manifiestan concepciones equivocadas respecto a los conceptos de área y superficie para ellos, ambos términos son sin distinción, sinónimos. En otros casos el recurso de tabular mediante números naturales para graficar funciones bloquea la intuición de los estudiantes para comprender, en un primer momento, el continuo o densidad de los números reales. Los resultados pueden mostrar, además, que dichas representaciones obstaculizan la construcción de posteriores conceptos. Un cuestionario que incluya problemas, así como la experiencia diaria en el aula, es en ocasiones suficiente para reafirmar la imagen que el investigador tiene de las concepciones en los estudiantes e incluso en los profesores.

La Dimensión Didáctica se relaciona con las características de la labor docente dentro del sistema educativo en el estudio de las nociones de la enseñanza a través de los libros de texto que en el momento del análisis se usan, en las estrategias que los autores exhiben para presentar los conceptos, en las topologías, formalización, notación y gráficas, en el desuso, elementarización o actualización de los conceptos y en las presentaciones heurísticas para esclarecer las nociones de estudio en los textos.

La misma orientación se debe observar en el análisis de conceptos en plan de estudios vigente, así como los cambios de presentación que éste ha sufrido en las reformas educativas. Finalmente es importante conocer la manera en que los profesores enseñan los conceptos además de la exigencia que emplean, algoritmia, procesos que llevan a los estudiantes a intuir resultados o conceptos, el grado de aproximación entre el saber técnico y el enseñado, así como las dificultades de aprendizaje e índices de reprobación.

Es en este sentido que para nosotros la Ingeniería Didáctica asume un doble aspecto: le concebimos como un producto y como un método de investigación.

INTRODUCCIÓN

El análisis epistemológico de conceptos en la historia toma, por sí mismo, dos vertientes: el estudio del conocimiento en obras que se dedicaron para la enseñanza en la institución y el análisis del saber colocado en obras científicas que enmarcan su evolución técnica. En el presente trabajo se abordan ambas perspectivas: el análisis de obras elementales, libros de texto, donde aparece el concepto de límite infinito y la revisión de obras donde surgen las ideas que le dieron origen.

Cabe mencionar que no se adoptó información documental de los "fondos" de las instituciones en juego en los que se hubiera conocido, con más detalle, el concepto en la historia de la enseñanza matemática. En contrapartida, en el análisis histórico de obras elementales aseguró que las formas y representaciones en que exhiben la noción de límite infinito hayan tenido una ubicación efectiva en la enseñanza como lo fue en el Seminario de Minería o en la Escuela Nacional Preparatoria, E. N. P, escuelas que anteceden a nuestras instituciones actuales.

Dos puntos de vista aseguran sus coordenadas históricas en la enseñanza; el primer aserto apareció en el "*Análisis del cálculo infinitesimal desde el punto de vista lógico*" de G. Barreda que se quejaba de las incongruencias a que llegaban los estudiantes debido a que hacían uso inadecuado del método científico de la inducción y deducción -*análisis* y *síntesis*- "objeto final de la matemática".

A partir del análisis de las operaciones elementales del álgebra, la queja fue la siguiente:

"La forma en que se acostumbra dar á estas expresiones algebraicas, no es, según se acaba de ver, incompatible con la interpretación de su significado legítimo; pero como ella tiende de un modo muy marcado á ofuscarlo, y como por otra parte, la operación necesaria para poner de manifiesto su verdadero sentido, tanto científico como práctico, es tan sencillo, sería muy conveniente que todos los matemáticos en general, y ***los alumnos más especialmente****, se habituasen á no dar por terminado su cálculo hasta no haber hecho esa trasposición final* [sic] *como última comprobación de este aserto, citaré las conocidas expresiones:*

$$a = 0 \times \infty, \quad \frac{a}{\infty} = 0,$$

ó bien: $1 = 0 \times \infty, \quad \frac{1}{0} = \infty$ ".

(Barreda, 1901, pp. 51-53)[2]

El párrafo anterior refleja el modo dogmático que en la enseñanza, y en la vida práctica, había sedimentado la noción: $a / 0 = \infty$, en tanto "verdad" a medias (Camacho, 2000). Hasta la época de la disertación de Barreda la única institución que distinguió su enseñanza fue el Colegio de Minería. Así, con la apertura de la Escuela Nacional Preparatoria en 1867 esta noción cobró vida, y a partir de aquí surgió la contribución analítica de Barreda al concepto que exhibimos más adelante (Barreda, 1901, pp. 104-107).

El segundo acierto que da validez a la ubicación de los conocimientos en el aula fue la transición lineal que siguió la noción $a/0 = \infty$ hasta situarse en la enseñanza universitaria y tecnológica actual lo cual se justifica, según nuestro punto de vista, por el uso de los textos que hemos analizado así como la herencia que se fue legando a generaciones de profesores mexicanos, tal efecto se probará más adelante.

Hasta aquí se ha señalado como problema fundamental, de corte epistemológico, que en la enseñanza ha predominado, por varios siglos, el uso de una concepción equivocada del concepto de límite infinito el cual a pesar de ofrecer resultados inmediatos en expresiones de la forma:

$$\lim_{x \to 1} \frac{1}{x-1} = \infty$$

condiciona a los estudiantes a evitar transitar hacia la demostración formal del concepto y, en consecuencia, evadir su construcción.

Por lo anterior, la hipótesis de trabajo muestra cómo la enseñanza actual del concepto ha sido guiada usando la noción: $a/0 = \infty$ como un dogma cuya persistencia impide construir otros conceptos matemáticos y resolver problemas asociados al mismo. Deseamos probar, además, que la forma ilegítima: $a/0 = \infty$, significa en los alumnos y profesores desconocer el verdadero sentido del concepto límite infinito. De aquí que la expresión anterior sea el eje central condicional sobre el que se mueve el presente trabajo.

Como resultado del estudio damos cuenta de la génesis histórica, deslizamiento y ubicación de la noción $a/0 = \infty$ en la enseñanza mexicana. En este sentido nos interesamos por comprender aquellas variables didácticas asociadas a su presentación que pudieran, condicionalmente, ser reproducibles a partir del diseño de una situación de aprendizaje (Brousseau, 1980, pp. 52-53).

[2] Las negrillas son nuestras. El párrafo se cita, del documento original, al pie de la letra.

Por otro lado, estamos conscientes de la realidad académica ya que por años hemos observado como la construcción de conocimientos no ocurre en el acto mismo de la clase como desearíamos que fuera, sino, en el último y mejor de los casos, posterior a ella.

Las causas son heterogéneas y aquellas cercanas al conocimiento en el aula obedecen, por un lado, a la nula preocupación docente por contar con mejores metodologías de aprendizaje y, por otro, a la imposición de esquemas poco confiables en la enseñanza: algoritmia, formularios, tablas, modelos matemáticos compactos que eviten las demostraciones, razonamientos lógicos dejados a la intuición, falsa elementarización de conocimientos y procedimientos que en el fondo esconden la realidad matemática.

ANÁLISIS HISTÓRICO DEL CONCEPTO DE LÍMITE INFINITO

En un primer período, el de la matemática griega, pudiéramos situar no una definición del concepto de límite, sino una forma de validar resultados a partir de la comparación de aproximaciones muy finas de figuras geométricas. Citamos el caso del modelo de exhausión de Eudoxo:

> "*Dadas dos magnitudes desiguales, si de la mayor se resta una magnitud mayor que su mitad, y de lo que queda otra magnitud mayor que su mitad y se repite continuamente el proceso, quedará una magnitud menor que la menor de las magnitudes dadas*". (Proposición 1 del libro X de los "*Elementos*" de Euclides).

En esta primera etapa, las preocupaciones matemáticas que se relacionan con los límites tienen que ver con acercamientos indefinidos entre figuras geométricas: exhausión de polígonos inscritos en círculos, aproximación de secantes a tangentes, etc., a partir de procesos infinitos que llevan a calcular, no a descubrir, como el caso del área del círculo, sus valores límites.

El argumento griego evolucionó con Newton a finales del siglo XVII cuando el científico dio una interpretación de aproximación al límite asignando cantidades variables a cuerpos físicos en movimiento:

> "Lema 1: *Si cantidades o razones de cantidades convergen continuamente a ser iguales y antes de que el tiempo finalice, su diferencia se puede hacer menor que cualquier magnitud preasignada, entonces finalmente tiene últimas razones de igualdad*" (Newton, 1713, book 1, section1, p. 25).

Las *primeras y últimas razones* fueron concebidas por Newton como las sucesiones generadas a través de alguna *cantidad*, de modo que el límite al que tiende la sucesión es lo que él llamó últimas razones.

Para 1708 surge en Francia el "*Analyse Demontrée*" de Reygnaud, la obra deviene a documentos que dieron origen al Cálculo actual como Las "*Memoires de l´Academie de Leipzig*" y "*Analyse des Infiniment Petits*" de L´Hôpital y de las "*Ouvrages*" de M. Newton. En la primera parte del capítulo III, relacionado con el Cálculo integral, Reynaud resuelve un gran número de integrales indeterminadas (en otros casos integrales impropias) donde se aprecia el uso intuitivo del argumento límite infinito al llegar a la solución mediante una simple sustitución de los valores extremos sobre los que se trata de calcular el área. Véase, por ejemplo, el siguiente caso:

"Si nos proponemos cuadrar la hipérbola cuya ecuación es:

$$y = \frac{a^3}{(b+x)^2},$$

tendremos que:

$$\int ydx = -\frac{a^3}{b+x} + f,$$

para $x = 0$ queda:

$$f = \frac{a^3}{b},$$

de modo que la integral completa será el espacio igual a

$$\frac{a^3}{b} - \frac{a^3}{b+x},$$

[...], *cuando x toma el valor de $-b$, la integral quedará:*

$$\frac{a^3}{b} - \frac{a^3}{0}.$$

Pero $-a^3/0$ es una magnitud infinita y negativa, de modo que el espacio (área) es infinito"[3].

Es la época en la que importa hacer uso del "Análisis" (a partir del cálculo de los infinitamente pequeños) en la resolución de problemas geométricos que se siguen de curvas como las cónicas. El concepto de "elemento" (diferencial actual) toma un valor central y el "Cálculo de las diferencias" una connotación discreta con respecto al Cálculo diferencial.

Para 1759 una magnitud infinita era concebida como el "límite de lo finito" (Enciclopaedia Brittanica, 1771, p. 840). El propio D´Alembert aseguraba que el concepto de "número infinito" no existía:

"No es más que una idea abstracta, que sugiere solamente un límite intelectual, al cual todo número finito no llega jamás" (D´Alembert, 1759, pp. 239-244).

De lo anterior se resumía que el aspecto metafísico que presentaba el límite infinito era, a los ojos de la matemática, "poco exacto":

"Deben verse como maneras abreviadas de sugerirle, que los matemáticos han inventado para enunciar una verdad"[4].

Retomando el argumento griego D´Alembert propuso su propia definición del concepto:

"*Decimos que una magnitud es el límite de otra magnitud, cuando la segunda puede aproximarse de la primera tanto como una magnitud dada, por pequeña que esta pueda suponerse, en tanto que la magnitud, que se aproxima, pueda jamás sobrepasar la magnitud a la que se aproxima; de modo que la diferencia de semejante cantidad y su límite sea absolutamente indistinguible*" (Encyclopédie, 1780).

A mediados del siglo XVIII se instauraron mejores reglas para determinar los límites a los que tienden las sucesiones y series, a partir de las nociones de infinitamente pequeño e infinitamente grande. El acercamiento teórico de los límites sería la base de la verdadera metafísica de Cálculo Infinitesimal y en la forma que se utilizaban en esa época los términos: "diferencial", "fluxión", "exhausión" e "infinito", el límite les servía de posición geográfica puesto que "jamás" coincidía con ellos.

Esta idea del límite al que se puede aproximar tanto como se desee sin llegar a él, ocuparía

[3]*Op. cit*, pp. 245-246. Con las reservas de la traducción.
[4] *Op. cit*, p. 244

un valor importante en la definición que Bolzano aportaría para la continuidad de una función en 1817:

> "*Una función f(x) varía de acuerdo a la ley de continuidad para valores de x dentro y fuera de ciertos límites si, para cualquier valor de x, la diferencia f(x+w) - f(x) puede hacerse menor que cualquier cantidad dada, si uno hace w tan pequeña como se quiera*" (Bolzano, 1991).

Un primer intento por eliminar las ideas intuitivas de las magnitudes infinitamente pequeñas e infinitas fue ensayado por Lagrange a finales del siglo XVIII a través del uso de la serie de Taylor, posición reorganizadora, absolutamente algebraica, con la que buscaba independizar el análisis de toda consideración de límites, cantidades infinitamente pequeñas o evanescentes que, sin embargo, fueron un obstáculo para esclarecer la formalización del concepto.

En 1823 Cauchy reinventó la posición lagrangiana con una nueva exigencia de rigor para todos los elementos del Cálculo Infinitesimal omitiendo cualquier referencia intuitiva previa a la definición de continuidad y separando el acceso a lo gráfico. Una definición para la "continuidad de funciones" en su obra "*Cours d'Analyse*", heredada quizá de Bolzano, rebasaría todos los intentos anteriores por definir el concepto de límite:

> "*Una función permanece continua respecto de x entre los límites dados si, entre esos límites, un incremento infinitamente pequeño de la variable produce siempre un incremento infinitamente pequeño de la función*" (Cauchy, 1823, p. 90).

Las funciones más elementales permanecerían continuas entre dos límites finitos, siempre que ella no devenga infinita en el intervalo. En el caso de la función: a/x, ésta comprende un "valor singular"[5], que corresponde a los casos de las hipótesis: $x = 0$ y $x = \infty$; para cada caso ocurrirá, respectivamente, que: $a/0 = \infty$ y $a/\infty = 0$.

Cauchy desarrolló este concepto con cierta precisión al introducir en la definición la noción de "vecindad":

> "*Cada una de esas funciones será continua en la vecindad de un valor finito atribuido a la variable x, si ese valor se encuentra comprendido, para la función: a / x, entre los límites: 1°) $x = -\infty$ y $x = 0$ y 2°) entre los límites $x = 0$ y $x = \infty$*".

Expresaría que una cantidad "variable" deviene "infinitamente pequeña" si tiene por límite al cero. Señalaba en este punto que "no se debe confundir un decrecimiento constante", que converge, "con un decrecimiento indefinido"[6]. Los teoremas que aseguran la convergencia de sucesiones al "límite" fortalecieron sus propias definiciones.

El caso de funciones de la forma:

$$\frac{f(h)}{x}, \frac{h}{x},$$

donde:

$$\text{lím} \frac{f(x)}{x} = k = \text{lím}\left[f(x+1) - f(x)\right]^{7},$$

en las que al suponer $k = \infty$ se hace necesario designar por H a un número "tan grande como se quiera", y en el que se podrá siempre atribuir al número h un valor muy grande, hará que la diferencia: $f(x+1) - f(x)$ "converja

[5] *Op. cit*. p. 100
[6] *Ibid*. pp. 82-83
[7] *Ibid*. p. 105

al límite ∞ " toda vez que este último deviene superior a *H*. Aquí la frase: "converge al límite ∞ " da la impresión que Cauchy generaliza las operaciones con los números reales a expresiones indeterminadas.

En 1826 Abel se cuestionaría la permisibilidad de Cauchy al extender los tipos de operaciones en las series infinitas como si fueran finitas (Hitt, 2000).

A partir de la propuesta de Cauchy el análisis se convirtió en una disciplina teórica, de corte abstracto que fue expuesta a severas críticas, sobre todo en la enseñanza. El *Cours* de Cauchy trascendería al siglo XIX con el surgimiento de otras obras de matemáticas alternativas que reafirman la posición rigurosa de éste (Hadamard, 1923)[8]

De principios del siglo XIX a mediados del mismo, fueron años de diversas revisiones y formulaciones a las tres grandes líneas que prevalecen en al ámbito científico y de enseñanza del Cálculo infinitesimal: infinitésimos, cantidades evanescentes y cálculo algebraico. En este período surgieron importantes trabajos desarrollados por Carnot: *Réflexions sur la métaphysique du calcul infinitésimal* y A. Comte: *Les préliminaires généraux et la philosophie mathématique*[9].

Para 1860, J. Bertrand enseñaba el curso de análisis en la École Polytechnique a partir de la teoría de variables complejas de Cauchy (Belhoste et al, 1994)[10].

El curso de Weierstrass de 1861, que sería redactado por Schwarz, comenzó con la explicación de una función dada por Dirichlet y definió, enseguida, la variación infinitamente pequeña de la variable y de la función con la ayuda de: ε, δ, donde surgiría directamente la definición moderna de límite y continuidad:

> "*Si es posible determinar un δ tal que, para todo valor h más pequeño en valor absoluto que δ y $f(x+h)-f(x)$ sea más pequeña que una cantidad ε, entonces diremos que hacemos corresponder para una variación infinitamente pequeña de la variable una variación infinitamente pequeña de la función*"[11].

Weierstrass utilizó en sus demostraciones para la continuidad numerosos teoremas, por ejemplo: "Toda sucesión acotada tiene por lo menos un punto límite", la cual sugiere la existencia de puntos límite o puntos de acumulación de sucesiones acotadas; definió "conjunto compacto" en el sentido actual de un intervalo cerrado en la recta real; estableció una definición para la noción de vecindad: "Todas las x para las cuales la diferencia: $x - x_0$, en valor absoluto no sobrepasa un límite determinado", elementos con los que revaloró la experiencia de Cauchy dando al análisis el carácter científico que con este último se había iniciado.

BREVE HISTORIA DE UNA EPISTEMOLOGÍA

El siguiente apartado refiere la difusión que en nuestro país tuvo el concepto de límite infinito a partir de la variedad de reformulaciones contenidas en obras elementales (textos de matemáticas para la enseñanza) que se difundieron desde Europa a finales del siglo XVIII, a los colegios mexicanos donde se perfeccionaba la ingeniería y, posteriormente,

---

[8] Véase en esta obra el aserto: *Recherches des valeurs singulières que prennent dans certains cas les fonctions d'une variable*, pp. 225 a 233.
[9] Véase al final la bibliografía correspondiente.
[10] Citado en el capítulo: "De Bertrand à Hadamard, quel enseignement d'Analyse pour les polytecniciens"
[11] Extracto tomado del *Abrégé d'Histoire des Mathématiques*. Ed. Hermann, p. 272. París, Francia.

los puntos de vista de obras norteamericanas que se diseminarían con el acontecer del siglo XX.

La transición desde el punto de vista histórico del concepto de límite infinito en la enseñanza, refleja un paralelismo idéntico y con ciertas singularidades, al desarrollo conceptual que siguió a la definición racional del concepto a partir de su evolución conforme la matemática era llevada a un proceso de fundamentación, como se evidenció anteriormente. La distancia en ambos acercamientos es atemporal y tiene que ver con las normas geopolíticas a las que estuvo sujeta la difusión de conocimientos hacia nuestro país (Camacho, 2000).

Para el año de 1787 se incorporaron a la enseñanza de la carrera de filosofía del Colegio de San Ildefonso, antecesor de la Escuela Nacional Preparatoria, las *Institvtiones Philosophicae* de Francisco Jaquier (Hidalgo, 1996, p. 102). Cuatro de los seis tomos de la obra se orientaron hacia la enseñanza de la aritmética, álgebra y física, general y particular. Aunque no es clara la manera en que se enseñó la matemática con ese corpus en las aulas, resulta importante resaltar que las *Institvtiones* fueron compiladas por Jaquier de la edición ginebrina de los "*Principia*" de Newton.

En el tomo III de los "*Elementa Geometríae*", Jaquier exhibe una sucesión decreciente de términos que "convergen" a una cantidad infinitesimal en la forma: $1/x = \infty$.

> "[...] *Cualquier cantidad finita tiene la propiedad de poder ser dividida en partes que decrecen continuamente hasta "converger" a una cantidad infinitesimal. Tal es la serie:*
>
> $$\frac{1}{1}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{5}\cdots\frac{1}{\infty}\text{"}$$
>
> (Jaquier, 1824, sectio I, Cap. IV, p. 143)[12].

La validación de la convergencia de la serie a una cantidad infinitesimal, se debe (en tanto Jaquier) al "método de Newton de las primeras y últimas razones":

> "*Del que a la fecha hay pocas lecciones* [...] *y el que sin duda a devenido al método de exhausión*"[13].

Alternativamente la noción de infinito en la forma: $a/0$ era aceptada desde 1796 en la enseñanza nacional del Seminario de Minería, misma que fue expuesta por el español Benito Bails en su obra "*Principios de Matemáticas*":

> "*Como toda cantidad es por esencia capaz de aumento o disminución al infinito, cuando crece se acerca al grado máximo de incremento, al límite de sus aumentos, bien que nunca le alcanza, porque si llegara a alcanzarle ya no podría crecer más* [...]. *Este límite de los aumentos es lo que los matemáticos llaman el infinito, cuya expresión es:a/0, y* ∞ *el signo con el que le señalan*" (Bails, 1789, p. 313).

En la página 405, en el capítulo que llama: "Principios del Cálculo Integral", resolvió, con el argumento citado, la "quadratura" (área) para el caso de la expresión:

[12] Con las reservas de la traducción: "Pari modo quantitas qualibet finita concipi potest divisa in partes perpetuo decrescentes, donec perveniatur ad quantitatum infinitesimam. Talis est series

$$\frac{1}{1}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{5}\cdots\frac{1}{\infty}\ .$$

[13] Se cita en latín de la siguiente manera: "Haec pauca dicta sunt de primarum et ultimarum rationum methodo, quam quidem ad methodum exhaustionem revocari posse intelligitur". *Op. cit*, p. 145.

$$S\frac{dx}{x},$$

cuya integral es:

$$S\frac{dx}{x}=L.x+C.$$

Ésta afirma:

> "*Será = 0 cuando x = 0. Por consiguiente en este caso tal área será L.o + C = o, y por lo mismo C = - L.o, y el área será L.x – L.o = L.x/0. Luego* [...] *el espacio (el área) será infinito, considerando o como una cantidad infinitamente pequeña*"[14].

Bails, compendió para escribir los "*Principios*" gran parte de obras francesas que circulaban en Europa desde principios del siglo XVIII, particularmente de Cálculo infinitesimal. Dos de los corpus atendidos fueron el "*Analyse Demontrée*" de Reynaud, ya comentado anteriormente, y el texto de cálculo de Bézout (1764-1769). Manuales en los que la expresión: $a/0 = \infty$, se cultivaba y tomaba un valor central.

La obra de Bails permaneció en el Seminario de Minería por alrededor de sesenta años[15], tiempo en el que la forma de enseñar la noción cobraría vida. El mismo temor por enfrentar la división por cero se heredó en la enseñanza del Cálculo diferencial al propio Colegio de Minería de mediados del siglo XIX. La utilidad del texto de Cálculo Diferencial del francés Boucharlat, obra que dejó de lado los "*Principios*" de Bails, tendría vigencia en el recinto hasta 1867 y pugnaba la definición de derivada de una función a partir del primer "coeficiente diferencial" que aparece en las series binomiales. Boucharlat definió el cociente de diferenciales como:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{0}{0}:$$

> "*Esta expresión no tiene nada de absurdo, el álgebra nos enseña que 0/0 puede representar toda suerte de cantidades" (sic). "En la hipótesis de h=0, la ecuación*
>
> $$\frac{Fx}{\varphi x}=\frac{P}{0}=\infty \text{ "}^{16}$$
>
> (Boucharlat, 1856, pp. 3 y 64).

El abuso en la didáctica de admitir en Minería: $a/=\infty$, trascendió a la Escuela Nacional Preparatoria de mediados del siglo XIX. Gabino Barreda, director de la preparatoria se preocupó en 1873 por el uso cotidiano que los estudiantes hacían de dichas "operaciones metafísicas", a las que se llegaba fácilmente a partir de un "empirismo inductivo" que, si bien no suministraba un conocimiento seguro, sí arrojaba ciertos resultados:

"Reducir la geometría trascendente a operaciones algebraicas únicamente resulta completamente falso (...) la inducción no puede evadirse con operaciones de naturaleza absoluta (...) y es que la inteligencia no tiene otro procedimiento para pasar de un medio parcial a otro global"[17].

---

14 Anotamos el argumento al pie de la letra, respetando sobre todo el tipo de notación: *o* para el cero, *L.x* para el logaritmo natural y *S* para el símbolo de integral.

15 Al respecto véase la obra de Díaz y de Ovando, C (1994): *Anuarios del Colegio de Minería 1845, 1848, 1859, 1863*. UNAM. México, particularmente el discurso pronunciado por el profesor de la primera cátedra de matemáticas, Manuel Castro, el 14 de noviembre de 1848, en el que expone sus quejas respecto de la anticuada obra de Bails", pp. 21-25 del documento original.

16 Considerando que las funciones *Fx* y *jx* se desarrollaran en serie, incrementándoles en *h*, y posteriormente hacer *h=0*.

17 *Cfr.* Camacho, A. (2000). *Op, cit*, pp. 106-107.

La inducción a la que se refiere Barreda es el "análisis" que debía realizarse a la función *a/x* para así determinar el límite, práctica que los estudiantes no lograban. Las operaciones "de naturaleza absoluta", que se cuestiona, son aquellas como: $a / 0 = \infty$, en las que al dejar de lado la inducción se dio una generalización equivocada a los resultados.

Ante la epistemología adjunta de las "verdades" que los alumnos consignaban, Barreda propuso en la preparatoria un modelo de enseñanza para el concepto de límite infinito, definió a través de una sucesión de aproximaciones y de dos argumentos fundamentales: las "variaciones concomitantes" de Stuart Mill, (1866, p. 442) y el axioma griego de "acercarse a la cantidad tanto como se quiera sin llegar a ella".

Barreda hizo distinción de esta ley para determinar el valor al que tiende *-disminuyendo incesantemente-* la función a / x; *a medida que x, se va acercando a cero:*

> *"Si suponemos: a /x, de manera que x vaya disminuyendo incesantemente, a/x irá creciendo en proporción a medida que x, se vaya acercando a 0. De esta constante relación entre la disminución de x y el aumento de a /x inferimos por inducción de variaciones concomitantes, que si x llegara a igualarse con 0, o si tocase su límite, como se dice a / x sería =* ∞[18].

La intransigencia de considerar ambiguamente al infinito como un número real y, a partir de ello involucrarle en las operaciones elementales, continuó divulgándose a pesar del teorema propuesto por Barreda. En 1897 estuvo presente en la enseñanza preparatoria mexicana en obras como las "*Nociones de Cálculo Infinitesimal*" de Echeagaray (1897). Echeagaray era en esa etapa profesor de la asignatura de "Cálculo" en la E. N. P.

En el "Curso abreviado de Análisis" de Lamadrid, diseñado para la enseñanza de la matemática en la E. N. P. (Lamadrid, 1912), se daba una definición muy cercana a la actual, y con algunas vértebras del teorema de Barreda (en tanto el axioma griego), sobre la "palabra límite":

> *"Cuando una magnitud variable X, no puede alcanzar un cierto estado de magnitud A; pero se aproxima indefinidamente á esta magnitud.* ***De manera que pueda diferir de ella una cantidad tan inmediata de cero como se quiera****, se dice que la variable X, tiene por límite A, y se escribe: lím X=A "*[19].

En el curso de Lamadrid la expresión "tender a" era tímidamente aceptada en la didáctica posrevolucionaria y la frase, "*n* crece indefinidamente", se aplicaba para determinar los límites al infinito.

Con la difusión del texto de Granville, en la enseñanza del Cálculo en la preparatoria y nivel superior, se reforzó la tradición en mostrar las concepciones "metafísicas" del concepto de límite infinito. La primera edición norteamericana de 1904, aparece en la didáctica mexicana de la disciplina hacia los años veinte (Granville et al, 1904).

Granville excluyó la división por cero "puesto que las expresiones: $a / 0$ y $0 / 0$, carecen de sentido". Sin embargo, al atender el caso del límite infinito la exclusión de la división por cero asume otra dimensión. En esta parte se sugiere la ambigüedad que se presenta en la Tabla 1.

---

[18] Barreda, G. (1901). *Op. Cit.*, p. 54.

[19] *Op. cit.* p. 101. Las negrillas muestran la semejanza del concepto expuesto por Lamadrid con el actual. La transcripción es copia fiel del original.

Escrito en forma de Límites	Forma abreviada frecuentemente usada
(1) $\lim\limits_{v \to 0} \frac{c}{v} = \infty$	$\frac{c}{0} = \infty$
(2) $\lim\limits_{v \to \infty} cv = \infty$	$c\,\infty = \infty$
(3) $\lim\limits_{v \to \infty} \frac{v}{c} = \infty$	$\frac{\infty}{c} = \infty$
(4) $\lim\limits_{v \to \infty} \frac{c}{v} = 0$	$\frac{c}{\infty} = 0$

Tabla 1

El contexto elemental del saber, que se expone en la obra, hizo que en la Universidad Nacional y en los colegios del país se difundieran con más amplitud las ediciones norteamericanas de 1935 y 1942-43. Para 1963 la obra fue traducida al español por Steven T. Bryngton (Granville et al, 1963) alcanzando tirajes anuales de hasta 12000 ejemplares que hablaban bien de su difusión en las universidades e institutos de nuestro país. A mediados del siglo XX se fundó el Instituto Tecnológico de Chihuahua, primer recinto regional en su género (la enseñanza de la ingeniería) que debió interceptar la enseñanza matemática con esta obra.

Alternativamente se introdujo en la enseñanza de la ingeniería nacional la obra del norteamericano H. B. Phillips llamada: "*Elementos de Cálculo Infinitesimal*". En ella, el autor extiende la definición griega del concepto de límite hacia lo que pareciera ser un modelo en el que prevalecen magnitudes como los infinitésimos e infinitos, aunque ello no fue claro:

> "*Se dice que una constante a es el límite de una variable x cuando esta se aproxima a aquélla, de modo que la diferencia x – a, en valor absoluto, pueda hacerse tan pequeña como se quiera*"

Siendo la dimensión infinita:

> "*Se dice que una variable se hace infinita cuando llega a ser mayor, en valor absoluto, que cualquier número dado por grande que sea*" (Phillips, 1945, p. 5).

En 1948 se traduce al español el texto inglés "*Higher Algebra*" de Hall y Knight (1948). El contexto en que se definió el concepto de límite infinito es similar al actual, más sin considerar expresiones como ε, δ:

> "[...] *la fracción a/x aumenta de valor cuando x decrece, y tomando un valor para x suficientemente pequeño, podemos hacer que a/x sea tan grande como queramos; esto se expresa usualmente diciendo: cuando x tiende a cero el límite de a/x es infinito (sic.). Queremos decir que la variable puede llegar a ser menor que cualquier cantidad imaginable*" (Hall & Knigth, 1948, pp. 262-263).

Los autores sugerían que el enunciado anterior podía expresarse simbólicamente como: "si x es 0, entonces a/x es ∞", lo cual pareciera una forma de elementarizar[20], para entender mejor lo expresado en forma de teorema; puesto que al respecto afirmaban:

[20] "Elementarizar", en el sentido de hacer más sencillo, claro, explícito y abreviado el conocimiento.

"[...] *Al hacer uso de estas formas concisas de expresión, debe recordarse que son solamente abreviaciones hechas por comodidad en los enunciados verbales anteriores*".

En los años setenta aparece un texto de Cálculo de Marcelo Santaló catedrático de matemáticas en la Universidad Nacional y el Instituto Politécnico Nacional, que fue revisor de la primera versión castellana del texto de Granville (Santaló & Carbonell, 1980).

En el "*Cálculo*" de Santaló y Carbonell se hereda, imprime y refuerza, la tradición del uso de la concepción primitiva del límite infinito. La tabulación de valores crecientes y decrecientes de x e y para la función: $1/x$ cuando $x \to \infty$, hizo a los autores definir y conjeturar que:

$$\text{“} \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0 \,,$$

y simbólicamente: $1/\infty = 0$[21]

En el caso de expresiones indeterminadas como: $a/0$, los autores afirmaban que "la fracción no tiene límite y se dice que tiende a más menos infinito, según sea el caso". La forma $0/0$ debe estudiarse de tal manera que "se pueda quitar la indeterminación mediante operaciones algebraicas sencillas".

Alternativamente entre los años sesenta y setenta y nueve, ingresaron en nuestro país traducciones al español del texto de Courant y Robbins (1979): *¿Qué es la matemática?* En la obra los autores incorporaron un recurso importante para la enseñanza del concepto de límite infinito, a partir de reformular el argumento griego, haciendo uso de expresiones en sucesiones donde las cantidades ε y δ eran fundamentales:

"*Sea* ε *un número positivo cualquiera; entonces, podemos encontrar un entero N, tal que todos los términos de la sucesión:* a_n, *para los cuales:* $n \geq N$, *son interiores a un intervalo I de amplitud total* 2ε *y cuyo centro es O*"[22].

Si bien el texto de Courant y Robbins perteneció a la enseñanza matemática mexicana de los años citados, lo cierto es que a partir de esta obra surgieron otras como la de Leithold (1998), que impregnarían la enseñanza del concepto a partir de expresiones similares a la anterior. Leithold reviste el argumento de la siguiente manera:

"*Los valores de f(x) crecen sin límite conforme x crece a un número a si f(x) puede hacerse tan grande como se desee (esto es mayor que cualquier número positivo N) para todos los valores de x suficientemente cercanos a a, pero sin considerar a a, mismo*"[23].

En el centro del axioma se coloca la exigencia de aproximarse *tanto como se desee* a la cantidad fija a, con una aproximación determinada ε, de suerte que se muestre que existe un entero N tal que los a_n, posteriores al término a_N cumplen con la condición $n \geq N$.

Sin embargo, los ejemplos que planteó Leithold en su obra quedaron al nivel de sustituir un valor puntual muy cercano a la restricción en la función:

"*Tenga cuidado al elegir el valor de x, asegúrese que esté lo* ***suficientemente*** *cerca de a al determinar el comportamiento del cociente, con lo cual sea posible* ***sospechar*** *–intuir– el límite*"[24].

---

[21] *Ibid*, p. 34.

[22] *Op. cit*, pp. 302-303

[23] *Op. cit*, p. 56.

[24] *Ibid*. pp. 58-59, las negrillas son nuestras.

De los años ochenta en adelante invadieron el mercado pedagógico nacional manuales de autores norteamericanos para la enseñanza del Cálculo. En ellos perdieron significado didáctico las formas indeterminadas de la división por cero y se resta importancia al modelo inductivo para llegar al límite. Aparecieron también definiciones del concepto de límite infinito a partir de cantidades preestablecidas como ε y δ.

En la misma época Spivak sugirió aprenderse de "memoria, si fuera necesario" la definición del concepto de límite vía ε y δ, ¡como si fuera un poema!:

> "*Esto es, por lo menos, mejor que emplearle incorrectamente; quien haga esto, irremediablemente obtendrá demostraciones correctas*" (Spivak, 1981, p. 110).

Otros textos que aparecieron en los noventas extendieron las operaciones de los números reales incluyendo al infinito, sin cuestionarse los órdenes de magnitud involucrados, por ejemplo, en Lang se define:

> "*Cuando L (el límite) es:* ∞, *definimos:* $\infty + \infty = \infty$; $\infty \cdot \infty = \infty$; $0/\infty = 0$; $c + \infty = \infty$. *No definimos las expresiones* $0 \cdot \infty$; ∞ / ∞ ; $\infty / 0$; $0/0$; *o* $c/0$" (Lang, 1990, p. 45).

UBICACIÓN DEL CONCEPTO DE LÍMITE INFINITO EN LOS PLANES DE ESTUDIO Y TEXTOS ACTUALES

Nuestro análisis tuvo como base el programa de Matemáticas I vigente desde la Reforma Educativa de 1994 para el Sistema de Institutos Tecnológicos. Las dos primeras, de cinco unidades del programa, son las siguientes:

Programa General

I. Introducción al Cálculo
   1. Clasificación y propiedades de los números reales
   2. Recta numérica y concepto de intervalo
   3. Valor Absoluto
   4. Desigualdades
   5. Funciones y sus gráficas
   6. Clasificación y operación de funciones

II. Límites y continuidad de funciones
   1. Definición de límite
   2. Teoremas de límites y límites laterales
   3. Límites de funciones trascendentes y algebraicas
   4. Funciones continuas
   5. Asíntota horizontal y vertical

El objetivo educacional que se plantea en la unidad II para la enseñanza del concepto de límite, en general, sugiere que el alumno "determine si una función tiene límite o no, y en caso afirmativo poder evaluarlo numéricamente". Además, "dada una función, encontrará el dominio en el cual la función es continua". Las actividades para conseguir el objetivo involucran:

> "Establecer las características que denota una función continua y (con ello) la definición de continuidad..."; así como "discutir la solución de funciones que permitan obtener su asíntota vertical y horizontal."

El plan de estudios no sugiere el modelo matemático con el que se debe introducir el concepto, tampoco se incorporan alternativas didácticas, ello queda abierto.

Analizamos los textos de Cálculo de Swokowski, Purcel y Stewart[25] ya que, al menos para la enseñanza matemática del Sistema Tecnológico son los más utilizados en los cursos y se sugieren en el plan de estudios anterior.

El grado de formalización de la noción de límite infinito que se expone en los diferentes textos, no varía mucho de uno a otro. En los tres casos se plantea inicialmente una definición "informal" o intuitiva en el contexto del argumento griego de "acercarse a la cantidad tanto como se quiera sin llegar a ella" con la que se establece que: $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$.

Las gráficas de funciones asintóticas y el acercamiento a éstas, a partir de valores muy cercanos a la restricción ayudan al cometido. La definición informal sirve de eslabón para diagnosticar su significado a partir de cantidades como ε y δ y así fijar la "definición formal", Purcel le llama "definición rigurosa", en los siguientes términos:

> "*Para deducir que:*
>
> $$\lim_{x \to \infty} \frac{c}{x^k} = 0,$$
>
> *se debe demostrar que para todo $\varepsilon > 0$, existe un número positivo N tal que:*
>
> $$\left| \frac{c}{x^k} - 0 \right| < \varepsilon$$
>
> *siempre que $x > N$*" (Swokowski, 1989, pp. 207-210).

Los tres autores intentan aclarar que expresiones como: "cuando x tiende a a, $f(x)$ tiende a ∞", no significa que la función $f(x)$ tienda o se acerque a un número real, al respecto tratan de enfatizar en la indeterminación dado el decrecimiento arbitrario de la variable x[26]. Los cuantificadores $\forall$ (para todo) y $\exists$ (existe) son cambiados por las frases correspondientes, lo cual sugiere restar cierto grado de complejidad lógica a las definiciones.

Swokowski y Purcel introducen el concepto de límite infinito después de ver la totalidad del tema de derivación en una variable. Stewart lo hace antes del tema de aplicación de máximos y mínimos. En ninguno de los tres textos se introduce la noción de límite infinito antes del tema de continuidad, a diferencia de lo que se plantea en el plan de estudios.

No obstante el intento de rigor, este último no forma parte operativa de la algoritmia que lleva a resolver los problemas y ejercicios que sobre el tema se plantean en los tres textos.

EL CONCEPTO EN LOS PROFESORES

Con la intención de verificar las concepciones y formas en que los docentes enseñan el concepto de límite infinito, se entrevistó a profesores del nivel medio superior de enseñanza tecnológica y del nivel superior[27]. En este caso la intención no fue la de inferir resultados a partir de las entrevistas, sino el tratar de homogeneizar, a manera de contar con un parámetro, el modo más general con el que se enseña el concepto. La única pregunta al respecto fue la siguiente:

¿ Para usted qué significa la expresión: $a/0$? Sugerimos las siguientes respuestas:

a) ∞

[25] Véase la bibliografía.

[26] Swokowski, E. W. (1989). *Op. cit.* p. 205

[27] Solamente planteamos aquí tres de las cuatro entrevistas que realizamos a profesores del Sistema Tecnológico.

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{a}{x}$

c) $\left\{ \forall x \in \Re, \dfrac{a}{x} = a, \dfrac{a}{\frac{1}{2}}, \dfrac{a}{\frac{1}{3}}, \ldots, \dfrac{a}{\frac{1}{N}}, \ldots, \dfrac{a}{0} \right\}$

d) $|x - a| \leq \varepsilon \leftrightarrow f(x) = \dfrac{a}{x} \geq N$

El primer profesor entrevistado labora en un CBTIS de la entidad; su formación es académica es la ingeniería industrial y eventualmente imparte el curso de Cálculo en el N.M.S., y ante la pregunta no dudó en afirmar: $a/0 = \infty$. La justificación a la respuesta, dijo: "es porque así está referenciado en varios textos de Cálculo." Sin aclarar esto último continuó con la siguiente discrtación:

> "El problema reside en el infinito en sí, manejar una abstracción con la facilidad de un número cualquiera ha sido una ambición desde tiempos remotos, tendemos a ubicarlo tan lejos que evitamos maravillarnos de él. La simple bisección continua de un segmento (a la mitad, a la mitad de la mitad, etc.) nos permite acercarlo y propiciar que el alumno lo vea, para entenderlo". El profesor cerró la charla afirmando: "el infinito es no alcanzable, pero sí localizable".

Si bien el profesor no explicó su forma de enseñar el concepto, se puede observar en su expresión el modo de un proceso inductivo de llegar al límite infinito a partir de la "simple bisección continua del un segmento" para localizarle, toda vez que los acercamientos llevan al alumno a "entenderlo", lo cual sugiere que éstos podrán determinar el valor del límite. Obsérvese que no negó la expresión: $a/0 = \infty$

Otra profesora entrevistada también ingeniero industrial que labora en los dos sistemas, N.M.S (Colegio de Bachilleres) y N.S (Sistema Tecnológico), donde por varios años ha ejercido la enseñanza de la asignatura de Matemáticas I contestó a la pregunta así:

> " $a/0 = \infty$. Porque:
>
> $$\lim_{\text{var} \to 0} \frac{\text{const.}}{\text{var.}} = \infty.$$
>
> Por ejemplo:
>
> $$\lim_{x \to 1} \frac{1}{x - 1} = \pm\infty,$$
>
> puesto que, al tomar argumentos cada vez más cercanos de uno, los puntos entre la función y la recta $x=1$ están más cercanos pero no se cortan –por lo general esto yo lo explico con una gráfica–. Si eso sucede, tenemos un límite infinito".

La parte medular del discurso de la profesora se centró ahí donde los puntos entre la función y la recta, que sirve de asíntota, "se cortan o no". De este recurso echa mano para mover la "intuición" de sus alumnos y establecer que:

$$\lim_{x \to 1} \frac{1}{x - 1} = \pm\infty$$

Empero, de esa manera da validez a la "operación": $a/0 = \infty$.

Finalmente otra profesora del Sistema Tecnológico, licenciada en matemáticas, que enseña varias de las asignaturas de la disciplina comentó de manera similar:

> "Yo estoy de acuerdo en que: $a/0 = \infty$, siempre y cuando se considere como:

$$\lim_{x\to 0}\frac{a}{x}=\infty.$$

> Además (en el caso del límite infinito) el límite no existe, los alumnos tienen una concepción fija del concepto finito (sic) se abusa del lenguaje al decir ∞. El límite debe verse a través de aproximaciones, si se ve como algo acabado se evita este proceso".

Los últimos dos casos exhiben la expresión $a/0=\infty$, como un puente cuyo tránsito deja llegar al caso compacto:

$$\lim_{x\to 0}\frac{a}{x}=\infty$$

Por experiencia propia nuestro punto de vista es que el concepto de límite infinito en el mejor de los casos se introduce, sin mediación alguna, en los cursos de Cálculo de los niveles medio superior y superior a partir de una inducción a funciones racionales de la forma:

$$f(x)=\frac{1}{(x-a)^n}$$

para: $x\neq a$ y $a\in\Re$, que se supone llevan a él. La inducción es matizada por un proceso de aproximación numérica sin límite, semejante a la sucesión:

$$1,\frac{1}{\frac{1}{2}},\frac{1}{\frac{1}{3}},\frac{1}{\frac{1}{4}},\ldots,$$

en la que los profesores rebasan el concepto de división en los números reales al asumir la restricción del dominio de la función $x\neq a$ concluyendo con la "operación": 1/0. Resultado final de la inducción que permite inferir que el "límite" al que tiende la sucesión es el infinito (∞), toda vez que se le exhibe con la notación:

$$\lim_{x\to a}f(x)=\infty.$$

Para intentar su comprensión, el proceso es acompañado por alguna gráfica de funciones asintóticas como el caso de la hipérbola equilátera.

Aun cuando la monotonía anterior alude de principio una contradicción por lo indefinido del proceso, lo cual se caracteriza por poner en juego un conjunto numérico de naturaleza operativa distinta al de los reales y a la vez interactuando con este último: los transfinitos, la operación $a/0$ sirve de puente en la enseñanza para concluir con la expresión:

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\infty$$

CONCEPCIONES DE LOS ESTUDIANTES. CUESTIONARIOS Y PROBLEMAS

Por experiencia sabemos de las concepciones de los estudiantes y tratando de conocer con mayor precisión el estado del conocimiento que tienen respecto al concepto que estudiamos decidimos aplicar cuestionarios y problemas a varios grupos de los primeros semestres de ingeniería del Sistema Tecnológico y del Sistema Universitario.

La primera encuesta se aplicó al iniciar el semestre en febrero del 2000 a 62 estudiantes que cursan la asignatura de Matemáticas I al inicio del semestre; a 23 alumnos de la carrera de Ingeniería Civil de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Autónoma de Chihuahua y 41 de la carrera de Ingeniería Industrial del Tecnológico de Chihuahua II; además, a 33 alumnos de la carrera de Ingeniería en Sistemas Computacionales que cursan la asignatura de Matemáticas IV del Tecnológico de Chihuahua II. Las edades de los alumnos fluctuaron entre los 18 y 19 años; la mayoría tuvo la experiencia de haber cursado la asignatura de Cálculo en el nivel medio, de aquí que, los estudiantes de la asignatura de Matemáticas IV, es de suponer, tienen ventaja a estos últimos al haber cursado tres materias de matemáticas que incluyen Cálculo diferencial e integral.

Cuestionario I

En esencia pedimos el significado de "operaciones" que presumiblemente contienen la indefinición ya vista éstas fueron: $a/0$, $0/0$ y ∞/∞. De lo anterior esperamos resultados preliminares poco concisos del concepto que posteriormente se entenderán mejor en el cuestionario 2.

Para el caso particular que nos interesa de: $a/0$, obtuvimos:

Estudiantes de Ingeniería Industrial (41)

Tipo de respuesta	0	∞	No existe	indefinido	1	indeterminado	$\frac{1}{0}$
Núm. de alumnos	3	22	2	1	3	8	2

Estudiantes de Ingeniería Civil de la Universidad (21)

Tipo de respuesta	0	∞	No existe	indefinido	1	error	Constante
Núm. de alumnos	7	6	2	0	1	1	4

Alumnos de Matemáticas IV, I.S.C, del tercer semestre del Tecnológico (36)

Tipo de respuesta	0	error	$\frac{1}{0}$	∞	No se puede	indefinido	Algo imposible	Indeterminado	Constante entre cero
Núm. de alumnos	4	6	1	7	2	6	1	7	2

Un resumen que condensa las respuestas más significativas es el siguiente:

Tipo de respuesta	0	1	∞	Indefinido, Indeterminado o no existe	Otras	Total
Núm. de alumnos	14	4	35	26	19	98

Comentarios a los resultados:

a) Los resultados de las entrevistas indican ver en un 18% de los alumnos que participaron, un alejamiento de las operaciones con los números reales y hacia la búsqueda de resultados reales. Casos singulares que surgen del cuestionario como: $a / 0 = 0$, $a / 0 = 1$, reafirman este punto de vista. Véase la siguiente expresión de un estudiante:

> "El cero entre cualquier constante da cero, así como todo número dividido entre cero da cero".

Este efecto, llamado por Leibniz "principio de permanencia", surgió en la experiencia como un hecho concreto y natural (Artigue, 1998, p. 44 ; Bachelard, 1927, p. 220).

b) Para la expresión: $a/0$, de principio estimamos la hipótesis que surge del análisis epistemológico, es decir: $a / 0 = \infty$ que en 35% de los casos tuvo ese resultado. Desde nuestra perspectiva, esta inferencia muestra una imposición de la "operación" a los estudiantes por parte de sus profesores con lo cual se ha intentado evitar la división por cero.

Un indicativo de la credibilidad de esta hipótesis la dan las "tablas" o formularios de apoyo que utilizan los estudiantes, y cuyo contenido condensa un sinnúmero de conocimientos de asignaturas de preparatoria y nivel superior. Las nociones que se manejan en los formularios en torno al concepto son idénticas a las que se plantean en el texto de Granville. La manera en que se exponen en algunas tablas es la siguiente: $c/0 = \infty$, $c.\infty = \infty$, $c/\infty = 0$. Si bien este es un recurso que usan los estudiantes cuando enfrentan operaciones como:

$$\lim_{x \to 0} \frac{a}{x}$$

la habilidad de reducir mecánica y bruscamente esa notación con los formularios a la forma: $a / 0$ o bien: $a / 0 = \infty$, refleja el modo en que les fue enseñada la operación. Comentarios como el siguiente, de un alumno de primer semestre de ingeniería, muestran su incertidumbre ante la "operación".

> "Yo pienso que esto es un truco capcioso ya que ni la calculadora lo sabe, y eso que la calculadora es científica. Muchos matemáticos trabajaron en ella –en la calculadora– y tampoco ellos pudieron resolver el problema. Sólo sabemos que:
>
> $$\frac{a}{0} = -\varepsilon\text{"}$$

c) El 26% de los encuestados dieron una respuesta entre: "indefinido", "indeterminado", "no existe", e incluso, "algo imposible". Lo cual sugiere ser un acierto hacia aquello que consigna la operación, pero ¿qué significan esos términos para los estudiantes?

d) Ningún estudiante relacionó la expresión $a/0$ con un proceso indefinido de aproximación a cierto límite, lo cual reafirma el arraigo de la aplicación de estas expresiones con el uso de sus formularios.

e) Contra lo que se pudiera esperar, no se aprecia diferencia significativa en los resultados al comparar un grupo con otro sobre todo el de Matemáticas IV, respecto de aquellos de Matemáticas I.

Cuestionario II

Con el siguiente bloque de integrales indeterminadas, intentamos conocer las formas algebraica y algorítmica con que los estudiantes expresan e interactúan las nociones: $a/0$ y a/∞; sobretodo, buscamos aquellos obstáculos que les llevan a conflictos en su solución. Elegimos integrales indeterminadas porque son éstas donde el concepto de límite infinito y singularidades asociadas, tiene un primer uso en los cursos de matemáticas:

> II. Resuelva las siguientes integrales impropias, para ello puede utilizar sus formularios, tablas de integración o, en su defecto, el método de integración que considere más apropiado:

1) $\int_{-b}^{0} \frac{a^3}{(b+x)^2} dx$, siendo $a, b \in \Re$

2) $\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2}$

3) $\int_0^1 -\frac{1}{x^2} sen \frac{1}{x} dx$

4) $\int_0^\infty e^{-x} dx$

De estas integrales, la primera de ellas (1) es idéntica a la que resolvió Reynaud en el "*Analyse Demontrée*", que expusimos en el análisis histórico, y en la que concluyó el resultado de un área infinita a partir del resultado:

$$\frac{a^3}{b} - \frac{a^3}{0}$$

En esta expresión, Reynaud es consciente, intuitivamente, del porqué de: $a/0 = \infty$ más como se demostró en la encuesta anterior, nuestros estudiantes aún no. En la segunda integral se concluye el resultado:

$$\arctan x\Big|_0^\infty$$

centramos nuestro interés en este último para conocer el modo en que los estudiantes "conciben" el infinito, determinan el valor del límite y obtienen el área. El resultado de la tercera integral consigna una indeterminación en el argumento de la función coseno, es decir:

$$\cos \frac{1}{x}\Big|_0^1$$

al igual que en la integral anterior importa conocer que harán los estudiantes ante el caso:

$$\cos \frac{1}{0}\Big|_0^1$$

La cuarta integral se justifica por ser del tipo de expresiones que se resolverán en el tema de transformada de Laplace.

Aplicamos el cuestionario a 145 estudiantes de las carreras de ingeniería del Tecnológico de Chihuahua II evitando evaluar aquellos de Matemáticas I -Cálculo diferencial e integral ya que nuestro objetivo es conocer las concepciones, destrezas y actitudes de los alumnos de ingeniería a los que ya se enseñó el concepto y, por supuesto, tienen experiencia en la solución de integrales definidas y área bajo la curva. Los grupos fueron los siguientes:

1. Fundamentos de Análisis Numérico. (4° y 5° semestre, 30 alumnos)[28]
2. Matemáticas II -Análisis Vectorial y Cálculo en varias variables (2° semestre,

[28] El grupo de fun ... posterior al de Matemáticas IV.

14 alumnos)

3. Matemáticas IV Ingeniería Industrial - Ecuaciones Diferenciales y Series (3° y 4° semestre, 13 alumnos)
4. Matemáticas III Ingeniería Industrial e Ingeniería en Sistemas Computacionales Álgebra Lineal. (2° semestre, 43 alumnos)
5. Matemáticas IV Ingeniería en Sistemas Computacionales – Ecuaciones Diferenciales y Transformada de Laplace. (3° y 4° semestre, 36 alumnos)
6. Matemáticas IV. Ingeniería en Sistemas Computacionales – Ecuaciones Diferenciales y Transformada de Laplace (3° y 4° semestre, 9 alumnos)

Los alumnos evaluados se consideraron una muestra representativa de las carreras de ingeniería del Instituto, tienen entre 19 y 20 años en promedio y algunos de ellos repiten la asignatura. Para la solución de las integrales se les permitió el uso de tablas o formularios y calculadoras sencillas.

Los resultados fueron condensados en la Tabla 2.

Para la primera integral:

$$\int_{-b}^{0} \frac{a^3}{(b+x)^2}\, dx$$

los resultados que esperábamos, y a la vez nos sirvieron de hipótesis, fueron los siguientes: 1ª) $a^3/b - a^3/0$, respuesta en la que los estudiantes sólo sustituirían los extremos de la integral. En la mayoría de los casos se exhibió el término "indeterminación". Aquí el argumento $a^3/0$ los puso en dificultad para concluir que el área bajo la curva era indeterminada. El resultado de esta hipótesis se validó con esa respuesta en 32 alumnos.

2ª) Esperamos el mismo resultado anterior: $a^3/b - a^3/0$, considerando que los alumnos expresaran que: $a^3/0 = \infty$, resultado válido que no fue concluido con un proceso de aproximación al límite. Ello ocurrió en cinco alumnos.

3ª) Mismo resultado anterior: $a^3/b - a^3/0$, en el que la expresión $a^3/0$, fue considerada como cero, sucedió con cinco alumnos.

4ª) La integral no pudo ser resuelta por 56 alumnos, es decir no se llegó a su solución analítica; mientras 44 de los que lo resolvieron se perdieron en procesos algebraicos.

Para la integral:

$$\int_{0}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$$

1ª) La primera respuesta que esperamos, como hipótesis, fue: arctan ∞ – arctan 0, resultado con el cual 39 alumnos no atinaron a determinar el valor de arctan ∞. En esta parte el obstáculo, arctan ∞, llevó a la mayoría de los estudiantes a auxiliarse de la calculadora para definir el resultado, lo cual fue inútil.

2ª) Otro caso esperado fue:

$$\arctan \infty - \arctan 0 = \pi/2 ,$$

que es la solución, 27 alumnos llegaron a ello sin establecer un proceso al límite, el resultado es fiable a partir que lo intuyeron disponiendo en la calculadora un valor numérico grande, cuyo resultado les apareció en la pantalla como 90°, sin encontrar el por qué.

Casos fallidos que se presentaron fueron: arctan $\infty = \infty$, dos alumnos, y arctan $\infty = 1$, dos alumnos.

3ª) 42 alumnos no llegaron a la solución analítica, perdiéndose en los métodos de integración y 33 obtuvieron la solución analítica pero se perdieron en los procesos algebraicos.

Tipos de respuesta

Reactivo	Grupos	$-\frac{a^3}{b}+\frac{a^3}{0}$, bloqueo para no resolver el problema (indeterminación)	En $-\frac{a^3}{b}+\frac{a^3}{0}$, concluyó que: $\frac{a^3}{0}=\infty$, y resolvió el problema.	En $-\frac{a^3}{b}+\frac{a^3}{0}$, Expresó $\frac{a^3}{0}=0$	No resolvió la integral	Calculó la integral, pero se perdió
$\int_{-b}^{0}\frac{a^3}{(b+x)^2}dx$	1.	11	4	5	4	6
	2.	5	0	0	6	3
	3.	5	0	0	5	3
	4.	6	1	0	24	12
	5.	5	0	3	16	12
	6.	0	0	0	1	8

Reactivo	Grupos	Se exhibió indefinido arc tan ∞ − arc tan 0	arc tan ∞ − arc tan 0 = $\pi/2$	∞	arc tan ∞=1	No resolvió la integral	Calculó la integral, se perdió
$\int_{0}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}$	1.	6	12	1	2	6	3
	2.	3	4	0	0	4	3
	3.	1	2	0	0	5	5
	4.	10	4	0	0	24	5
	5.	17	3	1	0	2	13
	6.	2	2	0	0	1	4

Reactivo	Grupos	Concluyó que: indet. $-(\cos\frac{1}{\infty}-\cos\frac{1}{0})$	1-1=0	$\cos\frac{1}{\infty}=\infty$	cos∞ =?	$\cos\frac{1}{0}=0$	$\cos\frac{1}{0}=?$	No resolvió la integral	Calculó la integral, se perdió
$\int_{0}^{\infty}-\frac{1}{x^2}\,sen\frac{1}{x}\,dx$	1.	8	0	1	1	3	1	11	5
	2.	8	1	0	0	0	0	5	0
	3.	3	0	0	0	0	0	8	2
	4.	13	0	0	0	0	0	20	10
	5.	16	2	2	0	0	0	7	9
	6.	1	0	0	0	0	0	3	5

Reactivo	Grupos	$-e^{-\infty}+e^{0}$ Indeterminación	$-e^{-\infty}+1$	±∞	±1	No resolvió la integral	Calculó la integral, se perdió
$\int_{0}^{\infty}e^{-x}dx$	1.	3	4	2	13	5	3
	2.	5	1	2	1	4	1
	3.	6	2	0	0	2	3
	4.	5	9	1	2	21	5
	5.	3	10	2	9	0	12
	6.	0	6	1	0	1	1

Tabla 2

Los resultados esperados para la integral:

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2}\, sen\, \frac{1}{x}\, dx$$

fueron:

a) La evaluación:

$$\cos \frac{1}{x}\Big|_0^1 = -(\cos \frac{1}{\infty} - \cos \frac{1}{0})$$

expresión a la que concluyeron 49 estudiantes. La mayoría dejó el resultado expresado de esa manera y sólo unos cuantos se cuestionaron la "indeterminación" de cos(1/0), sin llegar a establecer la propia indeterminación del área bajo la curva.

b) Otras singularidades que aparecieron fueron: **cos(**1/∞) = ∞, tres alumnos, cos(1/0)=0, tres alumnos, 1-1= 0, tres alumnos.

c) 54 alumnos no obtuvieron la solución analítica; mientras que 31 de los que si la establecieron se perdieron en los procesos algebraicos.

Para la última de las integrales los resultados fueron:

$$\int_0^\infty e^{-x} dx$$

1°) La parte álgida que obstaculizó a 22 estudiantes fue sólo llegar a sustituir los extremos de integración en la forma :

$$-e^{-\infty} + e^0$$

lo cual les impidió determinar el área .

2°) En otros casos, 32 estudiantes consideraron el resultado en la forma:

$$-e^{-\infty} + 1$$

sin concretar.

3°) El resultado real lo dieron 25 alumnos, es decir, igual a 1.

4°) 33 estudiantes no concretaron la solución analítica y 25 que si lo hicieron se perdieron en los procesos algebraicos para llegar a la solución.

Por otro lado, aplicamos el mismo cuestionario a cuatro profesores de la asignatura de matemáticas del instituto, distintos de aquellos a los que aplicamos el primer cuestionario, en los que se observaron algunas regularidades similares a las de los estudiantes evaluados:

1° En una profesora con dos semestres en la institución:

a) Para la primera integral, expresó:

"$\lim_{\varepsilon \to 0^+} (-\frac{a^3}{b} + \frac{a^3}{\varepsilon})$, el límite no existe".

b) Para la tercera, concluyó la singularidad: cos (1/0) = 1.

Sin embargo la profesora no se cuestiona la indeterminación del área bajo la curva en el primer caso.

2° Un docente con veinte años de servicio indicó:

a) Para la primera integral, expresó:

"$(-\frac{a^3}{b} + \frac{a^3}{0})$ = indeterminación, ya que no existe la división por cero".

b) Para la tercera, llegó a la singularidad:

$\cos \frac{1}{\infty} - \cos \frac{1}{0}$ = 1 – indeterminación =

indeterminación.

Se observa que sólo sustituyó los valores extremos de la integral, e igual, que en el caso anterior no concluyó en la naturaleza del área.

3° El mismo esquema se reprodujo en el tercer profesor el cual tiene 24 años de servicio en el sistema.

4° El último profesor consideró para la tercer integral que $\cos(\infty) = 0$

Si bien el número de profesores no es suficiente para inferir que los obstáculos en los estudiantes son promovidos por los docentes a partir de la forma en que enseñan; los resultados muestran un paralelismo que converge, sobre todo, en que docentes y alumnos no calcularon las integrales a partir de un proceso de aproximación al límite, sino a través de la concepción equivocada de considerar un modo análogo que es la sustitución en la variable de los extremos de la integral.

Por otro lado, una hipótesis que no planteamos, y que estuvo fuera de nuestro control, fue el no considerar que un gran número de estudiantes de los niveles evaluados no resolverían las integrales. En otro caso se encuentran aquellos que sí les resolvieron, pero se perdieron en los procesos algebraicos.

CONCLUSIONES

Con el análisis epistemológico de los textos de la enseñanza matemática de antaño, mostramos la manera en que se fue gestando la tradición en el uso poco ortodoxo de la operación $a / 0$ en la didáctica nacional. Por lo menos nos ha sido posible exhibir dos períodos de "crisis" manifestadas en la didáctica a partir de la noción; el primero, el de la E. N. P. de Barreda, con las implicaciones ya expresadas y la actual, que vivimos en la enseñanza de la asignatura de Matemáticas I en el Tecnológico de Chihuahua II.

El propio desarrollo histórico permite observar la transición de un obstáculo epistemológico en la enseñanza –$a/0$– que diversas generaciones han pasado durante varios siglos. La transmisión a través de la historia de esa "verdad" a medias, indefinida o indeterminada, como a veces se le juzga, muestra la permanencia de un "error" que se ha repetido en varios períodos resistiendo el embate del conocimiento en su forma más elaborada. Al quedar el saber –concepto de límite infinito– en la enseñanza al nivel de sólo esa "verdad", esta última se sujeta del primero como si formara parte de él, más desprovista de toda significación real. La sencillez de su expresión: $a/0 = \infty$, sugiere una falsa elementarización del concepto, como si le fuese sustancial, siendo que sólo le encubre. Expresiones como la que hemos tratado surgen, como afirmaba Barreda, "de la inducción". Más la inducción en este caso no convalida una inferencia del tipo: $a/0 = \infty$ puesto que de principio no cumple con las condiciones lógicas más elementales. Cuando un alumno hace uso de estas formas concisas de expresión, no reconoce que son solamente abreviaciones "hechas por comodidad" que, se supone, subyacen al concepto, el alumno les usa como si fuesen el conocimiento mismo[29]. Seguir disimulando su validez es ir en contra del saber y significa seguir ocasionando serios problemas en su enseñanza.

Por otro lado, la certeza de la aceptación de los profesores entrevistados de: $a/0 = \infty$, se basa en sus concepciones hacia la operación. Los docentes anidan de manera irreflexiva a la operación como una "parte" del concepto

[29] *Cfr.* Hall, M. & Knigth, B. (1948) *Op. cit.* pp. 262-263. C XX

que sirve de eslabón final, para evitar aquellos procesos algebraicos que llevan a los alumnos a las imprecisiones de la división por cero. Habilidad y creencia que momentáneamente son útiles y sacan del apuro tanto al profesor como al alumno; sin embargo, la expresión $a/0 = ¥$ no forma parte de la transición histórica que llevó a establecer la definición actual y axiomática del concepto de límite infinito. De aquí que la "operación" no pueda ser considerada un argumento para su enseñanza dado que, como hemos mostrado, ello provoca conflictos en los estudiantes.

Esta postura, en la que hemos incurrido alumnos y profesores por largo tiempo, nos a hecho preferir como objeto de conocimiento una noción sintáctica y equivocada del concepto, considerándole como un número; llegando incluso a manipularle sin una construcción didáctica previa de su significado y sin darle una definición precisa.

Los resultados de los cuestionarios aplicados a profesores y estudiantes reflejan, por su naturaleza, una concepción intuitiva del límite infinito que puede ser jerarquizada al nivel de noción, ninguno de los casos analizados evidenció el uso de argumentos más formales.

Si bien el desarrollo histórico y aparición del obstáculo deja entrever los problemas que enfrentan los alumnos para comprender tales nociones, no se puede pensar que estas dificultades se reduzcan sólo a ser obstáculos que ponen en dificultad a los estudiantes. Los mismos resultados que se plantearon agudizan dificultades algebraicas, de graficación, de formalización, etc., que deben ser atendidas previamente al diseño de la situación, así como en su aplicación.

Quizá nuestra meta deba centrarse en reemplazar de los estudiantes la confianza en un argumento impreciso por razonamientos basados en operaciones con números reales, como las sucesiones y la introducción de las definiciones más elementales de convergencia, que les lleven a procesos intuitivos de precisión, dejándoles poco margen a la ambigüedad y garantizándoles formas lógicas y coherencia en las operaciones que garanticen la certeza de los resultados.

BIBLIOGRAFÍA

Artigue, M. (1992). Didactic Engineering. *Research in "Didactique" of Mathematics, Selected Papers.* Francia, ADIREM: La Pensée Sauvage Éditions.

Artigue, M. (1998). Enseñanza y aprendizaje del análisis elemental: ¿qué se puede aprender de las investigaciones didácticas y los cambios curriculares? *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa 1*(1).

Bails, B. (1789). *Principios de Matemáticas de la Real Academia de San Fernando.* (2ª edición, tomo II). Madrid, España: Imprenta de la Viuda de Ibarra.

Barreda, G. (1908). *Examen del cálculo infinitesimal desde el punto de vista lógico.* Edición de la Revista Positiva Tipográfica Económica. México.

Bachelard, G. (1927). *Essai sur la connaissance aprochée.* París, Francia: Librairie Philosophique J. Vrin.

Bachelard, G. (1938). *La formation de l´esprit scientifique*. París, Francia: Vrin.

Bachelard, G. (1972). *L´engagement rationaliste*. París, Francia: Presses Universitaires de France.

Belhoste, B., Dalmedico, A. et al. (1994). *La formation polytechnicienne* 1794-1994. París, Francia: Dunod París.

Berthelot, R. & Salin, M. H. (1992). *L´enseignement de l´espace et de la géométrie*. Thèse de Doctorat d´État. Université de Bordeaux I, Bordeaux, Francia.

Bézout, E. (1764-1769). *Cours de mathématiques à l´usage des gardes du pavillon et de la marine*. Colección de Textos Politécnicos. Serie Matemáticas. Noriega Limusa. México 1999.

Bolzano, B. (1991). *Las paradojas del infinito*. Colección Mathema. México: UNAM.

Boucharlat, J. (1856). *Éléments de Calcul Différentiel et de Calcul Intégral*. París, Francia: Mallet Bachelier.

Brousseau, G. (1976). La problématique et l´enseignement des mathématiques. *XXVIIIème Rencontre de la CIAEM*, Louvain la Neuve.

Brousseau, G. (1980). Problèmes de didactique des décimaux, première partie. *Recherches en Didactique des Mathématiques 4*(2), 167-198.

Brousseau, G. (1983). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathematiques 4* (2), 165-198.

Brousseau, G. (2000). Educación y Didáctica de las matemáticas. *Revista de Educación Matemática 12*(1). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Camacho, A. (2000). *Difusión de conocimientos matemáticos a los colegios mexicanos del siglo XIX. De la noción de cantidad al concepto de límite*. Tesis Doctoral no publicada. Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN, México.

Chevallard Y. & Johsua, M. A. (1982). Un exemple d´analyse de la transposition didactique: la notion de distance, *Recherches en didactique des mathématiques 3*(2).

Cauchy, A. L. (1994). *Curso de Análisis*. (C. Alvarez, Trad.). México: Mathema UNAM. (Trabajo original publicado, 1823).

Courant, R. & Robbins (1979). *¿Qué es la matemática?* Madrid, España: Aguilar S. A.
Couturat (1896). *De l´infini mathématique*, París, Francia: Alcan París.

D´Alembert (1759). *Sur les Principes Métaphysiques du Calcul infinitesimal*. A. Blanchard Editions.

Díaz y de Ovando C. (1994). *Anuarios del Colegio de Minería 1845, 1848, 1859, 1863.* UNAM. México, edición facsimilar.

Echeagaray, F. (1897). *Nociones de cálculo infinitesimal.* México: Imprenta Hijas de J. F.Jens.

Encyclopédie Methodique. Mathématiques (1784-89). Ver: *Limite s.s.* Albert Blanchard Paris 1987.

Enciclopaedia Brittanica (1771). *Dictionary of Arts and Sciences.* Edinburgh.

Farfán, R. M. (1993). *Construcción de la noción de convergencia en ámbitos fenomenológicos vinculados con la ingeniería. Estudio de caso.* Tesis doctoral no publicada. Área de Educación Superior, Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN, México.

Farfán, R. M. (1997). *Ingeniería Didáctica. Un estudio de la variación y el cambio.* México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Farfán, R. M. & Albert, A. (1995). *Un acercamiento gráfico a la resolución de desigualdades.* Serie cuadernos didácticos. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Granville, W., Smith, P. & Longley, W. (1904). *Elements of the Differential and Integral Calculus.* Boston, USA: Copyright by Ginn and Company.

Granville, W., Smith, P. & Longley, W. (1963). *Cálculo Diferencial e Integral.* México: Unión Tipográfica Editorial Hispano-Americana.

Hadamard, J. (1923). *Sur diverses parties des mathématiques.* París, Francia: Bachelier Paris.

Hall, M. & Knight, B. (1948). *Higher Algebra.* London, Gran Bretaña: MacMillan and Co., Limited.

Hitt, F. (2000). *El concepto de infinito: Obstáculo en el aprendizaje de límite y continuidad de funciones.* Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav- IPN, México.

Hidalgo, M. (1996). *El Real y más antiguo colegio de San Pedro, San Pablo y San Ildefonso. Gobierno y Vida Académica 1767-1815.* Tesis de Maestría, UNAM, México.

Jaquier, F. (1801). *Institvtiones Philosophicae.* Tomus I a VI, Reimpressus, Perpiniani Typis D. J. Alzine Anno.

Lamadrid, A. A. (1912). *Curso Abreviado de Análisis.* Imprenta y fototipia de la Secretaria de Fomento. México.

Lang, S. (1990). *Introducción al Análisis Matemático.* Wilmington, Delawerw, E.U.A.: Addison-Wesley Iberoamérica.

Leithold, L. (1998). *El Cálculo*. Oxford University Press. Séptima edición. México.

Mill, J. S. (1866). *Systèéme de logique déductive et inductive, exposé des principes de la preuve et des méthodes de recherche scientifique*. Traduit sur la sixième édition anglaise, deux tomes. París, Francia: Libraire Philosophique de Ladrange.

Newton, I. (1993). *Mathematical Principles of Natural Philosophy*. Enciclopaedia Britannica, USA: Inc. Fourth Printing. (Trabajo original publicado en 1713).

Piaget, J. (1975). *L´equilibration des structures cognitives, problème central du développment*. París, Francia: URF.

Phillips, H. B. (1945). *Elementos de Cálculo Infinitesimal*. UTHEA: Unión Tipográfica Editorial Hispanoamericana. México.

Perrin-Glorian, M. J. (1992). *Aires des surfaces planes et nombres décimaux. Questions didactiques liées aux élèves en difficulté aux niveaux CM-6ème*. Thèse de Doctorat d´État. Université Paris 7, février 1992, Francia.

Perrin-Glorian, M. J. (1994). Théorie des situations didactiques: naissance, développement, perspecives. En M. Artigue, R. Gras et al. (Eds.), *Vingt Ans de didactique des mathématiques en France*. París, Francia: La Pensée Sauvage.

Purcell, E. & Varberg, D. (1993). *Cálculo con geometría analítica*. México: Prentice Hall Hispanoamericana S. A.

Reynaud (1708). *Analyse Demontrée*. París, Francia: Albert Blanchard.

Robinet, J. (1984). *Ingénierie didactique de l´élementaire au supérieur*. Thèse de doctorát d´État. Université de París VII, París, Francia.

Santaló, M. & Carbonell, V. (1980). *Cálculo Diferencial e Integral*. (Novena edición). Colección textos universitarios. México: Joaquín Porrúa.

Spivak, M. (1981). *Calculus: Cálculo Infinitesimal*, (tomos I, II). Barcelona, España: Reverté

Steward, J. (1994). *Cálculo*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Swokowski, E. W. (1989): *Cálculo con geometría analítica*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Los autores:

Alberto Camacho Ríos y **Mónica Aguirre Granados**

Instituto Tecnológico de Chihuahua II; México
E-mails:camachoalberto@hotmail.com
monicaaguirre80@yahoo.com