Revista Latinoamericana de Investigacion en Matematica Educativa
Comité Latinoamericano de Matemática Educativa
relime@mail.cinvestav.mx
ISSN (Versión impresa): 1665-2436
MÉXICO

2001
Olga Lucía León Corredor / Dora Inés Calderón
VALIDACIÓN Y ARGUMENTACIÓN DE LO MATEMÁTICO EN EL AULA
Revista Latinoamericana de Investigacion en Matematica Educativa, marzo, año/vol. 4, número 001
Comité Latinoamericano de Matemática Educativa
Distrito Federal, México
pp. 5-21

Relime Vol. 4, Núm.1, marzo, 2001, pp.5-21

Validación y argumentación de lo matemático en el aula

Olga Lucía León Corredor*
Dora Inés Calderón

RESUMEN

El interés de esta investigación es identificar recursos argumentativos para validar soluciones de problemas matemáticos, empleados por estudiantes de primer semestre de universidad y de primer semestre de Especialización en Enseñanza de la Matemática en el aula.

El modelo de investigación es etnográfico. Los recursos argumentativos de orden discursivo se identificaron empíricamente, los de orden matemático, de manera inferencial. El estudio fue desarrollado durante un año.

Se ha elaborado una tipología de recursos discursivos y matemáticos empleados en los procesos de validación. También se identificaron componentes de orden socio-cultural que, aunque tradicionalmente no hacen parte del hacer matemáticas, determinan normas de interacción específicas de la argumentación en un contexto matemático.

ABSTRACT

The objective of this research is to identify support resources for the solution of mathematical problems used by freshmen undergraduate students, as well as freshmen students undergoing an Specialization in Math Pedagogy.

The research model is ethnographic. Dissertation support resources were empirically identified; mathematical resources were deductively identified. The study was developed during one year.

A classification was developed for dissertation and mathematical resources used for validation processes. Components of socio-cultural type were also identified. Traditionally, these do not make part of mathematical processes, but they determine mechanisms of specific interaction of argumentation in a mathematical context.

RÉSUMÉ

L'objet de cette recherche comprend l'identification de ressources argumentatives pour la validation des solutions aux problèmes mathématiques employées dans la salle de classe par des étudiants débutants des Cours de Spécialité en Enseignement des Mathématiques.

Le modèle d'investigation est le modèle ethnographique. Les ressources argumentatives d'ordre discursif ont été identifiées de façon empirique; ceux d'ordre mathématique, de façon inferentielle. L'étude s'est fait pendant un an.

Une typologie de ressources discursives et des ressources mathématiques employées dans les procès de validation a été élaborée. Des composants d'ordre socio-culturel ont aussi été

Los resultados presentados en este artículo son parte del proyecto de investigación: "El papel de la argumentación en las situaciones de validación del conocimiento matemático en el aula", financiado por Colciencias-BID y la Universidad del Valle.

Estudiantes del Doctorado en Educación en las áreas de Lenguaje y de Matemáticas de la Universidad del Valle. Cali, Colombia.

identifies: même s'ils ne font pas partie, traditionnellement, du faire des mathématiques, ils déterminent des normes d'interaction spécifiques de l'argumentation dans un contexte mathématique.

RESUMO

O objetivo deste projeto é identificar os recursos argumentativos para validar as soluçoes de problemas matemáticos, utilizados por alunos do primeiro semestre da universidade e do primeiro semestre dos cursos de especialição em matemática, durante as aulas.

O modelo de investigação é o etnográfico. Os recursos argumentativos de ordem discursivo foram identificados empiricamente, os de orden matemático, de maneira, inferencial. Este estudo teve a duraçao de um ano.

Elaboramos una tipologia de recursos discursivos e recursos matemáticos utilizados nos processos de validaçao. Também identificamos componentes de ordem socio – cultural, que emboranao façam parte da matemática, tradicionalmente, determinam normas de interação específicas da argumentação em um contexto matemático.

ASPECTOS TEÓRICOS

El punto de partida que fundamenta este trabajo es el reconocimiento de que las matemáticas son elaboración humana, provienen de cerebros humanos y, por lo tanto, constituyen un producto cultural. Esta actividad, caracterizada por resolver problemas, determinar invarianzas, buscar estructuras comunes, generalizar, abstraer, axiomatizar y elaborar pruebas que, en su nivel más desarrollado, adquieren el status de demostraciones, se convierte en una actividad cultural desarrollada. El producto de esta actividad constituye una realidad objetiva externa a la conciencia de toda persona, en el sentido de que los objetos matemáticos, construidos por estos procesos, tienen propiedades definidas independientes de quien ha elaborado el objeto matemático.

De lo anterior se deduce que hay un desarrollo de la experiencia del individuo que la convierte en una experiencia matemática, fuente fundamental para elaborar conocimiento matemático. El aula de clase, como lugar privilegiado socialmente para construir y manifestar conocimientos, no puede ser ajena a esta realidad. Además, el desarrollo de una experiencia matemática en el aula estará condicionado por las relaciones estructurales de este espacio social (profesor, estudiantes y conocimiento por elaborar) y, en consecuencia, por formas específicas de proceder, de significar y de comunicar los saberes matemáticos.

Dado que en el aula habrán de desarrollarse experiencias matemáticas que permitan al estudiante pasar de sus creencias personales a las concepciones aceptadas como válidas en el contexto de la disciplina, el proceso de validación cobra un valor fundamental. Esto, por cuanto se convierte en un elemento regulador de los procesos desarrollados individualmente, con el propósito de generar convicciones y, en consecuencia, permitir eliminar ambigüedades en el proceso de elaboración colectiva del conocimiento matemático. Según Brousseau (citado por Margolinas, 1993) y Vergnaud (1996), la validación es una situación en la que se trata de demostrar la verdad de un enunciado o de una teoría y lograr la adhesión de un público a ese enunciado o teoría. Es importante señalar que el proceso de validación requiere elaborar explicaciones, que según Balacheff (citado por Margolinas, 1993) pueden ser una prueba o una demostración; es decir, no es suficiente realizar de comprobaciones empíricas para dar por válida una afirmación.

La aceptación de un proceso de validación en el aula la determina la estructura interna del saber elaborado o los factores externos, de orden socio-cultural. De este hecho surge la necesidad de considerar, en un estudio de este fenómeno, categorías de análisis que den razón del nivel de elaboración matemática presente en la validación y de categorías de análisis que permitan identificar formas de comunicación y de interacción que complementen ese proceso de validación.

Dadas las exigencias anteriores, en el análisis de los procesos de validación en el aula, consideramos la argumentación como un proceso complementario al de validación en dos sentidos: a) Al situar la validación en un contexto social, surge la necesidad de deliberar en forma razonada los procesos y procedimientos efectuados durante ésta, con el fin de determinar en ellos lo relativo a la verdad. Como resultado, se obtiene una dinámica de elaboración del saber matemático mediada por la exigencia de discurrir razonadamente todo lo que pretenda adquirir el status de válido o de verdadero. b) Por el propósito de persuadir o convencer a un auditorio. Así pues, además de la búsqueda de certezas acerca de un conocimiento matemático, a quien argumenta un proceso de validación se le exige contemplar al auditorio, en tanto que lo que ha elaborado como un saber matemático debe ser comunicado de manera convincente. En este sentido, se estaría aprovechando el contexto del aula en toda su dimensión, para propiciar la elaboración de un conocimiento que surge como el desarrollo de una experiencia matemática.

Según los planteamientos anteriores, la validación se convierte en la necesidad de llegar a una respuesta satisfactoria, ante una situación que se plantea como problemática. Así, el carácter de problema surge de la relación entre un enunciado o situación, un sujeto (estudiante) y un entorno (Charnay, 1990). Tal situación evidencia una dificultad, inicialmente para el individuo, y después termina por hacerse manifiesta para el grupo, de tal manera que se compromete todo un contexto en la solución del denominado problema.

Desde esta caracterización de problema, es evidente que su solución involucra procesos individuales y colectivos cuya finalidad es estructurar una solución válida para el problema. En este contexto de interacciones, no sólo de personas sino de saberes, cobra particular importancia la forma que adquiere el proceso argumentativo como complemento del proceso de validación. En tanto que validar en el aula necesariamente sitúa el proceso en un contexto social y por ello requiere de la confrontación, de la convicción y de la adhesión.

EL PROCESO ARGUMENTATIVO EN LA DINÁMICA DE LA VALIDACIÓN

Hablar de argumentación en un contexto general puede resultar ambiguo. En términos generales, tiende a creerse que significa *discutir, hablar más que los otros*, o *tener más razones para exponer*. Tal como asumiremos la argumentación en este trabajo, argumentar no se describe con las acciones anteriores. Del trabajo de Perelman et al. (1988), deducimos que argumentar es *"intentar convencer o persuadir, en forma razonada, a otro de las tesis que se tienen por ciertas"*. De esta definición, colegimos que la argumentación como práctica comunicativa se sustenta en tres principios fundamentales: el carácter dialógico de sus interacciones verbales con fines convincentes; el carácter razonable y razonado de sus procesos discursivos; y el nivel de convicción personal frente a lo argumentado.

En consecuencia, la práctica argumentativa se convierte en una situación de comunicación en la que coexiste la pluralidad de valores, pero con la obligación de discurrir de manera "razonable", con miras a lograr acuerdos altamente cohesionados, coherentes, pertinentes y adecuados con respecto a una situación o a un conocimiento en particular.

Para el presente trabajo, en el contexto de la validación, la argumentación, se ha caracterizado como un proceso desarrollado en distintas fases y estructurado de manera individual y colectiva. Así, se han determinado tres fases que constituyen el proceso argumentativo global: de formulación de argumentos, de confrontación y análisis de argumentos, y de consolidación de argumentos. La primera fase la constituyen el desarrollo y la presentación de soluciones individuales; estas soluciones se convierten en argumentos iniciales. La segunda fase es el efecto inmediato de la anterior en el proceso argumentativo. Pretende establecer el "contacto intelectual" (entre parejas de estudiantes) a través del estudio y la confrontación de las soluciones, con el objeto de aceptar o rechazar soluciones, elaborando para ello nuevos argumentos, que se han denominado de transición. La tercera fase consiste en el establecimiento de conclusiones, por lo que se pretende obtener acuerdos de manera colectiva, con el fin de estructurar la solución más adecuada para el problema. Los argumentos que surgen en esta etapa son el producto del proceso argumentativo y adquieren el status de argumentos finales. Esta última fase permite consolidar el conocimiento que el grupo acepta como válido.

Desde la perspectiva del análisis del proceso antes descrito, observamos que un argumento es, en este contexto, la estructuración de un enunciado con el esquema de premisa-explicación (garantía)-conclusión (Toulmin, 1979 citado por Calderón & León, 1996), elaborado con el fin de convencer o persuadir a un auditorio. En consecuencia, un recurso argumentativo se definirá como una estructura significativa de orden discursivo elegida en un contexto argumentativo para consolidar las garantías y constituir el argumento.

En este estudio hemos identificado dos tipos de recursos argumentativos: matemáticos y discursivos, en función del papel que desempeña la argumentación como complemento de la validación. Llamaremos recurso matemático al sistema conformado por procesos, representaciones y registros que dan cuenta del nivel de elaboración matemática de la solución y que generan adhesión. Al respecto, establecemos aquí dos categorías: recursos por influencia interna y recursos por influencia externa, de acuerdo con la manifestación o no de garantías matemáticas relacionados con el conocimiento a validar. Llamaremos recurso discursivo a la forma verbal elegida para expresar el proceso realizado, con el ánimo de ganar la adhesión del interlocutor.

ASPECTOS METODOLÓGICOS

Población: El estudio se realizó con dos poblaciones: 12 estudiantes de primer semestre de pregrado y 12 estudiantes de primer semestre de posgrado en Educación Matemática. Las observaciones se realizaron en un curso de pregrado denominado "Estilos de razonamiento en matemáticas" y en un curso de posgrado denominado "Lenguaje y matemáticas". Se proporcionó a los estudiantes el siguiente problema:

"Se llena una tabla compuesta por ***P*** *filas y* ***Q*** *columnas con los números naturales de 1 hasta* ***PQ.*** *Los números se escriben en orden ascendente, de izquierda a derecha, a lo largo de la primera fila, luego a lo largo de la segunda fila, etc. El número 20 se encuentra en la tercera fila, el 41 en la quinta y el 103 en la última. Hallar* ***P*** *+* ***Q****." (tomado de Olimpiadas matemáticas. Santa Fe de Bogotá: Universidad Antonio Nariño, 1993).*

Este problema está clasificado como adecuado para los niveles de 6° a 8° grados de formación básica y se eligió considerando que los estudiantes de pregrado terminaban el ciclo de formación básica. Con la población de pregrado, se propuso en una dinámica de aula estructurada como sigue: solución individual, solución por parejas y plenaria. Se le propuso la misma dinámica a la población de posgrado; adicionalmente se exigió, como efecto de la plenaria, elaborar un escrito que pretendiera convencer al posible lector de la validez de la solución.

Instrumentos de recolección de datos: Dado que el interés del estudio es identificar recursos argumentativos manifestados por los estudiantes en el proceso de interacción argumentativa, se optó por privilegiar el análisis de las interacciones de pareja para el caso de los estudiantes de pregrado y la interacción por escrito para el caso de los estudiantes de posgrado. Estas interacciones constituyen la génesis de los procesos argumentativos en función de la validación de las soluciones desarrolladas en forma individual. Así pues, el proceso de recolección de datos se realizó en pregrado mediante la grabación en audio de las interacciones de pareja y la elaboración de protocolos a partir de la observación no participante de una de las investigadoras; y en posgrado, con la recogida de artefactos constituidos por las representaciones escritas de las soluciones individuales.

ANÁLISIS DE DATOS Y RESULTADOS OBTENIDOS

Los datos recolectados se procesaron con dos criterios: a) proceso argumentativo oral, que permitió identificar tipos tanto de argumentos empleados como de recursos manifestados durante la argumentación de las soluciones, y b) proceso argumentativo escrito, cuyo resultado fue la caracterización de recursos argumentativos escritos. Para identificar tipos de argumentos empleados, se reconstruyeron secuencias argumentativas producidas por los estudiantes durante el trabajo en parejas. Además, se consideró todo el proceso de validación como una misma secuencia argumentativa que constituye la estructura argumentativa global, en la que se pudieron identificar argumentos iniciales, de transición y finales.

Para identificar recursos argumentativos de validación, se tomaron los diferentes tipos de argumentos que se manifestaron durante las tres fases: 1) de presentación de soluciones individuales, que constituye la elaboración de los argumentos iniciales, 2) de estudio de soluciones, que se convierte en la generación de argumentos de transición y 3) de conclusiones en las que se elaboran los argumentos finales, que corresponden a los acuerdos obtenidos por la pareja y que luego constituirán el argumento del pequeño grupo para ser argumentado en plenaria general. Con los argumentos identificados, se conformaron unidades de datos que por similitud, bien sea en el tipo de elaboración matemática o por el tipo de expresión discursiva, manifestaban el uso de un recurso. El resultado de este proceso permitió obtener una tipificación de recursos que se utilizó para clasificar el tipo de recursos manifestados en los textos argumentativos escritos por los docentes.

A continuación se presenta una sistematización de los tipos de argumentos identificados en relación con los recursos manifestados.

ARGUMENTOS INICIALES DE VALIDACIÓN

TIPO DE RECURSO IDENTIFICADO	CARACTERIZACIÓN DEL RECURSO	EJEMPLOS
MATEMÁTICOS **Por influencia externa:** Ritual procedimental	La validez de la solución se apoya en el uso de un tipo de fórmulas y procedimientos considerados como matemáticos, pero desconectados de las relaciones matemáticas derivadas del problema. De alguna forma se hace uso de los datos del mismo.	$U = a + (n-1)r$ $20 = a + (3-1)r$ $41 = a + (5-1)r$ por la segunda ecuación: $r = \frac{20-a}{2}$ y reemplazo en la tercera ecuación: $41 = a + (5\text{-}1)\left(\frac{20-a}{2}\right)$ Despejando esta ecuación, obtenemos el valor de *a*.
Por influencia interna:		

Empírico tipo 1: perceptual	La solución se basa en el uso de imágenes mentales rudimentarias en las cuales no está presente la habilidad para anticipar o predecir resultados.	*La solución es 21:* *1 2 3 4 5 6 7 8 9* *10 11 12 13 14 15 16 17 18* *19* ***20*** *21 22 23 24 25 26 27* *28 29 30 31 32 33 34 35 36* *37 38 39 40* ***41*** *42 43 44 45* *46 47 48 49 50 51 52 53 54* *55 56 57 58 59 60 61 62 63* *64 65 66 67 68 69 70 71 72* *73 74 75 76 77 78 79 80 81* *82 83 84 85 86 87 88 89 90* *91 92 93 94 95 96 97 98 99* *100 101 102* ***103*** *104 105 106 107 108*
Empírico tipo 2	La solución se basa en imágenes mentales relacionadas con conceptos matemáticos que se asocian a las relaciones numéricas encontradas, pero aún no está presente la habilidad para anticipar y predecir resultados.	*"... Primero dividí el número de columnas en nueve... entonces comencé a llenar..., entonces la razón sería más nueve en cada columna... el número 103 lo divido en la razón para saber en qué fila me queda, pero [...] la división me resulta inexacta, o sea que el residuo [...] me dice que 103 va a estar en la siguiente fila en la columna cuarta. Entonces [...] tengo que son 12 filas y nueve columnas. Entonces [...] sumo 12 más nueve igual a 21".*
Por influencia interna: Empírico tipo 3	La solución se basa en imágenes mentales relacionadas con conceptos matemáticos que se asocian a las relaciones numéricas encontradas, pero se intenta acomodar tales relaciones a fórmulas con el fin de ganar un tipo de expresión considerado más matemático. Es necesario aclarar que el uso de la fórmula, en este caso, no simplifica la solución.	*"... deducimos que el nueve se saca por lógica. Primero que todo suponemos que el número es entero...; listo, en la tercera fila hay 27, en la quinta 45, entonces yo quiero saber en qué fila está el 103. Entonces, de acuerdo con esta fórmula: Nt = 9 + (n -1) 9* *103= 9 + (n – 1) 9* *n= 11,43* *me da once coma cuarenta y tres. Pero como estoy suponiendo que el número de filas y de columnas es entero, [...] la fila 11 no cabe. Entonces, ¿a cuál pasa? A la siguiente, la 12."*
DISCURSIVOS	Dan razón de la forma de presentación discursiva de la solución, según la intención del argumentador.	

Descriptivo	Presentación de pasos y procedimientos que se siguen para la solución del problema. Se pretende ganar la aprobación de la solución, visualizando al interlocutor el proceso realizado.	*"El proceso en sí básicamente es el mismo, pero en el mío no tengo nada de fórmulas. Entonces yo miro, yo pruebo a ver si cumple la regla de que el 20 queda en la tercera fila, de que el 41 en la quinta. [Me] da lo mismo, o sea, nueve columnas. Entonces comienzo: ubico el... en todas... en las dos columnas que va a haber, [...] empiezo a mirar que siempre se va dando una secuencia en las dos columnas; [...] en las columnas de los extremos, [...] en el uno y en el nueve, entonces comienzo a sumar hasta que me da."*

La fase de presentación de soluciones consolida dos clases de recursos argumentativos: los de influencia externa y los de influencia interna. Cuando predomina la influencia externa para la resolución de un problema, es evidente que los factores asociados a su solución están determinados, más por aspectos de tipo socio-cultural (valoraciones, creencias y rituales relacionados con el hacer matemático), que por las relaciones matemáticas que se derivan del problema.

Por lo que se refiere al uso de recursos por influencia interna, se manifiesta la necesidad de solucionar el problema con relaciones obtenidas de las condiciones que impone el enunciado. No obstante, en el caso del empírico perceptual, la estrategia manifestada en el recurso es efecto de una interpretación literal del enunciado del, por ejemplo, problema: "*Se llena una tabla…*" (los estudiantes proceden a llenar la tabla número por número). En general, los tres recursos de tipo matemático se presentan como apoyo a la solución, pero constituyen recursos iniciales débiles. En tanto fundamentan una entrada del auditorio a los elementos que hacen pertinente el proceso de solución, pero no a los que justifican la efectividad de los procesos a la solución. Este hecho se evidencia de manera coherente en el uso del recurso de tipo discursivo, pues éste se desarrolla como un proceso de reconstrucción de procesos elaborados (narración y descripción) correspondiente con la actividad matemática realizada. Veamos ahora qué tipo de recursos se emplean en la segunda fase de la validación y cómo se plantea su desarrollo.

ARGUMENTOS DE TRANSICIÓN EN LA VALIDACIÓN

TIPO DE RECURSO IDENTIFICADO	CARACTERIZACIÓN DEL RECURSO	EJEMPLOS
MATEMÁTICOS		

Por influencia externa: Autoridad	El carácter de verdad de la proposición se sustenta en razones externas al proceso derivadas de afirmaciones del profesor, de los libros o de alguien que goza de prestigio en el grupo.	*J.C. : "... Lo que pasa es que tú lo sacaste al azar de uno a nueve. Yo lo saqué de una base científica ..."* *L.F. : "... Aclarando que mi procedimiento es más sencillo."* *J.C. : "Pero sin bases científicas."*
Por influencia interna: Empírico tipo 4: inductivo	La verdad de un resultado se afirma después de verificarla para algunos casos.	*J. : "Mira para* ***P1.*** ***P1 = PQ*** *+ 9 y* ***PQ*** *= 1* ***P2 = PQ*** *+ 9 y* ***PQ*** *= 2* ***Pn = PQ*** *+ (n – 1) 9 y* ***PQ*** *=* ***n*** ***P1*** *= 1+ (1– 1) 9* ***P1*** *= 1* ***P2*** *= 2 + (2 –1) 9* ***P2*** *= 11* *En la fila ocho nos va a dar ocho* ***P8*** *= 8 + (8–1) 9* ***P8*** *= 71* *y* ***n*** *es igual a* ***s,*** *¿sí?"*
Empírico tipo 1: perceptual		*G. : "Sí, es un número muy grande..."* *A. : "pues se dificulta, se hace dispendioso... Entonces como una fórmula, como una fórmula para resolver el ejercicio. No importa el número de columnas y el número de filas, podemos encontrar el número."* *G. : "La fórmula, pero no utilizando la razón como dicha,... sino como número de columnas."* *A. : "¡No!, no utilizando como razón, utilizando el número de columnas para saber básicamente cuántas filas son."*

Enumeración de ambigüedades	Es un recurso que consiste en determinar, en una situación presentada, una pluralidad de interpretaciones que al ser tomadas simultáneamente, pueden generar estados de contradicción.	*R .: "¿Tú si crees que lo puedes hacer? ¿Sí? Porque mira, por ejemplo, que **R** es la razón, pero tú dices que la razón es **Y**. ¿Cuál sería la razón en ese problema?"* *R .: "¿Pero cuál sería?, o sea,¿cómo va aumentando en cada fila ?, ¿o sea que la razón puede ser el número de columnas ?..."* *R .: "Sí, pero es que ahí el problema nos está estableciendo eso: con los números naturales de uno hasta **PQ**...* *R. : "Por eso, si son los números naturales, entonces la razón de los números naturales en uno..."* *R. : "Por eso, y ¿ésa es la razón? No, ésa no es la razón... O sea, tú tienes una ecuación y no estableces qué es **A** ni tampoco qué es **R**."*
Ejemplificación	Determinación de casos que ilustran la pertinencia y validez del proceso, del concepto o de la situación argumentada. La enumeración de ejemplos permite reconocer la aplicabilidad del caso presentado con miras a la generalización.	*L.F. : "... Ya entendí eso, pero ¿en qué te basas para decir que éste es el número de columnas? ¿Eso es una regla?"* *R. : "No es una regla, pero se puede tomar para definición de números; o sea, mira, si tú coges el 144, el resultado de una tabla de multiplicar, y le sacas la raíz, es 12. En eso me baso para decir que es nueve."*
DISCURSIVOS		
Ejemplo	Como ilustración permite sostener una regularidad ya establecida; como modelo incitará a la imitación	*J.C. : "... ¿Estás segura? Si yo no hacía eso, ¿cómo podías saber?"* *L.F. : "Porque lo podrías hacer en la mente."* *J.C. : "Sí, por ejemplo, nueve por ocho es igual a 72, y eso no está aquí."* *L.F. : "Lo que no entiendo es ¿para qué te pones a hacer eso? ¿Para qué te pones a complicarte con eso?"* *J.C. : "Mija[1], es que esto sustenta que debe ser de uno a nueve y no de uno a 10. Esto lo sustenta porque yo no podía poner uno y ya, tenía que decir por qué."*

[1] El término "Mija" es usado en el español colombiano, en contextos muy familiares y corresponde a una inflexión de las palabras "Mi hija".

Explicativo	La producción discursiva está destinada a analizar la solución que se presenta como argumento, con el fin de hacer comprensible al interlocutor dicha solución y ganar, de esta manera, su adhesión. De ahí que se privilegia la presentación de razones y relaciones involucradas en la solución.	*J.C. : "Si tú te basas en las tablas de multiplicar te das cuenta que en una diagonal, que la diagonal aumenta de: uno, 11, 21..."* *L.F. : "De 10 en10."* *J.C. : "Sí, de 10 en10 y se empieza a partir del uno. Siempre hay una sucesión: 21, 31, 41, 51, 61, 71 y 81. Entonces hasta ahí, si seguimos, digamos 91, 111; de estos números vemos que el único que tiene mitad es81."* *L.F. : "¿Cuál es la mitad?"* *J.C. : "Es nueve. Nueve por nueve, 81."* *L.F. : "¿Ésa es la mitad de 81?"* *J.C. : "¡Ah, no!, la raíz cuadrada de 81. Sí, sacamos la raíz cuadrada de 81 y es la única exacta. Entonces, nueve es el número de columnas."* *L.F. : "Ya entendí eso."*
Comparativo	Consiste en establecer semejanzas o diferencias entre procesos, objetos o situaciones, con el fin de exaltar el argumento defendido en el proceso de argumentación. La comparación puede llegar a convertirse en prueba para lograr la adhesión.	*J.C. : "Yo sé que el mío es más sencillo que el tuyo..."* *L.F. : "... pero bueno, entonces según tú, el mío por qué es más rápido."* *J.C. : "Es que mija, el tuyo y el mío son lo mismo. Tú multiplicas nueve por tres y yo hago lo mismo. Tú lo hiciste por sucesión numérica y yo por sucesión aritmética."*
Autoridad	Significa emplear actos o juicios de una persona o de un grupo de personas como medio de prueba en favor de una tesis.	*L.F. : "Eso es lo que yo te digo que no puede ser."* *R. : "Exacto, por eso es lo que tú me estabas diciendo, que de la columna tú dices que A puede ser el primer término de la... Pero entonces, yo tengo el problema ya resuelto."* *L.F. : "¡Ay, ay!"*

Incompatibilidad	Consiste en establecer incongruencias en el sistema argumentativo presentado o entre dos aserciones de las cuales es necesario elegir una.	*L.F. : "veinte yo no sé debajo de quién está, 20 arriba de quién. Yo no sé, si a mí me dijeran que en la columna del uno, bueno, en la tercera fila está 20"* *R. : "Pero tú no lo estás haciendo por columnas, lo estás haciendo por filas. Tú trabajas con filas, no con columnas... Porque tú tendrías que establecer si vas a trabajar con filas o con columnas."* *L.F. : "La razón es uno pero tomándola por filas, y yo estaba tomándola por columnas."* *R. : "Sí, pero no hablaba nada de columnas en el problema. Ahí no dice por lo menos el número uno está en la columna cuatro..."*

La variedad de recursos argumentativos manifestados en la fase de transición es el efecto, bien de la influencia de los juegos de roles ya establecidos socio-culturalmente (por ejemplo, por instancias de autoridad), o bien por la necesidad de fortalecer en forma aritmética un argumento para garantizar el efecto de convicción en el auditorio (ver recurso empírico tipo 4).

Así, se manifiestan en fase los recursos que permiten que una nueva categoría se consolide, correspondiente dialécticamente con la validación: la refutación. Esta categoría surge de la toma de posición antagónica en el proceso argumentativo y genera recursos argumentativos, como la enumeración de ambigüedades.

En concordancia con la variedad de recursos argumentativos de tipo matemático, se manifiesta también una variedad de recursos discursivos cuya función es la validación. Por ejemplo, la explicación, la comparación y la autoridad son recursos que se complementan dialécticamente con los que están en función de refutación, como el de incompatibilidad.

En términos generales, esta fase resulta muy rica para el desarrollo de los recursos, gracias al surgimiento de la categoría *refutación*. Así se consolida la idea de que los recursos argumentativos cumplen funciones de validación o de refutación. Por último, desde la interacción discursiva se plantean las características propias de una situación de argumentación: la polémica.

ARGUMENTOS FINALES EN LA VALIDACIÓN

TIPO DE RECURSO IDENTIFICADO	CARACTERIZACIÓN DEL RECURSO	EJEMPLOS
MATEMÁTICOS		

Por influencia interna: Empírico tipo 1: Perceptual		*E. : "Entonces, ... se concluye que del primero que tiene que ser más de cinco, porque 41, bueno, sí, que 41 está ahí. Entonces, seis era muy poquito, siete también, ocho también, 10 se pasaba y nueve cumplía eso. [...] Entonces ya sabemos que es una constante, que los números de la columna nueve van a ser múltiplos de nueve. Entonces, para no ponerme a escribir número por número hasta llegar a 103, pues a qué un número múltiplo de nueve cercano a 103... Entonces, pues... también encontré que 108 es lo mismo que* ***P*** *por* ***Q****. Ya encontrando que 103 queda en la doceava fila y eso es todo".*
DISCURSIVOS Descriptivo Explicativo		*E. : "A ver, toca como organizarlo, primero para hallar que 20 queda en la tres y que 41 queda en la cinco; sí, fue haciéndolo como por lógica. Entonces, ... se concluye que del primero que tiene que ser más de cinco, porque 41, bueno, sí, que 41 está ahí."* *L.F. : "Vuélveme a explicar la primera parte."* *R.: "Sabíamos que en la primera fila tenía que ser un número menor de10."* *L.F. : "¿Por qué?"* *R. : "Porque si en la primera fila el último término es 10, en la segunda fila el último término es 20... Porque si no, no se cumple la tercera condición que en la tercera fila debe estar 20; los demás números sí cumplen la condición. Yo tomé ocho, no tomé nueve. En la primera fila, el último término es 24. O sea que sí se cumple que 20 esté en la segunda fila. Pero en la siguiente condición, el 41 debe estar en la fila quinta, entonces seguí en la cuarta fila, ... Entonces, tiene que ser mayor de ocho..."*

ARGUMENTOS DE VALIDACIÓN

RECURSOS	EJEMPLOS

MATEMÁTICOS	**Influencia interna**	
	Empírico tipo 1: perceptual	*La solución es 21:* *1 2 3 4 5 6 7 8 9* *10 11 12 13 14 15 16 17 18* *19* ***20*** *21 22 23 24 25 26 27* *28 29 30 31 32 33 34 35 36* *37 38 39 40* ***41*** *42 43 44 45* *46 47 48 49 50 51 52 53 54* *55 56 57 58 59 60 61 62 63* *64 65 66 67 68 69 70 71 72* *73 74 75 76 77 78 79 80 81* *82 83 84 85 86 87 88 89 90* *91 92 93 94 95 96 97 98 99* *100 101 102* ***103*** *104 105 106 107 108*
	Empírico tipo 2	*“Si el 20 está en la tercera fila y el 41 en la quinta fila, entonces deben existir nueve columnas. Ahora, el 103 se encuentra ubicado en la doceava fila.* *Todo lo anterior indica que existen nueve columnas y 12 filas, por lo tanto:* $\mathbf{P}$*= doce (12)* *ahora,* $\mathbf{P} + \mathbf{Q} = 12 + 9 = 21$*”* $\mathbf{Q}$*= nueve (9)*
	Empírico tipo 3	*“Para determinar el valor* $\mathbf{P}$ *y* $\mathbf{Q}$ *(número de filas y columnas) se tienen en cuenta las condiciones dadas en el problema, así:* *Para que 20 esté ubicado en la tercera fila:* $\mathbf{P} \times \mathbf{Q} \geq 20$ *O sea que:* $3 \times \mathbf{Q} \geq 20$*, donde* $\mathbf{Q} \geq 7$ *con* $\mathbf{Q}$ *número natural.* *Para que 41 esté ubicado en la quinta fila:* $\mathbf{P} \times \mathbf{Q} \geq 41$ *O sea que:* $5 \times \mathbf{Q} \geq 41$*, donde* $\mathbf{Q} \geq 9$ *con* $\mathbf{Q}$ *número natural.* *Si 103 hace parte de la última fila, se tendrá que:* $\mathbf{P} \times \mathbf{Q} \geq 103$***,*** *lo cual quiere decir que* $\mathbf{Q} \geq 9$*; por lo tanto, se tiene que* $9 \times \mathbf{P} \geq 103$*, donde* $\mathbf{P} \geq 12$*.* *Como los números naturales que conforman la tabla serán el 1 hasta* $\mathbf{P} \times \mathbf{Q} = 108$ *para que las condiciones del problema se cumplan en su totalidad, en conclusión, el número de filas es 12 (*$\mathbf{P} = 12$*) y el número de columnas es 9 (*$\mathbf{Q} = 9$*).* *Como el problema pidió determinar el valor de* $\mathbf{P} + \mathbf{Q}$*, se tiene entonces que* $\mathbf{P} + \mathbf{Q} = 12 + 9 = 21$***. El resultado anterior era lo que se quería comprobar.”***

DISCURSIVOS	Descripción	***Q*** *– Columnas* *“ 1 2 3 4 5 6 7 8 9 ¡* *10 11 12 13 14 15 16 17 18 ¡* *19 20 .... 27 ¡* *...................................... 36 ¡* *37 38 39 40 41 .... 45 ¡* ***P*** *– filas* *....................................... 54 ¡* *....................................... 63 ¡* *....................................... 72 ¡* *....................................... 81 ¡* *....................................... 90 ¡* *....................................... 99 ¡* *..................................... 108 ¡* *Se disponen los números naturales en orden ascendente y de izquierda a derecha en una tabla (mencionada en el enunciado), compuesta por* ***P*** *filas y* ***Q*** *columnas, como se muestra en la figura. En la primera fila se colocan los números del 1 al 9, en ...”*
	Explicación	*“Para determinar el valor* ***P*** *y* ***Q*** *(número de filas y columnas) se tienen en cuenta las condiciones dadas en el problema, así:* *Para que 20 esté ubicado en la tercera fila:* $\mathbf{P} \times \mathbf{Q} \geq 20$ *O sea que:* $3 \times \mathbf{Q} \geq 20$*, donde* $\mathbf{Q} \geq 7$ *con* ***Q*** *número natural.* *Para que 41 esté ubicado en la quinta fila:* $\mathbf{P} \times \mathbf{Q} \geq 41$ *O sea que:* $5 \times \mathbf{Q} \geq 41$*, donde* $\mathbf{Q} \geq 9$ *con* ***Q*** *número natural.* *Si 103 hace parte de la última fila, se tendrá que:* $\mathbf{P} \times \mathbf{Q} \geq 103$**,** *lo cual quiere decir que* $\mathbf{Q} \geq 9$*; por lo tanto, se tiene que* $9 \times \mathbf{P} \geq 103$**,** *donde* $\mathbf{P} \geq 12$*.* *Como los números naturales que conforman la tabla serán el 1 hasta* $\mathbf{P} \times \mathbf{Q} = 108$ *para que las condiciones del problema se cumplan en su totalidad, en conclusión, el número de filas es 12 (*$\mathbf{P} = 12$*) y el número de columnas es 9 (*$\mathbf{Q} = 9$*).* *Como el problema pidió determinar el valor de* $\mathbf{P} + \mathbf{Q}$**,** *se tiene entonces que* $\mathbf{P} + \mathbf{Q} = 12 + 9 = 21$*.* ***El resultado anterior era lo que se quería comprobar.”***

Vale la pena destacar un aspecto interesante en la fase final de la solución. No se consolidan nuevos recursos argumentativos, pero sí se eliminan los recursos por influencias externas y, en consecuencia, se consolida el recurso argumentativo de tipo matemático más fuerte de los surgidos hasta el momento: el empírico 4. Este hecho evidencia un cierto desarrollo de los procesos argumentativos en matemáticas, de una argumentación más retórica (convencer o persuadir por recursos externos como la autoridad social) hacia una argumentación más heurística (convencer o persuadir con recursos surgidos del ejercicio de solución fuerte del problema).

Por lo que se refiere al nivel de elaboración matemática de la solución, durante las tres fases es evidente que este proceso consolida una solución soportada por recursos de tipo empírico. En cuanto a la elaboración discursiva de la solución, predominan formas relacionadas con el principio narrativo del discurso: “*Lo que hicimos, y cómo lo hicimos*”, por lo que el proceso argumentativo se torna más en uno de relato que de justificación. De ahí que en la consolidación de la solución, se privilegien y se perfeccionen formas de “*Contar*” (narrar lo realizado) y se considere que esa ilustración justifica y valida la solución.

CONCLUSIONES

Dada la riqueza de los aspectos de tipo tanto matemático (cognitivo) como discursivo involucrados en el desarrollo de procesos de argumentación y validación de soluciones de problemas matemáticos, se optó por separar las conclusiones de este estudio, según el impacto, en dos componentes del aprendizaje matemático: el cognitivo y el discursivo. A saber:

1. Acerca de la concepción de problema y de resolución de problema

Los procesos desarrollados con las poblaciones evidenciaron que si el proceso argumentativo se realiza en forma escrita, la concepción de problema que emerge es la de *enunciado-pregunta* y, en consecuencia, la concepción de solución consiste en formular una respuesta a la pregunta del enunciado. De ahí que el esfuerzo que hace el estudiante se limite a responder la pregunta, sin que se pueda observar con claridad el proceso de validación desarrollado.

Para el caso de la elaboración de argumentos orales, la naturaleza del problema la conforma la terna: *situación-sujeto-contexto*; de ahí que la solución no se restrinja a elaborar una respuesta sino a buscar alternativas de solución que garanticen el carácter de claridad, concisión, adecuación y, en consecuencia, de menor ambigüedad.

2. Acerca de la relación argumentación-validación

a. Cuando el auditorio está presente, la argumentación se convierte en un proceso complementario a la validación, porque, por una parte, responde a la necesidad del sujeto de comunicar y de obtener la adhesión a su producción; por otra parte, surge la necesidad de asegurar la veracidad de la solución propuesta, como efecto de un análisis razonado de tipo colectivo.

Desde el punto de vista de la manifestación de recursos argumentativos de tipo matemático, se observó que si bien los recursos iniciales en su mayoría fueron empíricos y de influencia externa, el trabajo de parejas permitió modificarlos, en busca de mayores niveles de elaboración matemática. De esta manera, se eliminaron los de influencia externa, y aparece la necesidad de usar recursos de tipo analíticos.

En cuanto a la manifestación de recursos discursivos, se observó el predominio de recursos descriptivos en las etapas iniciales, con una evolución hacia el uso de recursos explicativos en las otras dos fases del proceso argumentativo. Este hecho permite establecer una relación entre concepción matemática desarrollada y proceso discursivo elegido para su argumentación. Así pues, soluciones empíricas realizadas con el criterio de "más evidentes", convencerán más a medida en que se describan o se expliquen (qué se hizo o cómo se hizo), por lo que este criterio es *suficiente* para convencer. En menor medida se identificaron recursos comparativos, de autoridad y de incompatibilidades, sobre todo en la fase de transición (estudio de soluciones).

b. Cuando el auditorio no está presente, parece surgir el caso de la "argumentación para uno mismo" (Perelman, 1988). En este sentido, la validación constituye un paso previo a la elaboración escrita de argumentos. De ahí que, en la presentación escrita realizada por los maestros de la muestra, no se puedan identificar con claridad los procesos de validación realizados para generar la solución que consideran más adecuada y convincente.

Si bien la presentación de soluciones revela la existencia de la estructura argumentativa, difícilmente se evidencia que estos argumentos estuvieron pensados en función del auditorio. Se observa que el criterio de implícito orienta la producción discursiva, pues se asume que el lector sabe cuáles son los pasos o las razones para realizar procedimientos que conllevan a la solución obtenida. En consecuencia, en la elaboración de los argumentos (escritura de soluciones) predomina más la representación matemática que la producción discursiva.

En cuanto a la manifestación de recursos argumentativos de tipo matemático, se observa una variedad de recursos por influencia interna, desde los empíricos hasta los analíticos. En este sentido, parece que la exigencia de la escritura permite desarrollar mayores niveles de elaboración matemática. Con respecto a los recursos discursivos se identificaron, de manera predominante, los de tipo descriptivo y explicativo; este hecho parece obedecer al criterio de “mostrar” el proceso realizado y considerarlo suficiente para convencer.

BIBLIOGRAFÍA

Arsac, G. (1988). Les recherches actualles sur l’aprentissage de la demostration les phénomenes de validation en France. *Recherches en didactique des mathématiques 9*(3), 247-280.

Balacheff, N. (1996). *Aprender la prueba: un problema de enseñanza. Pequeña introducción a la teoría de las situaciones didácticas*. Grenoble, Francia: Centre National de la Recherche Scientifique Laboratoire Leibniz.

Calderón, D. & León, O. L. (1996). *La argumentación en la construcción del conocimiento matemático en el aula: una oportunidad para la diversidad*. Santa Fe de Bogotá, Colombia: Universidad Externado de Colombia.

Charnay, D. (1990). La resolución de problema. En I. Sáenz (Ed.), *Didáctica de las matemáticas*. Barcelona, España: Paidós.

Chazan, D. (1993). *High school geometry students justification for their views of empirical evidence and mathematical proof*. Netherlands: Kluwer Academic Publisher.

Coe, R. & Ruthven, K. (1994). Proof practices and constructs of advanced mathematics students. *British Educational Research Journal 20* (1).

Dolz, J. (1993). ¿Qué es argumentar? *Cuadernos de pedagogía (216, julio- agosto)*. Barcelona, España: Fontalba 1.

Harel, G. (1996). Proof Schemes. En R. Luengo (Ed.), *Memorias del ICME-8* (Congreso Internacional de Matemática Educativa), T. G. 8. Sevilla, España.

Margolinas, C. (1993). *De la importancia de la verdad y la falsedad en la clase de matemáticas* (pp. 27- 97). París, Francia: La pensée Sauvage Editiones.

Perelman, Ch. & Olbrech–Tyteca, L. (1988). *Tratado de la argumentación*. Barcelona, España: Gredos.

Revista Comunicación, Lenguaje y Educación CL&E. (1994). Enseñar a argumentar. Madrid, España: Edisa,

Shoenfeld, A. (1992). Learning to Think Mathematically: Problem solving, metacognition and sense making in mathematics. En D. Grouws, (Ed.). *Handbook of research on mathematics teaching and learning*. Nueva York, EE. UU.: MacMillan Publishing Company.

Vergnaud, G. (1996). *El niño, las matemáticas y la realidad*. México: Trillas

Las autoras:

Olga Lucía León Corredor
Universidad del Valle. Cali, Colombia
E-mail: olgaluc@col1.telecom.com.co

Dora Inés Calderón
Universidad del Valle. Cali, Colombia.
E-mail: doracald@colomsat.net.co