Revista Latinoamericana de Investigacion en Matematica Educativa
Comité Latinoamericano de Matemática Educativa
relime@mail.cinvestav.mx
ISSN (Versión impresa): 1665-2436
MÉXICO

2001
Francisco Cordero Osorio
LA DISTINCIÓN ENTRE CONSTRUCCIONES DEL CÁLCULO. UNA ESPISTEMOLOGÍA A TRAVÉS DE LA ACTIVIDAD HUMANA
Revista Latinoamericana de Investigacion en Matematica Educativa, julio, año/vol. 4, número 002
Comité Latinoamericano de Matemática Educativa
Distrito Federal, México
pp. 103-128

Red de Revistas Científicas de América Latina y el Caribe, España y Portugal
Universidad Autónoma del Estado de México
http://redalyc.uaemex.mx

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa
Vol. 4, Núm. 2, julio, 2001, pp. 103-128

La distinción entre construcciones del Cálculo. Una epistemología a través de la actividad humana *

Francisco Cordero Osorio[1]

RESUMEN

Se asume como problemática fundamental de la enseñanza de la matemática una confrontación entre la obra matemática[2] y la matemática escolar. La naturaleza y las funciones de estas matemáticas son distintas, sin embargo, la segunda requiere interpretar y reorganizar a la primera. Esta tarea ha dirigido la atención a la reconstrucción de significados de la matemática en los diferentes niveles escolares. Dicha reconstrucción provee de categorías del conocimiento matemático con relación a la actividad humana. En ese sentido se plantea como hipótesis que esta actividad es la fuente de la reorganización de la obra matemática y del rediseño del discurso matemático escolar. Se discuten los avances del planteamiento a través de una reorganización del Cálculo y de la aproximación teórica que incorpora cuatro componentes fundamentales de la construcción del conocimiento matemático: las dimensiones epistemológica, cognitiva, didáctica y social.

ABSTRACT

A confrontation between the mathematics study and the school mathematics is assumed as the fundamental problem in mathematics teaching. The nature and functions of these mathematics are different. However, the second one requires to interpret and reorganize the first. This task has drawn the attention to the reconstruction of the mathematics' meanings at the different school levels. The reconstruction of meanings provides de categories of mathematical knowledge related to the human activity. In this form, this activity is set as the hypothesis that works as a source of the reorganization of the mathematical work and of the redesign of the school mathematical speech. The advances of the stating are discussed through a reorganization of Calculus and through the theoretical approaching that includes four basic components of the construction of mathematical knowledge: the epistemological, cognitive, didactic and social dimensions.

**Fecha de recepción: Enero de 2001.*

[1]*Departamento de Matemática Educativa - Cinvestav-IPN, México.*

[2]La obra matemática es tomada en el mismo sentido de Chevallard, et al. (1998), que consiste en considerarla como respuesta a un tipo de cuestiones o tareas problemáticas y está formada por elementos técnicos, tecnológicos y teóricos. Se puede concebir como una organización estática y determinada de antemano, sin embargo, se prefiere interpretarla en forma dinámica. Las técnicas generan nuevos problemas y apelan a nuevos resultados tecnológicos que, a su vez, permiten desarrollar técnicas ya establecidas, así como abordar y plantear nuevas cuestiones.

RÉSUMÉ

On assume comme problématique fondamentale de l'enseignement des mathématiques une confrontation entre l'œuvre mathématique et la mathématique scolaire. La nature et les fonctions de cette mathématique sont distinctes, cependant, la deuxième à besoin d'interpréter et réorganiser la première. Ce travail a dirigé l'attention à la reconstruction des signifiés des mathématiques dans les différents niveaux scolaires. La reconstruction des signifiés fournit des catégories du savoir mathématique en relation à l'activité humaine. Dans ce sens ce projette comme hypothèse que cette activitée est la source de la réorganisation de l'œuvre mathématique scolaire. Les progrès de l'énoncé du problème se discutent à travers une réorganisation du Calcul et de l'approximation théorique qui rattache quatre composants fondamentaux de la construction du savoir mathématique : les dimensions épistémologiques, cognitives, didactiques et sociales.

RESUMO

Asume-se como problema fundamental do ensino da matemática uma confrontação entre a obra matemática e a matemática escolar. A natureza e as funçoes dessas matemáticas são diferentes, no entanto, a segunda requer interpretar e reorganizar a primeira. Esta tarefa faz uma reconstrução de significados da matemática nos diferentes níveis de instrução escolar. A reconstrução de significados provê categoría do conhecimento matemático com relação a atividade humana. Nesse sentido, se estabelece como hípótesis que esta atividade é a base da reorganização da obra matemática e a reestruturação do discurso matemático escolar. Discutem-se os últimos resultados da proposta, através de uma reestruturação do Cálculo e da aproximação teórica que incorporam quatro componentes fundamentais da construção do conhecimento matemático: as dimensões epistemológica, cognitiva, didática e social.

INTRODUCCIÓN

La matemática educativa, entre otras cosas, se ha formulado preguntas acerca del conocimiento matemático. Éstas han oscilado entre su naturaleza, sus formas y condiciones de construcción y sobre las construcciones mentales que deben hacer los individuos para que se dé tal conocimiento. Sin embargo, a pesar de los diferentes tipos de preguntas, el conocimiento matemático ha adquirido un carácter universal, tal vez porque los modelos teóricos (que tratan del conocimiento) han enfocado la atención en la actividad matemática, es decir, han ofrecido esquemas explicativos de las construcciones a través de los objetos matemáticos, a tal grado que el objeto es la metáfora de los modelos teóricos que ocupa la matemática educativa. Por ello se han formulado epistemologías modelizadas por la actividad matemática que orientan el entendimiento del conocimiento matemático como la producción hecha por el humano. De ahí las interpretaciones de la matemática escolar a través de los procesos escolares que básicamente consisten en considerar las representaciones como un reflejo de la realidad o una verbalización de nociones cognitivas y significados preexistentes. Sin embargo, esta modelización ha tomado un camino que matiza la producción matemática soslayando al humano. Viene al caso citar a Bruner (1985), cuando cuestionó la imposibilidad de distinguir claramente entre lo que es un modo narrativo de pensamiento y lo que es un "texto" o discurso narrativo. Cada cual da forma al otro, ¿se puede hablar de la danza sin hablar del bailarín? o ¿es a través del bailarín como podemos hablar de la danza? Parece, a propósito de la metáfora, que la epistemología también debería estar modelizada por el estudio del hombre haciendo matemáticas. Esto significa que la epistemología debería reconocer la actividad humana como una organización social y una fuente donde se construye conocimiento.

Se presenta aquí una aproximación teórica, en la que la actividad humana es la nueva plataforma que brinda epistemologías que amplían la problemática, obliga a incorporar la dimensión social, reconocer categorías de conocimiento matemático con relación a las reconstrucciones de significados de la matemática que *a priori* no están en el currículo, romper el carácter universal de la construcción a través de considerar otras, formular nuevas acciones didácticas en las que el diseño de situaciones está sustentado por la actividad humana. Se ejemplifica la aproximación teórica a través de una reorganización del Cálculo que formula tres situaciones: variación, transformación y aproximación.

PROBLEMÁTICA FUNDAMENTAL. LA OBRA MATEMÁTICA Y LA MATEMÁTICA ESCOLAR

La problemática fundamental de la enseñanza de la matemática que atiende la disciplina matemática educativa, consiste en haber identificado una confrontación entre la obra matemática[3] y la matemática escolar. Cada una es de naturaleza y función distintas. Inevitablemente, estas diferencias hacen compleja la problemática debido a que (*a priori*), en la matemática escolar no se reconocen los mecanismos de construcción ni la organización social que sucede en el aula que, en conjunto, posibilita tales construcciones. Es decir, al seno de la organización social se reconstruyen significados de la matemática como recursos para aceptar cierto conocimiento matemático. En este sentido, no se trata únicamente de un problema de secuenciar y temporalizar los contenidos del currículo, como tradicionalmente se le había confiado a la psicología y a la pedagogía, sino de realizar un trabajo matemático de reorganización de los elementos técnicos, tecnológicos y teóricos que componen cada obra matemática con base en las cuestiones que ésta representa.

Esta tarea, propia de la matemática educativa, no es trivial pues consiste en teorizar acerca de cómo interpretar y reorganizar la obra matemática. Esto ha llevado a precisar elementos teóricos que ayudan en la reconstrucción de significados de los procesos y conceptos matemáticos en los diferentes niveles escolares. Las fuentes han sido las producciones del conocimiento, cuyas explicaciones han llevado a formular epistemologías modelizadas por la actividad matemática. Sin embargo, la reconstrucción de

[3] La problemática fundamental y la obra matemática es considerada en el mismo sentido que la escuela francesa (véase Chevallard, et al., 1998): la didáctica es la ciencia que trata, en definitiva, de una verdadera reconstrucción de las obras que forman el currículo.

significados compone categorías del conocimiento matemático como resultado de la actividad humana y no propiamente de la actividad matemática. Es decir, en la actividad humana el conocimiento tiene significados propios, contextos, historia e intención. Ahí, se construyen versiones diversas respecto a su contenido. Estas versiones se comparan, negocian y reconstruyen en el proceso mismo de la actividad y definen de manera gradual los diversos significados para los humanos[4]. En otras palabras, en la actividad humana se forman y distinguen construcciones del conocimiento que se presentan en las situaciones de interacción que se viven a diario en el aula tanto por el estudiante como por el profesor.

La visión anterior obliga a una reformulación epistemológica, que consiste en considerar primeramente al humano haciendo matemáticas, en lugar de considerar la producción matemática hecha por el humano. Si ése es el caso, se deben formular epistemologías modelizadas por la actividad humana que ayuden a habilitar esas categorías del conocimiento matemático en la matemática escolar.

La nueva hipótesis consiste, entonces, en que la actividad humana es la fuente de la reorganización de la obra matemática que implicará el "rediseño del discurso matemático escolar".

Como resultado del planteamiento anterior se ha desarrollado una línea de investigación que incorpora cuatro componentes fundamentales de la construcción social del conocimiento: las dimensiones epistemológica, cognitiva, didáctica y social. A estos componentes en conjunto y en una aproximación sistémica, se les llama acercamiento socioepistemológico (Cantoral & Farfán, 1998), y una de sus tareas principales de investigación consiste en dar evidencias para la nueva hipótesis.

En ese sentido, en las secciones siguientes se presenta un estudio acerca de la reorganización del Cálculo que consistió en haber encontrado que una noción *sui generis* llamada *comportamiento tendencial de las funciones* (Cordero, 1998) tiene un carácter funcional del conocimiento matemático, y su construcción está en relación con la modelización y el uso de las herramientas matemáticas. Esta ubicación formula categorías del conocimiento matemático que *a priori* no están en la estructura matemática. El campo de desarrollo que ha tenido el estudio del *comportamiento tendencial de las funciones* ha abarcado los niveles educativos medio superior y superior, a través de reorganizar los temas curriculares: transformaciones de las funciones, propiedad de linealidad de los polinomios, operaciones de las funciones, comportamientos asintóticos de las funciones, relaciones entre la derivada y la primitiva y estabilidad de las ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes. Se han encontrado diferentes construcciones de la noción *comportamiento tendencial de las funciones* en las distintas situaciones diseñadas. Por ejemplo, en el aprendizaje encontramos que el estudiante aprende a "identificar" coeficientes en la función, a "reconocer" patrones de comportamientos gráficos, a "buscar" tendencias en los comportamientos y a "relacionar" funciones. Los elementos identificar, reconocer, buscar y relacionar son las herramientas seleccionadas por los estudiantes ante la situación para construir la noción *comportamiento tendencial de las funciones*. Además, algunos efectos en la

4 Conceptos como la interacción social ayudan a explicar el papel que desempeña la organización social en el aula cuando se construyen significados. Un acercamiento sociológico al respecto se puede encontrar en Candela (1999).

enseñanza que hemos encontrado a propósito de esa construcción están en los signos "+" e "=", los cuales son transformados a nociones de tendencia con relación al comportamiento de la función que entra en juego, y no a nociones de aproximación con relación al límite de una función que entra en juego de acuerdo con la situación (Cordero, 1998).

Por este hecho, la naturaleza de la noción como categoría sugiere que hay otra fuente de abstracción tal vez distinta a la correspondiente de la abstracción reflexiva —como ya se ha dicho en (Cordero, 1998)— pues el foco de atención se centra en el lenguaje de las herramientas matemáticas y no en el de los objetos matemáticos. La fuente de las abstracciones se encuentra en la alternancia de los diferentes contextos cuando se dan los actos de ver similitudes entre estructuras que propician las categorías. Es decir, en la clase de actividades y acciones que hacen formar y distinguir construcciones. Este planteamiento crea una nueva base de entendimientos y construcciones matemáticos con relación al ámbito de la actividad humana (Confrey & Costa,1996).

Entonces, el acercamiento socioepistemológico formula una línea de investigación que amplía la problemática. No sólo considera epistemologías modelizadas a través de la actividad matemática, sino también modelizadas a través de la actividad humana. Y en consecuencia, compone una nueva base didáctica (como ciencia) para que la matemática escolar reorganice la obra matemática.

UNA AMPLIACIÓN[5] DE LA PROBLEMÁTICA. LA RELACIÓN ENTRE LA COGNICIÓN Y EL OBJETO MENTAL

¿Cuál es el estado del arte sobre las aproximaciones del funcionamiento cognitivo ante el devenir de la componente social?

Se puede decir que el estudio del desarrollo cognitivo se ha ampliado si consideramos tres de sus fases de la siguiente manera. Primero hubo un enfoque en los procesos intelectuales del individuo, estos últimos resultado de las investigaciones clásicas basadas en la teoría de Piaget (1984). Después hubo un cambio de enfoque destinado a aspectos de la cognición social que inició en la década de 1980, influenciado por los trabajos de Vigotsky (1978). El cambio de perspectiva explica la cognición en el contexto de las dimensiones interpersonales, en el que los procesos de pensamiento son socialmente sometidos. Esto quería a decir que el aprendizaje es un proceso que toma lugar en un marco de participación y no sólo en la mente del individuo (Lave & Wenger, 1991). Sin embargo, el trabajo respecto al desarrollo cognitivo ba entrado (recientemente) a una tercera fase, en la cual las teorías marcan un enlace entre las restricciones contextuales y la adquisición del conocimiento, comúnmente llamado acción situada o cognición situada (Brown, et al., 1989). Tal perspectiva adopta una "visión situada de los significados por medio de relaciones", en la que el significado se percibe como inseparable de la interpretación y el conocimiento se enlaza a la relación de que es un producto. Uno de los principios centrales

5 El término ampliación es utilizado en el mismo sentido de Gascón (1998), que consiste en la necesidad de tematizar y modelizar la matemática escolar cuando se reconoce la existencia de fenómenos sin explicación y problemas didácticos sin resolver.

de la cognición situada es el constructivismo social, que toma en cuenta las dimensiones histórica, cultural y social de las interacciones humanas. Aquí, aprendizaje humano se entiende como un proceso del diálogo y de la socialización. El lenguaje del humano desempeña un papel crucial en los procesos sociales de aprendizaje (Bajtín, 1986; Vigotsky, 1978). El lenguaje no tiene sólo la función de alcanzar el entendimiento, sino de coordinar acciones y socializar actores. Bajtín (1986) usa el término apropiación para denotar la asimilación de diferentes perspectivas de significados por medio de los procesos del lenguaje. En otras palabras, el aprendizaje es mediado por diferencias de perspectivas entre coparticipantes (Lave & Wenger, 1991). Así, la noción de socialización (también llamada enculturación) pasa a ser un factor central en la perspectiva del desarrollo cognitivo, en la que los procesos instruccionales son interpretados como procesos de socialización (Bishop, 1988; Cobb, et al., 1991).

Sin embargo, la problemática fundamental que se ha asumido en el acercamiento socio-epistemológico no podría ser sólo atendida por los procesos de socialización, pues de alguna manera se marca una independencia del contenido matemático. La fuente que se ha encontrado, en la que aparecen categorías que posibilitan la reorganización de la obra matemática, es la reconstrucción de significados. Es por ello que la dimensión epistemológica desempeña un papel fundamental, pues en ella se trazan marcos de referencia del contenido matemático para hacer la elección de situaciones, es decir, para establecer los marcos en los que suceden las situaciones y los obstáculos que distinguen tales marcos. Por tanto, sobre estos tres aspectos habría que articular la componente social.

LA APROXIMACIÓN SOCIOEPISTEMOLÓGICA

La dimensión epistemológica desempeña un papel fundamental en diversos marcos teóricos. Por ejemplo, el obstáculo epistemológico de Bachelard soporta ampliaciones cuando es interpretado como un marco cultural (Sierpinska, 1994). La teoría de los campos conceptuales de Vergnaud considera fundamental la influencia de los medios culturales sobre el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas por medio de establecer relaciones del conocimiento entre problemas y situaciones. En otras palabras la relación del conocimiento a los problemas consiste en que éstos sean resueltos y con respecto a las situaciones, en que éstas sean tratadas (Vergnaud, 1990); y las descomposiciones genéticas de Dubinsky (Asiala, et al., 1996) soportan, en algún sentido, bases epistemológicas que modelizan la actividad humana (Aguilar, 1999; Martínez, 1999; Miranda, 2001; Palma, 1999 & Tovar, 2000).

Efectivamente, si hablamos de sociocultura, el marco teórico principal es de Vigotsky. Sin embargo, para la problemática planteada, ha sido significativo que el desarrollo de la aproximación sociocultural a la mente da prioridad a la actividad humana. Entonces, los seres humanos son concebidos en contacto con su ambiente, creando su ambiente y a sí mismos por medio de las acciones en las que se involucran (Wertsch, 1991). Esta aseveración se ha traducido de la siguiente manera para la matemática educativa: los análisis puramente lógicos para decidir cómo desarrollar matemáticas no sólo pueden ser considerados, también se requiere saber en qué actividades están interesados los estudiantes, cuáles les son más familiares y cómo esas actividades relacionan a otras posibilidades.

El entendimiento y las diferentes clases de competencias y concepciones de los conceptos matemáticos en las interacciones escolares tienen un origen empírico. Tienen que ver con actividades de la práctica docente que generan preguntas parecidas a las siguientes: ¿cómo enseñar para que el estudiante entienda?, ¿por qué a pesar del esfuerzo de una buena explicación no entienden y cometen errores?, ¿qué exactamente no entienden, y qué entienden y cómo?, ¿qué clase de problemas deberán considerarse para que el estudiante los resuelva y en qué contexto deberán ser aplicables?, ¿cómo observar estudiantes mientras discuten problemas matemáticos, cuando están tratando de darles sentido y están comunicando lo que entienden a otros?, ¿cómo saber que los problemas dados a los estudiantes son tales que cuando los resuelven construyen nuevos conceptos matemáticos?, ¿las dificultades con las que se encuentran los estudiantes son cercanas a las experiencias o a lo experimentado por los matemáticos en el pasado?

Este origen empírico ha alcanzado aproximaciones teóricas en las que se formulan hipótesis respecto a lo que el estudiante debe construir, se buscan evidencias en las interacciones escolares a través de diseñar e implementar situaciones para después analizar los datos conseguidos y, con ello, revisar las hipótesis y obtener un resultado. El diseño de situaciones y sus resultados varían de acuerdo con la base teórica usada en la secuencia anterior. Por ejemplo, actualmente las dificultades de los estudiantes tienen un significado e importancia universal. Las dificultades no sólo dependen de la falta de experiencia matemática o de habilidades, o de la idiosincrasia de su inmaduro pensamiento, sino de la naturaleza misma del concepto matemático y de la cultura en el marco que se desarrolló. Un ejemplo de esta aproximación se puede consultar en Sierpinska (1994), en el que el obstáculo epistemológico de Bachelard fue muy útil. Con este concepto el pensamiento del estudiante aparece cuando se enfrenta a un obstáculo epistemológico que tiene que ser superado si un nuevo concepto está para ser desarrollado. Estos obstáculos epistemológicos marcaron el desarrollo del concepto en la historia y permanecen de algún modo implicados en sus significados. Los obstáculos epistemológicos son, en sí, formas de entendimiento basadas en algún inconsciente respecto a esquemas de pensamiento adquiridos culturalmente y creencias incuestionables acerca de la naturaleza de la matemática y de las categorías fundamentales tales como número, espacio, causalidad, infinito y otras. Todas ellas inadecuadas a las teorías contemporáneas.

Otro ejemplo en el que la visión es de corte epistemológico lo encontramos en Vergnaud (1990). Ahí, las preguntas anteriores pueden ser restringidas a la naturaleza y el funcionamiento del conocimiento matemático. La primera restricción (la naturaleza) estaría basada en las visiones matemáticas y psicológicas, mientras que la segunda (el funcionamiento) estaría basada en la visión social. Las dos son centrales para el estudio de los procesos de aprendizaje-redescubrimiento-reinvención en la mente del estudiante para el estudio de la historia de las matemáticas, cada vez que la pregunta epistemológica sea ¿cuál es la naturaleza y la función de un nuevo concepto, un nuevo procedimiento, un nuevo tipo de razonamiento, una nueva representación?, o mejor dicho, ¿cuál es la relación de las nuevas competencias y concepciones matemáticas en los problemas prácticos y teóricos que las hace útiles y significativas?

En las dos preguntas anteriores, Vergnaud establece rasgos de la epistemología genética con interacciones escolares. La naturaleza y el funcionamiento son explicados a través de la utilidad y lo significativo del conocimiento en una situación dada, mientras que el nuevo concepto, el nuevo procedimiento, el nuevo tipo de razonamiento, las nuevas representaciones, son en conjunto nuevas competencias y concepciones. Esto de alguna manera refleja que son las nuevas formas de trabajar las que importa estudiar, pero que éstas son afectadas por los nuevos contenidos involucrados.

Lo útil y significativo conduce a la elección de situaciones, y la elección de situaciones, a su vez, lleva a preguntas respecto al marco en que se presentan. Pero para distinguir los marcos se requiere identificar los obstáculos encontrados por los matemáticos en el pasado.

De lo anterior se desprende una relación con tres elementos: ***elección de situaciones, marcos en los que suceden las situaciones*** y ***obstáculos que distinguen los marcos***. Denotamos esa relación como *R* y en seguida veremos cómo funciona.

La elección de situaciones es necesaria para el análisis cognitivo de las tareas y de los comportamientos. Ésta debe identificar los conceptos involucrados y las propiedades relevantes de los teoremas; mientras que el estudio de los obstáculos que encontraron los matemáticos en el pasado ayuda a interpretar los errores en que incurren los estudiantes contemporáneos. Sin embargo, el estudio de los errores, las dificultades y las concepciones equivocados también arroja luz acerca de los entendimientos de la historia de las matemáticas. Pero también puede suceder que el conjunto de problemas que el estudiante encuentre sea diferente al que la ciencia ha encontrado en el curso de su historia, por ello es esencial para la psicología de la matemática educativa considerar la relación de conocimiento a los problemas. Si el estudiante debe aprender tal tópico, en tal nivel y con tal método, se debe saber cuál es el marco en el que esas elecciones toman lugar.

Entonces, la epistemología clarifica la relación del conocimiento matemático a los problemas. Para ello necesita estar en todos los pisos del edificio matemático. Además, la relación del conocimiento a los problemas consiste en que éstos sean resueltos y aporte situaciones para que sean tratados, entonces es importante considerar la influencia de los medios culturales sobre el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas.

La relación *R* y la postura epistemológica son cruciales para la formulación y la vigencia de las hipótesis de investigación así como para el diseño, la implementación y el análisis de situaciones que buscan evidencias de las hipótesis. Además, estas últimas siempre están en el plano de la realidad social (Vergnaud, 1990).

Otro marco teórico importante a considerar consiste en haber incorporado el componente social a través del aprendizaje cooperativo, que funciona como el medio *ad hoc* para estudiar las construcciones mentales que realiza el estudiante para entender los conceptos matemáticos. Con ello se ha logrado evidenciar que las abstracciones de las propiedades y de las relaciones de operaciones mentales explican los entendimientos matemáticos (Asiala, et al., 1996), aunque no dan cuenta de la existencia del conocimiento matemático. Esto es, no dan cuenta de las relaciones del conocimiento con las características físicas y sociales de las situaciones que los estudiantes enfrentan, la elección adecuada y cuidadosa de las situaciones que hacen el conocimiento matemático significativo ni de la relación entre los problemas para ser resueltos y las competencias y concepciones específicas. El conocimiento matemático no existiría si no fuera un modelo aceptable de alguna realidad, como las entidades físicas, y si no ayudase a tratar problemas empíricos.

La consecuencia más importante del constructivismo epistemológico de Piaget es haber encontrado que el conocimiento es siempre una respuesta a los problemas propios de cada individuo. Los estudiantes tienen problemas que no son propiamente matemáticos, sino más bien sociales (como los de supervivencia y de éxito en la institución escolar) y no los de los investigadores, quienes quieren establecer y hallar la verdad. Los estudiantes interpretan sus tareas escolares y seguramente tropiezan con algo distinto del quehacer matemático, pero al fin problemas que tienen que resolver. Por ejemplo, el maestro puede estar esperando que el estudiante lea y analice cuidadosamente cierto enunciado matemático y asocie las operaciones con el contexto, es decir, el maestro espera que el problema del estudiante sea una modelación matemática de la situación del enunciado matemático, pero para el estudiante ese problema fue suponer correctamente la operación que está siendo practicada en ese momento en clase (Cordero, 1998 & Sierpinska, 1996).

Sin embargo, la aproximación a la problemática que se presenta aquí considera, en primer lugar, que lo socioepistemológico debe significar el reflejo de cualquier actividad humana haciendo matemáticas y, en segundo lugar, que el funcionamiento mental que atañe a una aproximación sociocultural a la mente debe estar en correspondencia con la modelación y el uso de la matemática, es decir, con el lenguaje de herramientas que resulta de la actividad humana. Esta relación compone categorías del conocimiento matemático que son el núcleo para reorganizar la obra matemática.

Se cuenta con evidencias en las que los estudiantes, mediante estas categorías, logran establecer relaciones entre procesos y objetos a través de significados. Por ejemplo, si el estudiante logra establecer relaciones entre procesos y objetos de la asíntota de una función y la estabilidad de las ecuaciones diferenciales, requiere construir un significado de comportamiento de la función que aluda a cierta tendencia (Cordero, 1998; Dubinsky, et al., 1998).

LA ACTIVIDAD HUMANA COMO BASE DE LA EPISTEMOLOGÍA

Las categorías basadas en el lenguaje de herramientas contrastan con las basadas en el lenguaje de los objetos matemáticos. El contraste radica en los diferentes procedimientos que se derivan de estos lenguajes, por un lado, plasmados en representaciones y, por el otro, en operaciones formales en las que las representaciones no son el reflejo de una realidad preexistente sino un sistema de recursos para construir significados en el contexto de la interacción, y los operaciones formales se refiere a la constitución de una lógica "formal", es decir, operaciones aplicables a cualquier contenido. En ese sentido, el aspecto importante (en la didáctica de las matemáticas) de las categorías basadas en el lenguaje de las herramientas, no consiste en establecer una definición matemática sino en establecer o identificar todas las relaciones en el marco de referencia del contenido matemático (herramientas y significados) a través de las representaciones y los procedimientos que se derivan de éstas en el contexto de la interacción.

La naturaleza de esas relaciones lleva directamente a las formas de construir los procesos y objetos, más que a los procesos y objetos en sí, y la distinción entre esas construcciones. Esto significa que la variabilidad de los marcos y la multiplicidad de las representaciones tienen que afectar las formas de construcción y posibilitar la distinción entre las construcciones. En ese sentido, las categorías que hasta ahora hemos encontrado en nuestros estudios epistemológicos son las siguientes: noción de predicción (Cantoral, 1990 y 1999), noción de acumulación (Cordero, 1994) y noción de estado permanente (Farfán, 1997), y cada una está en relación con la estructura matemática del Cálculo y del análisis respectivamente: aproximación, derivación y serie de Taylor, integración y teorema fundamental del Cálculo, y convergencia y serie de Fourier. Más recientemente aparece la noción de comportamiento tendencial de las funciones (Cordero, 1998) que considera la transformación de funciones, las operaciones entre funciones, funciones asintóticas, relaciones entre la derivada y la primitiva (Muñoz, 1997), y las ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes (Cordero & Solís, 1999).

Por ejemplo, en una experiencia con estudiantes de ingeniería se formuló una situación en la que la noción de acumulación favoreció (en el contexto interactivo) que se reconstruyeran significados de la integral y del teorema fundamental del Cálculo, por los cuales los procedimientos consistieron de la suma y resta (Cordero, 1994). Así, la expresión

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

pudo consistir de las siguientes reconstrucciones de significados:

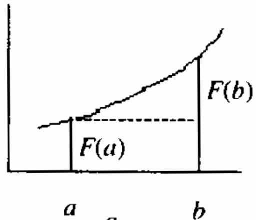
a) Área bajo la curva:

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx$$

Resta

b) Posición de un móvil:

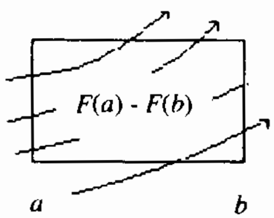
$$F(b) = F(a) + \int_a^b f(x)dx$$



Suma

c) Movimiento de un fluido: viéndolo pasar,

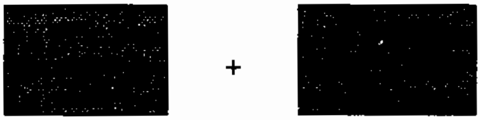
$$F(b) = F(a) + \int_a^b f(x)dx$$



Resta
(mirar pasar el fluir)

d) Movimiento de un fluido: participando en el fluir,

$$F(b) = F(a) + \int_a^b f(x)dx$$



Suma
(participar en el fluir)

El argumento que se construye a través de los diferentes significados de

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

consiste en establecer que la integral trata de situciones que transformar un estado en otro, es decir,

$$E_0 \xrightarrow{T} E_f$$

este último descrito por la variación estos a partir de un estado inicial.

En conjunto, estas categorías conforman un programa de investigación (Lakatos, 1978) que organiza contenidos, conceptos e ideas; programa que orienta la investigación y el diseño de situaciones, cuyo funcionamiento consiste en establecer el marco de referencia del contenido matemático (marco epistemológico), en el que aparecen los planos de representación[6] y procedimientos del estudiante a través de la cognición que está construyendo (dimensión cognitiva) y después, utilizando ambos (el marco de referencia y las representaciones y los procedimientos) se establecen los argumentos o las explicaciones de lo que se reorganiza en el marco de referencia tomando en cuenta la organización social y la intencionalidad del contexto interactivo (dimensión didáctica y social).

En ese sentido, el programa de investigación ha obligado a formular un conjunto de relaciones explícitas que buscan la coordinación con los fenómenos educativos (véase Figura 1).

Un primer grupo de relaciones (G1) consistió en haber formulado cuatro elementos que han permitido la articulación de las cuatro dimensiones y, a su vez, han compuesto marcos epistemológicos específicos del Cálculo, a saber: 1. Significados y sistemas

6 Representación en el mismo sentido de la sección anterior, es decir, no como un instrumento para la transmisión de información sino como un medio dinámico para la acción social que compone un sistema de recursos para construir significados. En este documento se usa la palabra representación de acuerdo con esta concepción.

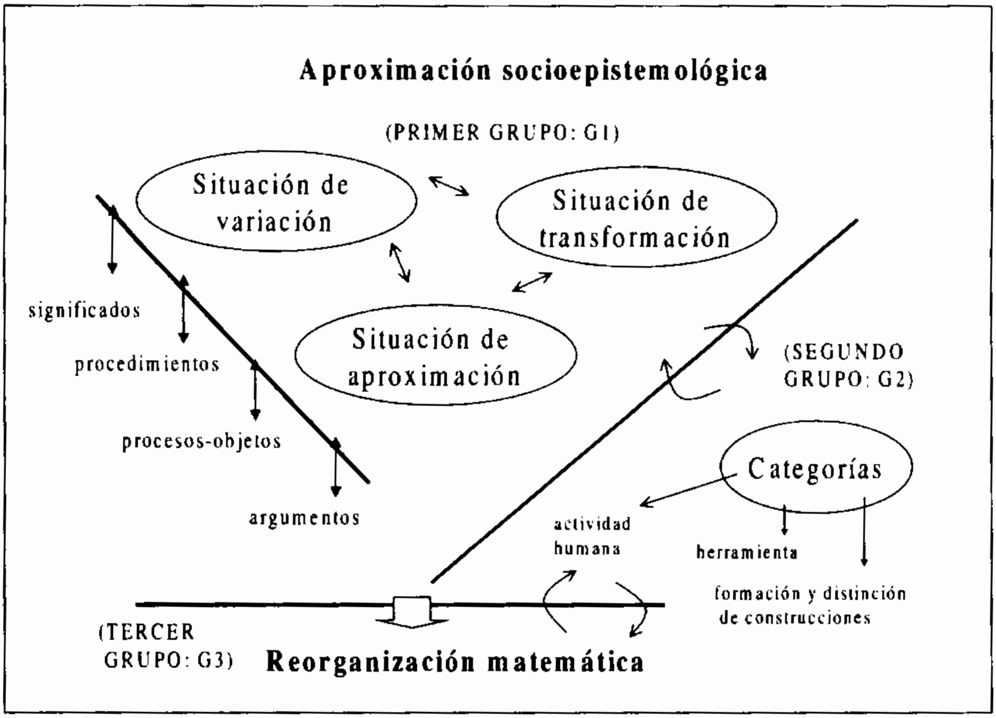


Figura 1

simbólicos; 2. Procedimientos; 3. Procesos y objetos; y 4. Argumentos

Estos cuatro elementos han ayudado a explicar marcos de referencia en los que se presenta reconstrucción de significados en contextos interactivos. Hasta ahora se han logrado precisar tres de estos marcos y se ha convenido presentarlos en términos de situaciones: variación, transformación[7] y aproximación. Cada situación compone un marco epistemológico del Cálculo, respectivamente. Además, los estudiantes construyen representaciones y aplican procedimientos con relación a las operaciones que son capaces de hacer, a las condiciones que son capaces de capturar y transformar, y con relación a los conceptos que construyen de manera progresiva. Por ejemplo, los procedimientos obtenidos por partes de los estudiantes de acuerdo con las representaciones construidas son, para la situación de variación: la comparación de dos estados; para la de transformación: la variación de los coeficientes de la transformación de una función; y para la situación de aproximación: las operaciones lógico-formales. En tanto que con relación a los procesos y objetos sobre los cuales suelen trabajar los estudiantes se ha encontrado, para la situación de variación: la cantidad continua; para la de transformación: instrucción que organiza comportamientos, y para la situación de aproximación: formas analíticas. Y en cuanto a los argumentos que los estudiantes han generado se tiene, para la situación de variación: la predicción; para la de transformación: el comportamiento tendencial de las funciones;

7 En Cordero (1998) a esta situación se le llamaba de graficación, pero ahora se le denomina de transformación, debido a que en una discusión académica respecto a los avances de la perspectiva teórica con el grupo Rumec la colega Draga Vidakovic hizo ver que los argumentos gráficos podrían estar en las tres situaciones, y que la noción de transformación aludía más a la situación de variación de parámetros de las funciones con relación a los comportamientos gráficos.

y para la de aproximación: la analiticidad de las funciones (Cordero & Solís, 1997a; 1997b).

Los cuatro elementos permiten análisis contextual (en el marco de las situaciones) para conocer el desarrollo de pensamiento matemático en la situación de variación, en la de transformación, o en la de aproximación, pero también para conocer el desarrollo del pensamiento matemático en la interacción de las tres situaciones.

Un segundo grupo de relaciones (G2) ha consistido en revisar la epistemología que resulta del primer grupo de relaciones. Se parte de la premisa de que la matemática escolar debe ser una reorganización de la obra matemática, para lo cual se requiere plantear una construcción del conocimiento consistente con las formas de construcción en la escuela. Estas formas corresponden a la actividad humana que consisten en reconstruir significados que a su vez dan forma a las situaciones que crean los humanos y que participan en ellas, es decir, reconstruyen significados a través de su organización social. Lo esencial de la reconstrucción de significados es la formación de construcciones y el hacer distinciones entre ellas, en otras palabras, es una clase de actividades y acciones posibles gracias al lenguaje de las herramientas. El humano se somete a usar las herramientas, entenderlas y llevarlas a ciertos actos, y con ello reconstruye significados (Cordero, 1999). En ese sentido, en la aproximación teórica, nociones como predicción, acumulación, estado permanente, transformación y aproximación, entre otras, ha sido conveniente llamarles categorías del conocimiento matemático (Cordero, 1998) porque son nociones medulares de la reconstrucción de significados del Cálculo en la actividad humana, tienen un carácter funcional del conocimiento matemático y su construcción se relaciona con el uso de herramientas y la modelación. Por tanto, las categorías son el enlace o el medio que articula a la epistemología a través de la actividad humana y lo que sucede en el salón de clases.

Un tercer grupo de relaciones (G3) consiste en formular un mecanismo que permita objetivar la epistemología a través de la actividad humana para cualquier relación didáctica. Tal objetivación buscaría entonces hacer explícita la reorganización matemática y

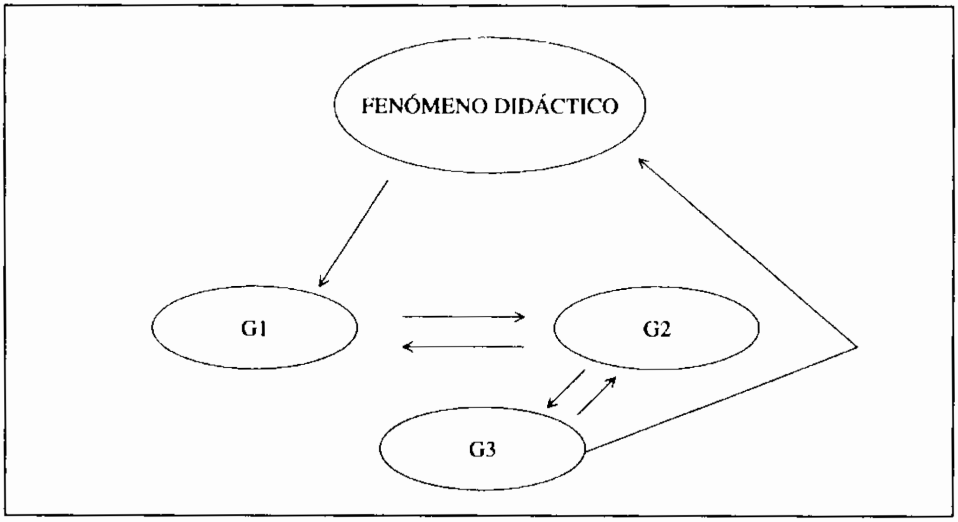


Figura 2

hacerla coherente con el fenómeno educativo. En ese sentido, esa epistemología deberá ser la base del diseño de situaciones y de su implementación. Por tanto, tal mecanismo empieza por formular una epistemología del contenido matemático considerado en la problemática (interpretación del fenómeno didáctico en G1), después la epistemología deberá modelar el diseño de situación y su implementación (reorganización matemática a través de la interacción entre G1 y G2) y por último, la recolección de datos y su análisis teórico obliga a una revisión de la epistemología inicialmente formulada (objetivación de la reorganización matemática a través de la interacción entre G2 y G3). Esta revisión retroalimentará la reorganización matemática con relación a los fenómenos didácticos (reinterpretación del fenómeno por lo obtenido en G3) (véanse Figuras 1 y 2).

En resumen, las tres situaciones en conjunto han compuesto un programa de investigación original. El programa orienta respecto a lo que deben ser el Cálculo y el Análisis para la enseñanza y el aprendizaje, es decir, la reorganización del Cálculo, por lo que el aspecto fundamental consiste en tomar las herramientas como base de cualquier reconstrucción de significados.

LOS NUEVOS NIVELES DE ACCIÓN DIDÁCTICA

Si se cambiara el lenguaje de los objetos matemáticos como metáfora del conocimiento matemático, la pregunta obligada sería: ¿cuáles serán los nuevos niveles de acción didáctica?

Cualquiera que sean, deben reflejar la reorganización matemática a través de las situaciones diseñadas según la epistemología establecida. De alguna manera los niveles de acción más conocidos están contenidos en dos aproximaciones teóricas *Problem solving* y Teoría de situaciones didácticas, y el aspecto común de ambas consiste en que la epistemología, que subyace a los marcos teóricos respectivamente, modeliza la actividad matemática.

Pero incorporar la dimensión social a la problemática da prioridad a la actividad humana y, como ya se ha señalado, esto compone una nueva epistemología que modeliza la actividad humana. En tal caso, la cuestión es ¿cuáles son los nuevos elementos que describen la nueva epistemología?, ¿cuándo traza ésta una dirección en la que el humano (no el matemático) es considerado haciendo matemáticas?

La modelización matemática puede ser uno de esos elementos, siempre que sea entendida como la reconstrucción de significados que dan forma a las situaciones que crean los humanos y que participan en ellas; es una construcción original que utiliza material conocido, por ejemplo, las ideas y concepciones compartidas por los participantes. La parte esencial de la modelización es la formación de esas construcciones, y hacer distinción entre ellas para seleccionar una es una clase de actividades y acciones hechas con herramientas. Por ello, el humano se somete a usarlas, entenderlas y llevarlas a ciertos actos, y así reconstruir significados. En esta perspectiva, cualquier diseño de situación deberá reflejar este hecho.

LA DISTINCIÓN ENTRE CONSTRUCCIONES DEL CÁLCULO

¿Es la selección de herramientas, a través de distinguir y formar construcciones del conocimiento matemático, la situación fundamental que amplíe la modelización de la actividad matemática a la modelización de la actividad humana?

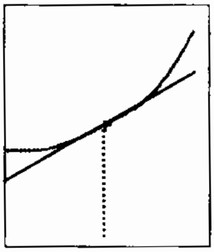
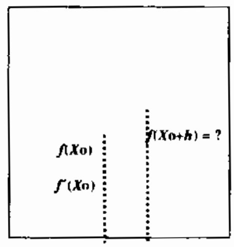
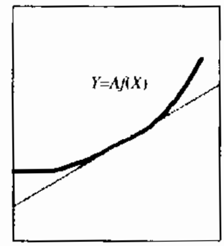
Aproximación	**Variación**	**Transformación**
		
Problema 1. "Hallar la ecuación de la recta tangente en el punto P de la curva $y=f(Xo)$"	Problema 2. "Sea $f(Xo)$ y $f'(Xo)$ condiciones iniciales de cierta posición de un movil. Predecir la siguinte posición $f(Xo+h)$"	Problema 3. "Determine el valor del coeficiente A tal que $Y=f(X)$ se junte con la recta en el intervalo I"
Procedimiento: cociente $m=\dfrac{Y-Y_0}{X-X_0}$	**Procedimiento: comparación** $f(Xo+h) - f(Xo)$	**Procedimiento: Variación de Coeficientes** $y(x)= Af(Bx + C) + D$
1. Analiticidad: $\lim\limits_{X\to X_0} \dfrac{f(X)-f(X_0)}{X-X_0} = f'(X_0)$	**2. Predicción:** $f(Xo + h) = f(Xo)+f'(Xo)h + ...$	**3. Comportamiento tendencial de la función:** $Y=Af(X)$

Figura 3. Distinción y formación de construcciones

La epistemología del Cálculo y del Análisis formulada en la sección anterior significa que se reconocen tres posibles construcciones y que cada una de éstas genera argumentos que permiten construir nuevo conocimiento. Sin embargo, reconocer que estos argumentos son distintos y seleccionar uno dependiendo de la situación es la parte esencial de la construcción. Por ejemplo, el concepto de derivada por lo común se reconstruye a través de situaciones de aproximación (véase Figura 3).

Se vale de una curva como gráfica de una función dada y se señala un punto P sobre la curva. Se pide entonces trazar la recta tangente a esta última en dicho punto. Sin embargo, el concepto de derivada sometido a la epistemología antes descrita puede ser reconstruido a través de tres situaciones distintas: aproximación, variación y transformación. En cada una de éstas se desarrollan procedimientos distintos sobre procesos y objetos también distintos para generar argumentos propios de la situación. Una descripción de cada situación puede ser como la siguiente:

**Situación de aproximación*. a) La clase de pregunta: "Hallar la ecuación de la recta tangente en el punto P de la curva $y=f(x)$"; b) el procedimiento: límite de un cociente cuyos procesos y objetos se reflejan sobre la función, la pendiente y la derivada; c) el argumento: analiticidad de la función.

**Situación de variación*. a) La clase de pregunta: "Sea $f(X\text{o})$ y $f'(X\text{o})$ condiciones iniciales de cierta posición de un móvil. Predecir la siguiente posición $f(X\text{o}+h)$"; b) el procedimiento: comparación entre dos estados $f(X\text{o}+h)$ - $f(X\text{o})$ cuyos proceso y objetos se reflejan sobre cantidades, variación continua y estados; c)el argumento: predicción.

**Situación de transformación*. a) La clase de pregunta: "Determine el valor de los coeficientes A, B, C y D para que la curva $Y = f(X)$ se parezca a la recta L en un intervalo $I\text{o}$"; b) el procedimiento: variación de los coeficientes de la transformación de una función cuyos procesos y objetos se reflejan sobre los patrones y comportamientos de las gráficas; c) el argumento: comportamiento tendencial de las funciones.

Hay tres argumentos, a saber, analiticidad, predicción y comportamiento tendencial, cada uno de los cuales proviene de una construcción del Cálculo; sin embargo, también podríamos decir que los tres provienen de una construcción en conjunto. Por un lado, se pueden formar construcciones que dependen de la situación, en donde se reconstruyen significados y procedimientos de acuerdo con las experiencias de los participantes, y por otro lado, como las construcciones son distintas su selección depende del argumento que ayude a enfrentar las nuevas situaciones. En ese sentido, el concepto de derivada consiste en varios significados: el límite de una función, la variación continua de cierta cantidad que fluye y la variación de parámetros de una función para organizar comportamientos. En otras palabras, los diversos significados en un contexto interactivo componen la epistemología del Cálculo, como resultado de la actividad humana.

La cuestión es diseñar situaciones basadas en esta epistemología, en las que el foco de atención no sólo debe centrarse en la adquisición del conocimiento, sino en el desarrollo de actividades.

Un marco como el anterior ayuda a entender ciertos fenómenos educativos de la matemática, por ejemplo, el privilegio del contexto algebraico. Los temas curriculares, como la transformación de funciones, las operaciones de funciones, las asíntotas de funciones y la solución de ecuaciones diferenciales, se presentan a través de manipulaciones algebraicas. Los cursos por lo general se enfocan en la solución y simplificación de ecuaciones mediante factorizar, trabajar con identidades trigonométricas y trazar gráficas de las ecuaciones. Esta perspectiva, que privilegia el contexto algebraico, deja en la mente del estudiante una restringida e insatisfecha idea del campo de esos temas.

Desde un punto de vista epistemológico sabemos que en los últimos veinte años la naturaleza de los conceptos de esos temas ha cambiado. Por un lado, encontramos el desarrollo de la teoría cualitativa de los sistemas dinámicos y, por otro, el desarrollo de la tecnología; nos referimos en particular a las calculadoras que hacen gráficas. Estos dominios de alguna manera han enfocado la atención no sólo en los métodos cuantitativos, sino también en los cualitativos. Sin embargo, la enseñanza de la matemática no ha sido influenciada por esta evolución, podríamos decir que se ha centrado en el contexto algebraico.

Por tal motivo, los elementos didácticos de una nueva perspectiva consisten en poner en juego relaciones entre diferentes contextos, por ejemplo, el algebraico y el gráfico. Precisamente, el lenguaje de las herramientas en la actividad humana ha ayudado a identificar la categoría comportamiento tendencial de las funciones, la cual genera argumentos cualitativos que determinarán nuevas acciones que consisten en un intercambio permanente entre contextos algebraicos y gráficos, como las siguientes (Cordero, 1998; Cordero & Solís, 1997a, 1997b): identificar coeficientes en las funciones, reconocer patrones de comportamiento gráfico y algebraicos, buscar tendencias en los comportamientos y establecer relaciones entre funciones.

Con esta selección de herramientas, el estudiante ha podido reconstruir significados a la variación de parámetros de las transformaciones de las funciones y a las ecuaciones diferenciales, que consisten en establecer "instrucciones" que organicen comportamientos. En ese sentido, una ecuación diferencial puede significar "una relación entre funciones que determina comportamientos" que ayuda a predecir soluciones a través de los términos mismos que componen la ecuación, sin tener que acudir necesariamente a los métodos analíticos (Cordero & Solís, 1999).

UN EJEMPLO. EL COMPORTAMIENTO TENDENCIAL DE LAS FUNCIONES

El comportamiento tendencial de las funciones (de acuerdo con la epistemología trazada en la sección anterior) es un argumento que se construye en una situación de transformación, en el que la modelización de la transformación de funciones ($y = f(x) \rightarrow Y = Af(Bx + C) + D$) lleva a la reconstrucción de significados (comportamientos gráficos y patrones algebraicos y gráficos), haciendo procedimientos (variación de coeficientes), construyendo procesos y objetos (concibiendo la función como una instrucción que organiza comportamientos). El aspecto importante en esta construcción de representaciones es la relación entre la variación, la aproximación y el comportamiento tendencial, que consiste en articular propiedades locales y globales en las cuales hay variación y comportamiento con cierta tendencia, simultáneamente aparece la medida de cambio y el comportamiento de esa medida. Por ejemplo, la función $f(x) = 1/x$, $x > 0$, cuando x tiende a infinito, $f(x)$ tiende a cero (véase Figura 4).

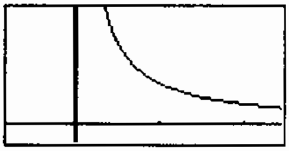


Figura 4

Sin embargo, la modelización depende de la forma de la gráfica, donde la simultaneidad de la medida del cambio y su comportamiento son intrínsecas a la gráfica. En ese sentido, se dice que la curva $1/x$ tiende al eje x, pero la variación de $1/x$ determina cómo tiende, es decir, el comportamiento tendencial al eje x (Cordero, 1998).

El comportamiento tendencial de la función es intrínseco a la gráfica y genera un conjunto de situaciones que abarca cierto contenido del Cálculo, enmarcado en situaciones globales de variación. Las gráficas de las funciones son representaciones privilegiadas de estas situaciones; sin embargo, las representaciones en la perspectiva del comportamiento tendencial de la función también conllevan relaciones analíticas.

Hasta ahora se han logrado diseñar algunas situaciones a través de contenidos concretos del Cálculo. Y están siendo aplicadas a estudiantes del ciclo universitario por medio de entrevistas (Aguilar, 1999; Cordero, 1998; Martínez, 1999; Palma, 1999). Las situaciones las compone una secuencia de tres niveles que marcan un desarrollo de la actividad o modelización: uso, entendimiento y acto:

•S_1: variación de coeficientes de la transformación de una función

Se establecen relaciones entre contextos gráficos y analíticos a través de la siguiente secuencia de funciones que describe una especie de "iteración lineal":

$$Y_1 = ax + b$$
$$Y_2 = f(x)$$
$$Y_3 = A[f(x)] + B$$
$$Y_4 = A[f(ax+b)] + B$$

Las relaciones entre las "operaciones gráficas" y las "formas analíticas" (expresiones de las funciones) llevan a concebir la función no como una expresión formal por la cual se operan números específicos sino, más bien, como una instrucción que organiza comportamientos. Esto es, se anticipan efectos gráficos de la función $Y_2 = f(x)$ a través de los coeficientes a, b, A y B y de la secuencia antes descrita:

$$Y_1 = ax + b \text{ y } Y_2 = f(x) \quad \rightarrow$$
$$Y_3 = A[f(x)] + B \text{ y } Y_4 = A[f(ax + b)] + B$$

donde $f(x)$ es cualquier función prototipo.

Esta secuencia no es una operación explícita que empieza en Y_1 y termina en Y_4. Sin embargo, son sucesos gráficos que transfieren acciones entre cada uno de los elementos de la secuencia. En este caso, Y_4 es el suceso general que representa todos los trazos de la gráfica considerados en la "iteración lineal" (Cordero, 1998).

•S2: relaciones entre funciones a través de operaciones

Mediante considerar secuencias de sumas de funciones $f + g = h$ se construye un argumento: sumar dos funciones a través de buscar un comportamiento tendencial. La «aritmética» gráfica dependerá de los comportamientos tendenciales entre la función prototipo $f(x)$ y la propuesta $g(x)$. Así, la gráfica de la función $h(x)$ la determinan los coeficientes de $g(x)$ en la secuencia.

Una aritmética gráfica como la anterior puede ser aplicada a relaciones más generales entre gráficas. No obstante, para llevar esta aritmética a relaciones en las que entren en juego expresiones y formas arbitrarias de funciones, es necesario determinar los comportamientos tendenciales en los intervalos adecuados entre las funciones $f(x)$ y $g(x)$.

El argumento es, entonces, determinar nuevos comportamientos tendenciales que dependen de las formas gráficas que componen la operación. La secuencia de gráficas que se dibujen permitirá reconocer un patrón gráfico o bien una forma específica de la gráfica que ayudará a caracterizar el nuevo comportamiento tendencial.

•$S3$: estabilidad de las ecuaciones diferenciales lineales

Se parte de una secuencia de ecuaciones diferenciales lineales de primer orden para variar los coeficientes. Se establecen relaciones entre el comportamiento de la solución de la ecuación y los coeficientes. El comportamiento tendencial de las funciones es un argumento.

Por ejemplo, en este nivel hay un reconocimiento sobre la ecuación diferencial. Si $ay'(x) + y(x) = F(x)$, entonces $y(x)$ se comporta como $F(x)$, sin embargo, el coeficiente a modifica el comportamiento.

La ecuación diferencial $y'(x) + y(x) = F(x)$ representa una situación en la que, dada $F(x)$, la solución $y(x)$ tiende a $F(x)$. Así, la ecuación diferencial

$$y'(x) + y(x) = F(x)$$

expresada como

$$y'(x) = F(x) - y(x)$$

significa que $y'(x)$ determina la rapidez con que $y(x)$ tiende a $F(x)$ en la situación analizada.

En este marco, la solución $y(x)$ puede ser determinada, en términos globales y cualitativos, si se conoce la gráfica de $F(x)$ mediante el trazo de trayectorias en el entorno de la gráfica de $F(x)$. Esto podrá hacerse independientemente de los diferentes métodos analíticos disponibles.

En este sentido, lo significativo no radica en hallar la solución sino en determinar comportamientos tendenciales entre la ecuación diferencial y su solución, y con ello lograr simulaciones. Un ejemplo de este tipo de procesos es encontrar el coeficiente a de la ecuación

$$ay'(x) = F(x) - y(x)$$

para que $y(x)$ tienda rápida o lentamente hacia $F(x)$.

La generalización del argumento se trabaja a través de actividades, en las que se plantean secuencias de ecuaciones diferenciales de orden distinto:

$$ay'(x) = F(x) - y(x)\ ,\ \ ay'(x) + by''(x) = F(x) - y(x)$$

$$\&\ \ a_1 y'(x) + a_2 y''(x) + \ldots + a_n y^{(n)} = F(x) - y(x)$$

Se trata entonces de encontrar las condiciones, a través de los coeficientes para que la solución $y(x)$ tenga un comportamiento tendencial a $F(x)$. Las condiciones cumplen con las condiciones de estabilidad de las ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes.

Las tres situaciones antes descritas son el eje de un programa de investigación que atiende problemáticas particulares, de diferente índole, de la reorganización matemática. Por ejemplo, las representaciones de los comportamientos asintóticos que aparecen en el discurso matemático escolar, a través de los textos de matemáticas y concepciones de los profesores, son obstáculos didácticos para que los estudiantes construyan compor-tamientos asintóticos senoidales. Esto se debe a que el estudiante tiene que reorganizar su conocimiento acerca de estos comportamientos y construir una nueva representación. En ese sentido, la investigación consiste fundamentalmente en seleccionar situaciones y establecer su diversidad de modo que permitan al estudiante construir la nueva representación. La hipótesis de investigación consiste en que el comportamiento tendencial de las funciones se considera un argumento del estudiante en el contexto gráfico que posibilitará la nueva representación, y con ello, construirá la generalidad del comportamiento asintótico: "*sea la función $h = f + g$, si cuando x tiende a infinito sucede que g tiende a cero, entonces se dice que f es la asíntota de h (es decir, h tiende a comportarse como f)*". También ha contribuido a construir propiedades matemáticas que son del dominio del comportamiento tendencial de las funciones, por ejemplo la linealidad del polinomio, cuya generalidad articula construcciones sobre comportamientos asintóticos y sobre la estabilidad de las ecuaciones diferenciales.

Un fenómeno didáctico con relación a la derivada consiste en que el estudiante no incorpora significados a la misma aunque sabe que la derivada es la pendiente de una recta. Por ejemplo, en situaciones gráficas se informa que el estudiante ante relaciones funcionales como $f(x)=Ax^2 + Bx + C$ logra incorporar significados a los coeficientes A y C con relación a la forma de la gráfica, pero no para B (Mirón, 2000). La pendiente es un número que ante la gráfica de la relación funcional no se "dibuja", a diferencia de los coeficientes A y B.

En ese sentido, la situación de linealidad del polinomio tiene la intención de relacionar la recta tangente con el comportamiento de la función, es decir, el estudiante reconstruirá un significado a la parte lineal del polinomio $a_1x + a_0$ con relación al comportamiento tendencial de su gráfica. La reconstrucción del significado consta de dos aspectos: identificar la propiedad de linealidad y establecerla como argumento.

La linealidad del polinomio (véase Figura 5), consiste en que la parte lineal de cualquier polinomio $P(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$, es la recta tangente al polinomio que pasa por el punto $(0,P(0))$.

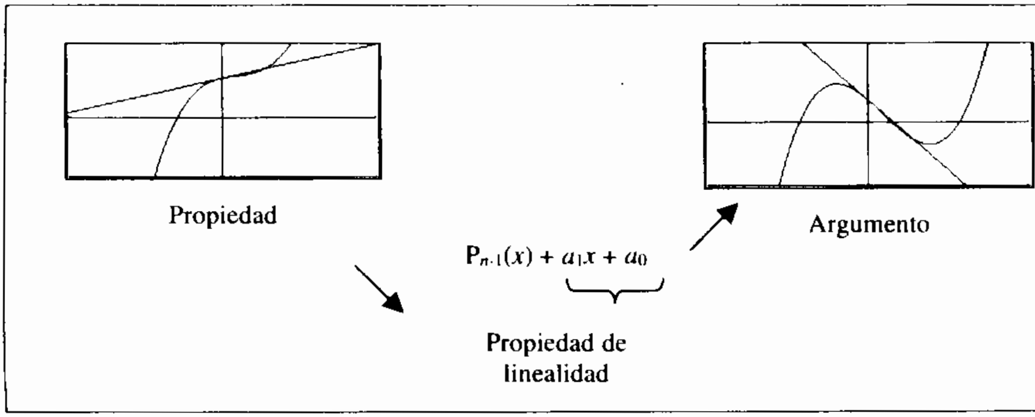


Figura 5. Polinomio + recta

El aspecto relevante aquí es el diseño de situación que se ha logrado después de entender las modelizaciones que el estudiante suele hacer para identificar o construir la propiedad de linealidad. Por ejemplo, las modelizaciones que lograron hacer cuando se les formulaba una actividad como la siguiente, consistieron en:

Actividad. Explica por qué la gráfica de h tiene se comporta como aparece en la Figura 6.

La función h fue reconocida como la suma de dos funciones con relación en su comportamiento tendencial. La suma de las dos funciones, tanto algebraica $f(x) + g(x)$ como aritméticamente $f(a) + g(a)$, pasó a ser una instrucción que organizaba comportamientos de h. Las explicaciones de los participantes aludieron al comportamiento tendencial. Se parafrasea a continuación una de ellas:

> "...la gráficas que aparecen en la figura ... la gráfica de g pasa por el origen pero también la gráfica de f. Ahora bien, la gráfica de h, en el origen, se parece a la gráfica de g y después a la gráfica de f... creo que las gráficas se persiguen. La gráfica de f quiere ser la gráfica de g, esto es, f se comporta como g en esa misma ventana, pero fuera de esa ventana g quiere ser como f ,y eso hace la gráfica h..."

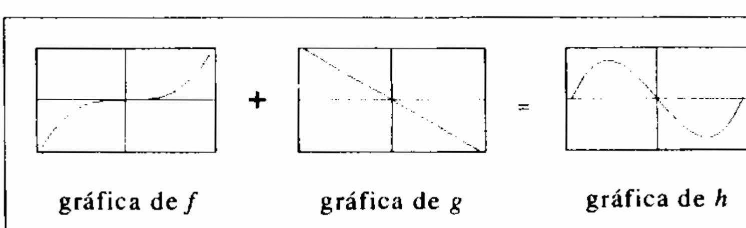


Figura 6

Lograron formular secuencia de gráficas para la suma de funciones, $f_0 + g_k = h_k$. Se establecen relaciones entre un comportamiento dado y la variación de comportamientos. También, se generan patrones gráficos de suma de funciones.

Con estas modelizaciones se ha logrado el diseño de situación (de la Figura 7), que permite al estudiante construir la propiedad de linealidad del polinomio y generar un argumento para poder anticipar comportamientos gráficos de los polinomios.

La función $f(x)$ se eligió como polinomio de manera espontánea por los participantes, es decir, el polinomio es privilegiado. La secuencia x^2 + recta y x^3 + recta es una selección, de acuerdo con las experiencias de los estudiantes, que les ayuda a reconocer un patrón de comportamiento de las gráficas, no sugiere algún tratamiento inductivo. El proceso de construcción que aparece en el diseño es como sigue: la pregunta 1 formula una conjetura: la parábola $y = x^2$ se traslada vertical y/o horizontalmente, dependiendo de los coeficientes de la recta, y el traslado no admite cambios de pendiente de la parábola; la pregunta 2 formula una conjetura distinta: la gráfica de $y = x^3$ no se traslada, pero sí cambia de pendiente, lo cual provoca una contradicción porque se espera la misma. Los participantes se enfrentan a la contradicción, y para resolverla tienen que reformular la conjetura 1 con base en la conjetura 2. La linealidad es el argumento que satisface ambas preguntas y posibilita la generalidad para cualquier polinomio. Después se está en

Enunciado de la actividad.

«¿Qué le pasa a una función cuando le sumas una recta?»

Nuestro objetivo es explorar las gráficas que surgen cuando a una función conocida $f(x)$ se le suma una recta arbitraria:

$$y(x) = f(x) + recta$$

En esta sesión haremos con detalle la suma de la función $y_1(x) = x^2$ y una recta y la suma de la función $y_1(x) = x^3$ y una recta, para después hacer algunas generalizaciones en los polinomios.

Actividades

1. $y(x) = x^2 + recta$

   Analiza esta situación a través de dibujar las gráficas de la recta que sumes y la función resultante en un mismo sistema de ejes coordenados. Hazlo para varios casos.

   Organiza tus resultados en una tabla que registe las características de la recta y la función resultante. Escribe un párrafo con tus conclusiones.

2. $y(x) = x^3 + recta$

   Analiza esta situación a través de dibujar las gráficas de la recta que sumes y la función resultante en un mismo sistema de ejes coordenados. Hazlo para varios casos.

   Organiza tus resultados en una tabla que registre las características de la recta y la función resultante. Escribe un párrafo con tus conclusiones.

3. Establece un criterio, que incluya los dos casos analizados, que describa lo que le pasa a una función cuando le sumas una recta.
4. Formula y demuestra la proposición (teorema) de acuerdo con el criterio establecido.

Figura 7. Enunciado de la actividad

posición de formular la proposición que exprese la propiedad de linealidad y de demostrarlo. Algunos participantes logran convertir la propiedad en argumento cuando se plantean bosquejar la gráfica de algún polinomio arbitrario, por ejemplo $P(x) = x^4 + 5x^2 + x - 3$. Trazan la recta $y = x - 3$, después buscan la intersección con el eje y, ahí el polinomio se comporta como la recta $y = x - 3$, fuera de eso el polinomio deberá perseguir un comportamiento similar al del término de la potencia mayor.

CONCLUSIONES

La aproximación socioepistemológica intenta articular dos grandes componentes: la social y la epistemológica, en los que el humano y su actividadse conviertan en elementos primarios en las teorizaciones de la matemática educativa. Parece que el planteamiento concuerda con la problemática, además de ampliarla. La reconstrucción de significados, fuente para reorganizar la obra matemática, corresponde a una epistemología cuya tarea principal es modelizar la actividad humana. Ahí se encontrarán las categorías que vertebran el contenido matemático y que permitan la reorganización de la obra matemática. Para tal fin, cada vez se deben encontrar explicaciones claras del papel de la actividad humana en su organización social. Conocer con claridad los recursos, las versiones, los argumentos y consensos de cierto contenido matemático que necesariamente se dan en los contextos interactivos de los estudiantes. En otras palabras, se busca, entre la complejidad de la problemática, la "situación fundamental" que permita el rediseño de las situaciones, la reorganización matemática, o bien, el "rediseño del discurso de la matemática escolar".

El programa de investigación que propicia las categorías mencionadas ha ocupado diferentes marcos teóricos dentro de la disciplina; entre los más relevantes está la teoría de situaciones didácticas de Brousseau (1997) y la teoría APOE de Dubinsky (Asiala, et al., 1996) ampliada, al incorporar la dimensión epistemológica en el sentido que se le ha dado aquí. Las metodologías han correspondido de manera natural a la ingeniería didáctica y al ciclo ACE.

Por último, cabe mencionar que las situaciones de las categorías componen un marco de referencia matemático, que en la aproximación socioepistemológica es la base para formular las secuencias que requieren una situación didáctica, o bien, es la base para formular los diferentes niveles de construcción que requiere una descomposición genética de un concepto. Así, la formulación será fundamental, cada vez que se encuentren explicaciones del papel de la actividad humana como organización social.

BIBLIOGRAFÍA

Aguilar, M. (1999). *Relaciones entre la derivada y la primitiva: El papel del registro gráfico en algunas de las construcciones de los estudiantes*. Tesis de maestría, Dirección de estudios de posgrado, Subnodo Regional de Matemática Educativa. Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo. México.

Alanís, J. A. (1996). *La predicción: un hilo conductor para el rediseño del discurso escolar del Cálculo.* Tesis doctoral, Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN, México.

Albert, A. (1996). *La convergencia de series en el nivel superior. Un acercamiento sistémico.* Tesis doctoral, Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN, México.

Artigue, M. (1994). Didactical engineering as a framework for the conception of teaching products. En R. Biehler, R. W. Scholz, R., StraBer, B., Winkelman (Eds.). *Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline* (pp. 27-39). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Asiala, M.; Brown, A.; Devries, D.; Dubinsky, E.; Mathews, D. & Thomas, K. (1996). A framework for research and curriculum development in undergraduate mathematics education. *CBMS Issues in Mathematics Education: Research in Collegiate Mathematics Education* 2(6), 1-32.

Bajtín, M. (1986). *Speech generes and other late essays.* Austin: University of Texas Press.

Bishop, A. (1988). *Mathematical enculturation: A cultural perspective on mathematics education.* Dordrecht, NL: Kluwer.

Bruner, J. (1985). *La educación puerta de la cultura.* España: Aprendizaje Visor.

Brown, J.; Collins, A. y Duguid, P. (1989). Situated cognition and the culture of learning. *Educational Research 18*(1), 32-42.

Brousseau, G. (1997). Theory of didactical situations in Mathematics. Didactique des mathématiques, 1997-1990. EEUU: Kluwer Academic Publishers.

Candela, A. (1999). *Ciencia en el aula. Los alumnos entre la argumentación y el consenso.* Primera edición. México: Paidós Educador.

Cantoral, R. (1999). Pensamiento y lenguaje variacional en la enseñanza contemporánea. En R. Farfán (Ed.) *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 12*(1), 41- 48.

Cantoral, R. & Farfán, R.M. (1998). Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción del análisis. *Épsilon* 42, 353-369.

Cantoral, R. (1990). *Desequilibrio y Equilibración. Categorías relativas a la apropiación de una base de significaciones propias del pensamiento físico para conceptos y procesos matemáticos de la teoría elemental de las funciones analíticas.* Tesis doctoral, Sección de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN, México.

Cobb, P.; Wood, T. y Yackel, E. (1991). A constructivist approach to second grade mathematics. En E. Von Glasersfeld (Ed.), *Constructivism in mathematics education* (pp. 157-176). Dordrecht: Kluwer.

Chevallard, Y.; Bosch, M. & Gascón, J. (1998). *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje*. México: Biblioteca para la actualización del maestro de la SEP.

Confrey, J. y Costa, S. (1996). A Critique of the Selection of «Mathematical objects» as Central Metaphor for Advanced Mathematical Thinking. *International Journal of Computers for Mathematical Learning 1*(2), 139-168.

Cordero, F. (1999). La matemática educativa en una aproximación sociocultural de la mente. *VII Simposio Internacional en Educación Matemática Elfriede Wenzelburger* UNAM-UPN (pp. 106-112). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Cordero, F. (1998). El entendimiento de algunas categorías del conocimiento del cálculo y análisis: el caso de comportamiento tendencial de las funciones. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 1*(1), 56-74.

Cordero, F. (1994). *Cognición de la integral y la construcción de sus significados. Un estudio del discurso matemático escolar*. Tesis doctoral, Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN, México.

Cordero, F. y Solís, M. (1999). Comportamientos gráficos en la visualización de las ecuaciones diferenciales lineales. En R. Farfán (Ed.). *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 12*(1), 29-33..

Cordero, F. y Solís, M. (1997a). *Las gráficas de las funciones como una argumentación del Cálculo* (2a. edición). Serie Cuadernos de Didáctica. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Cordero, F. y Solís, M. (1997b). Actos visuales y analíticos en el entendimiento de la ecuaciones diferenciales lineales. En M. Farfán (Ed.), *Actas de la Undécima Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp. 69-73). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Dubinsky, E.; Cordero, F.; Hillel, J. & Zazkis, R. (1998). Theories and Experiments in Collegiate Mathematics Education Research. Panel Working Group. In S. Berenson,, K. Dawkins, H. Blanton, W. Coulombe, J. Kolb, K. Norwood, L. Stiff (Eds.) *Proceedings of the Twentieth Annual Meeting North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 1, pp. 65-77). North Carolina State University, Raleigh, North Carolina, U.S.A.

Farfán, R. M. (1997). *Ingeniería Didáctica: Un estudio de la variación y el cambio*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Gascón, J. (1998). Evolución de la didáctica de las matemáticas como disciplina científica. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 18* (1), 7-34.

Lakatos, I. (1978). *The Methodology of Scientific Research Programmes*, Cambridge, England: Cambridge University Press.

Lave, J. y Wenger, E. (1991). *Situated learning: Legitimate peripheral participation*. Cambridge, England: Cambridge University Press.

Martínez, M. (1999). *Estudio de las relaciones que el estudiante hace para construir la gráfica de la derivada y de la primitiva: efectos de la enseñanza en la transformación de funciones*. Tesis de Maestría, Dirección de estudios de posgrado, Subnodo Regional de Matemática Educativa. Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo. México.

Miranda, E. (2001). *Entendimiento de la transformada de Laplace. Caso de una descomposición genética*. Tesis doctoral, Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN, México.

Mirón, H. (2000). *Naturaleza y posibilidades de aprendizaje en un ambiente tecnológico: una exploración de las relaciones f y f′ en el bachillerato interactuando con calculadoras gráficas*. Tesis doctoral, Departamento de Matemática Educativa. Cinvestav, IPN. México.

Muñoz, G. (1997). Un aspecto del enlace entre lo conceptual y lo algorítmico en el cálculo integral. Un ejemplo en la cinemática. En R. M. Farfán (Ed.) *Actas de la Undécima Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp. 64-68). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Palma, A. (1999). *Algunas construcciones de la asíntota oblicua en un ambiente gráfico: la suma de funciones como un patrón de construcción*. Tesis de maestría, Dirección de estudios de posgrado, Subnodo Regional de Matemática Educativa. Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo. México.

Piaget, J. y García, R. (1984). *Psicogénesis e historia de la ciencia*. (segunda edición) México: Siglo XXI editores.

Pulido, R. (1998). *Un estudio teórico de la articulación del saber matemático en el discurso escolar: la transposición didáctica del diferencial en la física y la matemática escolar*. Tesis doctoral, Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN, México.

Sierpinska, A. (1996). Whither mathematics education? *Conferencia plenaria en ICME-8*. Sevilla, España.

Sierpinska, A. (1994). *Understanding in Mathematics*. Studies in Mathematics Education Series: 2. Inglaterra: The Flamer Press.

Tovar, H. (2000). *Procesos de construcción del estudiante de las asíntotas verticales y horizontales: el límite y el infinito*. Tesis de maestría, Dirección de estudios de posgrado, Subnodo Regional de Matemática Educativa, Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo. México.

Vergnaud, G. (1990). Epistemology and Psychology of Mathematics Education. En P. Nesher and J. Kilpatrick. (Eds.), *Mathematics and Cognition: A Research Synthesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 14-30). Cambridge: University Press.

Vigotsky, L. (1978). *Mind in Society. The Development of higher psychological processes.* EEUU: Harvard University Press.

Wertsch, J. (1991). *Voices of the Mind. A sociocultural approach to mediated action.* EEUU: Harvard University Press.

El autor:

Francisco Cordero Osorio
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN
Departamento de Matemática Educativa
Avenida Instituto Politécnico Nacional #2508
07360, San Pedro Zacatenco, México, DF

Teléfono: (52-5)7473800 exts. 6038
Fax: (52-5) 7473823
E-Mail: fcordero@mail.cinvestav.mx