Miguel Montes, Mª. Isabel Pascual, Nuria Climent

UN EXPERIMENTO DE ENSEÑANZA EN FORMACIÓN CONTINUA ESTRUCTURADO POR EL MODELO MTSK

A teaching experiment in continuing education structured by the MTSK model

RESUMEN

La formación de maestros ya egresados es un área infraexplorada en la investigación en Educación Matemática, especialmente en relación con su conocimiento. Presentamos aquí los resultados de un experimento de enseñanza orientado a la formación de maestros egresados. Este experimento tuvo lugar en la Universidad de Huelva con un total de 39 maestros, en el contexto de un curso de adaptación al Grado de Primaria. Para la fundamentación teórica del experimento usamos el modelo de Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas, que permitió a su vez generar una hipótesis de progresión de aprendizaje. Mostraremos tanto el diseño del experimento, como el análisis retrospectivo del mismo. Los resultados del estudio evidenciaron que los maestros mejoran en el uso de su conocimiento de los temas, y de la enseñanza de las matemáticas.

PALABRAS CLAVE:

- *Desarrollo Profesional*
- *Experimento de Enseñanza*
- *Conocimiento Especializado*
- *Conocimiento Profesional*
- *Maestros egresados*

ABSTRACT

The education of graduated teachers is an underexplored field in Mathematics Education. We present a teaching experiment focusing graduated teacher education, structured by the model of Mathematics Teachers' Specialized Knowledge. This experiment took place in the University of Huelva with 39 primary teachers, in the context of a course aiming to actualize the old teaching degrees to the new ones. The experiment was founded in the model of Mathematics Teachers Specialized Knowledge, that also was used to generate a progression hypothesis. We will show both the design of the experiment, and the retrospective analysis of this cycle. The results of the study show that the primary school teachers involved in the experiment improve their use of their knowledge of topics and knowledge of mathematics teaching.

KEY WORDS:

- *Professional Development*
- *Teaching Experiment*
- *Specialized Knowledge*
- *Professional Knowledge*
- *Graduated Teachers*

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (2021) *24* (1): 83-104.
Recepción: Octubre 29, 2019 / Aceptación: Marzo 18, 2021. DOI: 10.12802/relime.21.2414

RESUMO

A formação de professores já formados é uma área pouco explorada na pesquisa em Educação Matemática. Apresentamos aqui os resultados de um experimento de ensino voltado para a formação de professores graduados. Este experimento ocorreu na Universidade de Huelva, com um total de 39 professores, no contexto de um curso de adaptação ao grau primário. Para fundamentação teórica do experimento, foi utilizado o modelo de conhecimento especializado do Professor de Matemática, que por sua vez permitiu gerar uma hipótese de progressão da aprendizagem. Mostraremos o desenho do experimento e sua análise retrospectiva. Os resultados do estudo mostram que os professores melhoram o uso de elementos do conhecimento relacionados ao suo conhecimento das disciplinas e ao ensino de matemática.

PALAVRAS CHAVE:

- *Desenvolvimento profissional*
- *Experiência docente*
- *Conhecimento especializado*
- *Conhecimento profissional*
- *Professores graduados*

RÉSUMÉ

La formation d'enseignants déjà diplômés est un domaine sous-exploré dans la recherche sur l'enseignement des mathématiques. Nous présentons ici les résultats d'une expérience d'enseignement visant à former des enseignants diplômés. Cette expérience a eu lieu à l'Université de Huelva avec un total de 39 enseignants, dans le cadre d'un cours d'adaptation au diplôme de premier cycle. Le modèle de connaissances spécialisées du professeur de mathématiques a été utilisé comme base théorique de l'expérience, ce qui a permis de générer une hypothèse de progression de l'apprentissage. Nous montrerons à la fois la conception de l'expérience et son analyse rétrospective. Les résultats de l'étude montrent que les enseignants améliorent l'utilisation des éléments de connaissance liés à son connaissance des matières et à l'enseignement des mathématiques.

MOTS CLÉS:

- *Développement professionnel*
- *Expérience d'enseignement*
- *Connaissances spécialisées*
- *Connaissances professionnelles*
- *Professeurs diplômés*

1. Introducción

En la investigación en Educación Matemática en el contexto iberoamericano, el foco de las investigaciones que tienen como centro al profesor es amplio: investigaciones ligadas a la mirada profesional (Sánchez-Matamoros, Fernández y Llinares, 2015), al conocimiento profesional (Carrillo, Climent, et al., 2018; Godino, 2009), a la identidad profesional (Sanhueza, Penalva y Friz, 2013), al empoderamiento docente

(Reyes-Gasperini y Cantoral, 2013), o al desarrollo de dinámicas de formación (Godino, Giacomone, Batanero y Font, 2017), entre otras. La amplia mayoría de estas investigaciones se centran en maestros o profesores en formación inicial, sin embargo la formación continua ha recibido menor atención (e.g. Carrillo y Climent, 2011; Rhoads, Radu y Webber, 2011). En recientes trabajos (Carrillo, Climent, Contreras y Montes, 2020), se ha propuesto entender tanto la formación inicial de profesores como la continua, inmersa en un continuo de formación coherente y consistente, donde la reflexión tiene un papel central y en la que los métodos de formación en ambas etapas formativas pueden tener paralelismos. Desde esa perspectiva se propone que modelos de conocimiento profesional pueden suponer un estructurador de dicha formación (Carrillo et al., 2020).

En el sistema educativo español, la formación continua no tiene una organización curricular estructurada a nivel nacional (Escudero-Muñoz, 2017), sino que depende de la oferta de los centros de formación de profesorado. Sin embargo, tras la implantación de las enseñanzas de grado, como consecuencia de la creación del Espacio Europeo de Educación Superior, surgió la demanda por parte de maestros de Educación Primaria y de las instituciones educativas, de un tipo de titulación que permitiera acceder al título actual de graduado a los antiguos titulados (diplomados). Esta titulación tiene rasgos de formación continua, ya que todos los que acceden a ella son maestros egresados, con mayor o menor experiencia en la docencia. En la Universidad de Huelva, la titulación consiste en un curso que recibe el nombre de Curso de Adaptación al Grado de Educación Primaria, y que abarca diferentes áreas, varias de ellas ligadas a educación en diversas disciplinas. En lo relativo a la formación en Educación Matemática, el enfoque que se decidió desde el principio del diseño del curso, fue el de un experimento de enseñanza (Steffe y Thompson, 2000; Molina, Castro, Molina y Castro, 2011) para el desarrollo profesional de los maestros involucrados en el mismo (Cobb, Jackson y Dunlap, 2016). El objetivo del curso consistía en que los maestros participantes reflexionaran sobre los distintos aspectos, ligados a la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, que deben conocer a la hora de plantearse llevar un problema al aula. Para esto, el diseño estuvo guiado por el modelo de Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas, MTSK por sus siglas anglófonas (Carrillo, et al., 2018), asumiendo la resolución de problemas como eje transversal a la actividad matemática.

Así, nos planteamos como pregunta de investigación: ¿Qué impacto tiene, en el conocimiento de los maestros, un curso orientado a la construcción de conocimiento especializado sobre la resolución de problemas matemáticos? Para abordar esta cuestión, diseñamos un curso cuyas tareas están basadas en los subdominios del modelo MTSK. El análisis de los resultados de este curso permitirá analizar el aprendizaje de los maestros, a través de la comparación de los resultados de la primera y la última tarea usando una hipótesis de progresión diseñada ad hoc.

2. Referentes teóricos

El estudio del desarrollo profesional de los profesores de matemáticas ha sido uno de los focos de investigación más activos internacionalmente de los últimos años (Lin y Rowland, 2016). Diversas investigaciones asocian el desarrollo profesional a diferentes factores, como el aumento de coherencia entre las concepciones y la práctica de aula (Kaiser y Li, 2011), la mejora de la capacidad reflexiva (Cobb y McLain, 2001), o el aumento de conocimiento profesional (Bell, Wilson, Higgins y McCoach, 2010). En este estudio nos centramos en el aspecto cognitivo, asumiendo que, tras la formación inicial, es importante brindar a los maestros mecanismos estructurados para que sigan construyendo conocimiento especializado, lo que llevará a poder profundizar en la reflexión sobre su práctica.

Para organizar las tareas del curso usamos el modelo MTSK (Carrillo, et al., 2018), que constituye un modelo de análisis de conocimiento profesional, usado para explorar las diferentes naturalezas de conocimiento que un docente que enseñe matemáticas pone en juego en cualquier actividad ligada a su profesión. La elección de dicho constructo teórico responde a su utilidad para estructurar la formación inicial de maestros de primaria, tanto en el diseño de tareas, como en la estructuración de asignaturas completas (Montes, Carrillo, Contreras, Liñán-García, y Barrera-Castarnado, 2019). Usaremos por tanto dicho modelo como elemento estructurador implícito de las tareas del experimento de enseñanza.

2.1. *Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas*

En esta investigación, entendemos que el principal factor que determina la especialización del conocimiento del profesor es la materia que enseña. Así, asumimos una caracterización intrínseca de la noción de especialización (Scheiner, Montes, Godino, Carrillo y Pino-Fan, 2019) y, adoptamos el modelo MTSK como enfoque que determine las componentes de conocimiento profesional a construir en la formación de profesores. Este modelo sigue la estructura propuesta por Shulman (1986), estableciendo dos dominios de conocimiento, conocimiento disciplinar (en este caso matemático), y conocimiento didáctico del contenido. El modelo de conocimiento MTSK abarca también las creencias del profesor sobre la matemática y su enseñanza y aprendizaje, que no serán objeto de reflexión en este artículo.

El conocimiento matemático (MK) está constituido por los saberes matemáticos que posee el profesor que le permiten, dada una situación de enseñanza-aprendizaje de la matemática, planificarla, gestionarla, o reflexionar acerca de la misma, en solitario, o con otros agentes del proceso educativo. En la modelación propuesta por el modelo MTSK, se entiende que este conocimiento se puede explorar desde tres subdominios que contemplan naturalezas complementarias del mismo.

El primero de ellos es local al tema que se aborda en la situación de enseñanza y aprendizaje concreta. Un profesor puede, dado cierto tema, conocer las definiciones, propiedades y fundamentos de los diferentes conceptos usados en ese tema, así como los procedimientos matemáticos propios del tema, y los diferentes registros mediante los que pueden representarse los conceptos relativos a dicho tema (e.g. verbal, algebraico, gráfico, o enactivo, entre otros). Finalmente, un profesor puede estar familiarizado con la fenomenología del concepto (Gómez y Cañadas, 2016), y las aplicaciones del mismo. Este subdominio recibe el nombre de *Conocimiento de los Temas*.

El segundo subdominio, *Conocimiento de la Estructura Matemática*, se refiere a que el profesor puede conocer cómo se relaciona el tema que aborda con otros temas o conceptos matemáticos. Estas conexiones pueden ser de simplificación, si se refieren a temas más elementales; de complejización, si se refieren a una matemática más avanzada; transversales, si se refieren a conceptos matemáticos como el infinito o la proporcionalidad, que están presentes en distintos núcleos temáticos; o auxiliares, si consisten en usar como herramienta un objeto matemático en relación con el tema que se está abordando.

El tercer subdominio se relaciona con la sintaxis de la matemática. Desde esta visión, se estudia cómo el profesor conoce el quehacer matemático subyacente a la actividad matemática. Así, el profesor puede conocer diferentes formas de argumentación, validación, y prueba; características de los enunciados matemáticos (e.g. evitar condiciones incompatibles o redundantes en proposiciones); diferentes formas de organizar el trabajo matemático al enfrentarse a tareas matemáticas como la resolución de problemas (e.g. estrategias heurísticas en la resolución de problemas); o actividades concretas propias del quehacer matemático, como la modelación matemática. Este subdominio recibe el nombre de *Conocimiento de la Práctica Matemática*.

El conocimiento didáctico del contenido (PCK) abarca los saberes que el profesor posee, ligados al contenido, desde el enfoque de su consideración como objeto de enseñanza y aprendizaje (Shulman, 1986, p. 9). Así, en el MTSK se proponen tres subdominios relativos al PCK:

El *Conocimiento de la Enseñanza de las Matemáticas* contempla el conocimiento del profesor acerca de cómo transformar el contenido matemático para hacerlo comprensible a otros, abarcando teorías sobre la enseñanza de la matemática, que le permitan enfocar o estructurar de forma general su docencia de las matemáticas, estrategias, técnicas, tareas o ejemplos (siempre vinculados al contenido) que le permitan organizar sus sesiones de clase, o recursos materiales y virtuales de enseñanza de las matemáticas.

El segundo subdominio del PCK es el *Conocimiento de las Características del Aprendizaje de las Matemáticas*, que abarca el conocimiento que el profesor posee acerca de cómo se aprende el contenido matemático. Así, un profesor puede conocer teorías sobre el aprendizaje de las matemáticas, formales (e.g. APOS, Van Hiele), o personales. El conocimiento de las dificultades o fortalezas que pueden hallar los estudiantes al aprender un determinado contenido, el conocimiento de la dimensión emocional del aprendizaje de las matemáticas y el conocimiento que el profesor puede poseer acerca de cómo los estudiantes pueden interactuar con el contenido matemático, son herramientas útiles para su gestión de la enseñanza, de ahí que se incluyan en este subdominio.

El tercer subdominio, relativo al *Conocimiento de los Estándares de Aprendizaje de las Matemáticas*, recoge el conocimiento del profesor acerca de qué debe aprenderse en cada momento de la escolarización. Así, un profesor puede conocer tanto los hitos de aprendizaje que se espera en un alumno de un determinado nivel o edad, como el nivel de desarrollo conceptual o procedimental esperado respecto de cierto contenido, así como posibles secuenciaciones de temas. Este conocimiento puede venir dado por referentes estandarizados con diferentes niveles de concreción, desde el contenido vigente en la normativa estatal o autonómica, hasta los planes de centro.

3. Experimento de Enseñanza

Dentro de los estudios de diseño, pueden encontrarse dos tipos, los centrados en los diseños de aula, y los centrados en desarrollo profesional. Estos estudios suelen tener cinco características fundamentales: abordan problemáticas relevantes para la práctica de aula, tienen una naturaleza intervencionista, tienen un soporte teórico sólido y una orientación pragmática, implican testear, revisar y/o abandonar conjeturas, y buscan cierta generalidad (Cobb, et al., 2016). Suelen, asimismo, constar de varios ciclos, para aproximarse a la complejidad de las problemáticas abordadas (Molina, et al., 2011). En general, los experimentos de enseñanza, y en concreto aquellos centrados en desarrollo profesional, suelen tener tres fases (Cobb et al., 2016): (i) Preparación, que incluye documentar los puntos de partida de los profesores respecto de las variables a analizar, esbozar una trayectoria prevista de aprendizaje, o al menos un conjunto de hipótesis sobre dicho aprendizaje, y dotar de un contexto teórico al estudio.; (ii) Experimentación, que implica recoger datos que hagan posible un posterior análisis; y (iii) Realización de un análisis retrospectivo, que consiste en estudiar si se alcanzaron los hitos de desarrollo profesional previamente hipotetizados, buscando generalizaciones, sobre la base de los elementos teóricos que sustentan el diseño. En las siguientes subsecciones profundizaremos en cada una de estas fases, desde la concreción de cómo se han estructurado y desarrollado en el experimento de enseñanza que nos ocupa.

3.1. *Datos del experimento*

El experimento de enseñanza tuvo lugar en la Universidad de Huelva. En él participaron 39 egresados de las antiguas diplomaturas de Magisterio de Primaria, con entre 0 y 20 años de experiencia (usaremos la denominación 'maestros' para todos ellos). La duración del curso fue de 30 horas, distribuidas durante un mes, en tres sesiones semanales de tres horas.

Dentro del elenco de posibilidades para diseñar dinámicas de formación de profesorado, se eligieron dinámicas de clase similares a las de la formación inicial, centradas en la profundización en el contenido y los procesos de enseñanza y aprendizaje asociados al mismo (Even, 2005). En el experimento de enseñanza que nos ocupa, dada la naturaleza institucional del curso, con sus consiguientes requerimientos de evaluación individualizada, se adoptó un enfoque de realización individual de tareas, mediada por discusiones grupales de cada una de estas. En estas discusiones, dos formadores tenían un rol de moderadores, que podían, en casos puntuales, plantear preguntas que invitaran a la reflexión. El conjunto de tareas estuvo guiado por la pregunta: ¿Qué necesito saber, como maestro, para plantear este problema (el relativo a cada tarea) en un aula?, orientando la discusión hacia posibles planificaciones docentes alrededor de cada problema propuesto, de manera que los maestros pudieran desarrollar un sentido de pertenencia (Farmer, Gerretson y Lassak, 2003) hacia su diseño, lo cual les debería llevar a implicarse en mayor medida en la dinámica.

3.2. *Fase de preparación*

El experimento de enseñanza consistió en una serie de 8 tareas, de las cuales una se basaba en la familiarización con elementos curriculares y otra en la explicitación de creencias sobre la matemática y su enseñanza y aprendizaje, y no serán objeto de análisis en este estudio. Las seis tareas restantes, presentaban un problema matemático que permitiera diversas estrategias de resolución, y un guion de reflexión (Cuadro 1) cuya estructura general estaba orientada por los subdominios del modelo MTSK, pretendiéndose que el guion invitara a movilizar todos los subdominios. Así, las dos primeras preguntas incidían de forma especial en el *Conocimiento de los Temas*, llevando a los profesores al análisis de la situación en detalle, y fomentando la consideración de cierto grado de flexibilidad matemática (Star y Rittle-Johnson, 2008), al considerar dos posibles resoluciones. La segunda y especialmente la tercera pregunta pretendían que el maestro profundizase en el contenido matemático que aparecía en el problema, buscando relaciones tanto entre las resoluciones que construyese, como con otros contenidos matemáticos, invitando a movilizar *Conocimiento de la Estructura Matemática*. La cuarta pregunta profundizaba en el *Conocimiento de la Práctica Matemática*, a la vez que en el de las *Características del Aprendizaje de las Matemáticas*, y en particular en la interacción de los alumnos en las fases de la resolución de problemas (Polya, 1965). La sexta incidía en este último subdominio, así como en *Conocimiento de la Enseñanza de las Matemáticas,* al igual que la quinta pregunta al conducir a la reflexión sobre de qué forma organizar una sesión alrededor del problema dado. La séptima pregunta centraba la reflexión en el *Conocimiento de los Estándares de Aprendizaje de las Matemáticas* que pudieran relacionarse con el problema a discutir y la octava se añadió como instrumento de detección de las necesidades formativas declaradas por los maestros, de manera que en cada ciclo se obtuviera información de cara a completar el contenido para siguientes ciclos. Este guion de preguntas fue validado por profesores con amplia experiencia en formación continua de profesores de matemáticas.

1. Resuelva el problema de forma justificada, razonando cada paso. Tras resolverlo de esta primera forma, resuélvalo utilizando una segunda estrategia.
2. Analice, de forma detallada, qué conceptos matemáticos se involucran en ambas resoluciones.
3. Indique, de forma razonada, con qué conceptos matemáticos (no explícitos en la resolución) podría relacionar la resolución de este problema. Indique cómo.
4. Reflexione acerca de cómo se esperaría que unos alumnos siguieran las fases de resolución de problemas al tratar con este problema.
5. Describa cómo implementaría este problema en un aula (metodológicamente).
6. Describa qué dificultades, errores y/u obstáculos podría esperar que experimentase un/a alumno/a al tratar de resolver este problema. Reflexione sobre qué tareas podría proponerle para contribuir a superar dichas dificultades.
7. Indique, a la luz de diferentes estándares curriculares, en qué nivel (curso) se puede proponer este problema.
8. Plantee tres preguntas (significativamente diferentes entre sí) sobre aspectos ligados al problema (pueden ser de contenido, o de enseñanza y aprendizaje del contenido) que sienta que necesita responder para alimentar su propio conocimiento. Respóndalas, explicando por qué la plantea y las fuentes que ha consultado para responderla.

Cuadro 1. Guion de las tareas

La tarea se presentaba en el grupo de discusión, y los maestros asistentes reflexionaban primero individual y luego colectivamente sobre la tarea. Esta reflexión tendía a centrarse primero en aspectos matemáticos ligados a la resolución del problema, para posteriormente incidir sobre las diferentes preguntas del guion de la tarea. En primer lugar, se discutían todas las diferentes posibilidades de resolución planteadas, para hacer conscientes a los maestros de la riqueza derivada de considerar diversas resoluciones. En cuanto al conocimiento didáctico del contenido, la discusión se concentraba en la búsqueda de recursos bibliográficos que les permitieran fundamentar su discusión tanto de la enseñanza como de las características del aprendizaje ligadas a la tarea. Dichos recursos contemplaban desde la búsqueda a través de plataformas como Google Académico, hasta la revisión de actas de reuniones científicas específicas de educación matemática (CIBEM, RELME, SEIEM), o libros específicos (e.g. Polya, 1965). Complementariamente a la discusión, se disponía de un foro de discusión con un hilo de respuestas anidadas por cada tarea, que permitía una discusión asincrónica de la misma, sirviendo como herramienta adicional para la identificación de las necesidades formativas de los maestros, y de análisis de su conocimiento profesional (Montes, Escudero-Ávila, Flores-Medrano, Muñoz-Catalán y Carrillo, 2015). Asimismo, los maestros tenían a su disposición tutorías individuales o colectivas con los dos formadores.

Cada una de las tareas del curso se centraban en una situación matemática, respecto de la que se debía reflexionar usando las 8 preguntas del guion (Cuadro 1). Estas situaciones problemáticas se eligieron por la riqueza de elementos de conocimiento profesional que pueden movilizarse al reflexionar sobre las mismas. Las tareas propuestas abordaban contenidos matemáticos diversos, abarcando Probabilidad, Estadística, Medida, y Geometría. Para cada una de ellas se hizo una revisión sobre los conocimientos matemáticos requeridos para su resolución, así como sobre aspectos de conocimiento profesional para resolver la tarea, ligados tanto a resolución de problemas (Carrillo, Climent, Contreras, Montes, 2019), como a temas matemáticos específicos, como proporcionalidad (Buforn, Fernández, 2014). Se usó la primera tarea como evaluación inicial, de cara a documentar el punto de partida de los profesores, respecto a cada una de las variables, y la última como punto de evaluación final. Ambas tareas corresponden a la reflexión, siguiendo el guion dado en el Cuadro 1, acerca de dos situaciones matemáticas: El ‘problema del gato’ (Northrop, 1981): *Tenemos una cuerda tensada que da la vuelta a la Tierra por el Ecuador. Si añado 10 metros a esa cuerda, y la vuelvo a tensar uniformemente hacia afuera, ¿cabría un gato por debajo de ella?*; y una situación de proporcionalidad compuesta: *6 obreros trabajando 10 horas al día tardan 10 días en construir un muro. ¿Cuánto* *tardarán 8 obreros trabajando 6 horas al día? Resuelve el problema sin usar la regla de tres.* Así, por cada maestro, se obtuvieron, de cara a la evaluación, dos tareas completas respondiendo a las preguntas del guion (Cuadro 1), en relación con cada problema.

3.2.1. *Hipótesis de progresión del aprendizaje*

Las investigaciones basadas en experimentos de enseñanza requieren la evaluación de los resultados de los participantes (Cobb et al., 2016). Para evaluar los resultados de este experimento, se diseñó una hipótesis de progresión del aprendizaje de los maestros (Cuenca, 2003), que permitiera analizar el cambio en el uso del conocimiento y la habilidad de movilizar diferentes categorías del mismo. Así, la hipótesis de progresión consiste en un conjunto de conjeturas evaluables sobre el desarrollo del conocimiento del profesor, suponiendo una reinterpretación de la noción de trayectoria hipotética de aprendizaje. En nuestro caso, dicha trayectoria está definida en torno a varias categorías, sobre la que se especifican niveles de progresión en el uso de conocimiento.

En cuanto al conocimiento a evaluar, sel estudio e centró en cinco de los seis subdominios de MTSK, obviando el Conocimiento de la Práctica Matemática, dados los obstáculos que suele generar la obtención de datos de dicho subdominio cuando no se tiene posibilidad de obtener información complementaria, en forma, por ejemplo, de entrevistas (Delgado-Rebolledo y Zakaryan, 2019), que no eran posibles en este contexto. Así, en lo relativo al Conocimiento de los Temas (KoT), se evaluó la resolución de la tarea, la identificación de contenidos, y la flexibilidad matemática. En el Conocimiento de la Estructura Matemática (KSM), se evaluó la relación con contenidos matemáticos ajenos a la tarea. Centrándonos ahora en los subdominios ligados al Conocimiento Didáctico del Contenido, y en particular al Conocimiento de la Enseñanza de las Matemáticas, se evaluó el uso de recursos, de teorías, y la coherencia entre las tareas propuestas. En cuanto al Conocimiento de las Características del Aprendizaje de las Matemáticas (KFLM), se abordaron dos aspectos: el conocimiento de fortalezas y dificultades, y la descripción de formas de interacción de posibles alumnos con la tarea, en particular respecto de las fases de resolución de problemas. Finalmente, en lo relativo al Conocimiento de los Estándares de Aprendizaje de las Matemáticas (KMLS), nos centramos en el uso del currículo, y en particular en el grado de justificación de la articulación entre los distintos bloques curriculares.

Estos diez aspectos a evaluar permitieron estructurar una hipótesis de progresión del aprendizaje (Cuadro 2), donde para cada una de ellos se establecieron tres niveles de progresión en la posesión y uso del conocimiento profesional. Así, asumimos que los maestros avanzarán en cada una de las categorías, haciendo un uso de menos a más relacional de su conocimiento.

Subdominio	*Categoría*	*Carencia o no uso*	*Uso no relacional*	*Uso relacional*
KoT	*Resolución del problema*	No se resuelve el problema completamente	Se resuelve el problema, pero no se justifica	Se resuelve de forma justificada
	Identificación de contenidos	No identifican todos los contenidos necesarios para resolver el problema	Identifica los contenidos, pero no los relaciona con los momentos de la resolución	Identifica los contenidos y los pone en relación con la resolución
	Flexibilidad	No resuelve de más de una forma	Resuelve de dos formas, pero no describe diferencias	Resuelve de dos formas, y describe diferencias
KSM	*Relación con otros contenidos*	No se explicita relación con otros contenidos, o relaciona con contenidos no matemáticos.	Se relaciona con otros contenidos matemáticos, pero sin justificar la relación	Se relaciona con otros contenidos matemáticos y se justifica la relación
KMT	*Recursos*	No propone recursos específicos para el problema	Propone recursos, pero sin justificar la relación	Propone y justifica recursos
	Teorías	No se usan teorías para justificar	Se usan teorías generales o específicas, sin justificar relación	Se usan teorías justificando la relación con el problema
	Coherencia	Aproximación metodológica no adecuada para el problema	Aproximación metodológica adecuada, sin justificación de la relación	Aproximación metodológica adecuada y justificada
KFLM	*Fortalezas y dificultades*	No se describen dificultades o fortalezas, o son generales	Se describen fortalezas y/o dificultades, sin justificar relación	Se describen fortalezas y/o dificultades, justificadamente
	Fases de la Resolución de problemas	No describe las fases	Describe las fases sin relacionar con el problema	Describe las fases y las relaciona
KMLS	*Uso del currículo*	No usa elementos curriculares actualizados, o no articula los elementos curriculares necesarios	Usa los elementos curriculares actualizados necesarios, sin justificar la relación con el problema	Usa los elementos curriculares actualizados necesarios, y justifica la relación

Cuadro 2. Hipótesis de progresión

El primer nivel, el de carencia o no uso de conocimiento especializado, puede ser identificado cuando el maestro no articula un razonamiento válido, cuando no usa conocimiento relacionado con la situación, o cuando usa conocimiento no relacionado con las matemáticas, y, por tanto, no especializado desde la perspectiva intrínseca que aquí se usa. En un segundo nivel se sitúa el uso no relacional de conocimiento. Este nivel se caracteriza por la falta generalizada de justificación en las respuestas, en términos de la relación de lo argumentado con el problema propuesto, aunque estas sean adecuadas. Entendemos que, por ejemplo, articular los pasos matemáticos que llevan a dar la solución de los problemas propuestos requiere conocimiento matemático, si bien justificar cómo se fundamenta cada paso demuestra relacionar dicho conocimiento con la situación de forma consciente. Finalmente, el nivel de uso relacional viene dado por la justificación de las respuestas. La validación de la hipótesis de progresión fue realizada por tres expertos, dos de ellos en el uso de hipótesis de progresión, y otro en el análisis usando el modelo MTSK.

3.3. *Fase de Experimentación*

En el estudio de la evolución de los maestros con respecto a las variables estudiadas se realizó mediante una aproximación de tipo pre-post. Así, se usó la primera tarea como primer punto de control, y la última como segundo punto. Las respuestas se codificaron como Ai, con i=1, ..., 39, para referirnos a cada uno de los maestros participantes en el curso.

El análisis, se hizo en dos fases. En una primera fase usamos la hipótesis de progresión de forma cualitativa, con cada uno de los tres niveles definidos como categorías para un análisis de contenido (Krippendorf, 2013)). Este análisis fue realizado por cada uno de los investigadores, no existiendo casos de disensión. En segundo lugar, asignamos una puntuación de 0 al nivel de carencia o no uso del conocimiento, 1 al nivel de uso no relacional, y 2 al nivel de uso relacional. Como ejemplo de asignación a cada uno de los niveles, presentamos las respuestas de tres maestros al primer problema, en relación a la implementación de la tarea en el aula (pregunta 5 del guion), evaluadas en la categoría de KMT-recursos:

Puntuación 0: [A25] A través de una metodología activa y participativa, donde el alumnado sea motor de su aprendizaje […] en una educación basada en la experiencia, el descubrimiento y la construcción de los conceptos, procedimientos y estrategias. Ofreciendo recursos que se presten a la experimentación y potenciando la autoestima, la confianza y la seguridad.

Puntuación 1: [A18] Lo primero que haría sería preguntar a los alumnos, una vez leído el problema con los datos originales, si creen que podríamos trabajar ese mismo problema con otro objeto que nos resulte más familiar. Sería interesante que pudiéramos dibujar en la pizarra algún objeto que les ayudara a visualizar la pregunta, por ejemplo, un flotador, en el que aparecen claramente dos circunferencias concéntricas.

Puntuación 2: [A03] En primer lugar, dejaría a los alumnos que manipulen y experimenten con diferentes objetos como un hula-hoop o una pelota de fútbol, y dos trozos de cuerda de diferente tamaño para cada uno, para hacer el problema más cercano y sencillo, dada la similitud de los objetos con el problema. Los alumnos deberán anotar los resultados en sus cuadernos mediante tablas o listas. Después, a través de preguntas como ¿nos ayudarían estos objetos a encontrar la solución al problema? o ¿cuánto se levanta la cuerda en cada caso?, podríamos generalizar que siempre se levanta lo mismo, y luego lo haríamos con las ecuaciones.

Como se puede observar, las aportaciones de los tres maestros varían tanto en su concreción como en su justificación, pasando de aspectos generales de metodología de enseñanza, sin concreción alguna sobre el contenido matemático, y, por tanto, no englobadas en el modelo MTSK (A25), a propuestas concretas para trabajar el problema, relacionadas con las características del problema, y justificando la relación (A03).

Para evaluar el aprendizaje, se calculó la diferencia entre los valores del segundo punto de control y el primero, respecto de cada una de las categorías reflejadas en la hipótesis de aprendizaje, dando un valor que reflejaba la evolución del aprendizaje. Una vez obtenidas las puntuaciones para cada categoría, se agruparon por subdominios a través de una media aritmética. Así, las puntuaciones relativas a la evolución del conocimiento en cada subdominio oscilaron entre -2 y 2 puntos. Estos valores se organizaron según se indica en la Tabla I, para tener una clasificación operativa:

TABLA I
Niveles de valoración de la evolución

Intervalo de puntuaciones	*Evolución del aprendizaje*
[-2,0)	Evolución negativa
0	No evoluciona
(0,1]	Evolución positiva leve
(1,2]	Evolución positiva moderada

Se consideró el conjunto de valores negativos como 'Evolución negativa', ya que demuestran una involución en el conocimiento puesto en juego por los maestros. Los maestros que obtienen la misma puntuación por subdominios en ambas tareas (si bien pueden existir diferencias entre los diferentes parámetros que compensen unas con otras), se califican como 'No evoluciona'. Aquellos que obtuvieron una calificación entre 0 y 1 entendemos que experimentan una evolución positiva, leve, y a partir de 1, moderada.

3.4. *Fase de análisis retrospectivo*

Mostramos a continuación los resultados del análisis usando la hipótesis de progresión del aprendizaje de los maestros. Los organizaremos subdominio a subdominio, describiendo las frecuencias y porcentajes asociados a la evolución del conocimiento en cada uno de los subdominios, mostrando algunas evidencias sobre dicha evolución extraídas de las tareas de los maestros.

En primer lugar, mostramos los resultados relativos a la evolución del subdominio del conocimiento de los temas (KoT). Un número significativo (un 71%) de maestros participantes parecen experimentar una evolución en su conocimiento de los temas, siendo en un 7.69% especialmente significativa dicha evolución, pasando de una puntuación de 0 a 2. Dos maestros, un 5.13% del total, demuestran una evolución negativa, mientras que en un 23% del total, no se observa evolución. Un ejemplo de esto es el profesor A17, que resuelve el problema del gato por un procedimiento basado en considerar la altura de dicho gato igual a 40 cm, y hacer un tratamiento geométrico-algebraico para determinar cuántos metros de cuerda sería necesario añadir para dicho gato. En su segunda resolución del problema, hace un tratamiento geométrico-algebraico que lleva a calcular cuál será la altura a la que se eleve la cuerda sobre la circunferencia del ecuador terrestre. Sin embargo, se limita a mostrar ambas resoluciones, sin justificación alguna de las diferencias entre ambas. En la segunda tarea, resuelve primero por reducción a la unidad, y en segundo lugar usando la caracterización de la proporcionalidad inversa por productos constantes. En su argumentación posterior, afirma que *"En realidad, matemáticamente, ambas resoluciones son equivalentes, ya que en una estoy aplicando la misma propiedad que en la otra, pero ocultándola. Sin embargo, tener dos maneras de abordarlo puede ser útil si algún niño me pide que lo explique de otra forma".* En su afirmación, justifica el uso del mismo recurso matemático (las relaciones de proporcionalidad), haciendo patente que es consciente de que en la primera forma se usan implícitamente propiedades matemáticas que en la segunda se hacen explícitas.

Los datos en torno a este subdominio suponen un resultado muy positivo, ya que se observa una mejora generalizada en el conocimiento de los temas, en el que los maestros suelen demostrar debilidades al terminar su formación inicial (Montes, Contreras, Liñán, Muñoz-Catalán, Climent, Carrillo, 2015). En particular, resulta significativo que, en lo relativo al reconocimiento de la flexibilidad matemática, observamos que 21 maestros tienen un incremento de un punto en la evolución, y tres de ellos, en dos puntos, lo que parece indicar que existe un aumento significativo en la capacidad de plantear diversas soluciones de un problema matemático.

En el caso del conocimiento de la estructura matemática (KSM), observamos cómo aproximadamente la mitad de maestros no varían en su puntuación, mientras que un porcentaje algo menor experimenta una evolución positiva leve. En cuanto este subdominio, los resultados de tres participantes indican un descenso en evolución. Los maestros suelen recurrir a establecer conexiones entre contenidos de un mismo ámbito matemático, con base en su conocimiento del currículo oficial, como el alumno A33:

> [Segundo problema – A33]: Trabajaría otros contenidos del bloque de geometría relacionados con este problema como pueden ser: 4.6 La representación elemental del espacio, escalas y gráficas sencillas. 4.11. La circunferencia y el círculo. 4.12. Elementos básicos: centro, radio, diámetro, cuerda, arco, tangente y sector circular. 4.19. Introducción a la semejanza: ampliaciones y reducciones.

En la mayoría de casos donde se observa una evolución positiva leve, en lo relativo al conocimiento de la estructura matemática, el cambio suele radicar en que existe una cierta profundización en la justificación de las relaciones establecidas con otros contenidos, como sucede con el alumno A36, que centra su reflexión en las relaciones que podrían establecer posibles alumnos:

> [Primer problema- A36] Además de los contenidos de la tarea, podríamos aprovechar para trabajar los siguientes contenidos: Aprendizaje del manejo de instrumentos de medida (cinta métrica, balanza, etc.). Relación entre unidades de medida: convencionales y no convencionales. Unidad de medida de otras magnitudes (longitud, superficie, capacidad, volumen, masa…). Semejanza y proporcionalidad entre círculos concéntricos y su aplicación a otras figuras.

> [Segundo problema-A36] Aunque no son contenidos principales de la actividad, podemos relacionarla con: El uso de magnitudes derivadas, como es el caso de la magnitud horas por día, que puede dar lugar al trabajo de otras como la velocidad (espacio recorrido por tiempo empleado) o densidad

> (kilogramo por metro cúbico). Operaciones aritméticas: multiplicación y división de fracciones. Los alumnos tienen que multiplicar una magnitud por 8/6 y su correspondiente por 6/8, el contenido relacionado sería la equivalencia en dividir entre 8/6 o multiplicar por su inversa 6/8. Organización sistemática de la información a través de tablas. Los alumnos deben encontrar aumentos de 8/6, para trabajar ese aumento podemos escoger magnitudes que sean proporcionales y que aumenten o disminuyan doble o mitad, o una vez y media (3/2) de forma que se vea cierta progresión al aumento de 1 vez y un tercio de vez más.

Los resultados relativos al conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT) muestran cómo 9 de los maestros demuestran un nivel menor en la segunda prueba que en la primera, mientras que 8 no muestran variación. Por otro lado 22 maestros demuestran mejorar en sus resultados, uno de ellos de forma especialmente significativa. En este subdominio, es especialmente significativo el incremento en el uso de referentes teóricos propios de Educación Matemática para fundamentar el propio diseño, donde 18 participantes demostraron mejorar. Un ejemplo de esto es el maestro A36:

> [Primer problema – A36]: Trabajaría este problema con todo el grupo clase a la vez partiendo de los conocimientos previos. Acompañaría el enunciado de gráficos y dibujos en los que se destaquen los datos relevantes. Plantearía preguntas abiertas relativas al problema, creando un debate y participación activa por parte del alumnado, hasta que entendieran qué es lo que se pide, y cómo vamos a llegar a resolverlo. Llegados a este punto, tenemos que introducir la fórmula para medir la longitud de una circunferencia y que los alumnos realicen los cálculos.
>
> [Segundo problema - A36]: Siguiendo la estructura de fases de resolución de Pòlya, en la primera fase de la resolución, que se corresponde con la identificación y definición del problema, plantearía situaciones similares a la de construcción que hiciera que los alumnos percibiesen la necesidad de realizar esos cálculos. En la segunda fase (planificación del problema), propondría un debate en el que expusieran sus aproximaciones al problema y repasaría la teoría de proporcionalidad. En la tercera fase (ejecución de un plan), proporcionaría algún apoyo visual para ver más claramente las relaciones que se establecen entre los datos que tenemos, o algún ejemplo en el que se traten los mismos contenidos desde un nivel más asequible, partiendo el problema, por ejemplo. Por último, en la fase de verificación, los alumnos tendrían que hacer el problema inverso.

Vemos cómo este maestro, en su reflexión en torno a cómo abordar en el aula el primer problema, hace una aproximación descriptiva a su abordaje del trabajo, con elementos muy generales de gestión de la participación. Sin embargo, en el segundo problema, usa un referente específico que fundamenta su estructuración del posible abordaje del problema en el aula, así como establece las posibles implicaciones de cada una de las acciones desde la especificidad del trabajo centrado en la resolución de problemas. Así, demuestra una mejora significativa en el uso de su conocimiento para fundamentar su diseño.

Sin embargo, se pudo observar, en cuanto al conocimiento de recursos, que 13 maestros demostraron una evolución negativa, frente a otros 13 que mostraron evolución positiva. Asumimos que esto puede estar relacionado, en parte, con el contenido abordado en la segunda prueba, proporcionalidad, contenido en el que la mayoría de participantes reconoció que su aproximación habitual consistía en usar 'la regla de tres'.

En cuanto a los resultados que conciernen al conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas (KFLM), alrededor de un 46% mejoran su nivel, mientras que cerca de un 40% no experimenta evolución alguna. El resto, 6 participantes, demuestran una evolución negativa. Resulta interesante, en cuanto a este tipo de conocimiento, el maestro A20, que, si bien obtiene la máxima puntuación en ambas tareas, usa fuentes significativamente diferentes en ambas. En la primera, declara: "He planteado el problema "El gato" a los alumnos del programa de refuerzo en el que se incluyen a alumnos de altas capacidades intelectuales". Tras esto analiza las dificultades, y explora los posibles planteamientos que les ayudarían a superarlas. En la segunda tarea, decidió fundamentar su respuesta en resultados de investigación, y estructurando su respuesta desde los resultados de su búsqueda bibliográfica, usando para ello el trabajo de Godino y Batanero (2003) sobre proporcionalidad. En ambas tareas fundamenta profundamente sus respuestas en diferentes fuentes, si bien en la primera lo hace fundamentando exclusivamente en su práctica y en la segunda incorpora referentes externos. Observamos, sin embargo, una tendencia en la argumentación de los maestros a basar sus justificaciones en la experiencia que tienen, incorporando una cantidad limitada de aspectos basados en la bibliografía.

En cuanto al conocimiento de los estándares de aprendizaje matemático (KMLS), no se observa, en general, una evolución, demostrando más de un 80% de los maestros un nivel de uso relacional en ambas pruebas. Sólo en una cantidad marginal de casos hay una evolución positiva. Esto es consistente con el hecho de que los procesos públicos selectivos que llevan al servicio activo, en el contexto español, ponen mucho énfasis en el correcto uso de referentes curriculares.

En la Tabla II pueden observarse, por subdominios, los diferentes niveles de valoración de la evolución de los maestros, en porcentaje sobre el total de participantes.

TABLA II
Síntesis de resultados, en porcentajes

Evolución del aprendizaje	*KoT*	*KSM*	*KMT*	*KFLM*	*KMLS*
Evolución negativa	5.13	7.70	23.08	15.38	25.64
No evoluciona	23.08	48.72	20.51	38.46	56.41
Evolución positiva leve	64.1	43.5	53.85	46.16	17.95
Evolución positiva moderada	7.69	0	2.56	0	0

4. Resultados y conclusiones

El experimento de enseñanza aquí mostrado arroja unos resultados positivos, ya que se observa una evolución en el conocimiento que los maestros reflejan al responder la tarea. Parecen especialmente significativos los resultados respecto del conocimiento de los temas, y del conocimiento de la enseñanza de las matemáticas. En cuanto al primero, se observa que los maestros mejoran en su uso de su conocimiento profesional, especialmente en su flexibilidad matemática. En cuanto al conocimiento de la enseñanza de las matemáticas, al tener la mayoría de los participantes cierta experiencia docente, asumíamos que su exploración de recursos metodológicos para la enseñanza de las matemáticas, y de las características del aprendizaje de los alumnos debía haber existido como parte de la propia práctica. Sin embargo, los resultados obtenidos parecen mostrar que el curso tuvo impacto en el uso que daban estos maestros a dicho conocimiento, y en la incorporación de información proveniente de fuentes especializadas, como es el caso del alumno A20. Los resultados demuestran un mayor grado de invariancia en cuanto al aprendizaje en lo relativo al conocimiento de la estructura matemática y al conocimiento de los estándares de aprendizaje matemático. Entendemos que el primero de los subdominios supone uno de los desafíos pendientes para este tipo de experimentos y para la formación de profesores en general, dada la dificultad de que los maestros lleguen a adquirir una comprensión de la matemática desde un punto de vista superior (Kilpatrick, 2008). Por otro lado, la baja evolución en el uso del conocimiento de los estándares de aprendizaje matemático puede explicarse por el habitual grado de relación de los maestros con dichos estándares.

La gran heterogeneidad entre los grados de experiencia de los maestros participantes dificulta la posibilidad de dar carácter de generalizable al experimento, que suele ser uno de los objetivos de los experimentos de enseñanza

(Cobb et al., 2016). Sin embargo, entendemos que éste aporta resultados que pueden ser generalizados con matizaciones, respecto de aspectos ligados al diseño instruccional que podrían servir de orientación para futuros diseños. Así, las tareas planteadas se han mostrado útiles para la construcción de conocimiento profesional. Una consecuencia inmediata es el potencial de estructurar la formación continua usando tareas basadas en un modelo de conocimiento profesional como MTSK.

En cuanto a las tareas, entendemos que la combinación de la segmentación de la reflexión por apartados tan concretos ha contribuido a focalizar la atención de los maestros. Esto, unido a la selección de las situaciones problemáticas potentes, ha permitido una reflexión rica y detallada. Realizar varias tareas en este sentido, con diferentes contenidos, en un módulo de tan sólo un mes de duración parece haber tenido resultados positivos. En cuanto a la fundamentación en el modelo de conocimiento profesional, éste se ha mostrado útil y funcional para estructurar tanto las tareas como la hipótesis de progresión del aprendizaje de los maestros. Entendemos que, en esta línea, sería interesante tanto seguir desarrollando experimentos de enseñanza con el propio modelo MTSK, como explorar la posibilidad, desde otros grupos, de estructurar dinámicas de formación inicial desde sus propias perspectivas teóricas. En particular, y en relación con el desarrollo de diseños instruccionales desde el modelo MTSK, entendemos que este diseño ha contribuido especialmente a los subdominios KoT y KMT, que muestran resultados de aprendizaje satisfactorios. Atribuimos esto a la segmentación de la reflexión por preguntas orientativas basadas en dichos subdominios. Por otro lado, las preguntas basadas en el subdominio KMLS han sido útiles para mostrar el dominio que los maestros tienen de elementos curriculares, si bien creemos que sería interesante complementar la pregunta asociada a esta tarea con la exploración de otro tipo de estándares de naturaleza diferente (provenientes de asociaciones profesionales o libros de texto, por ejemplo), para permitir una mayor profundización. En cuanto al subdominio KFLM, creemos que sería interesante potenciar el uso de bibliografía especializada, de forma que esta complemente y permita justificar el conocimiento, basado en la experiencia, de los maestros. Además, sería potente añadir como complemento en la discusión de los problemas, resoluciones de los mismos por parte de niños (reales o recreadas, estas últimas basadas en la literatura de investigación). El subdominio KSM, por su parte, supone un desafío de cara a futuros diseños, dado que entendemos que deben reenfocarse las preguntas centradas en este subdominio para que la reflexión de los maestros supere un análisis superficial del currículo, y centrarla en argumentos matemáticos y sobre su enseñanza y aprendizaje. Finalmente, y en cuanto al subdominio no abordado en este diseño, el KPM, es necesario profundizar en la conceptualización del mismo, de forma que se pueda explorar el desarrollo de tareas asociadas al mismo.

Investigaciones como la que aquí se refleja, ligadas a un experimento de enseñanza centrada en el desarrollo profesional, tienen una limitación intrínseca, acerca de la sostenibilidad de los resultados obtenidos. Este experimento tuvo una duración de 30 horas, debido al plan de estudios en el que se enmarca, y la evaluación del aprendizaje de los maestros se realizó centrándonos en el estudio de la evolución entre el comienzo del conjunto de sesiones y el final del mismo. Sin embargo, con los instrumentos usados, es imposible afirmar que el experimento tuviera un impacto en el desempeño diario de su profesión, más allá de la aparente construcción o uso de ciertos elementos de conocimiento. Así, esta limitación supone un desafío pendiente para este tipo de investigación, que podría abordarse, por ejemplo, desarrollando estudios de carácter longitudinal, que permitan explorar la sostenibilidad del aprendizaje desarrollado en los experimentos de enseñanza donde la parte instruccional de los mismos esté orientada a la actividad profesional posterior de los docentes. Una limitación adicional del estudio está ligada a la hipótesis de progresión usada para evaluar la evolución en el conocimiento de los maestros. Así, esta hipótesis está basada en considerar de forma aislada cada uno de los subdominios. Esto tiene sentido, desde nuestra perspectiva, por ser este experimento de enseñanza el primero basado en el modelo MTSK, pero asumimos que en futuros desarrollos de esta hipótesis de progresión sería interesante considerar la integración tanto de las diferentes categorías como de los diferentes subdominios, recogiendo así la naturaleza holística e integrada del conocimiento.

Reconocimientos

Esta investigación fue financiada por el centro de investigación COIDESO de la Universidad de Huelva, y por el Ministerio de Ciencia, Innovación y Universidades, del Gobierno de España (Proyecto: RTI2018-096547-B-I00).

Referencias bibliográficas

Bell, C., Wilson, S., Higgins, T. y McCoach, D. (2010). Measuring the Effects of Professional Development on Teacher Knowledge: The Case of Developing Mathematical Ideas. *Journal for Research in Mathematics Education, 41*(5), 479-512.

Buforn, A., Fernández, C. (2014). Conocimiento de matemáticas especializado de los estudiantes para maestro de primaria en relación al razonamiento proporcional. *Bolema,* 28(48), 21-41.

Carrillo, J. y Climent, N. (2011). The development of teachers' expertise through their analyses of good practice in the mathematics classroom. *ZDM Mathematics Education*, *43*(6-7), 915-926. https://doi.org/10.1007/s11858-011-0363-0

Carrillo J., Climent N., Contreras L. C. y Montes M. Á. (2019). Mathematics Teachers' Specialised Knowledge in Managing Problem-Solving Classroom Tasks. En P. Felmer, P. Liljedahl y B. Koichu (Eds.), *Problem Solving in Mathematics Instruction and Teacher Professional Development* (pp. 297-316). Cham: Springer.

Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L. C. y Montes, M. (2020). Using Professional Development Contexts to Structure Prospective Teacher Education. En S. Llinares y O. Chapman (Eds.), *International Handbook of Mathematics Teacher Education: Volume 2* (pp. 393-419). Londres: Brill.

Carrillo, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, A., … Muñoz-Catalán, M. C. (2018). The Mathematics Teacher's Specialised Knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education,* 20(3), 236 – 253. DOI 10.1080/14794802.2018.1479981.

Cobb, P., Jackson, K. y Dunlap, C. (2016). Design Research. An Analysis and Critique. En L. D. English y D. Kirshner (Eds.), *Handbook of International Research in Mathematics Education* (pp.481-503). Londres: Rouletdge.

Cobb, P. y McClain, K. (2001). An approach for supporting teachers' learning in social context. En F. L. Lin y T. J. Cooney (Eds.), *Making sense of mathematics teacher education* (pp. 207–231). Dordrecht: Kluwer.

Cuenca, J. M. (2003). Análisis de concepciones sobre la enseñanza de patrimonio en la educación obligatoria. *Enseñanza de las Ciencias Sociales*, *2*, 37-45.

Delgado-Rebolledo, R. y Zakaryan, D. (2019). Relationships Between the Knowledge of Practices in Mathematics and the Pedagogical Content Knowledge of a Mathematics Lecturer. *International Journal of Science and Mathematics Education*. https://doi.org/10.1007/s10763-019-09977-0

Escudero-Muñoz, J.M. (2017). La formación continua del profesorado de la educación obligatoria en el contexto español. *Profesorado. Revista de curriculum y formación del profesorado, 21*(2), 1-20.

Even, R. (2005). Integrating Knowledge and Practice at Manor in the Development of Providers of Professional Development for Teachers. *Journal of Mathematics Teacher Education, 8*(4), 343-357. https://doi.org/10.1007/s10857-005-0855-3

Farmer, J. D., Gerretson, H. y Lassak, M. (2003). What Teachers Take From Professional Development: Cases And Implications. *Journal of Mathematics Teacher Education, 6*, 331–360. https://doi.org/10.1023/A:1026318709074

Godino, J. (2009). Categorías de Análisis de los conocimientos del Profesor de Matemáticas. *Revista iberoamericana de educación matemática,* 20, 13-31.

Godino, J. D. y Batanero, C. (2003). *Proporcionalidad y su didáctica para maestros*. Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Granada: Universidad de Granada. Recuperado de http://www.ugr.es/local/jgodino/

Godino, J. D., Giacomone, B., Batanero, C. y Font, V. (2017). Enfoque Ontosemiótico de los Conocimientos y Competencias del Profesor de Matemáticas. *Bolema, 31*(57), 90-113.

Gómez, C., y Cañadas, M.C. (2016). Dificultades de los profesores de matemáticas en formación en el aprendizaje del análisis fenomenológico. *Revista Latinoamericana de Investigación Educativa, 19*(3), 311-334.

Kaiser, G. y Li, Y. (2011). Reflections and future prospects. En Y. Li y G. Kaiser (Eds.), *Expertise in mathematics instruction. An international perspective* (pp. 343–353). New York: Springer.

Kilpatrick, J. (2008). A higher standpoint. In *ICMI proceedings: Regular lectures* (pp. 26–43). Recuperado de http://www.mathunion.org/icmi/publications/icme-proceedings/ materials-from-icme-11-mexico/regular-lectures/

Krippendorf, K. (2013). *Content Analysis: an introduction to its methodology*. Thousand Oaks: Sage.

Lin, F. L. y Rowland, T. (2016). Pre-Service and In-Service Mathematics Teachers' Knowledge and Professional Development. En Á. Gutiérrez, G.C. Leder, y P. Boero (Eds.), *The Second Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education* (pp. 483-519). Boston: Sense Publishers.

Molina, M., Castro, E., Molina, J. L. y Castro, E. (2011). Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza. *Enseñanza de las Ciencias*, *29*(1), 75–88.

Montes, M., Carrillo, J., Contreras, L. C., Liñán-García, M. M. y Barrera-Castarnado, V. (2019). Estructurando la formación inicial de profesores de matemáticas: Una propuesta desde el modelo MTSK. En E. Badillo, N. Climent, C. Fernández-Verdú y M. T. González-Astudillo (Eds.), *Investigación sobre el profesor de matemáticas: formación, práctica de aula, conocimiento y competencia profesional* (pp. 157-176). Salamanca: Ediciones Universidad de Salamanca.

Montes, M., Contreras, L. C., Liñán-García, M. M., Muñoz-Catalán, M. C., Climent, N. y Carrillo, J. (2015). Conocimiento de aritmética de futuros maestros. Debilidades y fortalezas. *Revista de Educación*, *367*, 36-62.

Montes, M., Escudero-Ávila, D., Flores-Medrano, E., Muñoz-Catalán, M. C. y Carrillo, J. (2015). El foro como contexto de exploración del conocimiento profesional de maestros en activo. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 381-389). Alicante: SEIEM.

Northrop, E. (1981). *Paradojas Matemáticas*. México: UTEHA.

Polya, G. (1965). *Cómo plantear y resolver problemas*. Trillas: México.

Reyes–Gasperini, D. y Cantoral, R. (2013). Socioepistemología y Empoderamiento: la profesionalización docente desde la problematización del saber matemático. *Boletim de Educação Matemática, 28*(48), 360–382.

Rhoads, K., Radu, I., y Weber, K. (2011). The Teacher Internship Experiences of Prospective High School Mathematics Teachers. *International Journal of Science and Mathematics Education, 9*, 999-1022.

Sánchez-Matamoros, G., Fernández, C. y Llinares, S. (2015). Developing pre-service teachers' noticing of students' understanding of the derivative concept. *International Journal of Science and Mathematics Education, 13*(6), 1305-1329. https://doi.org/10.1007/s10763-014-9544-y

Sanhueza, S., Penalva, M. y Friz, M. (2013). Identidades y competencias profesionales de estudiantes para maestro de educación infantil relativas a la enseñanza de la geometría. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 16* (1), 99-125.

Scheiner, T., Montes, M.A., Godino, J. D., Carrillo, J. y Pino-Fan, L. R. (2019). What Makes Mathematics Teacher Knowledge Specialized? Offering Alternative Views. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 17 (1), 153-172. https://doi.org/10.1007/s10763-017-9859-6

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, *15*(*2*), 4-14.

Star, J. R. y Rittle-Johnson, B. (2008). Flexibility in problem solving: The case of equation solving. *Learning and Instruction, 18*, 565–579.

Steffe, L. P. y Thompson, P. W. (2000). Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential elements. En R. Lesh y A. E. Kelly (Eds.), *Research design in mathematics and science education* (pp. 267-307). Hillsdale, N J: Erlbaum.

Autores

Miguel Montes. Universidad de Huelva, España. miguel.montes@ddcc.uhu.es

María Isabel Pascual. Universidad de Huelva, España. isabel.pascual@ddcc.uhu.es

Nuria Climent. Universidad de Huelva, España. climent@uhu.es

