Revista Latinoamericana de Investigacion en Matematica Educativa
Comité Latinoamericano de Matemática Educativa
relime@mail.cinvestav.mx
ISSN (Versión impresa): 1665-2436
MÉXICO

2001
Giorgio Tomaso Bagni
LA INTRODUCCIÓN DE LA HISTORIA DE LAS MATEMÁTICAS EN LA ENSEÑANZA DE LOS NÚMEROS COMPLEJOS. UNA INVESTIGACIÓN EXPERIMENTAL DESEMPEÑADA EN LA EDUCACIÓN MEDIA
Revista Latinoamericana de Investigacion en Matematica Educativa, marzo, año/vol. 4, número 001
Comité Latinoamericano de Matemática Educativa
Distrito Federal, México
pp. 45-61

Red de Revistas Científicas de América Latina y el Caribe, España y Portugal
Universidad Autónoma del Estado de México
http://redalyc.uaemex.mx

Relime Vol. 4, Núm.1, marzo, 2001, pp.45-61

La introducción de la historia de las matemáticas en la enseñanza de los números complejos. Una investigación experimental desempeñada en la educación media superior

Giorgio Tomaso Bagni

RESUMEN

En este documento se examina la efectividad de la introducción de los números imaginarios, mediante un ejemplo histórico, al aplicar una prueba a estudiantes de preparatoria con edades entre 16 y 18 años. Se verificó la historia de los números imaginarios en uno de los pasos (de acuerdo con una solución ideada por Bombelli, como aparece en su obra: *Álgebra*, publicada en 1572) de una ecuación cúbica, y el resultado de una ecuación de segundo grado (cuadrática) para saber si es aceptada o rechazada por los estudiantes. Concluimos que, en el ámbito de la Matemática Educativa, los efectos de las selecciones que hace un profesor deberán ser verificados de manera experimental: la presencia de esta área experimental refuerza el uso de la historia de las matemáticas, al mismo tiempo que cambia los lineamientos de la investigación educativa y brinda un estado epistemológico particular.

ABSTRACT

In this paper the effectiveness of the introduction of imaginary numbers by an historical example is examined by a test (High School, pupils aged 16-18 years). We verified if the presence of imaginary numbers in a passage (according to a resolution by Bombelli, from *Algebra*, 1572) of a cubic equation and in the result of a quadratic equation is accepted or refused by pupils. We conclude that, in the sphere of Mathematics Education, effects of teacher's choices must be experimentally verified: the presence of this experimental sphere reinforces the use of history of mathematics, changes the outlining of the educational research and gives it a particular epistemological status.

RÉSUMÉ

Le document ci-joint examine le caractère effectif de l'introduction des nombres imaginaires par le truchement d'un exemple historique au moment de faire passer une épreuve aux étudiants de baccalauréat de l'âge de 16 à18 ans. On a vérifié l'histoire des nombres imaginaires dans une des étapes (d'accord à une solution pensée par Bombelli, telle qu'elle apparaît sur son ouvrage *Algèbre*, publié en 1572) d'une équation cubique, et le résultat d'une équation de deuxième degré (quadratique), pour savoir si c'est acceptée ou rejetée par les étudiants. On a conclu que, dans ce qui concerne à la Mathématique Éducative, les effets des choix que le professeur fait devront être expérimentalement vérifiés: la présence de ce domaine expérimental renforce l'utilisation de la histoire des mathématiques, au même temps qui change les linéaments de la recherche éducative et offre un état épistémologique particulier.

RESUMO

Neste documento analísa-se a efectividade da introducção dos números imaginários, baseando-se mum exemplo histórico ao fazer uma prova aplicada a estudantes da preparatoria, cujas idades oscilan entre os 16 e os 18 anos. Se verificou a historia dos números imaginarios, num dos passos de acordo a uma solução ideida de Bombelli, como se reflexa na sua obra: *Algebra* publicada em 1572) duma ecuação cúbica, e o resultado duma ecuação de segundo grau (quadrática), para saber se é aceite ou reprovada pelos estudantes. Chegou-se a conclusão de que, no âmbito da Matemática Educativa, os efeitos das seleções que faz um professor deverão ser experimentalmente verificados; a presença de esta área de

---

Núcleo de Investigación en Didáctica de la Matemática, Departamento de Matemática, Universidad de Bolonia (Italia)

VERSIÓN PRELIMINAR

experimentos, reforça o uso da história das matemáticas, ao mesmo tempo que muda as linhas traçados da pesquisagem educativa e nos oferece um estado epistemológico particular.

1. LA *DIVULGACIÓN DE LA IDEA* EN LA DIDÁCTICA EN LAS MATEMÁTICAS

La didáctica de las matemáticas, como *divulgación de la idea,* constituye una noción difundida e importante (existe un tratado sobre la denominación: D'Amore & Frabboni, 1996, pp. 90-97). Según tal formulación, el alcance de la investigación didáctica es, en primer lugar, lo que elevará el nivel de la calidad en la enseñanza. Después de lo cual, siempre se encontrará un mejoramiento del aprendizaje y, por consiguiente, de los resultados que los alumnos obtengan.

La noción en la didáctica de las matemáticas como *divulgación de la idea* ha aportado resultados relevantes en tiempos más o menos recientes (se observan mediante una presentación histórica y epistemológica, véase Pescarini, 1995). Muchos investigadores que operan en el medio han indicado las múltiples posibilidades concretas de mejorar de manera notable la enseñanza, a través de propuestas innovadoras y exitosas, basadas en cuidadosas actividades. Quisiéramos señalar, por ejemplo, a Weil, (1980); Swetz, (1989 y 1995); Fauvel, (1990 y 1991) Nobre, (1994); y Calinger, (1996).

La presentación de razonamientos matemáticos que provienen de referencias tomadas de la historia de esta disciplina, ha podido situarse dentro de esta disposición de la didáctica. Tal como dijeron Fauvel y van Maanen: "*como en todo proyecto educativo, lo que la historia de las matemáticas tiene como intención, venir a ser como un componente de la enseñanza de las matemáticas que implica una expectativa más o menos explícita en términos de lograr un mejor aprendizaje. La investigación sobre el uso de la historia de la matemática en la enseñanza es entonces una parte importante de la investigación en la didáctica de las matemáticas"* (Fauvel & van Maanen, 1997, p. 8).

Con respecto a la introducción de la historia de la matemática en la didáctica, se conjuntan múltiples cuestiones que todavía están en debate. En relación con el aspecto metacognositivo, Furinghetti y Somaglia reconocen "*...dos niveles de trabajo en la introducción de la historia aplicada a la didáctica: a uno se le puede asociar con una imagen 'social' de la matemática, y al otro, que corresponde más bien a una imagen 'interna' de la misma. El primer nivel se refiere a todo lo que intervenga y brinde motivación para estudiar matemáticas mediante la contextualización del ámbito social (geográfico, histórico, comercial, lingüístico) […]. El segundo nivel es aquello que recupera […] la dimensión cultural de la matemática como método, incluso estando en estrecha conexión con métodos de trabajo propios de otras disciplinas*" (Furinghetti & Somaglia, 1997, p. 43).

En conclusión, podríamos afirmar, utilizando la terminología atribuida a Chevallard (1985), que la historia de la matemática es un medio que encuentra su uso en la *transposición didáctica*.

2. LOS NÚMEROS IMAGINARIOS: SOBRE LA CUESTIÓN DE LAS INCOHERENCIAS

En el presente trabajo trataremos un argumento clásico del programa de preparatoria (alumnos de 16 a 18 años de edad) y otro de la *licenciatura en matemáticas* que pudo ser útilmente introducido, mediante el apoyo de referencias históricas. (Por lo que respecta a las cuestiones didácticas que le unen a la licenciatura en matemáticas, véase el ejemplo de Cantoral, 1998).

La introducción de los números imaginarios es una fase delicada del programa de preparatoria. En los cursos de matemáticas de secundaria y del primer año de preparatoria, los alumnos han confirmado con frecuencia la imposibilidad de extraer la raíz cuadrada a los números negativos; además, cuando a estos mismos alumnos se les pide luego aceptar la presencia de un nuevo objeto, el símbolo "$\sqrt{-1}$", al cual se le asigna la denominación i, esta

VERSIÓN PRELIMINAR

situación no pudo dejar de causar perplejidad.

Es evidente que una situación semejante pudo constituir una fuente de incertidumbre en el pensamiento de muchos estudiantes, quienes por lo regular deben utilizar (por ejemplo, en operaciones y problemas) un objeto matemático, que antes habían considerado ilícito y, por tanto, no utilizable. A fin de afrontar tal eventualidad, observamos que es necesario adoptar un criterio cauteloso para evitar formarnos concepciones falsas y peligrosas; por supuesto, la no tan nueva idea de esta conciencia desempeña un papel crucial en el desarrollo del conocimiento (Tsamir & Tirosh, 1997). Aún es oportuno especificar que no basta sentar dos afirmaciones contrastantes para que los estudiantes desarrollen la conciencia de una situación incoherente (y con ello la necesidad de un adecuado cambio de idea). Muchas investigaciones han evidenciado que la percepción de más elementos cada vez así como sus conflictos recíprocos, no siempre resultan problemáticos en la percepción de la situación (Schoenfeld, 1985; Tirosh, 1990). Por tanto, "desde el punto de vista de los estudiantes, las incoherencias presentes en un sistema pueden ser lícitas" (Tsamir & Tirosh, 1997).

Con el presente trabajo no desearíamos aventurarnos en la delicadísima cuestión del manejo correcto de las incoherencias por parte del alumno y del profesor (recordemos que ello puede ser objeto de mayores investigaciones) ni con relación al contrato didáctico en particular, instaurado entre alumno y profesor (Brousseau, 1987; Chevallard, 1985). Por otra parte, nos limitaremos a señalar dicha problemática, teniendo en mente que considerar la evolución histórica de un concepto quizá contribuya a poner en evidencia (y con toda probabilidad encararnos con eficacia) el problema de tales incoherencias.

3. LA HISTORIA DE LAS MATEMÁTICAS Y LOS NÚMEROS IMAGINARIOS

A continuación nos ocuparemos, desde el punto de vista histórico, de la resolución de ecuaciones de tercer grado, resaltando a Gerolamo Cardano (1501-1576: en lo que se refiere a las soluciones complejas citadas en el capítulo XXXVII de *Ars Magna*, 1545, a las cuales se ha dedicado mucha bibliografía, por ejemplo: Franci & Toti Rigatelli, 1979; Kenney, 1989) y a Nicolò Fontana, llamado Tartaglia (1500-1557): *Quesiti et invenzioni diverse* (*Problemas e inventos diversos*, 1546); la disputa respecto a la prioridad cronológica de la solución es muy notable: (Enriques, 1938; Smith, 1959, p. 206). También, Rafael Bombelli (1526-1573) es uno de los protagonistas de la historia del álgebra. El título completo de su obra maestra es: *Algebra, divisa in tre libri, con la quale ciascuno da sé potrà venire in perfetta cognitione della teoria dell'Aritmetica* (*Álgebra, dividida en tres libros, con la cual cada quien podrá llegar a un conocimiento perfecto de la teoría de la Aritmética*); el tratado fue publicado en dos ediciones (idénticas) tanto en 1572 como en 1579.

El papel de Bombelli fue decisivo en lo que concierne a la simplificación de radicales (Kline, 1972): en *Álgebra* encontramos, en efecto, ecuaciones de tercer grado que se resuelven con el procedimiento de Cardano, de *del Ferro* y de Tartaglia, que llevan los números no reales a un radical (aunque Cardano, "aun recurriendo a una cierta cautela verbal", había considerado situaciones de este tipo: Bourbaki, 1963, p. 91).

Por ejemplo, la solución de la ecuación (con metodología moderna) escrita:

a) $x^3 - 15x = 4$ Simplificando: $x^3 - 15x - 4 = 0$

se concluye con la suma de radicales (cuyos radicandos son no reales):

b) $x = \sqrt[3]{2+11i} + \sqrt[3]{2-11i}$

Se comprueba, al desarrollar los cubos de los binomios, que: $2 + 11i = (2 + i)^3$ y $2 - 11i = (2 - i)^3$; entonces, la solución en **R** de la ecuación dada es:

c) $x = (2 + i) + (2 - i) = 4$

VERSIÓN PRELIMINAR

[insertar IMAGEN1.TIF]

Figura 1: La portada del libro *Álgebra* de Rafael Bombelli (Bolonia 1579).

En la historia de las matemáticas, observamos que el acercamiento a las cantidades imaginarias no sucede a través de ecuaciones de segundo grado, por ejemplo:

d) $x^2 + 1 = 0$ Simplificando: $x^2 = -1$ entonces: $x = \pm i$

pero sí mediante la solución de ecuaciones de tercer grado; como veremos, la concepción de los imaginarios ha sido, desde el inicio, esencialmente operativa (Sfard, 1991).

La consideración de una (más complicada) ecuación de tercer grado presenta una evidente ventaja: el procedimiento resolutivo no se desarrolla por entero en el ámbito de los números reales, pero el resultado obtenido al final es real (como reales son todos los coeficientes de la ecuación asignada). Es posible una comprobación directa de la solución $x = 2$ en la ecuación (b) antes considerada (que lleva a la identidad en **R**: $4^3 - 15*4 = 4$), sin salir del ámbito de los números reales. En cambio, en la ecuación de segundo grado mencionada (d), el papel de i y de $-i$ parece relevante: el resultado de la ecuación (con coeficientes reales) es no real; su aceptación (por ejemplo, mediante una comprobación directa) requiere del conocimiento de los números imaginarios.

Desde el punto de vista histórico, recordemos que en el pasado el álgebra se consideraba esencialmente un medio para llegar a la respuesta exacta que debe atribuirse a un determinado problema planteado; por tanto, no hemos de maravillarnos particularmente de la aceptación por parte de Cardano y Bombelli, de la presencia de instrumentos como las cantidades imaginarias, por demás útiles para la determinación del resultado. Sin embargo, el peso del procedimiento en la didáctica actual (así como en las versiones del contrato didáctico que hoy se instauran en nuestras aulas) puede ser bien distinto: la resolución de una ecuación de tercer grado como la ya recordada puede contribuir de manera eficaz a que los alumnos acepten la presencia de los imaginarios. Una investigación reciente (Bagni, 1997) ha examinado el comportamiento de 97 estudiantes de tercero (16-17 años) y de cuarto de vocacional (17-18 años). Al momento del examen, en todas las clases se propusieron a los alumnos las soluciones de ecuaciones de segundo grado y de ecuaciones trinomias reconvertibles en ecuaciones de segundo grado mediante posiciones oportunas (del tipo $x^n = t$), pero aún no se habían introducido los números imaginarios.

[inserar IMAGEN2.TIF]

Figura 2: La página de *Álgebra* en que Bombelli enuncia las reglas multiplicativas para *pdm* (+*i*) y para *Mdm* (+*i*).

Mediante una prueba, preguntamos a los alumnos si estaban dispuestos a aceptar la resolución de las ecuaciones citadas, pero sin especificar una referencia precisa al valor numérico en particular obtenido, o bien el procedimiento resolutivo en su totalidad; así hemos querido verificar cuánto pudiera haber contribuido el valor numérico (evidentemente correcto) a la aceptación del procedimiento resolutivo (que prevé el uso de cantidades imaginarias).

En el caso de las ecuaciones (d) de segundo grado $x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x = \pm i$ sólo 2% de la muestra considerada afirmó aceptar la solución (92% afirmó no aceptarla; 6% fue indeciso). Inmediatamente después, la solución de la ecuación (a) de tercer grado $x^3 - 15x - 4 = 0 \Rightarrow x = \sqrt[3]{2+11i} + \sqrt[3]{2-11i} \Rightarrow x = (2 + i) + (2 - i) = 4$ fue aceptada por 54% de los alumnos (35% afirmó no aceptarla, y 11% estaba indeciso).

Entonces podríamos notar que, en efecto, la consideración de cantidades

VERSIÓN PRELIMINAR

imaginarias en los pasos del procedimiento resolutivo de una ecuación (*no* en el resultado) a menudo ha sido aceptada por los alumnos. Esta observación parece reforzar la posibilidad de aprovechar el ejemplo histórico antes referido, mediante una introducción didáctica a los números imaginarios.

Un examen a profundidad del ejemplo presentado arriba, induce a considerar algunos de sus límites, que pueden extenderse a la didáctica entendida como divulgación de la idea. Ilustrando las soluciones de una ecuación de tercer grado, habíamos supuesto que la reacción del alumno sería aceptar la presencia de cantidades imaginarias en los pasos del procedimiento de despeje. Luego, habíamos supuesto que tales admisiones después pudiesen motivarlo a aceptar la presencia de los números imaginarios para la solución o el despeje de la ecuación. Por tanto, las hipótesis de las reacciones de los alumnos son muchas.

En general el problema es éste: la utilización de procedimientos didácticos que resulten en la divulgación de la idea que nosotros teníamos respecto a la enseñanza a fin de mejorar la calidad. Sin embargo, ¿podríamos asegurar, *a priori*, el efecto que una enseñanza renovada tendrá sobre los estudiantes? En la mente de los educandos algunas reacciones son plausibles, más no obligatorias. Por eso, la equivalencia "mejor enseñanza" igual a "mejor aprendizaje" no puede sobreentenderse.

En síntesis, al actuar según el planteamiento ahora considerado, habíamos propuesto al alumno algunos apremios en el ámbito "histórico-anecdótico". Damos por aceptado que, e*n tal ámbito*, el estudiante "aprenda": el conocimiento así adquirido no debe empero quedar confinado exclusivamente al ámbito histórico-anecdótico (esto sería útil sólo en parte). Es necesaria una "transferencia" a ámbitos diversos, una posible utilización, por ejemplo, para la resolución de problemas, para la interpretación de ejemplos o para el aprendizaje de contenidos (Feldman & Toulmin, 1976; D'Amore, 1999).

La cuestión que podría limitar la eficacia de la didáctica entendida (únicamente) como divulgación de la idea, podría sintetizarse en la pregunta: *trabajando únicamente sobre la enseñanza, ¿estamos seguros de que tenga lugar efectiva y completamente el proceso indicado arriba?*

Tal cuestión merece una profundización adecuada: si utilizamos de nuevo la terminología de Chevallard (1985), la historia de las matemáticas puede emplearse con toda utilidad en la transposición didáctica del *savoir savant* (saber sabio) a la forma del saber, utilizado de manera efectiva en el proceso de enseñanza/aprendizaje.

Por lo que se refiere al *savoir savant*, partamos de la hipótesis de una visualización sencilla del desarrollo histórico de un concepto matemático, lo cual puede considerarse como una secuencia de (al menos) dos fases: una primera en la cual se percibe el concepto en forma intuitiva (o sea, instrumentalmente), y una segunda madura, estructural. Muchos siglos pueden dividir tales fases.

INSERTAR "DIAGRAMA 1.doc"

Desde el punto de vista didáctico, se puede sacar a colación de una situación análoga (Sfard, 1991): por supuesto, en una primera fase los alumnos se acercan de manera intuitiva a un concepto matemático, sin alcanzar una comprensión completa y desarrollada. Sólo en un segundo momento el aprendizaje se torna en mayor grado pleno y maduro. Luego podríamos unir al esquema anterior, y conservando el *savoir savant*, un esquema "paralelo" dentro del ámbito didáctico.

INSERTAR "DIAGRAMA 2.doc"

Existe una evidente analogía entre las dos situaciones aquí ilustradas: el paso dentro del ámbito

VERSIÓN PRELIMINAR

didáctico desde la fase inicial hacia la madura puede revelar en la mente de los alumnos, dudas y reacciones que podemos encontrar en el paso correspondiente dentro de la formación del *savoir savant*. Por supuesto, el proceso de enseñanza/aprendizaje tiene lugar hoy después de un pleno desarrollo del *savoir savant*, en lo que se refiere tanto a la fase inicial como a la madura; por consiguiente, la propia *transposition didactique* (transposición didáctica) que en un principio debe hacer posible un correcto conocimiento intuitivo, también puede basarse en los resultados recabados en la fase madura del desarrollo de *savoir savant*.

INSERTAR "DIAGRAMA 3 .doc"

Por lo que concierne a la introducción de los imaginarios, hemos juzgado oportuno examinar de nuevo la situación mediante un análisis experimental para controlar el impacto efectivo que los elementos citados, extraídos de la historia de las matemáticas, tienen sobre el aprendizaje de los alumnos. Por tanto, propusimos a los alumnos el mismo examen utilizado en la citada investigación (Bagni, 1997), *pero con las preguntas en orden inverso*. Como veremos de manera explícita al presentar la metodología de la investigación, esto permitirá evaluar la eventual aceptación por parte de los alumnos de la presencia de cantidades imaginarias, precedentemente introducidas según un ejemplo histórico.

4. INFORME DE LA INVESTIGACIÓN EXPERIMENTAL

4.1 Metodología de la investigación

Nuestra investigación se apoya en los resultados de un examen propuesto a 52 alumnos de 16 a 17 años de edad, pertenecientes a dos grupos de tercero del Liceo Científico en la Provincia de Treviso (equivalente a Escuela Vocacional). También participó un grupo de cuarto de la misma escuela (de 17 a 18 años), con un total de 21 alumnos (73 en total). En todos los grupos, al momento del examen se propuso a los alumnos las resoluciones de ecuaciones de segundo grado y de ecuaciones trinomiales recovertibles a ecuaciones de segundo grado, mediante posiciones oportunas (del tipo $x^n = t$), pero aún *no* se habían introducido los números imaginarios. Por tanto, con lo que respecta al programa desarrollado, los alumnos estaban en las mismas condiciones en las que se encontraban los estudiantes involucrados en la investigación citada (Bagni, 1997).

Subrayamos de nuevo que las fichas utilizadas coinciden en su totalidad, salvo en el orden en el que se suministraron, con las de la investigación antes referida (Bagni, 1997). En este caso, la pregunta esquiva la referencia directa al valor numérico obtenido (real y evidentemente correcto), o bien a todo el procedimiento resolutivo (en el que se emplean cantidades imaginarias).

En la investigación precedente: habíamos aclarado que no pocos alumnos habían aceptado la presencia de números imaginarios (en la segunda ficha propuesta, indicada como B, relativa a las ecuaciones de tercer grado) luego de haberla rechazado (en la ficha inicialmente propuesta, indicada como A, relativa a las ecuaciones de segundo grado).

En este nuevo examen: *la ficha 1 propondrá a los alumnos la resolución de una ecuación de tercer grado, mediante la cual podrán aceptar la presencia de cantidades imaginarias; la ficha 2 verificará si tal aceptación se mantendrá incluso en el caso de ecuaciones de segundo grado* (situación muy delicada: de hecho, los números imaginarios aparecen incluso en el resultado de la ecuación).

A cada alumno se le suministró, en un principio, el examen siguiente:

VERSIÓN PRELIMINAR

Ficha 1

En un antiguo libro encontramos las siguientes resoluciones de la ecuación:

$x^3 - 15x - 4 = 0$

Pensamos escribir una sola respuesta x en el modo siguiente:

$x = a - b$ (primera posición)

Sustituimos esta expresión en el texto de la ecuación y obtenemos:

$(a-b)^3 - 15(a - b) - 4 = 0$

$a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 - 15(a - b) - 4 = 0$

$a^3 - 3ab(a - b) - 15(a - b) - b^3 - 4 = 0$

$a^3 - (a - b)(3ab + 15) - b^3 - 4 = 0$

Si queremos que sea: $3ab + 15 = 0$, o bien, si escribimos:

$ab = -5$ Simplificando: $b = -5/a$ (segunda posición)

obtenemos la ecuación:

$a^3 - (-5/a)^3 - 4 = 0$

$a^6 - 4a^3 + 125 = 0$

Se trata de una ecuación trinomial, en la que si $a^3 = t$ puede escribirse como:

$t^2 - 4t + 125 = 0$

Despejando (con la fórmula resolutiva de las ecuaciones de segundo grado), resulta:

$t = 2 + \sqrt{4-125} = 2 + 11\sqrt{-1}$ o $t = 2 - \sqrt{4-125} = 2 - 11\sqrt{-1}$

Considerando el primer valor de t; obtenemos para a:

$a = \sqrt[3]{2 + 11\sqrt{-1}}$

Desarrollamos ahora el cubo siguiente (pensando que el cuadrado de $\sqrt{-1}$ sea -1):

$$\left(2+\sqrt{-1}\right)^3 = 2^3 + 3*2^2\sqrt{-1} + 3*2\left(\sqrt{-1}\right)^2 + \left(\sqrt{-1}\right)^3 = 8 + 12\sqrt{-1} - 6 - \sqrt{-1} = 2 + 11\sqrt{-1}$$

Siendo que para a podemos escribir:

$$a = \sqrt[3]{\left(2+\sqrt{-1}\right)^3} = 2 + \sqrt{-1}$$

Recordando la segunda posición y razonando, obtenemos:

$$b = -\frac{5}{a} = -\frac{5}{2+\sqrt{-1}} = -\frac{5\left(2-\sqrt{-1}\right)}{\left(2+\sqrt{-1}\right)\left(2-\sqrt{-1}\right)} = -\frac{5\left(2-\sqrt{-1}\right)}{2^2-\left(\sqrt{-1}\right)^2} = -\frac{5\left(2-\sqrt{-1}\right)}{4+1} = -2+\sqrt{-1}$$

Recordando la primera posición, una solución de la ecuación propuesta es:

$$x = a - b = \left(2+\sqrt{-1}\right) - \left(-2+\sqrt{-1}\right) = 4$$

Para comprobarla, sustituimos directamente en el texto, por lo que el primer miembro resulta:

$4^3 - 15*4 - 4 = 0$

Y es entonces igual al segundo. Por tanto, la solución $x = 4$ queda comprobada.

¿Consideras aceptable la solución antes descrita?

Escribe tu respuesta en la hoja anexa.

Se concedió a los alumnos 20 minutos para anotar sus propias observaciones.

Luego de haber recogido el modelo del examen 1, se suministró a cada alumno el examen 2:

VERSIÓN PRELIMINAR

Ficha 2
En un libro antiguo encontramos la siguiente solución a la ecuación:

$$x^2 = -1$$

Si el cuadrado de $\sqrt{-1}$ es –1, las soluciones de la ecuación son:

$$x = \sqrt{-1} \qquad \text{o bien} \qquad x = -\sqrt{-1}$$

¿Consideras aceptable la solución antes descrita?
Escribe tu respuesta en la hoja anexa.

Se concedió 10 minutos a los alumnos para anotar sus propias observaciones.

4.2 Resultados del examen

Las respuestas de los alumnos se subdividieron en las siguientes categorías:

Examen 1

Tipología de respuestas	Alumnos	Porcentaje
"Aceptable"	30	41%
"No aceptable"	18	25%
Inseguros	25	34%

Examen 2

Tipología de respuestas	Alumnos	Porcentaje
"Aceptable"	13	18%
"No aceptable"	48	66%
Inseguros	12	16%

Antes que nada, observamos que los resultados relativos a la ficha 1 pueden considerarse bastante análogos a los de la segunda ficha (indicada como B) de la investigación precedente (Bagni, 1997); en esta nueva investigación, la tendencia aparece con todo, menos neta, por ejemplo, son numerosos los inseguros. De los resultados de la ficha 2, una parte de los alumnos (18% del total) ha aceptado la presencia de $\sqrt{-1}$ en la ecuación de segundo grado (examinada *después* de la de tercer grado).

Particularmente interesante puede ser el resultado siguiente:

De 30 alumnos que contestaron "aceptable" en la ficha 1:

en la ficha 2	13 (43% de 30) respondieron "aceptable"
	14 (47% de 30) contestaron "no aceptable"
	3 (10% de 30) han dado una respuesta incierta (o ninguna)

Los resultados del examen efectuado ahora parecen indicar que el camino del aprendizaje sobre el que se formularon hipótesis *a priori* ha ganado lugar de manera efectiva en algunos alumnos (si bien el porcentaje de éstos aún es bastante bajo).

4.3 Entrevistas con los alumnos

Se ha invitado a algunos alumnos a justificar cuanto han escrito en el examen; en particular, se entrevistaron (individualmente) los 14 estudiantes que han afirmado aceptar la resolución de la ficha 1, pero no la de la ficha 2. A tales alumnos se les planteó la siguiente pregunta:

"¿Por qué acepté la presencia de $\sqrt{-1}$ en la ficha 1 y no acepté la presencia de $\sqrt{-1}$ en la ficha 2?"

VERSIÓN PRELIMINAR

Resumiendo el contenido de las respuestas de estos 14 estudiantes (11 de tercero y 3 de cuarto):

- Diez alumnos (71% de 14) notaron, de varias maneras, que el resultado de la ecuación de tercer grado (ficha 1) es real (en el curso del procedimiento resolutivo, la $\sqrt{-1}$ "se simplifica"), mientras que el de la ecuación de segundo grado (ficha 2) no es real.
- Dos alumnos han afirmado haber considerado por separado los ejemplos y haber decidido las respuestas sin confrontar los casos; dos alumnos no han dado justificación alguna.

Todo cuanto surge de las entrevistas confirma que únicamente algunos estudiantes han seguido la ruta de aprendizaje sobre la cual formulamos una hipótesis; pues sólo para algunos la consideración de los ejemplos tratados por la historia de la matemática ha llevado a las reacciones previstas. Para estos alumnos, la forma de enseñanza descrita con antelación ha llevado de manera efectiva a los resultados esperados. En otros casos, no obstante a las reacciones formuladas de manera hipotética por nosotros, en el comportamiento de los alumnos se sobreponen efectos determinados por las cláusulas del contrato didáctico (como la preponderante importancia atribuida con frecuencia al resultado). A veces, tales efectos conducen a obstáculos que reducen la eficacia de la iteración indicada.

5. LA HISTORIA DE LA MATEMÁTICA EN EL CRITERIO DE VERDAD DEL APRENDIZAJE

Para concluir, observamos que la propuesta de algunos episodios tratados por la historia de la matemática ha consentido la introducción de un argumento importante, pero que las reacciones hipotéticas en los alumnos han sido verificadas sólo en parte de los mismos.

Es obvio que la simple indicación de la resolución de una ecuación no sea suficiente para determinar el aprendizaje de los alumnos en términos claros y completos. No obstante, parece evidente desde el punto de vista cualitativo, que la simple propuesta de un reclamo histórico, aunque útil desde el punto de vista didáctico (incluso para estimular el interés de los alumnos y, por consiguiente, para suscitar o para reforzar una forma cualquiera de motivación: Furinghetti & Somaglia, 1997), *no es siempre suficiente para garantizar un pleno aprendizaje*, y ni siquiera la simple aceptación de un hecho (como la presencia de los números imaginarios en la resolución de una ecuación).

El límite de la didáctica de la matemática misma como divulgación de la idea, consiste entonces en la incertidumbre que permanece en los efectos sobre el aprendizaje de las selecciones con las que los profesores operan; y los efectos sobre el aprendizaje de los alumnos deben ser controlados *a posteriori*, mediante exámenes y entrevistas.

Cuanto se sabe hasta ahora no disminuye la importancia de la historia en la didáctica de la matemática, que queda a nuestro aviso notable (incluso, por ejemplo, en un contexto de "ingeniería didáctica"; limitamos esto para hacer referencia a tales cuestiones; por lo que respecta a las aplicaciones de la ingeniería didáctica, indicamos por ejemplo a Farfán, 1997); pero sugiere *la oportunidad de intervenir en la estructura y sobre los alcances de la investigación didáctica, agregándola como parte integrante de una verificación empírica que exprese de manera evidente los efectos sobre el aprendizaje de las selecciones operadas*. En verdad, la presencia de este aspecto experimental, que valoriza el empleo de referencias a la historia de la matemática, modifica el planteamiento de la investigación didáctica, y confiere a la misma un particular estatuto epistemológico (D'Amore, 1999). Una definición más detallada de tal estatuto podrá ser objeto de mayores investigaciones.

BIBLIOGRAFÍA

Bagni, G. T. (1997). Ma un passaggio non è il risultato... L'introduzione dei

VERSIÓN PRELIMINAR

numeri immaginari nella scuola superiore. *La matematica e la sua didattica 2*, 187-201.

Bombelli, R. (1966). *L'Algebra*. U. Forti & E. Bortolotti (Eds.). Milán, Italia: Feltrinelli.

Bourbaki, N. (1963). *Elementi di storia della matematica*. Milán, Italia: Feltrinelli (Eléments d'histoire des mathematiques. París, Francia: Hermann, 1960).

Brousseau, G. (1987), *Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques, Études en didactique des Mathématiques*. Université de Bordeaux I, IREM de Bordeaux, Francia.

Calinger, R. (Ed.) (1996). *Vita mathematica: historical research and integration with teaching.* Mathematical Association of America.

Cantoral, R. (1998). Teaching and learning in a technological environment: The case of undergraduate mathematics. *CRM-Notes*. Barcelona, España: Centre de Recerca Matematica del Institut D'Estudis Catalans.

Chevallard, Y. (1985). *La transposition didactique, du savoir savant au savoir enseigné.* Grenoble, Francia: La Pensée Sauvage.

D'Amore, B. & Frabboni, F. (1996). *Didattica generale e didattiche disciplinari*. Milán, Italia: Angeli.

D'Amore, B. (1999). *Elementi di didattica della matematica*. Bolonia, Italia: Pitagora.

Enriques F. (1938). *Le matematiche nella storia e nella cultura*. Bolonia, Italia: Zanichelli.

Farfán, R. M. (1997). *Ingeniería Didáctica. Un estudio de la variación y el cambio.* México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Fauvel, J. (1990). History in the mathematical classroom. *The IREM papers*. The Mathematical Association.

Fauvel, J. (1991). *For the learning of Mathematics (número especial) 11*, 2.

Fauvel, J. & van Maanen, J. (1997). Storia e didattica della matematica. *Lettera Pristem 23*, 8-13.

Feldman, C. F. & Toulmin, S. (1976). Logic and the theory of mind. En J. K. Cole (Ed.), *Nebraska symposium on motivation* 1975. Lincoln, EE. UU.: University of Nebraska Press.

Franci, R. & Toti Rigatelli, L. (1979). *Storia della teoria delle equazioni algebriche*, Mursia, Milán, Italia.

Furinghetti, F. & Somaglia, A. (1997). Storia della matematica in classe. *L'educazione matematica, XVIII, V, 2*, 1.

Kenney, E. (1989). Cardano: "Arithmetic Subtlety" and imposible solutions. *Philosophia Matemática, II, 4*(2), 195-216.

Kline, M. (1972). *Mathematical thought from ancient to modern times*. Nueva York, EE. UU.: Oxford University Press.

Nobre, S. (Ed.) (1994). *Meeting of the International Study Group on relations between History and pedagogy of Mathematics*. Blumenau, Brasil, 25-27 July, UNESP.

VERSIÓN PRELIMINAR

Pescarini, A. (1995). Dinamiche dell'educazione matematica. *Bollettino degli insegnanti di matematica del Canton Ticino 30*, 1-18.

Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical problem solving*. Nueva York, EE. UU.: Academic Press.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coins. *Educational Studies in Mathematics 22*, 1-36.

Smith, D. E. (1959). *A source book in Mathematics*. Nueva York, EE. UU.: Dover.

Swetz, F. J. (1989). Using problems from the History of Mathematics in classroom instruction. *Mathematics Teacher 82*, 370-377.

Swetz, F. J. (1995). To know and to teach: mathematical pedagogy from a historical context. *Educational Studies in Mathematics 29*, 73-88

Tirosh, D. (1990). Inconsistencies in students' mathematical constructs. *Focus on Learning Problems in Mathematics 12*, 111-129.

Tsamir, P. & Tirosh, D. (1997). Metacognizione e coerenza: il caso dell'infinito. *La matematica e la sua didattica 2*, 122-131.

Weil, A. (1980). History of Mathematics: why and how. En O. Letho (Ed.), *Proceedings of International Congress of Mathematicians* (pp. 227-236). Helsinki 1978, I.

El autor:
Giorgio Tomaso Bagni
Departamento de Matemática, Universidad de Roma “La Sapienza” (Italia)
E-mail: bagni@mat.uniroma1.it

VERSIÓN PRELIMINAR