Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa
Vol. 3, Núm.3, noviembre, 2000, pp. 245-264.

Formación del pensamiento algebraico de los docentes

Myriam Acevedo de Manrique*
María Falk de Losada**

RESUMEN

Bajo la premisa de que uno de los caminos fundamentales para incidir en la calidad de la educación matemática de los estudiantes de los niveles básicos es aportar elementos para enriquecer la formación de los docentes, y motivadas por un estudio que se adelantó para determinar la solidez del conocimiento algebraico de docentes en ejercicio, estudio en el que se reveló la existencia de una brecha que no permite que el dominio de conceptos avanzados se traduzca automáticamente en un trabajo más significativo en el álgebra escolar, se estructuró una propuesta de transformación en el enfoque de los cursos universitarios de álgebra para futuros docentes. La propuesta, descrita en este artículo, logra enlazar elementos de la formación pedagógica y la disciplinar para fortalecer ambas, empleando como estrategias la construcción cuidadosa de significado de conceptos algebraicos que incluye un examen de su evolución histórica, el estudio de los nexos, de los elementos y argumentos compartidos con otros dominios matemáticos, y el planteamiento de problemas singulares y de interrogantes que conllevan discusión e investigación. Todo lo anterior está plasmado en un texto que se está empleando en programas de formación docente, tanto en Colombia como en otros países de Sudamérica, con resultados positivos.

ABSTRACT

According to the premise that one of the basic ways to influence on the quality of the mathematical education of basic levels students is to improve the training of the teachers; and based on a study which was made to determine the strength of the algebraic knowledge of practicing teachers, which revealed a shortcoming preventing the mastering of advanced concepts to automatically translate into a more significant work in scholar algebra; a proposal for the transformation of the focus of university algebra courses for future teachers was written. The proposal, described in this article, manages to link elements of pedagogic and disciplinary training in order to strengthen both, using as strategy the careful construction of signification of algebraic concepts which include a study of its historic evolution, the study of the connections, of the elements and arguments shared with other mathematical fields, and the presentation of particular problems and questions involving discussion and research. All the above is expressed in a text which is being used in teaching training programs in Colombia as well as in other South American countries, with positive results.

* *Departamento de Matemáticas, Universidad Nacional de Colombia.*
** *Olimpiadas Colombianas de Matemáticas, Universidad Antonio Nariño.*

RÉSUME

En considérant la prémisse qu'une des manières fondamentales d'influencer la qualité de l'apprentissage des mathématiques des étudiants des niveaux de base est d'apporter des éléments pour améliorer la formation des professeurs, et motivé par une étude faite pour determiner la solidité des connaissances d'algèbre des professeurs en exercice, étude qui révèle l'existence d'un manquement qui ne permet pas que la maîtrise de concepts avancés se traduise automatiquement en un travail plus significatif en algèbre scolaire; une proposition de modification de l'approche des cours d'algèbre universitaires pour futurs professeurs a été rédigée. La proposition, décrite dans cet articie, arrive à lier des éléments de formation pédagogique et disciplinaire pour fortifier les deux, en employant comme stratégie la constructíon soigneuse de signification de concepts d'algèbre qui inclut une étude de son évolution historique, l'étude des rapports, des éléments et arguments partagés avec d'autres domaines de la mathématique, et l'étude de problèmes particuliers qui suscitent discussion et recherche. Ce qui précède est comprís dans un texte qui est employé dans les programmes de formation de professeurs, en Colombie ainsi que dans d'autres pays d'Amérique du Sud, avec des résultats positifs.

RESUMO

Dentro do pressuposto de que um dos caminhos fundamentais para influir na qualidade da educação matemática dos estudantes de níveis básicos é contribuir com elementos para enriquecer a formação do corpo docente, e motivada por um estudo prévio, realizado para determinar a solidez do conhecimento algébrico dos docentes em exercício, no qual foi revelada a existência de uma brecha que não permite que o domínio de conceitos avançados se traduza automaticamente num trabalho mais significativo da álgebra escolar, foi estruturada uma proposta de transformação do enfoque dos cursos universitários de álgebra para futuros professores. A proposta, descrita neste artigo, consegue vincular elementos de formação pedagógica e disciplinar, para fortalecer as duas, adotando como estratégias a construção cuidadosa do significado de conceitos algébricos, que inclui um exame de sua evolução histórica, o estudo dos seus nexos, dos elementos e argumentos compartilhados com outros domínios matemáticos e o levantamento de problemas singulares e de indagações que conduzem à discussão e à pesquisa. Tudo isto está registrado em um texto que está sendo usado em programas de formação docente, tanto na Colômbia quanto em outros países da América do Sul, com resultados positivos.

INTRODUCCIÓN

El trabajo de investigación que presentamos en este artículo se origina fundamentalmente en nuestra preocupación por la calidad en la formación de los docentes de Matemáticas para el nivel medio en nuestro país, pues consideramos que ésta, a pesar de algunos recientes intentos de renovación, acusa serias deficiencias; en la generalidad de los casos está basada en un híbrido mal logrado entre cursos de Matemáticas tradicionales (realmente poco profundos) y cursos (en general no óptimos) de pedagogía, didáctica, psicología, historia y filosofía de la educación. Desde nuestra perspectiva, una sólida formación del docente de Matemáticas debe generar un trabajo de profundización consciente que permita establecer nexos fundamentales entre los cursos universitarios que componen su formación y la matemática escolar, y debe proyectarse de manera natural hacia la construcción de estrategias metodológicas.

ANTECEDENTES

Nuestra experiencia de varias décadas en el trabajo con docentes en ejercicio así como en la enseñanza del álgebra abstracta a nivel universitario, nos ha permitido conocer tanto el trabajo de los docentes en sus aulas como la preparación algebraica que éstos reciben. Desde allí podemos concluir que la formación avanzada que reciben los futuros docentes de la básica en general no enriquece su enseñanza, sino que, como se ha documentado ampliamente (véase marco teórico) el docente retorna a su propia experiencia escolar como guía prioritaria de su ejercicio docente elemental.

Adicionalmente en los inicios del proceso investigativo exploramos aspectos específicos de la relación entre el conocimiento algebraico del docente y las formas en que pone este conocimiento al servicio de una mejor enseñanza.

Dicha exploración fue hecha a través de una consulta a docentes en formación y en ejercicio y tuvo en cuenta dos aspectos: el primero relacionado con su propio conocimiento algebraico, y el segundo con las formas en que transpone éste al aula de clase. En lo que sigue nos referiremos brevemente a la consulta.

En algunos se plantearon a los docentes preguntas abiertas referentes a situaciones hipotéticas de aula en las que se detectaron diferentes niveles de dominio conceptual así como diversas concepciones acerca del álge bra escolar. Por ejemplo, una situación sencilla como la siguiente:

Si usted piensa en construir un problema con los siguientes datos: “El producto de dos números enteros es -24 y una de las diferencias entre ellos es -1l”, una pregunta natural que surge es: ¿Cuáles son los dos números? ¿Qué otras preguntas y que tengan solución única, se pueden planear y responder con base en estos datos?

Suscitó en los profesores respuestas variadas, unas totalmente adecuadas (como cuál es el cociente de los dos números), otras parcial mente adecuadas (o bien por ser triviales o bien por no tener solución única), otras que muestran total falta de comprensión del enunciado y finalmente unas respuestas en las que se resuelve el problema (-3, 8 y -8, 3) sin responder realmente al cuestionamiento planteado, que pretendía explorar qué mas podía construir el profesor con base en la situación.

En otros apartes de la consulta se propusieron situaciones hipotéticas de aula en las que se exploran los nexos que el docente establece entre conocimientos del álgebra superior y problemas típicos del álgebra en la escuela secundaria. Un ejemplo se da a continuación:

En un examen de selección múltiple se pidió a los estudiantes caracterizar ciertas funciones polinomiales dadas. Un alumno caracterizó cada una de las funciones dadas de la siguiente manera:

(i) $p(x) = x^3 + x + 1$ no tiene ceros reales.

(ii) $q(x) = x^2 - 7x + 13$ tiene ceros reales porque el producto de éstos es positivo.

(iii) $t(x) = x^3 - 3x^2 - 27x - 7$ no puede factorizarse en los enteros porque 7 es un número primo,

(iv) $s(x) = x^4\text{-}2x^3\text{-}5x\text{+}2$ no se puede factorizar en los enteros porque no tiene ceros enteros.

(a) En cada caso decir si el estudiante está en lo correcto o no y dar razones para cada una de sus decisiones.

(b) En los casos en que usted opine que el estudiante está equivocado, intente explicar lo que estaba pensando el alumno y qué podría haber causado el error.

Especialmente interesantes resultaron las respuestas a las partes (i) y (iv) por los argumentos que usaron los docentes para justificarlas. En el primer caso, un 28% citó los teoremas apropiados para concluir que el estudiante estaba equivocado. Un porcentaje similar aplicó la división sintética con 1 y -1, para afirmar que el estudiante tenía la razón. El 22% de los docentes encuestados no contestó mientras que otro 22% afirmó que el estudiante estaba en lo correcto sin explicar por qué.

En cuanto a la parte (iv), tan sólo el 3% identificó el error del estudiante. El 97% contestó que el alumno tenía la razón, argumentando de nuevo con una incorrecta utilización de la división sintética. Esto es especialmente sorprendente dada la facilidad con que se puede factorizar la expresión, pues:

$$s(x) = x^4\text{-}2x^3\text{-}5x\text{+}2$$

$$s(x) = (x^2\text{+}x\text{+}2)\quad(x^2\text{-}3x\text{+}1)$$

Se puede inferir de ello que el docente no establece nexos entre la teoría de polinomios -que se supone conoce de sus cursos universitarios- y el álgebra de polinomios que se trabaja en la secundaria, limitándose a emplear herramientas, a menudo inapropiadas, que un estudiante de ese grado escolar tendría a su disposición.

MARCO TEÓRICO

Existe una amplía colección de estudios que se dirigen a problemas similares al que nos ocupa; daremos una breve discusión de los más pertinentes basada principalmente en la recopilación hecha por Catherine Brown y Hilda Borko (1992) y por Stephen 1. Brown, Thomas Cooney y Doug Jones (1990).

Meyerson (1977, 1978; Brown et al., 1990) reporta algún éxito con futuros docentes de la secundaria en la tarea de llevarlos a cuestionar su dependencia o costumbre de basarse en referencias a autoridades externas, no sólo frente a la matemática misma sino frente a métodos de enseñanza de la matemática, ha ciéndoles reflexionar sobre sus propias actividades de construcción de significado por medio de la introducción de la duda y la paradoja en situaciones matemáticas previamente incuestionadas.

La cuestión de cómo los docentes se comprometen en actividades de construcción de significado y cómo sus creencias acerca de la matemática y la enseñanza de las matemáticas pueden enriquecerse es algo que ha provocado gran interés en el campo de la educación matemática. Lappan, et al. (1988) se dirigen a esta cuestión y anotan que una presentación detenida de unidades específicas en un taller de dos semanas fue suficiente para enseñar unidades particulares a los docentes, pero que no fue suficiente para permitirles transferir las características presentes en esas unidades a otros apartes de los programas de estudio. Reportan que la transferencia y la integración requieren un programa sustancial a largo término (de al menos dos años) y que deben incluir apoyo intelectual y emocional, además de proporcionar materiales.

Concluye Brown (1990) que: "una visión amplia de la investigación en la tradición humanista muestra que se comienza a saber más acerca de cómo el docente construye significados... lo que estamos averiguando es qué tan poco se sabe acerca de cómo esta información puede afectar programas de formación de docentes de matemáticas".

En su revisión de la investigación relacionada con el proceso de volverse docente de matemáticas Catherine Brown e Hilda Borko (1992) sientan tres axiomas que responden en parte a las inquietudes expresadas por Povown, a saber:

l-. La buena enseñanza de las matemáticas puede ser identificada y descrita.

2-. El proceso de volverse profesor de matemáticas incluye componentes genéricos y específicos a la materia de la matemática misma (y que hay relativamente poca investigación que concierne a cuestiones específicas de esa ciencia).

3-. Volverse profesor de matemáticas es un proceso de toda la vida; los docentes comienzan a aprender acerca de la enseñanza mucho antes de iniciar su preparación "formal" y siguen aprendiendo a lo largo del desarrollo de sus carreras.

Shulman (1987; 1988) estudia el conocimiento de los profesores; su discusión del conocimiento acerca de la matemática se relaciona con la comprensión de la naturaleza de esa ciencia, de dónde proviene, cómo cambia, cómo se establece la verdad y qué significa saber y hacer matemáticas.

Además, Shulman (1988) enfoca en su investigación el problema de "cómo los docentes aprenden a transformar su propio conocimiento de la materia en representaciones y formas de presentación que tienen sentido para sus estudiantes". Encuentra que "un amplio conocimiento de la materia permite a los docentes establecer nexos entre diferentes tópicos dentro de un tema y proporcionar explicaciones conceptuales, en oposición a explicaciones puramente -algorítmicas. En matemáticas, los participantes (en el estudio) con mayor conocimiento de esa ciencia tienen mayor probabilidad de percibir la solución de problemas como elemento central a la enseñanza de la matemática y de poner énfasis en un enfoque conceptual de la didáctica. Comparados con docentes con menor conocimiento matemático, proporcionan mayor cantidad de explicaciones del por qué ciertos procedimientos funcionan o no funcionan; dan a los estudiantes una apreciación de la naturaleza de la matemática dirigiéndose a las relaciones entre conceptos y muestran aplicaciones del tema estudiado; presentan la materia en una forma más abstracta y participan con los estudiantes en más actividades de solución de problemas".

"Los docentes participantes (en el estudio) también empezaron a desarrollar conocimientos de contenidos pedagógicos -dominio de estrategias pedagógicamente poderosas de representar los contenidos- en la medida en que intentaron comunicar su propio entendimiento a los estudiantes".

A la vez los participantes desarrollaron "des trezas de razonamiento pedagógico", nuevas formas de pensar que les permitieron generar transformaciones en la materia a estudiar. Lucharon por hallar formas de presentar con tenidos a sus estudiantes; lo que Shulman caracteriza como intentos por usar sus des trezas de razonamiento pedagógico y conocimientos pedagógicos para transformar su propio saber en formas "aprendibles".

Ball (1990) examina el conocimiento acerca de la matemática que futuros docentes traen consigo cuando comienzan su formación profesional.

Diferentes estudios en la investigación de la experiencia de aprender a enseñar revelan qué deficiencias en conocimientos de contenidos y conocimientos pedagógicos se asocian con una dificultad en lograr la transición al pensamiento pedagógico, una inhabilidad de establecer nexos entre tópicos en el salón de clase y un énfasis en lograr comprensión procedural en lugar de comprensión conceptual.

Cobb (Cobb, Wood & Yackel, 1990) propone una analogía entre la forma en que los docentes construyen su conocimiento pedagógico y la forma en que los estudiantes construyen su conocimiento matemático.

Propone los siguientes lineamientos: para ayudar a los docentes a desarrollar prácticas en el aula, consecuentes con un enfoque constructivista de las matemáticas, es necesario llevarlos a ver aspectos de su instrucción como problemática y luego guiarlos en la solución de estos elementos problemáticos.

Desarrolló el trabajo en el ambiente de un instituto de verano (curso de actualización) y la estrategia principal fue la de crear situaciones en las que los docentes comienzan a cuestionar sus presuposiciones, tanto las referentes al conocimiento matemático, que los estudiantes pueden construir, como las referentes a su propia práctica en el aula.

Varios programas de investigación confirman la importancia de una preparación sólida en su disciplina, pues sin ella (Anderson, 1989) no están en capacidad de llevar a sus alumnos hacia un nivel alto de competencia. Para lograr este último objetivo, el docente debe ser altamente competente, debe ser capaz de pensar profunda y flexiblemente acerca de las relaciones entre aquellos hechos, conceptos y procedimientos que constituyen la estructura del conocimiento disciplinar, acerca de las muchas y diferentes funciones que tiene el contenido que se enseña tanto en el salón de clase como en el mundo exterior, y acerca de las muchas y diferentes formas o niveles de entendimiento que el estudiante exhibe en la medida en que desarrolla su conocimiento disciplinar. Anderson concluye que ni las materias disciplinares ni las materias en educación que comúnmente forman parte de los programas de estudio para formación de futuros docentes muestran efectividad en ayudar al futuro docente a lograr un alto grado de competencia en su disciplina.

Estudiando las actitudes de docentes en formación, Borko (Borko et al., 1992) observa que los participantes en el estudio buscaron en su curso de metodología, ideas sobre cómo se debe enseñar matemáticas, poniendo atención especial a estrategias para incorporar representaciones concretas o semiconcretas en las actividades del aula, mientras que el profesor de metodología presentó ideas relacionadas con la ilustración de los fundamentos conceptuales de los procedimientos matemáticos. Estos fueron usados principalmente como medios de motivar o comprometer activamente a los alumnos, con la consecuencia desafortunada de que se enfocaron en aspectos procedurales de la actividad: cómo doblar una hoja, por ejemplo, en lugar de enfatizar la relación entre las representaciones y los conceptos matemáticos que ellas ilustran. Los docentes exigían más bien remedios inmediatos para sus problemas de aprender a enseñar, no tenían tiempo para desarrollar una explicación conceptual de un problema matemático, si lo tenían que enseñar al otro día y su propio entendimiento no iba más allá de lo procedural. De hecho, los docentes se centraron en ideas con relevancia práctica, dejando de lado otros aspectos del curso de metodología orientados a conceptos.

Similarmente, entre la investigación que tu vieron en cuenta Brown y Borko en su resumen se encuentra el estudio de Schram (Schram et al., 1988; 1989) que ilustra el tipo de experiencias en matemáticas y de metodología que pueden enriquecer la comprensión conceptual de la matemática en los docentes. Además la investigación sostiene la idea de que a veces sea necesario ayudar a los docentes a descartar algunas de sus creencias y actitudes frente a la matemática y a la pedagogía que traen consigo antes de entrar en los programas de formación de educadores. Comentan, además, que la investigación que se tiene no es suficiente para producir diseños de programas de formación de educadores en matemáticas que respondan a todos la problemática encontrada en la investigación. La mayor parte de la investigación es descriptiva, y por ende, proporciona evidencia muy limitada acerca del diseño e implementación de buenos programas e formación de educadores. Concluyen que el próximo paso lógico es el de diseñar, instrumentar y estudiar programas de formación de docentes que incorporen como positivos los elementos identificados por la investigación.

La literatura, sin embargo, muestra que hay pocos estudios con componentes intervencionistas. (Brown & Borko, 1992). Se conoce cada vez más acerca del proceso de formarse como profesor de matemáticas, y las implicaciones que esto tiene para la práctica, pero este conocimiento sigue limitado.

El estudio que presentamos en este escrito explora inicialmente la forma en que los profesores ponen o no el conocimiento adquirido en sus cursos universitarios de matemáticas tradicionales al servicio de una mejor enseñanza y el efecto que una novedosa orientación de estos cursos puede tener sobre una transferencia eficaz y sólida. Esta orientación integra conocimientos matemáticos y conocimientos acerca de la naturaleza de la matemática, estructurando todo alrededor del proceso de construcción de significado conceptual.

El producto final de nuestro trabajo investigativo en esta etapa es un texto de álgebra para formación de docentes de enseñanza básica en el que se plasman propuestas específicas sobre cómo se pueden tener en un todo los elementos mencionados. Importantes bloques de este material fueron experimentados con docentes en servicio y en formación a través de cursillos desarrollados durante cuatro años en el Coloquio Distrital de Matemáticas en Bogotá (en el cual participan docentes de enseñanza básica, media y universitaria); esta experimentación generó revisión, reorganización y reorientación continua durante el proceso de su elaboración.

Más adelante ilustraremos estos puntos con una descripción de las características del texto.

PLANTEAMIENTOS DE LA EXPERIENCIA

Se planteó para construir el texto una tesis central: si se presenta al docente el álgebra como cuerpo de conocimientos acabados (presentación tradicional de los textos) se impide que el futuro docente:

1.- Encuentre el camino de construcción de significado, dé conjetura y dé generalización indispensable para comprender y orientar el aprendizaje en el aula.

2.- Encuentre la oportunidad de sentirse creador y partícipe, explorando las raíces y la trayectoria de la generación de conocimiento, experiencia que tampoco tendrán sus futuros alumnos.

Hasta donde hemos consultado otras investigaciones en ellas no ha sido considerada la perspectiva de formación del pensamiento algebraico de los docentes de matemáticas que intente extender el concepto piagetiano de abstracción reflexiva que planteaba Dubinsky en 1991 y al cual hace referencia nuevamente en el artículo *On learning fundamental concepts of group theory.*

Es por ello que consideramos que una de las posibles alternativas para trabajar desde esta perspectiva con los docentes es la reconstrucción histórica del álgebra que revele la actividad y el pensamiento matemático en estado de evolución, aprovechable para llegar a una caracterización que no se asocie únicamente con la enseñanza y transmisión del conocimiento matemático sino con el proceso creativo de hacer matemáticas, y que revele cómo el conocimiento imperfecto o la creación de un modelo adecuado sólo en parte, conlleva a enfoques que distan del enfoque ortodoxo de un concepto pero que de todas maneras permiten hacer matemáticas. Este hecho reviste gran importancia porque corresponde precisamente a la situación del alumno; el maestro con alguna frecuencia busca que éste llegue a una descripción predeterminada y no sabe valorar sus aproximaciones parciales; es decir no intenta ver hasta qué punto éstas son correctas y no se toma el tiempo para analizar en qué punto y por qué razón fallan.

Consideramos además que el docente en formación, a través de esta perspectiva puede llegar a comprender que el papel del simbolismo y de los sistemas de representación es secundario al proceso mismo de construcción; en particular en diversas etapas de la historia se presentaron dificultades tanto con conceptos como con el simbolismo y se trató de consFinalmente es de anotar que, como se comengaciones en ellas no ha sido considerada taba en el artículo citado, la claridad que tenga el docente en formación respecto a los conceptos básicos de la aritmética de los números y de los polinomios juega un papel fundamental para la construcción reflexiva de estructuras más complejas.

DESCRIPCIÓN DEL TEXTO

El texto, producto final de nuestro trabajo, tiene entonces unas características especiales que trataremos de describir en los siguientes apartes, invitando a nuestros lectores a analizar si responden (o no) a los referentes teóricos que hemos expuesto:

1. Se establecen eslabones explícitos entre la teoría formal del álgebra abstracta y las nociones elementales fundamentales de los cursos de álgebra y aritmética de la escuela media. Estos nexos son construidos a través de un cuidadoso recorrido histórico desde la teoría de ecuaciones al álgebra abstracta.

Se aborda, así mismo, el problema de la solubilidad de ecuaciones desde diversos enfoques, desde el geométrico pasando por el algebraico, llegando al analítico y finalmente al aritmético (métodos numéricos). A través de este recorrido el docente puede apreciar las bondades e insuficiencias de cada enfoque.

Por ejemplo, si bien Leonardo de Pisa mostró lo inadecuados que eran los métodos geométricos pregonados por los matemáticos griegos y árabes para tratar el problema de solución de una ecuación polinomial, Galois demostró también las deficiencias de los métodos algebraicos pregonados por los algebristas italianos. A partir del trabajo de Galois sabemos que *El problema de resolver una ecuación polinomial no goza en general de solución.* Esto llevó al álgebra a centrarse en otros puntos, en particular, en las estructuras algebraicas que le dan nueva vida y creciente importancia dentro de la matemática vista como un todo. Por ende, después de culminar esta discusión de la teoría de ecuaciones, resulta natural para el docente proseguir el estudio centrado en estas nuevas direcciones de desarrollo algebraico (álgebra abstracta).

Por otra parte aprovecha al interior del texto la construcción histórica del conocimiento algebraico y la solución de problemas para orientar y resaltar la construcción de significado. Al respecto consideremos un problema como el siguiente cuyos orígenes y significados son discutidos en el texto y que se encuentra en cualquier libro tradicional de álgebra en la sección de teoría de ecuaciones:

Dado $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0 = 0$ con raíces $r_1, r_2, \dots, r_n$. Hallar $F(x) = 0$ tal que cada una de sus raíces es menor que una raíz de $f(x) = 0$ en una cantidad dada h.

No cabe duda que la manipulación que se debe efectuar para resolver este problema es tan clara como lo es abstrusa. Tenemos derecho de preguntarnos por el por qué. Si bien podemos lograr una transformación como ésta, nuestros motivos para hacerlo se encuentran totalmente ocultos. Aquí la historia nos esclarece el panorama de manera contundente. Descartes usaba transformaciones de este tipo en sus consideraciones acerca de las soluciones negativas de ecuaciones polinomiales. Recordemos que había cierta polémica y mucho desconcierto en tomo a los números negativos e imaginarios, sobre todo porque no gozaban de una interpretación geométrica clara, es decir, no podían interpretarse como magnitudes de segmentos. Esto a su vez conllevó a un cuestionamiento de su realidad, cuestionamiento que se revela en la terminología entonces común, las raíces negativas se llamaban falsas o ficticias. Una discusión similar se desarrolló en tomo a los números complejos o imaginarios, nombre que sigue usándose y que señala los problemas filosóficos suscitados por ellos.

La solución del problema retorna una idea de Descartes, quien considera una ecuación cuyas raíces son negativas y por medio de una transformación apropiada la asocia con una ecuación cuyas raíces son positivas. Es más; si estudiamos las gráficas de las funciones polinomiales asociadas a estas ecuaciones, tema originado por Descartes con la geometría analítica, vemos que una es la imagen de la otra por una sencilla traslación.

Ahora bien, el procedimiento no sólo indica que no hay nada inherente que diferenciar entre raíces negativas y positivas, sino que aquí se señala un motivo para un cambio de énfasis. Poco después del trabajo de Descartes, lo invariante en la gráfica después de la traslación se volvería de mayor interés para la matemática que la misma solución de las ecuaciones. Posiblemente es aquí donde el concepto que llegará a denominarse función se volverá más importante para el matemático que la misma teoría de ecuaciones. Sin embargo, Descartes estaba interesado en el análisis de las soluciones de las ecuaciones polinomiales y su lección es clara: no hay diferencia fundamental entre las soluciones positivas y las negativas.

En esta misma línea del desarrollo de ideas, un segundo punto que se considera en el texto relativo versa sobre el método de Cardano para la solución de la ecuación cúbica. Recordemos que éste se basa en la reducción de la cúbica general:

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

a una cúbica de la forma:

$$y^3 + py + q = 0$$

por medio de una transformación similar a la usada por Descartes. En efecto, el método descansa sobre la posibilidad de efectuar una transformación para obtener una ecuación relacionada tal que la suma de sus raíces sea cero.

Se identifican pues en esta discusión al menos dos motivaciones fundamentales que subyacen tras un problema que superficialmente parece exigir manipulación algebraica sin sentido, rumbo, finalidad ni propósito. Por una parte, el poder llegar a una comprensión de los nexos profundos entre soluciones negativas y positivas contribuirá a la construcción de un sistema numérico que comprende ambas y que se denominará el sistema de los números reales. Por otra parte, tal manipulación tiene una raíz teórica como procedimiento que permite generar un método de solución para la ecuación cúbica.

Tales consideraciones sobre la naturaleza de los números negativos producirán también un importante resultado teórico. Basándose entre otras consideraciones en la identificación de raíces negativas y positivas, Descartes junto con su compatriota Girard llegan a aceptar como cierto el Teorema Fundamental del Álgebra (una ecuación polinomial de grado n tiene exactamente n raíces (contando multiplicidades). Se motiva pues un resultado fundamental del álgebra a través de un análisis bien orientado de elementos históricos.

2. Se trabaja para desarrollar y enriquecer el pensamiento algebraico del docente de diferentes maneras.

2. 1. A través de la consideración de diversidad de problemas, con niveles y objetivos variados, tanto para el docente como para sus futuros alumnos.

2. 1. 1. En la discusión de un tema elemental, la solución de ecuaciones lineales, se hace un amplio tratamiento de algunos métodos perdidos en oposición a una simple exposición anecdótica que comúnmente se encuentra en las referencias históricas de los libros. Al final de la cual, se plantean al docente puntos de discusión. Veamos un ejemplo:

Un método que nunca entró en las corrientes centrales viene a cuenta: Consideremos una fórmula conocida con el nombre de la "flor de Tirnáridas" dada en un manuscrito del siglo primero d.C. por el matemático griego Jámblico y que se cree fue copiada por él de una fuente mucho mas antigua.

Tenemos n incógnitas $x_1, x_2, \dots, x_n$ a las cuales añadimos una más x. Las siguientes sumas son conocidas (dadas):

$$
\begin{aligned}
&x + x_i + x_2 + \dots + x_n = S \\
&x + x_1 = a_1 \\
&x + x_2 = a_2 \\
&\qquad \dots \\
&x + x_n = a_n
\end{aligned}
$$

Jámblico da una solución general al sistema que es equivalente a la fórmula:

$$x = \frac{(a_1 + a_2 + \dots + a_n) - S}{n - 1}$$

Como nos dice Van der Waerden en su libro *A History of Algebra,* esta solución puede encontrarse usando un conocido método de Diofanto que requiere que se ponga $x = s$ y que se observe que las demás incógnitas son a_1 - s, a_2 - s,... a_n - s, de donde la suma S está dada por $(a_1 + \dots + a_n) - (n - 1)\, S$ Jámblico usa esta solución de manera ingeniosa para resolver ecuaciones diofánticas de apariencia distinta, como es el caso del sistema:

$$
\begin{aligned}
x + y &= 2\,(z + u) \\
x + z &= 3\,(y + u) \\
x + u &= 4\,(y + z)
\end{aligned}
$$

que constituye un problema interesante, una de cuyas soluciones comienza por poner las ecuaciones en la misma forma de la flor de Timáridas.

Las ecuaciones dadas son equivalentes a:

$$\begin{aligned} x+y+z+u &= 3\,(z+u) \\ x+y+z+u &= 4\,(y+u) \\ x+y+z+u &= 5\,(y+z) \end{aligned}$$

Ahora bien, la suma de los cuatro números debe ser divisible por 3, 4 y 5. En consecuencia, Jámblico pone $S = 120$ y llega a las mismas ecuaciones dadas en la "flor" como se muestra en:

$x + y + z + u =$		$S = 120$
$x + y$	$= 2\,(z + u) = (2/3)$	$S = 80$
$x + z$	$= 3\,(y + u) = (3/4)$	$S = 90$
$x + u$	$= 4\,(x + y) = (4/5)$	$S = 96$

En este punto, se puede aplicar la fórmula de Timáridas. (Sin duda, procedimientos comunes de eliminación también servirán para el propósito de resolver el problema, pero podrían ser menos divertidos o no estar tan bien enfocados hacia el fin deseado).

Este mismo problema reapareció en el *Liber abaci* de Fibonacci y se usó en 1994 en la ronda final de la Olimpíada Colombiana de Matemáticas para estudiantes de los grados sexto a octavo enunciado en la siguiente forma:

Este problema aparece en un libro llamado *Liber abaci* escrito por el matemático italiano Leonardo de Pisa en 1202. Tres hombres, *A, B y C,* cada uno de los cuales ya poseía algunas monedas de oro, encontraron una bolsa de monedas de oro. A dijo: si me dan a mí todas las monedas de la bolsa, tendré el duplo de lo que tienen *B y C juntos. B* dijo: si me dan a mí todas las monedas de la bolsa, tendré el triple de lo que tienen A y C juntos. Finalmente, C dijo: si me dan a mí todas las monedas de la bolsa, tendré el cuádruple de lo que tienen A y B juntos. ¿Cuál es la menor cantidad de monedas que puede haber en la bolsa?

Puntos de discusión

Explicar porqué éste último no es igual al problema de Jámblico.

Buscar en textos contemporáneos para la secundaria problemas que pueden resolverse usando el mismo método.

Inventar al menos dos problemas (de su propia elaboración) que pueden ser resueltos usando el método de Timáridas-Jámblico.

Nótese que en este caso, a partir del análisis histórico se pretende que el docente construya y aproveche elementos para trabajar problemas de maneras enriquecedoras y no usuales.

Posteriormente se proponen al docente problemas no rutinarios sobre las ecuaciones lineales que podrían ser trabajados en el aula.

Una niña piensa tres números. Los suma en parejas, obteniendo 11, 17 y 22. ¿Cuáles son los tres números?

Resolver el sistema:

$$\begin{aligned} a+b+c+d &= 0 \\ a+c+d+e &= 5 \\ a+b+d+e &= 1 \\ a+b+c+e &= 2 \\ b+c+d+e &= 4 \end{aligned}$$

Resolver el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} ab &= 1 \\ bc &= 2 \\ cd &= 3 \\ de &= 4 \\ ea &= 6 \end{aligned}$$

Si se contrasta este método con la reducción usual de un sistema se aprecia la importancia que tiene, para el desarrollo del pensamiento matemático del docente, el romper con la costumbre de aplicar ciegamente algoritmos, por efectivos y generales que éstos sean, motivándolo además a explorar nuevas (antiguas) pistas de solución.

Tanto los puntos de discusión como los ejercicios confrontan al futuro docente con la actividad de generar y resolver problemas, carencia que se hizo evidente en la consulta inicial.

2. 1. 2. En otra parte del texto cuando se abordan ya de lleno las estructuras algebraicas, se plantean situaciones en las que se aprovecha la estructura de grupos familiares para discutir cuestiones que pueden enriquecer el trabajo con los mismos en los niveles básicos.

Usar propiedades del grupo de funciones:

$$G = \{g_1(x) = x, g_2(x) = 1 - x\}$$

para resolver la siguiente ecuación funcional es decir, hallar todas las funciones $f(x)$ que satisfacen la ecuación:

$$xf(x) = 2f(1-x)$$

Sugerencía: Reemplazar x por $1 - x$ y resolver el sistema de ecuaciones simultáneas.

Usar propiedades de un cierto grupo de funciones para resolver la siguiente ecuación funcional, es decir, hallar todas las funciones $f(x)$ que satisfacen:

$$x f(x) + 2f\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = 1$$

Resolver la ecuación funcional:

$$x f(x) + 2f\left(-\frac{1}{x}\right) = 1$$

para todo número real $x \neq 0$

2. 1. 3. En el trabajo con la teoría de ecuaciones polinomiales, a la par que se discuten elementos teóricos, el docente es enfrentado continuamente a situaciones en las que debe construir, interpretar condiciones, usar argumentos geométricos, analíticos, observar regularidades, estudiar casos particulares, etc.

Ilustramos con los siguientes problemas:

Sean u, v, w los ceros del polinomio cúbico $4x^3 - 7x^2 - 3x + 2$. Construir un polinomio cúbico cuyos ceros sean:

$$u - (1/vw),\ v - (1/wu),\ w - (1/uv)$$

Determinar todos los polinomios de grado n que tengan todos sus coeficientes iguales a + 1 o - 1 y tales que tengan solamente ceros reales.

Consideremos el conjunto de todas las ecuaciones de la forma:

$$x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$$

donde los coeficientes a_2, a_1, a_0 son reales y $|a_i| \leq 2$ para $i = 0, 1, 2$. Sea r el mayor número real positivo que satisface alguna de estas ecuaciones. ¿En cuál de los intervalos

$$\left[1, \frac{3}{2}\right), \left[\frac{3}{2}, 2\right), \left[2, \frac{5}{2}\right), \left[\frac{5}{2}, 3\right), \left[3, \frac{7}{2}\right)$$

se encuentra r?

Con esta diversidad de problemas se pretende trascender las limitaciones de un estudio formal de resultados generales en la solución de ecuaciones, que por estar aislado de la consideración de funciones polinomiales específicas, no prepara al docente para el trabajo en el aula. La teoría deductiva no aborda la matemática desde su construcción, ni invita a generar hipótesis y probarlas, buscar ejemplos, contraejemplos, construir argumentos, todas éstas, características fundamentales del pensamiento matemático.

2. 2. Estableciendo analogías y explicitando interrelaciones.

Como ya se anotó, una de las alternativas empleadas en el texto es el análisis de cómo el conocimiento algebraico imperfecto y la creación de modelos parcialmente adecuados distan del enfoque ortodoxo de un concepto pero, de todas maneras, permiten hacer Matemáticas.

En el texto, se explotan las interrelaciones entre el cálculo y el álgebra en las dos vías, del cálculo al álgebra y del álgebra al cálculo. Se destaca por ejemplo, en el texto, una analogía inesperada que hace Newton entre las series infinitas y las fracciones decimales. Al respecto Newton dice:

"Ya que las operaciones de calcular con números y con variables son realmente similares, de hecho no parece haber diferencia alguna entre ellas excepto en cuanto a los símbolos que denotan cantidades, definidas en un caso e indefinidas en el otro, me sorprende que no se le ha ocurrido a ninguno adaptar la doctrina recientemente establecida para números decimales de modo similar a variables, especialmente porque ello abre luego el camino a consecuencias mucho más impactantes. Pues ya que esta doctrina en especies tiene la misma relación con el álgebra que la doctrina de números decimales tiene a la aritmética común, las operaciones de adición, sustracción, multiplicación, división y extracción de raíces de ésta pueden aprenderse fácilmente de las de aquella si la persona tiene destreza en ambas, tanto la aritmética como el álgebra, y aprecia la correspondencia entre números decimales y términos algebraicos continuados al infinito: a saber, que a cada puesto en la sucesión decimal que decrece continuamente hacia la derecha le corresponde un único término en un arreglo de variables ordenadas según la sucesión de dimensión de numeradores o denominadores continuados en progresión uniforme al infinito. Y tal como la ventaja de los decimales consiste en que, cuando todas las fracciones y raíces han sido reducidas a decimales asumen en algún modo la naturaleza de enteros; así también la ventaja de las sucesiones infinitas de variables es que las clases de términos más complicados (tales como fracciones cuyos denominadores son cantidades complejas, raíces de cantidades complejas, y las raíces de ecuaciones "afectadas") pueden reducirse a clases de términos sencillos: es decir, a series infinitas de fracciones simples, con numeradores y denominadores simples y despojadas de la complejidad que aquejaba a los otros

Es especialmente notable la analogía newtoniana entre las expansiones decimales infinitas para números irracionales y la expansión en series infinitas de funciones no polinomiales. Tal como la representación decimal, de los irracionales permite operar con ellos como si fueran enteros, la representación en series infinitas de estas funciones permitía operar con ellas como si fueran polinomiales. La asimilación de las operaciones numéricas a operaciones con otros objetos (polinomios) es un genuino precursor de las ideas acerca de las estructuras tan fundamentales para el álgebra abstracta. Aquí el docente puede observar claramente la posibilidad de partir de objetos familiares y construir paulatinamente significado y generalidad, identificando regularidades al interior de diversas colecciones y estructuras.

En el mismo sentido, al trabajar con la teoría de anillos y estudiar allí el teorema del binomio, se observa qué funciona y qué no funciona de él en un anillo general. Se discute cómo un resultado tan conocido que se aplica sin problemas en el álgebra elemental es válido solamente para anillos conmutativos con elemento identidad, y en tal caso se generaliza de manera natural en anillos de objetos arbitrarios, usando argumentos completamente similares a los usados cuando los objetos son números.

2. 3. A través de la construcción del saber por parte del futuro docente. Por ejemplo, en el tratamiento de un tema familiar del álgebra escolar, el triángulo de Pascal, se pretende que el docente amplíe y construya a partir de una secuencia de puntos de discusión. Veamos el tratamiento del texto.

En la escuela secundaria con alguna frecuencia se presenta (sin demostración) el Teorema del Binomio por medio de este conocido triángulo.

$$
\begin{array}{llllll}
1 \\
1 & 1 \\
1 & 2 & 1 \\
1 & 3 & 3 & 1 \\
1 & 4 & 6 & 4 & 1 \\
1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 \\
\vdots
\end{array}
$$

Este enfoque o presentación del teorema tiene una larga historia. El matemático chino Chu Shï-kié (1303), produjo este mismo arreglo triangular de coeficientes correspondientes a la expansión binomial. Hacia 1544 el matemático alemán Michael Stifel (1486?-1567) introdujo la expresión "coeficiente binomial" y mostró cómo calcular $(1 + a)^{n+1}$ a partir de $(1 + a)^n$. Es claro que este arreglo de números era conocido por Tartaglia (quien dice en 1566 que es invención suya), Stifel y (el matemático e ingeniero belga Simón) Stevin. En 1654 Blaise Pascal (1623-1662) investigó el arreglo usando el enfoque de la combinatoria y obtuvo muchas propiedades nuevas que fueron dadas a conocer en una publicación póstuma *Traité du triangle arithmétique.* Éstas son especialmente interesantes en cuanto las aplicó a la teoría de probabilidad. Subsecuentemente el arreglo recibió el nombre que todavía se usa de Triángulo de Pascal.

En el año 1665, Isaac Newton (1642-1727) mostró cómo se puede calcular $(1 + a)^n$ directamente sin referencia a $(1 + a)^{n-1}$. Esto involucra el conteo de combinaciones precisamente como lo presentamos anteriormente.

Veamos cómo podemos reconciliar estas distintas formas de calcular los coeficientes binomiales considerando sus leyes de formación. La característica más sobresaliente del triángulo de Pascal es su ley de forma ción: que cada nuevo término es la suma de dos términos, el inmediatamente encima de él y el que está a la izquierda de éste, en el triángulo.

Pues, pensemos ahora cómo podemos calcu lar una combinatoria, digamos el número de combinaciones de 5 cosas tomadas de 2. Es claro que las combinaciones se pueden formar de dos maneras, o bien se escogen 2 de 4 y no se escoge la quinta, o bien se escoge 1 de 4 y luego se escoge la quinta. En símbolos

$$\binom{5}{2}=\binom{4}{1}+\binom{4}{2}$$

0 sea, la ley de formación de estas combinatorias es la misma que la de los números en el triángulo de Pascal, dando lugar a la pareja de triángulos (parciales) de la siguiente figura:

$$\begin{array}{llllll}
1 & & & & & \\
1 & 1 & & & & \\
1 & 2 & 1 & & & \\
1 & 3 & 3 & 1 & & \\
1 & 4 & 6 & 4 & 1 & \\
1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1
\end{array}
\qquad
\begin{array}{llllll}
\binom{1}{1} & & & & & \\
\binom{1}{1} & \binom{1}{0} & & & & \\
\binom{2}{2} & \binom{2}{1} & \binom{2}{0} & & & \\
\binom{3}{3} & \binom{3}{2} & \binom{3}{1} & \binom{3}{0} & & \\
\binom{4}{4} & \binom{4}{3} & \binom{4}{2} & \binom{4}{1} & \binom{4}{0} & \\
\binom{5}{5} & \binom{5}{4} & \binom{5}{3} & \binom{5}{2} & \binom{5}{1} & \binom{5}{0}
\end{array}$$

En su escrito sobre el triángulo, Pascal demostró una gran cantidad de propiedades interesantes que pueden constituirse en problemas no rutinarios y retadores para el estudiante de la secundaria. A continuación proponemos algunos referidos a la disposición original del triángulo ideada por Pascal y que se muestra (en parte) a continuación. En él los coeficientes binomiales se leen diagonalmente.

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	2	3	4	5	6	7	8	9	
1	3	6	10	15	21	28	36		
1	4	10	20	35	56	84			
1	5	15	35	70	126				
1	6	21	56	126					
1	7	28	84						
1	8	36							
1	9								
1									

Puntos de discusión

Cada número en el triángulo es la suma de los números en la fila anterior a partir de la primera columna hasta la columna donde está ubicado el número.

Cada número en el triángulo es igual a la suma de todos los números en la columna anterior, desde la primera fila hasta la fila donde está ubicado el número.

Cada número del triángulo disminuido en 1 es igual a la suma de todos los números en el rectángulo encerrado por su fila y su columna (sin incluir a los números que están en éstas).

Los elementos de la fila j son los mismos que los de la columna j en el mismo orden.

La suma de los números en cualquier diagonal es igual al duplo de la suma de los números en la anterior diagonal.

La suma de los números en la n-ésima diagonal es igual a 2^{n-1}.

Si dos números están en la misma diagonal, la razón entre el número superior y el número inferior es igual a la razón entre la cantidad de elementos desde el número superior (inclusive) hasta el extremo superior de su columna y la cantidad de elementos desde el número inferior (inclusive) hasta el extremo inferior de su columna.

Enunciar y demostrar al menos dos propiedades adicionales de los números que se encuentran en el triángulo de Pascal.

De manera similar en el análisis de algunos métodos numéricos que permiten encontrar soluciones aproximadas de ecuaciones polinomiales, se enfrenta al docente de nuevo a contrastar e investigar métodos numéricos. En particular, después de discutir un programa iterativo de computador para hallar la raíz cuadrada de un número, se proponen algunas preguntas de investigación. Veamos el desarrollo:

Construiremos un programa iterativo para hallar la raíz cuadrada. Este tiene la ventaja sobre el programa anterior[1] de que puede usarse para cualquier a > 0. En él se reemplaza la sustitución simultánea:

$$(x, y) \leftarrow (x', y',)$$

por las dos sustituciones sucesivas:

$$x \leftarrow \frac{x+y}{2}\,;\; y \leftarrow \frac{a}{x}$$

```
program raiz it {x>y}
var a, x, y, eps: real;
begin
        write ('a, eps=');
        readin (a, eps);
        x:=a; y:=l;
        repeat x:= (x + y)/2; y:=a/x
        until x<= y + eps;
writeln (x); read1n
end;
```

Intentar ahora explicar el programa siguiente:

```
program raizl; {x>y}
var x, y, eps : real;
function r (x, y : real): real;
begin
        writeln (x:20, y:20);
        if abs(x-y)/x < eps then r:= (x+y)/2
        else r:= r ((x+y)/2, 2*x*y/(x+y))
end;
begin
write ('x, y, eps='); read (eps, x, y); x:= r (x, y);
read1n
end
```

Si ponemos x = 2, y = 1, eps = IE - 07 el programa anterior genera el siguiente `output`´.

2.0000000000	1.0000000000
1.5000000000	1.3333333333
1.4166666667	1.4117647059
1.4142156863	1.4142114385
1.4141135624	1.4142135624

Ahora bien, éste es el conocido método de extracción de la raíz cuadrada.

Puntos de discusión

- Comparar este último algoritmo con el método empleado por Arquímedes para aproximar la raíz cuadrada y con la aproximación por fracciones continuas de Bombelli. ¿Hay alguna diferencia en los tres métodos?
- Este es un ejemplo particular del método de Newton para aproximar los ceros de una función. ¿Puede usted decir por qué?

3. Se orienta y realza la “construcción de significado” explicando interrelaciones y aplicaciones de este conocimiento al interior de la matemática misma y en otras disciplinas, proceso en el cual identificamos cuatro aspectos claves: capacidad técnica para manipular, capacidad para delimitar y explicitar propiedades, capacidad para representar y capacidad para modelar.

Un episodio importante de la construcción de significado se encuentra en el estudio de la obra de Leonardo de Pisa, en referencia a una de las anécdotas mas conocidas de la historia de la matemática: cómo Leonardo hizo uno de los descubrimientos claves para el álgebra y las nociones contemporáneas de la matemática en el marco de una competencia de solución de problemas.

[1] El programa anterior es recursivo. Ambos programas son presentados en el libro: *Exploring Mathematics with your Computer* (ver Engel, 1993).

El problema a resolver era una ecuación cúbica $x^3 + 2x^2 + 10x = 20$. En primer lugar Leonardo observó que la ecuación poseía una raíz entre 1 y 2, una observación del todo moderna en la que subyacen nociones de función, continuidad y el teorema del valor medio. (No es posible especular hasta qué punto Leonardo se haya dado cuenta de estas nociones subyacentes).

Enseguida demostró que la raíz no puede ser racional ni raíz cuadrada de un entero que no es cuadrado perfecto. Y a continuación de este análisis concluyó que la raíz en cuestión no es construible con regla y compás, basándose en la clasificación de los números construibles hecha por Euclides en el Libro X de los *Elementos.* Al hablar sobre este incidente histórico, es consecuente afirmar que en él se comienza a desmoronar la fundamentación griega de los números, pues si bien es correcto que todo número real puede asociarse con la magnitud de algún segmento, no es cierto que todos estos segmentos sean construibles con regla y compás, lo cual cuestiona la fundamentación de los números en la geometría hecha a la manera de Euclides.

Igualmente, el incidente muestra que estos números no construibles surgen como solución de ecuaciones algebraicas, y esto sugiere que el álgebra es de alguna forma más general que la geometría.

4. Se establecen nexos con otras áreas de la matemática.

Se estudian a fondo los nexos estructurales entre el álgebra, la teoría de números, el cálculo y la geometría, mostrándo elementos y argumentos compartidos.

Una de las relaciones que más común y marcadamente se resalta entre el álgebra abstracta y otras ramas de la matemática es la que existe con la teoría de números. En el texto se ilustra que no sólo es posible sino urgente, replantear el estudio de los elementos y argumentos compartidos por estas dos áreas con el ánimo de enriquecer la experiencia matemática del profesor y hacer más vívida su comprensión de los aspectos formales y abstractos que inciden o colindan con temas elementales y permiten un acercamiento, desde la matemática elemental, a la comprensión de la naturaleza de la matemática contemporánea.

Para ello se trabajan algunos tópicos de la teoría de números que contribuyeron a la formación del modo de pensar del álgebra abstracta. En particular, se investiga la trayectoria histórica de algunos problemas de representación de enteros, deteniéndose en el estudio de las ecuaciones diofánticas lineales y cuadráticas que se solucionan usando fracciones continuas y llegando a sugerir el tratamiento y solución de algunos de ellos por medio de la teoría de formas cuadráticas.

Por otra parte, se considera el método de descenso infinito de Fermat y su uso para la solución de problemas relacionados con los anteriores. Nuestro interés en estos temas se arraiga en dos aspectos importantes. Primero, queremos mostrar cómo este método, original de Fermat, resalta una de las propiedades básicas del conjunto de los números naturales que es fundamental en toda la argumentación posterior del álgebra abstracta, a saber: el principio de la buena ordenación. En segundo lugar, queremos subrayar la naturaleza abstracta de los problemas de representación propios de la teoría de números, característica básica del álgebra moderna, es decir, mostrar que se trata de enunciados sobre la posibilidad de lograr una cierta representación sin que se basen las demostraciones en la construcción de la misma.

Se analiza en el texto detenidamente cómo inciden argumentos y elementos de la teoría de números en la construcción de la teoría de grupos y, en especial, de la teoría de anillos, desde tres líneas básicas: La primera abarca aquellos resultados de estas dos teorías que son generalizaciones de propiedades de los números enteros. La segunda recalca aspectos de éstas (relacionados con grupos finitos, por ejemplo) que descansan sobre propiedades de los números naturales y como tales utilizan los mismos argumentos que se encuentran en la teoría de números. Mientras que la tercera muestra las diferencias que se dan entre las demostraciones de ciertos resultados de la teoría de números y las demostraciones de resultados análogos, pero más generales, del álgebra abstracta, en especial, de la teoría de anillos.

Ilustremos con un ejemplo: en la discusión sobre la divisibilidad en anillos, después de caracterizar los elementos primos e irreducibles, se enuncia y demuestra el teorema sobre los números primos que apareció por primera vez en Los Elementos de Euclides (Proposición 20, Libro IX): *Existe una infinidad de primos. A* continuación se enuncia y demuestra el resultado análogo a este teorema en un dominio de ideales principales *D: Existe un número infinito de primos en D.*

Se hace notar entonces la similitud entre las dos demostraciones; destacando que la única diferencia esencial está en la referencia a los inversibles, que en el caso de los enteros positivos se reduciría a la imposibilidad de que los primos sean 1 (único elemento inversible en los enteros positivos).

Podemos adelantar que el texto se está usando en diferentes programas de formación de docentes tanto en Colombia como en otros países.

Ha sido recibido muy positivamente pero aun su impacto no podría medirse.

Sin embargo, más allá de cuantificar, nos identificamos con las posiciones de Stephen Brown cuando dijo:

"El investigador humanista está más satisfecho con producir generalizaciones naturalistas en las cuales la generalidad se da en función de significados compartidos por individuos" y "La investigación en la modalidad humanista se concierne mas con la creación de categorías de análisis como parte de la experiencia investigativa continuada, que como un acto final de reflexión".

Para concluir queremos anotar que una mirada profunda del pensamiento y conocimiento matemático, como la que hemos tratado de presentar en estas notas, puede constituirse no solamente en una alternativa para la formación de los docentes en esta área sino que puede extenderse a otras áreas (tenemos proyectado elaborar en lo futuro textos para geometría y análisis donde se plasmen nuestras concepciones respecto a la formación docente) y generar a partir de allí una propuesta curricular realmente innovadora.

TEXTO PRINCIPAL

de Losada Falk, M. & de Manrique Acevedo, M. *(1997). Recorriendo el Álgebra: de la teoría de ecuaciones al álgebra abstracta.* Colciencias, Universidad Nacional de Colombia.

BIBLIOGRAFÍA

Anderson, C. (1989). The role of education in the academic disciplines in teacher preparation. En A. E. Woolfoik (Ed.), *Research perspectives on the graduate preparation of teachers* (pp. 88-107). Englewood Cliffs, NJ: Prentice Hall.

Ball, D. L. (1990). The mathematical understandings that prospective teachers bring to teacher education. *Elementary School Journal,* 90, 449-466.

Barbeau, E. J. (1989). *Polynomials. Problem Books in Mathematics.* New York, NY, EE. UU.: Springer-Verlag.

Boyer, C. B. (1949). *The History of the Calculus and its Conceptual Development.* New York, NY, EE. UU.: Dover.

Brown, C. A. & Borko, H. (1992). Becoming a Mathematics Teacher. En D. A. Grouws (Eds.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (Cap 11, pp. 209236). New York, NY, EE. UU.: MacMillan Publishing Company.

Brown, S. l., Cooney, T. J. & Jones, D. (1990). Mathematics Teacher Education. En W. R. Houston (Eds.), *Handbook of Research on Teacher Education* (Cap 35, pp. 639-656). New York, NY, EE. UU.: MacMillan Publishing Company.

Budden, F. (1985). *The Fascination of Groups.* Cambridge: Cambridge University Press.

Burton, L. , Mason, J. & Stacey, K. (1982). *Pensar Matemáticamente.* Madrid, España: Labor.

Cobb, P., Wood, T. & Yackel, E. (1990). Classrooms as leaming environments for teachers and researchers. En R. Davis, C. Maher & N. Noddings (Eds.), *Constructivist Views on the teaching and learning of mathematics* (Número 4, pp. 125-146). Reston, VA:NCTM.

Dubinsky, E. (199 l). *Constructive aspects ofreflective abstraction in advanced mathematics Epistemological Foundations on mathematical experience.* New York, EE. UU.: SpringerVerlag.

Dubinsky, E. (1994). *On learning fundamental concepts of group theory. Educational studies of Mathematics.* New York, EE. UU.: Springer-Verlag.

Edwards, H. (1984). *Galois Theory.* New York, EE. UU.: Springer-Verlag.

Engel, A. (1993). *Exploring mathematics with your computer* (pp. 183-184). Washington, DC, EE. UU.: The Mathematical Association of America.

Hall, H. S. & Knight, S. R. (1957). *Higher Algebra: a Sequel lo Elementary Algebra for Schools.* London, UK: MacMillan.

Kline, J. (1992). *Greek Mathematical Thought and the Origin of A1gebra.* (E. Braun, Trad.). New York, NY, EE. UU.: Dover.

Kline, M. (1972). *Mathematical Though from Ancient to Modern Times.* New York, NY, EE. UU.: Oxford University Press.

Meyerson, L. N. (1977-1978). *Conception of KnowIedge in mathematics: Interaction with and application to a teaching methods course.* Doctoral dissertation, State University of New York, Buffalo, EE. UU.

Scharn & Lappan, G. (1988). Changing mathematical conceptions of preservice P., Wilcox, S, Lanier P teachers: A content and pedagogical intervention. Paper presented at *the annual meeting of the American Educational Research Association,* New Orleans.

Schann P., Wilcox, S., Lanier P. (1989). Changing preservice teachers beliefs about mathematics education. En C. Maher, G. Goldin, & R. Davis (Eds.), *Proceeding of the Eleventh Annual Meeting of the North American Chapter of the International Groupfor the Psychology of Mathematics Education (pp. 296-302).* New Brunswich, NJ: Rutgers University.

Shulman, L. S. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review, 57(1), 1-22.*

Shulman, L. S. & Grossman, P. L. (1988). *KnowIedge growth in teaching.* A final report to the Spencer Foundation, Stanford, CA: Stanford University.

Van der Waerden, B. L. (1983). *Geometry and Algebra in Ancient Civilisations.* New York, NY, EE. UU.: Springer-Verlag.

Van der Waerden, B. L. (1985). *A History of Algebra: From al-Khwarizmi to Emmy Noether.* New York, NY, EE. UU.: Springer-Verlag.