

## **Aplicación del análisis de textos mediante técnicas multivariantes al estudio del cambio de concepciones sobre las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje**

Pablo Flores \*  
Carmen Batanero \*  
Juan D. Godino \*

### **RESUMEN**

El estudio de las concepciones y creencias de los sujetos debe abordarse mediante métodos diversos e indirectos, debido al nivel no consciente de las mismas. En este trabajo se describe el uso del 'comentario de textos' para caracterizar las concepciones y creencias sobre las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje de un grupo de profesores en formación, así como su evolución tras las prácticas de enseñanza. La metodología seguida en el análisis de los datos, que podría ser de utilidad en otras investigaciones educativas, combina el análisis cualitativo con el uso de técnicas estadísticas, para determinar la estructura de las tablas de datos obtenidas. Más particularmente, el análisis factorial de correspondencias y el análisis logaritmo - lineal, permiten visualizar la estructura original del texto utilizado, comparar con ella la estructura de los resúmenes de los estudiantes y estudiar su evolución, tanto individualmente, como colectivamente.

### **ABSTRACT**

The study of the subjects' conceptions and beliefs should be approached through various and indirect methods, because of their unconscious level. In this paper we describe the use of the 'commentary of a text' to characterize the prospective teachers' conceptions and beliefs on mathematics, its teaching and learning, as well as their evolution after some teaching practices. The data analysis methodology, which could be useful to other educational investigations, combines qualitative analysis with statistical methods to determine the structure of the data tables obtained. More precisely, correspondence analysis and log-linear analysis, allow us visualizing the original structure of the text, comparing it with the structure of the students' commentaries, and studying its individual and overall evolution.

### **RÉSUMÉ**

L'étude des conceptions et des croyances des sujets doit s' aborder par des méthodes indirectes, étant donné leur caractère non conscient. Ce travail décrit l'utilisation du "commentaire de texte" pour caractériser les conceptions et les croyances des futurs professeurs sur les mathématiques, l'apprentissage des mathématiques et son enseignement, ainsi que pour voir leur évolution après leurs pratiques. La méthodologie suivie lors de l'analyse des données, qui pourrait être de grande importance pour d'autres recherches sur l'éducation, combine l'analyse qualitatif et l'utilisation des techniques statistiques pour déterminer la structure des tables de

---

\* Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada España.

données qui y sont issues, Et notamment l'analyse factorielle des correspondances et l'analyse log-linear, qui permettent de visualiser la structure originale du texte utilisé, comparant avec cette dernière la structure des résumés des étudiants, et pour étudier leur évolution, aussi bien individuellement que collectivement.

## RESUMO

O estudo das concepções e crenças dos sujeitos deve ser abordado mediante métodos diversos e indiretos, devido ao nível não consciente das mesmas. Neste trabalho se descreve o uso do 'comentário de textos' para caracterizar as concepções e crenças sobre a matemática, o ensino e aprendizagem de um grupo de professores em formação, Assim como sua evolução influi nas práticas de ensino. A metodologia utilizada na análise dos dados, que poderá ser útil para outras investigações educativas, combina a análise qualitativa com o uso de técnicas estatísticas para determinar a estrutura de tabelas de dados obtidos. Mas particularmente, a análise fatorial de correspondência e a análise de logaritmo-linear permitem visualizar a estrutura original do texto utilizado, comparar com a estrutura dos resumos dos estudantes e estudar sua evolução, tanto individualmente como coletivamente.

## 1. INTRODUCCIÓN

La reforma de la enseñanza de la matemática que está en curso (NCTM, 1991; MEC, 1992) propone una matemática abierta a todos los alumnos y por un método más participativo de enseñanza. Estos cambios están fundamentados en una evolución o cambio de la concepción del conocimiento matemático (Ernest, 1991), que da cuenta de esta ciencia como un producto social (Bishop, 1988), emergente del campo de problemas que dan sentido a los conceptos, y relativa a la institución en el seno de la cual alcanza el estatuto de conocimiento a enseñar (Godino & Batanero, 1994).

También la consideración del aprendizaje está cambiando hacia el desarrollo de destrezas de "hacer matemáticas", bajo una perspectiva constructivista (Lerman, 1994). En esta perspectiva se considera que es el alumno quien construye su conocimiento, y que este es una visión personal surgida de su relación con el saber. Pero esta relación está influenciada por las creencias y concepciones del aprendiz.

La formación de profesores de matemáticas tiene que tomar en cuenta estos cambios y tratar de hacer partícipes de ellos a los estudiantes. Pero la caracterización epistemológica de la matemática y la visión constructivista del aprendizaje choca con los usos epistemológicos y educativos en los que se han educado los estudiantes para ejercer la docencia. La misión de los cursos de formación es proponer actividades que produzcan un cambio de perspectiva en los estudiantes sobre estos temas. Para ello habrá que partir de la visión que estos estudiantes tienen, especialmente de las concepciones y creencias sobre las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje.

En la licenciatura de matemáticas de la Universidad de Granada estamos impartiendo la asignatura *Prácticas de Enseñanza de Matemáticas en Institutos de Bachillerato*, en la que se produce el primer contacto de los estudiantes con la actividad de enseñanza como docentes. Interesados en estudiar la influencia que las prácticas de enseñanza tienen en los estudiantes hemos planteado una investigación para poner en claro las concepciones y creencias de éstos y las diferencias

que existen entre las creencias antes y después de realizar el período de prácticas en los centros de enseñanza (Flores, 1995).

El estudio de las creencias y concepciones de los profesores es una área de investigación de interés creciente que se inscribe en una perspectiva interpretativa de la investigación (Thompson, 1992). Para describir las creencias se están empleando una variedad de técnicas, aunque los investigadores se van decantando por métodos indirectos (Pajares, 1992; Thompson, 1992; Ponte, 1992). En ellas se emplean elementos evocadores para poner en común, con los sujetos investigados, los términos de descripción y los problemas ligados al conocimiento y a la enseñanza y aprendizaje.

Con objeto de provocar la aparición de las creencias y concepciones de nuestros estudiantes, nuestra investigación se ha basado en el comentario de un texto en el que se describen los dilemas epistemológicos y didácticos que caracterizan la reforma de la enseñanza de las matemáticas en relación con la enseñanza que ellos han tenido. Partimos de la hipótesis de que los estudiantes reaccionarán a los argumentos y conflictos planteados en el texto, ya que no les son nuevos, sino que han empezado a forjarse a través de su experiencia docente y discente. Esperamos que sean especialmente sensibles a ellos y los reflejen en su comentario del texto. Para llevar a cabo la tarea elegimos como texto para comentar un fragmento del artículo de Moreno y Waldegg (1992) *Constructivismo y Educación matemática*. En este fragmento se presenta la oposición entre *el realismo y el constructivismo* epistemológico y su repercusión en la forma de concebir la enseñanza desde una y otra postura.

A partir de un análisis del contenido del artículo (Weber, 1986; Manning & Cullum-

Swan, 1994), complementado con la ayuda de métodos multivariantes para el análisis de los datos obtenidos a partir de las categorías de análisis identificadas, hemos caracterizado la estructura del texto respecto a estas categorías. Posteriormente hemos aplicado el mismo tipo de análisis a las respuestas de los estudiantes. Los datos obtenidos de las mismas se proyectaron sobre la estructura del texto, con lo que formulamos una caracterización de las creencias y concepciones de los estudiantes. Para estudiar el cambio de estas concepciones y creencias hemos hecho que éstos realicen el comentario en dos ocasiones: al comienzo y al final del curso, comparando las respuestas de los estudiantes en esas dos ocasiones.

Consideramos que el estudio que presentamos tiene interés no sólo desde el punto de vista de los resultados sobre la caracterización de las concepciones de los profesores. Metodológicamente ofrecemos un ejemplo de análisis que muestra la potencia de las técnicas multivariantes como ayuda en la síntesis, determinación de relaciones e interpretación de sistemas complejos de datos cualitativos. En opinión de Gras (1992) el análisis multivariante constituye una ruptura epistemológica con la estadística clásica que concierne a la vez a los objetivos, los medios técnicos para alcanzarlos, el tipo de datos tratados, los sujetos de análisis, los métodos matemáticos empleados y los conceptos implícitos en los mismos. Como señalan Escofier y Pagés (1988, p. 1), estas técnicas “*permiten utilizar las facultades de percepción que usamos a diario: sobre los gráficos del análisis factorial, se ven en el propio sentido del término (con los ojos y el misterioso análisis que nuestro cerebro hace de una imagen) reagrupamientos, oposiciones, tendencias imposibles de discernir directamente sobre una tabla de datos, incluso después de un examen prolongado*”.

## 2. DESCRIPCIÓN DEL INSTRUMENTO DE ANÁLISIS: LA REJILLA

Las creencias y concepciones epistemológicas que estamos estudiando se sitúan en una serie de planos de reflexión que conviene diferenciar. Algunas de ellas se refieren al conocimiento matemático, otras se refieren a la práctica de la enseñanza y al aprendizaje de las matemáticas, y un tercer grupo hace referencia al conocimiento sobre didáctica de las matemáticas.

Para realizar el análisis de contenido del texto propuesto y de los protocolos de los estudiantes vamos a considerar la variable categórica que denominamos *plano* con los siguientes cinco valores: Los dos primeros corresponden a la reflexión epistemológica sobre el conocimiento matemático (*planos epistemológico y psicoepistemológico - o cognitivo-epistemológico*). Los dos siguientes a la reflexión sobre la enseñanza (*didáctico, y psicodidáctico o cognitivo-didáctico*). El último, a la reflexión epistemológica sobre el

conocimiento didáctico (*epistemología de la didáctica*).

En cada plano hemos destacado una nueva variable que describe las etapas de interacción del sujeto con los problemas. En primer lugar, consideramos la forma en que los sujetos interactúan con el conocimiento, después la caracterización del conocimiento y, por último, la forma en que se valida. Esto ha dado lugar a una nueva variable que denominamos *etapa*, cuyos valores son: *gnoseológica, ontológica y validativa*.

En el texto se hace alusión de manera diferenciada a la postura *realista* y a la postura *constructivista*, por lo que para diferenciar la forma en que se caracteriza cada postura hemos definido la variable que llamamos *polo*.

Estos análisis nos han permitido elaborar una tabla de triple entrada o rejilla, que contiene los planos, los procesos o etapas que se producen en cada uno de ellos, y el polo en que se sitúan estas consideraciones. Esta rejilla define una tabla de contingencia tridimensional

PLANOS		ETAPAS		
		Gnoseológica	Ontológica	Validativa
Epistemológico	Epistemológico	- Cómo se llega al conocimiento matemático. Es descubrimiento / creación <i>(Categoría 1)</i>	- Que son las matemáticas - Dónde están - Características del conocimiento matemático - Matemática bella / matemática útil <i>(Categoría 6)</i>	- Quién establece la validez del conocimiento matemático - Criterios para validar - Racionalidad matemática en sistemas formales / aceptabilidad histórica <i>(Categoría 11)</i>
	Psicoepistemológico	- Cómo llega el sujeto a incrementar su conocimiento matemático <i>(Categoría 2)</i>	- Qué es incrementar el conocimiento matemático del sujeto <i>(Categoría 7)</i>	- Criterios para considerar que el individuo ha incrementado su conocimiento matemático <i>(Categoría 12)</i>
Psicodidáctico	- Cómo llega el sujeto a aprender matemáticas <i>(Categoría 3)</i>	- Qué es aprender matemáticas <i>(Categoría 8)</i>	- Quién valida el aprendizaje matemático - Cómo validar el aprendizaje - Criterios <i>(Categoría 13)</i>	
Didáctico	- Cómo enseñar matemáticas <i>(Categoría 4)</i>	- Qué es la enseñanza de las matemáticas <i>(Categoría 9)</i>	- Quién establece el currículum de matemáticas - Criterios para establecer el currículum - Quién valida la enseñanza - Criterios para validar la enseñanza <i>(Categoría 14)</i>	
Epistemología De la Didáctica	- Cómo acceder al conocimiento didáctico <i>(Categoría 5)</i>	- Qué es el conocimiento didáctico - Cómo es el conocimiento didáctico - Características del conocimiento didáctico <i>(Categoría 10)</i>	- Quién valida el conocimiento didáctico (sobre enseñanza) - Criterios para validar el conocimiento didáctico <i>(Categoría 15)</i>	

Figura 1: Rejilla para clasificar las unidades de información según Planos y Etapas

cuyas variables y categorías son: Variable *etapa* con las categorías: *acceso*, *objeto* y *validación* (códigos ACCE, OBJE, VALI); variable *plano*, con las categorías: *epistemología*, *psicoepistemología*, *psicología*, *didáctica*, *epistemología de la didáctica* (Códigos: EPIS, SIEP, PSIC, DIDA, EPDI) y variable *polo* con las categorías: *realismo*, *constructivismo* (Códigos: REAL, CONS).

La *Figura 1* muestra esta rejilla diferenciando los valores de las dos primeras variables: plano y etapa.

### 3. CARACTERIZACION DE LA ESTRUCTURA DEL TEXTO MEDIANTE EL ANÁLISIS DE CORRESPONDENCIA

Una vez definidas las variables y para estudiar la estructura del texto, lo dividimos en unidades de información e identificamos cada unidad con una posición en la rejilla (según el polo, plano y etapa al que se refiriera). Para mostrar esta asignación veamos algunas unidades del texto y las categorías de la tabla presentada en la *Figura 1* a que han sido asignadas:

*“El formalismo exige extirpar el significado de los objetos a fin de trabajar exclusivamente con las “formas” y con las relaciones entre dichos objetos que se derivan de la base axiomática de las teorías”.*

Categoría 1: Plano epistemológico, etapa gnoseológica, polo realista.

*El “conocimiento matemático”, para la epistemología genética, es resultado de esta reflexión sobre acciones interiorizadas - la abstracción reflexiva-.*

Categoría 2: Plano psicoepistemológico, etapa gnoseológica, polo constructivista.

*La tarea del profesor consiste en “inyectar” el conocimiento en la mente del estudiante a través de un discurso adecuado.*

Categoría 4: Plano didáctico, etapa gnoseológica, plano realista.

*(El formalismo) que grosso modo, nos presenta a esta disciplina como un cuerpo estructurado de conocimientos.*

Categoría 6: Plano epistemológico, etapa ontológica, polo realista.

*(El educador constructivista) apelando a las estructuras anteriores de que el estudiante dispone, le permitan asimilar y acomodar nuevos significados del objeto de aprendizaje.*

Categoría 8: Plano psicodidáctico, etapa ontológica, polo constructivista.

*La didáctica, bajo este punto de vista, busca optimizar la tarea del profesor mediante una especie de combinatoria de contenidos.*

Categoría 15: Plano metadidáctico, etapa validativa, polo realista.

Contando el número de unidades del texto que encajan en cada casilla de la figura 1 hemos obtenido una tabla de contingencia (*Tabla 1*). A esta tabla le hemos aplicado el Análisis de Correspondencias Múltiple (Greenacre, 1993). Este tipo de análisis extiende el análisis de correspondencias simples a tablas de variables cualitativas clasificadas por tres o más variables y puede considerarse una extensión del análisis de componentes principales a variables cualitativas. La técnica trabaja con las frecuencias relativas condicio-

nales de las categorías de cada variable respecto al resto, es decir, con las filas de la matriz de Burt. De este modo cada categoría de cada variable se representa por un punto en un espacio n-dimensional ( $n=10$ ). Ello permite definir combinaciones lineales de categorías (de los vectores que unen los puntos correspondientes con el origen), coordenadas de las categorías sobre los ejes y correlaciones entre ejes y categorías (coseno del ángulo que forman).

El análisis ha producido cinco factores con más del 5% de inercia, de los cuales los tres primeros explican el 75,7% de dicha inercia total, por lo que restringiremos el análisis a estos tres factores. El valor Chi cuadrado obtenido ha sido significativo y la calidad de representación es mayor que 0.879, por lo que creemos que la representación gráfica obtenida reproduce suficientemente las interrelaciones entre el conjunto de categorías de las diferentes variables. La tabla 2 muestra los resultados obtenidos mediante el paquete de programas BMDP (Dixon y Cols., 1993).

En la Figura 2 representamos conjuntamente los dos primeros factores. El primero lo podemos denominar *Polaridad realismo-constructivismo* y explica el 36,7% de la inercia total. Las categorías que más contribuyen a la inercia explicada por este eje son: VALI (validación), CONS (constructivismo), SIEP (psicoepisteológico) y REAL (realismo). El segundo factor *distinción entre acceso y objeto en la variable etapa*, explica 24.9 % de la inercia total. Las categorías que más contribuyen a definir este factor son DIDA (didáctico), ACCE (acceso), OBJE (ontológica u objeto) y EPIS (epistemológico). Por último, el tercer factor, explica el 14.2% de la inercia total, por lo que su importancia relativa es mucho menor y no presentaremos las representaciones gráficas. Las variables y valores que más contribuyen a su definición son: PSIC (psicológico) y DIDA (didáctico), las que se oponen mutuamente en este eje. Podemos explicar esta oposición por la diferente frecuencia marginal de estas dos categorías de la variable *plano*.

Polo	Plano	Etapa			TOTAL
		ACCE	OBJE	VALI	
Realismo (REAL)	EPIS	4	12	6	22
	SIEP	1	2	0	3
	PSICO	1	0	3	4
	DIDA	5	5	3	13
	EPDI	0	2	2	4
	TOTAL	11	21	14	46
Constructivismo (CONS)	EPIS	0	9	0	9
	SIEP	4	9	0	13
	PSICO	3	2	0	5
	DIDA	7	0	0	7
	EPDI	0	0	0	0
	TOTAL		14	20	0

Tabla 1: Frecuencias observadas de las unidades de información del fragmento del artículo según las variables etapa, plano y polo

Este análisis nos ha mostrado que el fragmento del artículo de Moreno y Waldegg (1992) tiene una estructura paralela, en la que cada línea trata uno de los *polos*, líneas paralelas que no tratan por igual las demás variables. Así, se observa que el *polo realista* enfatiza los aspectos prescriptivos (validación de la enseñanza y el aprendizaje, como consecuencia, validación del conocimiento didáctico y, en algún sentido, validación formal del conocimiento matemático). El *polo constructivista* se centra en aspectos psicológicos, evitando entrar en analizar las formas de validar el conocimiento y los procesos de aprendizaje, que presenta como personales.

El análisis de correspondencias nos muestra además una dimensión que se extiende en la oposición entre las *etapas gnoseológica* y ontológica. El tratamiento que el fragmento da a los planos *didáctico* y *psicológico* es preferentemente gnoseológico (¿cómo se enseña? ¿cómo se aprende?), mientras que el tratamiento ontológico afecta preferentemente al plano epistemológico, en el realismo (¿qué es la matemática?), y al *psico-epistemológico* en el constructivismo (¿qué es conocer matemáticas?).

Gracias a la rejilla elaborada y a la técnica de análisis de datos utilizada, conocemos mejor la estructura y el contenido del fragmento, y nos encontramos en mejores condiciones para

analizar la forma en que los estudiantes resumen el texto y realizan el comentario.

#### 4. ASOCIACIONES PARCIALES Y MARGINALES EN LA TABLA DE CONTINGENCIA DE LOS RESÚMENES DE LOS ESTUDIANTES. SIGNIFICACIÓN ESTADÍSTICA MEDIANTE EL ANÁLISIS LOGARÍTMICO- LINEAL

El comentario de texto fue realizado por 25 estudiantes de quinto curso de matemáticas (especialidad de Metodología) al comienzo y al final del curso, en el contexto de la asignatura *Prácticas de Enseñanza de Matemáticas*. Cada protocolo fue descompuesto en unidades de información, de modo similar a como lo hicimos con el texto comentado, y clasificado según la casilla de la rejilla. Algunas de estas unidades son:

*El formalismo consiste en dar teorías (=axiomas) y ver las relaciones que se derivan.*

Categoría 6: Plano epistemológico, etapa ontológica, polo realista.

*En cuanto al modelo de enseñanza, el realismo matemático... concede un papel pasivo al sujeto.*

Categoría 4: Plano didáctico, etapa ontológica, polo realista.

ROW	NAME	MASS	QLT	INR	FACT COR2 CTR			FACT COR2 CTR			FACT COR2 CTR		
					AXIS 1			AXIS 2			AXIS 3		
1	ACCE	0.104	0.879	0.093	-0.432	0.208	0.057	0.759	0.643	0.261	-0.124	0.017	0.012
2	OBJE	0.171	0.893	0.064	-0.135	0.048	0.009	-0.547	0.792	0.222	-0.075	0.015	0.007
3	VALI	0.058	0.960	0.115	1.167	<b>0.689</b>	0.234	0.246	0.031	0.015	0.440	0.098	0.086
4	EPIS	0.129	0.916	0.078	0.332	0.182	0.042	-0.486	0.390	0.133	-0.235	0.091	0.054
5	SIEP	0.067	0.973	0.108	-0.957	0.567	0.180	-0.392	0.095	0.045	0.248	0.039	0.031
6	PSIC	0.038	0.967	0.104	0.003	0.000	0.000	0.653	0.154	0.070	1.311	0.619	0.492
7	DIDA	0.083	0.903	0.095	-0.031	0.001	0.000	0.826	0.597	0.247	-0.565	0.279	0.203
8	EPDI	0.017	0.990	0.115	1.405	0.287	0.097	-0.260	0.010	0.005	0.704	0.072	0.063
9	REAL	0.192	0.907	0.064	0.535	<b>0.853</b>	0.162	0.036	0.004	0.001	-0.122	0.044	0.022
10	CONS	0.142	0.907	0.087	-0.724	<b>0.853</b>	0.219	-0.049	0.004	0.001	0.165	0.044	0.029

Tabla 2. Resultados del análisis de correspondencias

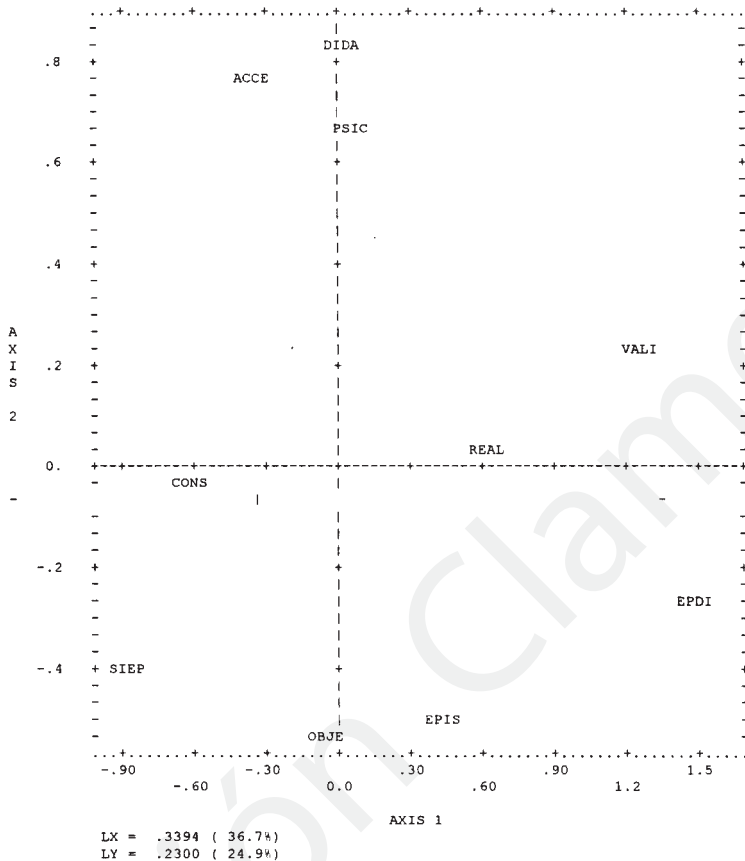


Figura 2. Estructura del fragmento del texto. Representación gráfica en el plano del primero y segundo factores

De este modo se obtuvieron 25 tablas de contingencia (una por estudiante) y otra tabla similar con los datos agregados del grupo, todas ellas con una estructura análoga a la presentada en la *Tabla 1*, aunque con las lógicas diferencias en las frecuencias de las diferentes celdas, pues según las ideas previas de los estudiantes cada uno concedió un peso mayor o menor a las variables que hemos descrito.

Una vez analizado el texto hemos construido una tabla de contingencia para los datos obtenidos del resumen de cada estudiante en el pre-test y post-test. Sumando los valores

de cada variable en el pre-test y post-test, hemos obtenido la tabla 3, que comprende el número de unidades de los resúmenes de todos los estudiantes en cada categoría. Esta tabla nos permite comparar los resultados obtenidos por el grupo completo en pre-test y post-test.

La realización de un análisis multivariante permitirá estudiar la interacción entre las tres variables consideradas: *etapa*, *plano* y *polo*, y entre estas tres y la variable *test* (antes, después). Para ello, el siguiente paso del estudio se ha centrado en el análisis de la *Tabla 3*. Vamos a estudiar sobre esta tabla, no sólo la estructura de las asociaciones de las



categorías de las diferentes variables, sino también explorar si los estudiantes han enfatizado una de las categorías de una variable frente a otras. Por ello, en esta fase del estudio se ha aplicado un modelo logarítmico lineal, empleando el paquete estadístico BMDP.

El propósito es estudiar si existen diferencias significativas en las frecuencias de cada categoría en una misma variable y qué asociaciones se dan entre categorías de distintas variables. Ello es posible por los contrastes asociados al modelo que hacen referencia a las distribuciones marginales y condicionadas por una o varias variables. Para ello utilizamos un modelo completo, incluyendo las interacciones hasta orden tres,

puesto que el contraste sobre el efecto de todas las interacciones de orden tres dio un resultado significativo ( $\chi^2=115.63$ ,  $p=0.0000$ ) y el estudio de las interacciones de cuarto orden no dio resultado significativo. En la tabla 4 aparecen los resultados de los contrastes de asociaciones parciales y marginales. En esta tabla, llamamos *e* a la *etapa*, *p* al *plano*, *P* al *polo* y *t* al *test*. De esta forma, las interacciones de orden dos sólo contemplan las iniciales de estas variables. Así, *pP*, por ejemplo, es la interacción *plano-polos*.

Como resultado, observamos un efecto parcial de cada una de las variables *etapa* y *plano*, aunque no del *polo* y del *test*. Se observa que no hay diferencia global del número total de unidades de información entre *pre-test* y *post-*

test	Polo	plano	etapa			TOTAL	
			acceso	objeto	valida		
antes	Realismo	epis	25	99	7	131	
		siep	0	13	0	13	
		psico	18	0	17	35	
		dida	55	21	1	77	
		epdi	0	2	0	2	
		TOTAL	98	135	25	258	
	Constructivismo	epis	0	57	0	57	
		siep	12	76	0	88	
		psico	21	27	0	48	
		dida	79	0	0	79	
		epdi	0	0	0	0	
		TOTAL	112	160	0	272	
	después	Realismo	epis	19	105	16	140
			siep	0	15	0	15
psico			16	0	19	35	
dida			45	11	7	63	
epdi			0	2	7	9	
TOTAL			80	133	49	262	
Constructivismo		epis	0	61	0	61	
		siep	24	64	0	88	
		psico	22	25	0	47	
		dida	59	0	0	59	
		epdi	0	0	0	0	
		TOTAL	105	150	0	255	

Tabla 3. Frecuencias de cada variable en el total de resúmenes de los estudiantes, clasificadas según test, polo, plano y etapa

	Asociación parcial		Asociación marginal	
	x <sup>2</sup>	Prob.	x <sup>2</sup>	Prob.
etapa	<b>451.47</b>	0.0000		
plano	<b>485.28</b>	0.0000		
Polo	0.05	0.8295		
test	0.16	0.6878		
ep	580.31	0.0000	<b>584.71</b>	0.0000
eP	106.39	0.0000	<b>109.45</b>	0.0000
et	8.00	0.0183	9,60	0.0082
pP	197.50	0.0000	<b>200.48</b>	0.0000
pt	7.73	0.1019	9.29	0.0543
Pt	0.17	0.6757	0.42	0.5183
epP	141.09	0.0000	<b>140.53</b>	0.0000
ept	10.74	0.0567	14.03	0.0507
ePt	0.00	1.0000	0.51	0.4740
pPt	0.70	0.7054	114	0.9861

Tabla 4. Contrastes de asociaciones parciales y marginales sobre los datos presentados en la Tabla 3

test, ni tampoco entre *constructivismo* y *realismo*.

Por el contrario, la variable etapa presenta importantes diferencias que han sido estadísticamente significativas, como pone de manifiesto el análisis. Las referencias al *objeto* hechas por los alumnos (578) superan significativamente a la del *acceso* (395) y las dos se diferencian notablemente de la *validación* (74). (Tabla 4).

Asimismo, hay una diferencia significativa entre las diversas categorías de la variable plano, correspondiendo la máxima frecuencia a *epistemología* (389) y *didáctica* (278). En una posición intermedia se sitúa la *psicología* (204 como *psicología epistemológica*, y 165 como *psicodidáctica*).

Respecto a las asociaciones marginales han de ser estadísticamente significativas las siguientes: etapa por plano, etapa por polo, plano por polo, etapa por polo por plano. Ello quiere decir que se ha encontrado una asociación estadísticamente significativa entre cada una de estas combinaciones de variables.

Influenciados por el contenido del fragmento del texto, los estudiantes han atendido más a

los aspectos ontológicos que a los gnoseológicos, y mucho menos a los validativos. Igualmente, la estructura del texto, en el que hemos observado que existen notables diferencias en el número de unidades de cada categoría, ha repercutido en los resúmenes de los estudiantes. Esta influencia de la estructura del texto sobre todas las demás variables podría justificar el que no sean significativas las diferencias entre los resúmenes realizados en el pre-test y en el post-test.

### 5. ESTUDIO COMPARATIVO DE LA ESTRUCTURA DE LOS RESÚMENES DE LOS ESTUDIANTES CON LA DEL TEXTO

Una vez analizadas las estructuras de asociaciones del texto y de las respuestas los estudiantes, querernos determinar hasta qué punto se corresponden estas dos estructuras, o bien aparecen algunas diferencias atribuibles a las concepciones de los estudiantes que han influido en los resúmenes que presentan.

Este estudio comparativo vamos a hacerlo en dos fases: En la primera realizaremos un

estudio individualizado de las respuestas de cada uno de los estudiantes. Para ello proyectamos, sobre los ejes factoriales del texto, un perfil de las respuestas de cada estudiante como variables suplementarias. Este perfil se define mediante un vector cuyas coordenadas son las distribuciones marginales de las tablas correspondientes al estudiante. Estas variables suplementarias no intervienen en el análisis, sino que simplemente se proyectan sobre los ejes factoriales que se han obtenido en el mismo.

Debido al principio baricéntrico, cada estudiante, considerado como una variable suplementaria a las estudiadas en el análisis de correspondencia, se proyectará en una posición de los ejes que indica el lugar geométrico de las asociaciones que presenta con las diferentes variables que constituyen el eje. Por ello, la proyección de variables suplementarias se considera similar a la regresión múltiple entre

variables cuantitativas. Una posición privilegiada sobre un eje es, según Escofier y Pagés (1988), una indicación de la asociación entre la nueva variable y el eje. Debido al número elevado de sujetos hemos separado las proyecciones M conjunto de datos en el pre-test y post-test, para que los gráficos se interpreten con mayor claridad. Ello nos permitirá apreciar los cambios de los sujetos particulares entre pre-test y post-test, así como detectar los casos atípicos, indicativos de concepciones diferenciadas.

La segunda fase es un estudio conjunto del total de los resúmenes de todos los alumnos. Para ello hemos proyectado las distribuciones marginales de la tabla de contingencia del conjunto de los 25 estudiantes, En este caso, para no aumentar el número de gráficos se proyectan sobre los mismos ejes los datos del pre-test y del post-test.

SUMISMENTARY ROWS								
ROW	NAME	QI-T	FACTOR	COR2	FACTOR	COR2	FACTOR	COR2
			AXIS 1		AXIS 2		AXIS 3	
1	A1	0.995	0.038	0.022	0.142	0.302	-0.013	0.002
2	A2	0.949	-0.221	0.386	-0.210	0.347	0.121	0.115
3	A3	0.890	-0.297	0.416	0.109	0.056	0.162	0.125
4	A4	0.961	-0.210	0.475	0.153	0.251	-0.131	0.184
5	A5	0.870	-0.375	0.615	-0.236	0.244	-0.026	0.003
6	A6	0.968	-0.031	0.011	-0.133	0.197	-0.199	0.441
7	A7	0.994	-0.171	0.025	0.857	0.621	-0.614	0.319
8	A8	0.996	-0.309	0.910	-0.030	0.009	-0.045	0.020
9	A9	0.960	-0.318	0.766	-0.155	0.182	-0.030	0.007
10	A10	0.879	-0.302	0.713	0.099	0.076	0.061	0.029
11	A11	0.922	-0.059	0.022	0.235	0.353	-0.286	0.526
12	A12	0.995	-0.127	0.207	-0.020	0.005	-0.001	0.000
13	A13	0.915	-0.277	0.583	-0.182	0.252	-0.102	0.078
14	A14	0.965	-0.174	0.309	0.123	0.154	-0.073	0.054
15	A15	0.949	-0.195	0.328	0.112	0.108	0.004	0.000
16	A16	0.932	-0.269	0.340	0.347	0.567	-0.036	0.006
17	A17	0.485	-0.117	0.039	0.286	0.229	0.000	0.000
18	A18	0.952	-0.136	0.162	-0.201	0.354	0.164	0.237
19	A19	0.995	-0.103	0.097	0.016	0.002	0.116	0.123
20	A20	0.804	-0.257	0.528	-0.112	0.101	0.060	0.028
21	A21	0.910	-0.032	0.007	0.055	0.022	0.076	0.042
22	A22	0.951	-0.210	0.201	0.356	0.581	-0.171	0.133
23	A23	0.907	-0.188	0.201	0.263	0.394	0.157	0.140
24	A24	0.878	-0.186	0.251	-0.224	0.366	-0.144	0.151
25	A25	0.854	-0.243	0.644	0.012	0.002	-0.008	0.001

Tabla 5, Resultados de la proyección de los datos individuales de los estudiantes en el pre-test

### 5.1 PROYECCIÓN INDIVIDUALIZADA DE LOS ESTUDIANTES ANTES Y DESPUÉS DE LAS PRÁCTICAS DE ENSEÑANZA

En la *Tabla 5* presentamos los datos correspondientes a los comentarios que han realizado los estudiantes al comienzo del curso. La calidad de la representación es alta, en general, por encima de 0.854, con excepción del alumno A17. La *Figura 3* muestra gráficamente esta posición de los estudiantes en relación con los dos factores principales del texto.

En la *Tabla 5* y la *Figura 3* se aprecia que los estudiantes se distribuyen a lo largo del segundo factor, no apareciendo gran dispersión respecto al primer eje. Se podría decir que los resúmenes de los alumnos son prácticamente unidimensionales, ya que todos aparecen hacia la parte negativa del primer factor y muy próximos al origen. En todo caso, podremos diferenciar entre los grupos de alumnos con coordenadas positivas y negativas en el segundo factor. No obstante, quitando el caso atípico del alumno A7, hay una graduación muy uniforme en el resto, no apareciendo grupos claramente diferenciados. Hay más bien un

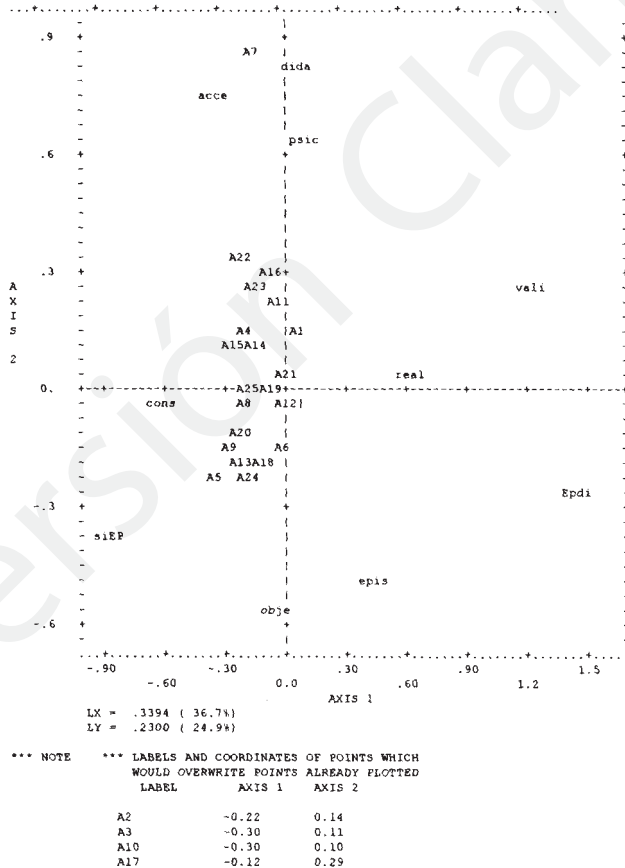


Figura 3. Representación gráfica sobre el plano del primer y segundo factor. Proyección de los estudiantes (PRE-TEST)

continuo de respuestas que tipologías que diferencien las mismas.

La proyección de los comentarios realizados al final de curso aparecen en la *Tabla 6* y la *Figura 4*. Se observa que la calidad de la representación es, en general, alta, por encima de 0.85, con excepción de los alumnos A9 y A3 con una calidad moderada.

Al comparar la posición en el primer eje de los comentarios realizados al final del curso con los comentarios de principio de curso no se observan cambios globales. El rango de variación de las coordenadas se sitúa, de nuevo, entre el alumno A5 ( $x=-0.347$ ) y A9 ( $x=0.076$ ), por lo que podemos observar que, también en el post-test, los estudiantes se han inclinado por el polo constructivista. Sin

embargo, observamos algunos cambios sobre este eje de alumnos particulares, (A9 ha pasado de una posición constructivista a una posición más ecléctica; A24 ha aumentado su tendencia hacia ‘el constructivismo’). Observamos que en el segundo eje hubo un aumento de la dispersión de los datos. Hay ahora una mayor división de los estudiantes en cuanto al énfasis que hacen del *objeto y epistemología* o bien del *acceso y la didáctica*.

Algunos alumnos enfatizan más el objeto y la epistemología al final del curso (A2 y A13). El estudiante A4 ha aumentado su sensibilidad hacia el *acceso* y la *didáctica*. Otros enfatizaban preferentemente, con mayor o menor intensidad, el *plano didáctico y la etapa de acceso* y ahora muestran un equilibrio en este factor (A7, A23 y A16).

SUPPLEMENTARY ROWS

ROW	NAME	QLT	FACTOR COR2 AXIS 1		FACTOR COR2 AXIS 2		FACTOR COR2 AXIS 3	
1	A1	0.995	0.038	0.022	0.142	0.302	-0.013	0.002
2	A2	0.949	-0.221	0.386	-0.210	0.347	0.121	0.115
3	A3	0.890	-0.297	0.416	0.109	0.056	0.162	0.125
4	A4	0.961	-0.210	0.475	0.153	0.251	-0.131	0.184
5	A5	0.870	-0.375	0.615	-0.236	0.244	-0.026	0.003
6	A6	0.968	-0.031	0.011	-0.133	0.197	-0.199	0.441
7	A7	0.994	-0.171	0.025	0.857	0.621	-0.614	0.319
8	A8	0.996	-0.309	0.910	-0.030	0.009	-0.045	0.020
9	A9	0.960	-0.318	0.766	-0.155	0.182	-0.030	0.007
10	A10	0.879	-0.302	0.713	0.099	0.076	0.061	0.029
11	A11	0.922	-0.059	0.022	0.235	0.353	-0.286	0.526
12	A12	0.995	-0.127	0.207	-0.020	0.005	-0.001	0.000
13	A13	0.915	-0.277	0.583	-0.182	0.252	-0.102	0.078
14	A14	0.965	-0.174	0.309	0.123	0.154	-0.073	0.054
15	A15	0.949	-0.195	0.328	0.112	0.108	0.004	0.000
16	A16	0.932	-0.269	0.340	0.347	0.567	-0.036	0.006
17	A17	0.485	-0.117	0.039	0.296	0.229	0.000	0.000
18	A18	0.952	-0.136	0.162	-0.201	0.354	0.164	0.237
19	A19	0.995	-0.103	0.097	0.016	0.002	0.116	0.123
20	A20	0.804	-0.257	0.528	-0.112	0.101	0.060	0.028
21	A21	0.910	-0.032	0.007	0.055	0.022	0.076	0.042
22	A22	0.951	-0.210	0.201	0.356	0.581	-0.171	0.133
23	A23	0.907	-0.188	0.201	0.263	0.394	0.157	0.140
24	A24	0.878	-0.186	0.251	-0.224	0.366	-0.144	0.151
25	A25	0.854	-0.243	0.644	0.012	0.002	-0.008	0.001

Tabla 6. Resultados de la proyección de los datos individuales de los estudiantes en el post-test

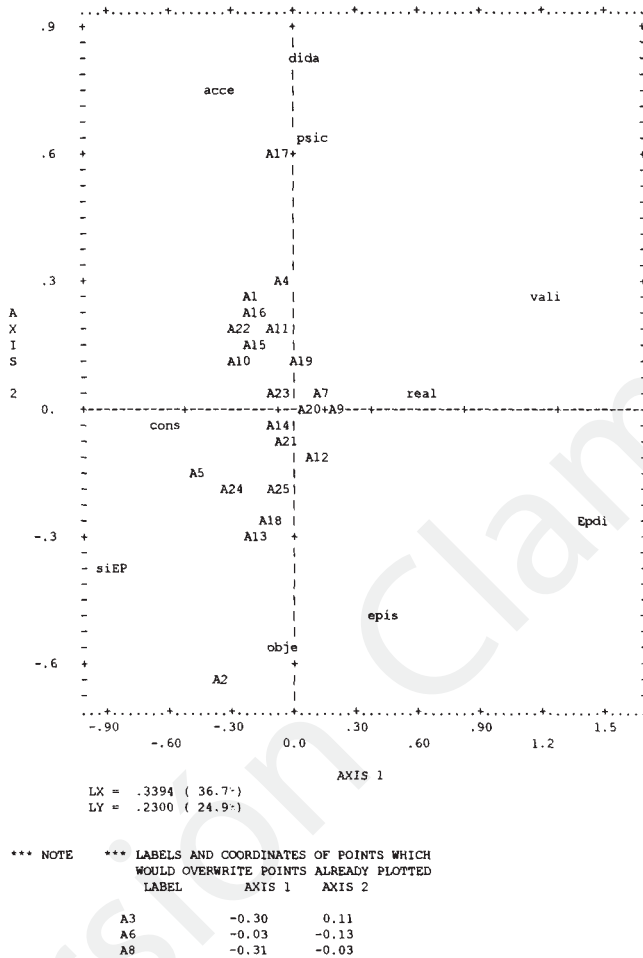


Figura 4. Representación gráfica sobre el plano del primero y segundo factores. Proyección de los estudiantes (POST-TEST)

## 5.2. PROYECCIÓN CONJUNTA DEL GRUPO Y DE LOS ESTUDIANTES DEL ESTUDIO DE CASOS

Con el objeto de describir la “tendencia general” de las respuestas del grupo, y la posible variación en esa tendencia, abordamos el estudio de las respuestas conjuntas de todos los estudiantes, considerada como una variable complementaria.

Las tablas y gráficos con los resultados de la inclusión de estos datos en el análisis de correspondencias se reflejan en la *Tabla 7* y en la *Figura 5*. La calidad de representación es muy alta para todos los puntos, por encima de 0.849.

En el primer factor, se observa en la tendencia global del grupo lo que ya se ha observado en los alumnos individuales. La tendencia del grupo en el pre-test se orientaba ligeramente hacia el constructivismo, y esta tendencia

ROW	NAME	QLT	FACTOR COR2		FACTOR COR2		FACTOR COR2	
			AXIS 1		AXIS 2		AXIS 3	
1	AL5pre	0.849	-0.357	0.588	-0.232	0.248	-0.031	0.004
2	AL12pre	0.979	-0.266	0.601	0.017	0.002	-0.075	0.047
3	AL5pos	0.968	-0.479	0.697	-0.164	0.082	-0.112	0.038
4	AL12pos	0.946	0.216	0.220	-0.167	0.132	-0.026	0.003
5	GRUpre	0.973	-0.199	0.558	0.050	0.035	-0.046	-0.030
6	GRUpos	0.976	-0.142	0.571	0.011	0.004	0.019	0.011

Tabla 7. Resultados de la proyección del grupo y de los estudiantes A5 y A12 (pre-test y post-test)

prácticamente se conserva. En el segundo factor, no se aprecian cambios en las tendencias del grupo en relación a este eje, a pesar de que individualmente había bastante variabilidad y también cambios de estudiantes particulares.

La Figura 5 muestra que las categorías de las distintas variables consideradas para los datos de los estudiantes y los correspondientes al texto están representadas en posiciones muy próximas entre sí, de lo que podemos inferir que el conjunto de las respuestas de los estudiantes constituye un “buen resumen” del extracto del artículo; no se ha apreciado globalmente en este conjunto de respuestas de los estudiantes constituye un “buen resumen” del extracto del artículo; no se ha apreciado globalmente en este conjunto de respuestas algún tipo de sesgo en los ítems seleccionados que pudiera ser indicativo de una concepción o creencia común a una mayoría de los estudiantes que enfatizara alguna categoría sobre las restantes. Por el contrario, la variabilidad de los estudiantes que hemos analizado en las secciones anteriores neutralizaría una posible “tendencia sesgada” del grupo.

Se llega a un resultado semejante cuando hemos proyectado los datos del post-test como filas suplementarias en el análisis de correspondencias de la matriz de datos del extracto del texto.

La variación en el comportamiento del grupo

entre pre-test y post-test no es significativa, tal como cabría esperar al contemplar el número de estudiantes que han cambiado significativamente y el número de ellos que han permanecido. Aparece una ligera variación que se dirige hacia una preocupación mayor por la caracterización del conocimiento matemático que por la enseñanza. Una interpretación posible de este hecho se basa en que los estudiantes se encontraron en una clase de *Prácticas de enseñanza de matemáticas*, y tenían las expectativas de que iban a tratar el proceso de enseñanza y no a analizar el objeto matemático. Al recibir un texto que habla del conocimiento matemático y de la enseñanza de las matemáticas, lo resumieron atendiendo a lo que se les presentaba, pero pensando que lo más importante era lo referente a la enseñanza. En las actividades del curso se ha hablado frecuentemente de aspectos epistemológicos, con lo que ha cambiado ligeramente la “jerga” en esta asignatura, y al realizar de nuevo el comentario se han sentido inclinados a aportar más aspectos epistemológicos en ligero detrimento de los didácticos. Pero este cambio ha sido tan ligero que no se puede pensar en un cambio global de creencias y concepciones.

Sólo algunos estudiantes han realizado cambios bruscos que habría que estudiar más a fondo. Pero tal como hemos visto en la primera parte del análisis, el número de estudiantes que permanecen muy próximos a la posición que adoptaron en el pre-test es

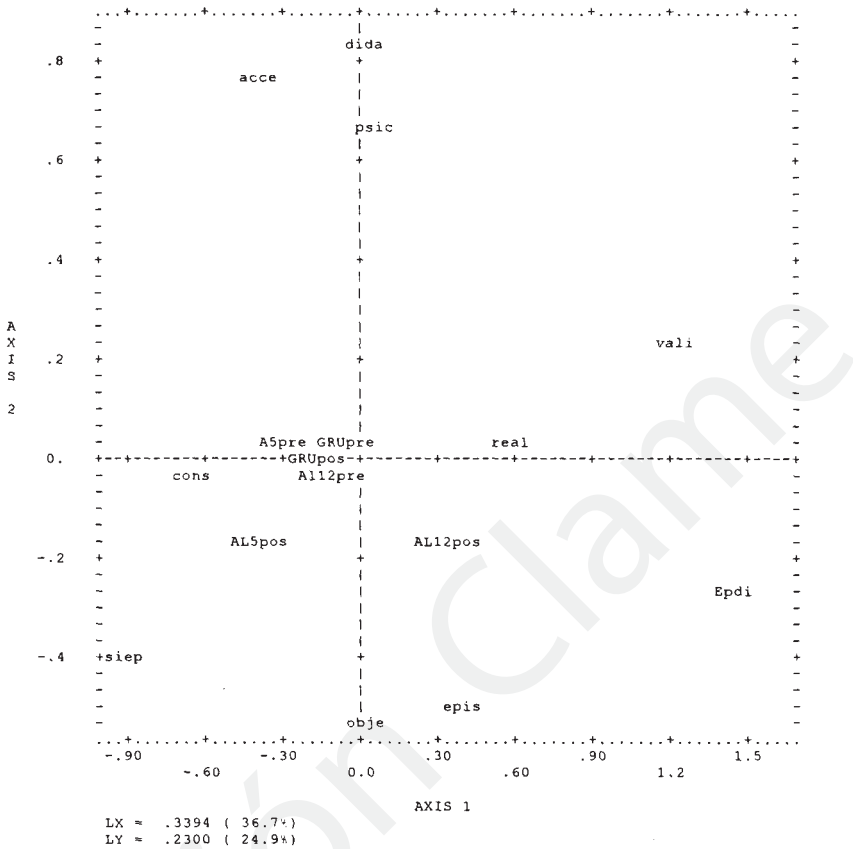


Figura 5. Representación gráfica sobre el plano de] primero y segundo factores. Proyección del grupo de estudiantes y de los estudiantes AS y A12 (pre-test y post-test)

mayor que el número de estudiantes que ha cambiado. Por otra parte, las variaciones se contrarrestan, con una tendencia hacia el centro de los ejes, lo que no es de extrañar, ya que indica que al hacérseles más familiares los términos y las ideas del texto, los estudiantes lo resumen mejor.

### 6. CONCLUSIONES

El análisis de contenido realizado al texto que hemos empleado para el comentario nos ha mostrado que el texto se estructura según dos dimensiones fundamentales: la primera separa las unidades que se refieren al *realismo* de las

que se refieren al *constructivismo*. La segunda separa, en un extremo, la caracterización del *objeto* matemático ([EPIS, OBJE], categoría 6), y en el otro la forma de enseñar matemáticas ([DIDA, ACCE], categoría 4).

La proyección de las unidades de los resúmenes de cada estudiante sobre estos ejes nos permite observar que no hay diferencias significativas en la caracterización que hacen de los dos *polos*, especialmente en el pre-test. Todos caracterizan mejor el *constructivismo* que el *realismo*, aunque en el post-test se pro-



duce una subida en coordenadas respecto del primer eje, de los resúmenes. Esto puede significar que los estudiantes son un poco más sensibles a las diferencias entre las características de los *polos realista y constructivista*; o sea, al hacerse sensibles a la existencia de estos dos *polos*, necesitan citar los argumentos del texto que los diferencia.

Los resúmenes de los estudiantes se distinguen en la manera en que se ocupan por caracterizar el conocimiento matemático o la forma de enseñar. La variación entre resúmenes respecto a este segundo eje es muy amplia. El estudiante A7, por ejemplo, se ocupa sólo de caracterizar la enseñanza, en el pre-test, mientras que el A2, se ocupa sólo del conocimiento matemático en el post-test.

El tercer factor que aparece en el análisis de correspondencias del texto distingue la dimensión *psicológica* frente a la *didáctica* (dimensión aprendizaje-enseñanza). Los resúmenes de los estudiantes correlacionan ligeramente con este eje, y sus valores en éste son próximos entre sí. Hay una mayor preocupación por caracterizar el aprendizaje

que por caracterizar la enseñanza. Al contemplar las *Figuras 3 y 4* se observa que algunos estudiantes han cambiado significativamente de posición entre el pre-test y el post-test. Cuatro estudiantes no han variado prácticamente su posición en los ejes, desde el pre-test al post-test (A3, A8, A10 y A11) y seis varían ligeramente su posición (A5, A13, A15, A18, A21 y A24).

Como vemos, el análisis de correspondencias múltiple realizado nos ha permitido caracterizar tanto el texto como la posición de los estudiantes con relación al mismo, lo que nos ha llevado a mostrar las concepciones y creencias puestas en juego por los estudiantes para cumplimentar el comentario de textos. El comentario de textos como instrumento de obtención de datos, la rejilla como instrumento de clasificación de datos y el análisis de correspondencia múltiple, como procedimiento de estudio de estos datos han sido muy valiosos para realizar este tipo de estudios cualitativos, facilitando la interpretación que inicialmente habíamos hecho de modo cuantitativo.

## BIBLIOGRAFÍA

Bishop, A.J. (1988). Aspectos sociales y culturales de la educación matemática. *Enseñanza de las Ciencias*, 6(2), 121-125.

Cooney, T.J. (1984). Investigating mathematics teachers' beliefs: The pursuit of perceptions. *Paper prepared for short communications at VICME*, Adelaida.

Cooney, TI y Shealy, B.E. (1994). Conceptualizing teacher education as field of inquiry: theoretical and practical implications. En J. P. Ponte y J. F. Matos (Eds.) *Proceedings of the eighteenth International Conference for PME, Vol II* (pp. 225-232). Lisboa.

Dixon, W.J.S. y cols. (1993). *BMDP Statistical software manual*. Berkeley: University of California Press.

Ernest, P. (1991). *Philosophy of mathematics education*. London: Falmer Press.

Escofier, B. y Pagés, J. (1988). *Analysis factorielles simples et multiples; objectifs, méthodes et interpretation*. París: Dunod.

Flores, P. (1995). *Concepciones y creencias de los futuros profesores sobre las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje*. Tesis doctoral inédita. Universidad de Granada.

Godino, J.D. y Batanero, M.C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14(3), 325-355.

Gras, R. (1992). L' analyse des données: une méthodologie de traitement des questions de didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 12(1), 59-72.

Greenacre, M.J. (1993). *Theory and applications of correspondence analysis*. London: Academic Press.

Lerman, S. (1994). "Metaphors for mind and metaphors for teaching and learning Mathematics", En J. da Ponte and J. F. Matos (Eds.) *Proceedings of the eighteenth International Conference for PME, Vol III*. (pp. 144-151). Lisboa.

Manning, P.K. y Cultum-Swan, B. (1994). Narrative, Content, and Semiotic Analysis. En N.K. Denzin y Y.S. Lincoln. (Eds.) *Handbook of Qualitative Research*, (pp. 463-477). London: Sage publications.

MEC (Ministerio de Educación y Ciencia) (1992). *Matemáticas. Secundaria obligatoria*. Madrid: el autor.

Moreno, L. y Waldegg, G. (1992). Constructivismo y educación matemática. *Educación Matemática*, 4(2), 7-15.

NCTM (National Council of Teachers Mathematics) (1991). *Professional standards for teaching mathematics*. Reston: Va. National Council of Teachers of Mathematics.

Pajares, M.F. (1992). Teachers' beliefs and educational research: cleaning up a messy construct. *Review of Educational Research*, 62(3), 307-332.

Ponte, J.P. da (1992). Concepções dos Professores de Matemática e Processos de Formação, En *Educação Matemática*. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional

Thompson, A.G. (1992). "Teachers' Beliefs and Conceptions: A synthesis of the research". En Grouws (Ed.) *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. (pp. 127-146). NCTM. MacMillan, New York

Weber, J. (1986). *Basic content analysis*. Newbury Park, California: Sage University Press.