Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa
Vol. 3, Núm. 2, julio, 2000. pp. 131-170

Elementos de enlace entre lo conceptual y lo algorítmico en el Cálculo integral

Germán Muñoz Ortega*

RESUMEN

Una problemática propia de la enseñanza en la que están inmersos los estudiantes de Cálculo integral consiste en la separación entre lo conceptual y lo algorítmico. Para propiciar el enlace, identificamos teóricamente una condición necesaria que se refiere a la existencia de situaciones problema a partir de las cuales se forman nociones y procedimientos, en estrecha relación, asociados al Cálculo integral. Precisamos, en lo mayormente posible, ese tipo de problemas a través del análisis de los cambios de marco epistémico (Piaget y García, 1994). Justificamos, en cierto modo, porque seleccionamos el marco epistémico de Newton a partir del cual construimos un campo conceptual del Cálculo, en donde son inherentes las nociones de *predicción, acumulación y constantificación de lo variable* (Cantoral, 1990; Cordero, 1994). Realizamos todo lo anterior con base en la epistemología genética, en la teoría de los campos conceptuales (Vergnaud, 1990a) y considerando aspectos epistemológicos del Cálculo integral matizados por la perspectiva del *rediseño del discurso matemático escolar.*

ABSTRACT

A problem in teaching where students of Integral Calculus are immersed consists in the separation between what is conceptual and what is algorithmic. To propitiate the linkage we theoretically identified a necessary condition that refers to the existence of problem situations based on which notions and procedures are formed, closely related and associated to Integral Calculus. To the extent possible we determined this type of problems by analyzing changes in the epistemological framework (Piaget y García, 1994). In a certain manner we justified the reason why we selected Newton's epistemological framework based on which we build a conceptual field of Calculus, where the notions, *prediction, accumulation and constancy of what is variable* (Cantoral, 1990; Cordero, 1994) are inherent. We performed the above based on the genetic epistemology in the theory of conceptual fields (Vergnaud, 1990a) and considering epistemological aspects of Integral Calculus marked by the perspective of *the redesign of school mathematical discourse.*

RÉSUMÉ

L'une des problématiques propres à l'enseignement qui submerge les étudiants en Calcul Intégral est la séparation entre le conceptuel et l'algorithmique. Pour faciliter la liaison entre les deux, nous avons pu identifier, en théorie, une condition nécessaire quant à l'existence de situations-problèmes à partir desquelles se construisent des notions et des procédures, qui se trouvent étroitement associées au Calcul Intégral. Nous tentons de délimiter avec précision les problèmes de ce type par l'analyse de l'évolution des cadres épistémologiques (Piaget y Garcia, 1994). Notre manière de procéder se justifie dans une

* *Departamento de Matemática Educativa del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, México.*

certaine mesure, puisqu'en effet nous avons choisi le cadre épistémologique de Newton à partir duquel nous avons construit un cadre conceptuel du Calcul, où sont inhérentes les notions de *prédiction, accumulation et constantification de ce qui est variable* (Cantoral, 1990; Cordero, 1994). Nous avons réalisé tout ce qui précède sur la base de l'épistémologie génétique, dans le cadre de la théorie des champs conceptuels (Vergnaud, 1990a), et en nous penchant sur les aspects épistémologiques du Calcul Intégral à travers la perspective de *redéfinition du discours mathématique dans le cadre scolaire.*

RESUMO

A problemática do ensino na qual estão imersos os estudantes de cálculo integral consiste na divisão entre o conceitual e o algoritmico. Para possibilitar o vínculo identificamos teoricamente uma condicão necessaria que se refere a existencia de situacões problemas a partir dos quais se formam noções e procedimentos relacionados ao cálculo integral. Precisamos ese tipo de problemas através do analisis dos cambios de marco epistémico (Piaget & Garcia, 1994). Justificamos, en certo sentido, porque selecionamos o marco epistémico de Newton a partir do qual construimos um campo conceitual do Cálculo, onde são inerentes as noções de *predição, acumulação e quantificação da variável* (Cantoral, 1990; Cordero, 1994). Realizamos todo o anterior com base na epistemología genética, na teoría do campos conceituais (Vergnaud, 1990a) e considerando aspectos epistemológicos do Cálculo integral de acordo com a perspectiva do *redisenho do discurso matemático escolar*.

1. INTRODUCCIÓN

En este apartado discutimos algunos aspectos de la problemática tratada y de nuestro problema de investigación así como nuestra hipótesis de trabajo y los objetivos planteados. Enseguida describimos algunas consideraciones acerca de la parte conceptual y sobre la naturaleza de los algoritmos en el Cálculo integral. Finalmente presentamos algunos elementos de enlace entre lo conceptual y lo algorítmico.

1.1. Problemática y problema de investigación

El estudio se ubica dentro del acercamiento enfocado al *rediseño del discurso matemático escolar* seguido por el grupo de investigación del Área de Educación Superior del Departamento de Matemática Educativa del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN (Instituto Politécnico Nacional).

La problemática tratada consiste en un desequilibrio entre lo conceptual y lo algorítmico en la enseñanza del Cálculo integral, es decir, a los estudiantes se les enseñan procedimientos para calcular integrales con los llamados métodos de integración sólo a través de la ejercitación y de una manera separada de la parte conceptual. Es hasta que se abordan las llamadas *aplicaciones* cuando se estudian algunos aspectos de las nociones asociadas a la integral. Sin embargo en algunos casos se reduce la parte conceptual a la definición de integral de Cauchy o a la definición de Riemann; no obstante, se realiza el cálculo de las integrales usando, en cierto modo, el teorema fundamental del cálculo.

De manera que entendemos ese desequilibrio como una separación entre la parte conceptual y la parte algorítmica, y como la diferencia en los tiempos dedicados a la enseñanza de cada una. Por ejemplo, en nuestro sistema educativo se llega a utilizar casi la totalidad de un semestre escolar para la ejercitación del cálculo de primitivas, y sólo en lo que resta del semestre se estudian algunas aplicaciones.

"*...Numerosas investigaciones realizadas muestran, con convergencias sorprendentes, que si bien se puede enseñar a los estudiantes a realizar de forma más o menos mecánica algunos cálculos de derivadas y primitivas y a resolver algunos problemas estándar, se encuentran grandes dificultades para hacerlos entrar en verdad en el campo del cálculo y para hacerlos alcanzar una comprensión satisfactoria de los conceptos y métodos de pensamiento que son el centro de este campo de las matemáticas. Estos estudios también muestran de manera clara que, frente a las dificultades encontradas, la enseñanza tradicional y, en particular, la enseñanza universitaria, aun si tiene otras ambiciones, tiende a centrarse en una práctica algorítmica y algebraica del cálculo y a evaluar en esencia las competencias adquiridas en este dominio. Este fenómeno se convierte en un círculo vicioso: para obtener niveles aceptables de éxito, se evalúa aquello que los estudiantes pueden hacer mejor, y esto es, a su vez, considerado por los estudiantes como lo esencial, ya que es lo que se evalúa...*" (Artigue, 1995, p. 97).

También hemos encontrado indicios de la escasa relación entre lo conceptual y lo algorítmico, en algunos resultados de investigación, por ejemplo:

- *Los estudiantes aprenden los procedimientos del cálculo en un nivel puramente algorítmico, que es construido sobre imágenes conceptuales escasas (Dreyfus, 1990).*
- *Los estudiantes llegan a obtener un razonable nivel de éxito en un cierto número de tareas algorítmicas; sin embargo, las concepciones desarrolladas por los estudiantes son pobres* (Artigue, 1991).
- *Los estudiantes pueden calcular primitivas más bien que integrar; por ejemplo, cuando se les enfrenta con un problema típico de integración muy pocos estudiantes lo reconocen como tal* (Artigue, 1991).
- *El profesor y el estudiante, aprenden a "decir" lo que es la integral y su representación geométrica (área bajo la curva), sin embargo, difícilmente alcanzan a ver una metodología que les permita estudiar fenómenos de variación continua, sólo la conciben como una herramienta que los provee de algoritmos eficientes, a los cuales hay que buscarles aplicación* (Cordero, 1992).

La problemática anterior se ha convertido en un motor potente para el desarrollo de investigaciones didácticas en el campo conceptual del cálculo. También ha motivado numerosos proyectos de innovación de la enseñanza, en especial en los niveles de la educación media y el ciclo básico universitario. Se pueden citar casos como la renovación global del currículo en Francia y Australia, o como las innovaciones y experimentaciones de cada vez mayor amplitud en los Estados Unidos (Artigue & Ervynck, 1992; citado en Artigue, 1995).

De manera que este proyecto surge motivado por la problemática común en diversos países, incluyendo el nuestro, la cual se caracteriza por su importancia capital en la disciplina que desarrollamos.

Nos cuestionamos si dicha problemática es propiciada por el discurso matemático escolar vigente o existe realmente una separación entre lo conceptual y lo algorítmico en el Cálculo integral.

Así, nuestro problema de investigación consiste en entender si las nociones y los algoritmos, en el Cálculo integral, están enlazados y qué elementos permitirían enlazarlos.

Si encontramos que las nociones y los algoritmos están enlazados, pero el discurso matemático escolar propicia su separación, entonces habría que rediseñar el discurso matemático escolar de tal forma que propicie su enlazamiento.

Y si encontramos que las nociones y los algoritmos no están enlazados, sería deseable que el discurso matemático escolar propiciara su enlazamiento.

Nos aproximamos al problema de investigación desde varias perspectivas (Muñoz, 1993a; Muñoz, 1993b; Muñoz & Cordero, 1994; Muñoz, 1994), sin embargo, desde el año 1994 nos auxiliamos de la teoría de los campos conceptuales (Vergnaud, 1990a) y en particular de la definición de algoritmo[1] en ese contexto, por la naturaleza de nuestro problema de investigación.

De manera que, los objetivos de la investigación consisten en: obtener información acerca de la naturaleza de los algoritmos en el Cálculo integral y lo que podría significar comprender un algoritmo; también obtener información sobre ciertos aspectos conceptuales de la integración. Todo con el fin de encontrar elementos de enlace.

De nuestro problema de investigación planteamos la siguiente hipótesis de trabajo:

Las nociones y los algoritmos, en el Cálculo integral, están enlazados, y tienen como referente al tipo de problemas cuya solución exige de una integración.

En lo que sigue aportamos elementos que hacen plausible la hipótesis. Fundamentalmente, orientamos las discusiones del trabajo en dos ejes: el *Discurso Matemático Escolar* y los *Campos Conceptuales.*

1.2. Acerca de la parte conceptual

Como ya mencionamos, nos auxiliamos de la teoría de los campos conceptuales en la cual se señala que un concepto no puede ser reducido a su definición, si se está interesado en su aprendizaje y en su enseñanza, sino que es a través de situaciones problema por resolver como un concepto adquiere sentido para el estudiante (Vergnaud, 1990a). Recientemente se ha señalado, como fundamental en la Didáctica de las Matemáticas, que el maestro no debería efectuar la comunicación de un conocimiento, sino la transmisión del problema adecuado que exija, por parte del alumno, poner en acción el conocimiento considerado (Brousseau, 1986). Por eso es importante para el proyecto precisar, en lo más posible, el tipo de problemas cuya solución exige de una integración.

Respecto al contenido matemático que nos ocupa se ha señalado que debe hacerse énfasis en nociones como la de *predicción* y la de *acumulación*, propias de los fenómenos de variación continua, más que en los conceptos matemáticos, como los de derivada e integral (Cantoral, 1990; Cordero, 1994). Estos señalamientos apuntan hacia el objetivo de un rediseño del discurso matemático escolar.

Las dos nociones anteriores junto con la noción de constantificación de lo variable posibilita instalarse en un análisis local del problema específico cuya solución exige de una integración (planteamiento de la ecuación diferencial), para después hallar la situación global (la cantidad buscada, $F(t)$, $F(t_n)$, o $F(t_n) - F(t_0)$ según sea el caso).

Por supuesto existen otras nociones asociadas al concepto de integración, sin embargo,

1 Un algoritmo es una regla (o conjunto de reglas) que permite, para todo problema de una clase dada con anterioridad, conducir a una solución, si existe una, o dado el caso, mostrar que no hay solución (Vergnaud, 1991, p. 258).

es importante remarcar que las nociones mencionadas no pueden aislarse de la discusión de un problema específico derivado de un fenómeno de variación continua.

1.3. Acerca de la naturaleza de los algoritmos en el Cálculo integral

Para poder hallar la situación global ($F(t)$, $F(t_n)$, o $F(t_n) - F(t_0)$) se puede utilizar alguno de los tres procedimientos socialmente establecidos:

1. Un procedimiento de *antiderivación* cuyo instrumento de cálculo es el teorema fundamental del cálculo, que conduce a los llamados *métodos de integración* y la consecuente construcción de tablas de integrales.
2. Un procedimiento de *suma* cuyo instrumento de cálculo es un *método de integración numérico*.
3. Un procedimiento de *derivación sucesiva* cuyo instrumento de cálculo es la *serie de Taylor*.

De los cuales hemos encontrado que los llamados *métodos de integración* no son algoritmos porque no cumplen con la definición de algoritmo. Por ejemplo, si asumimos la clasificación que aparece en el apartado 4.1 de este escrito, para la clase 2 de problemas existe uno cuya situación local se comporta como $dF(t) = e^{-t^2}dt$ en donde no se puede hallar una función (en términos de funciones elementales) cuya diferencial sea $e^{-t^2}dt$; de manera que se podría estar ensayando un número de veces indefinido y se encontraría la solución a este problema. Lo cual ya no cumple con la condición de la definición: *para todo problema de una clase dada con anterioridad.*

Los llamados *métodos de integración numérica* (regla del trapecio, regla del punto medio, regla de Simpson, método de Euler, Euler modificado, y método de Runge-Kutta) y la *serie de Taylor* sí son algoritmos en el sentido de dicha definición.

Sin embargo, entender la naturaleza de los algoritmos es necesario pero no suficiente para nuestros fines, por lo cual respecto a lo que podría significar *comprender un algoritmo* tomamos la premisa siguiente, en el contexto de los campos conceptuales: el estudiante no adquiere costumbres o procedimientos preestablecidos por simple condicionamiento, a través de ejercicios repetitivos, sino lo que adquiere son reglas que pueden y deben aplicarse a nuevos problemas. Las adquiere sólidamente sólo si las comprende, es decir, si se da cuenta de la relación que éstas mantienen con la estructura relacional de los problemas a los cuales se aplican (Vergnaud, 1991).

De los algoritmos que mencionamos hemos tratado de identificar la relación que mantienen con la estructura relacional de algunos problemas específicos de Cinemática. En este caso las relaciones involucradas son entre la cantidad espacio y la cantidad tiempo, además la estructura se va configurando de acuerdo a cómo cada procedimiento permite pasar de una cantidad a otra, o si las operaciones se realizan en una sola cantidad (ver apartados 4.2 y 4.3).

De acuerdo a la premisa y a la definición de algoritmo es indispensable un problema específico, previamente clasificado, para discutir ciertos aspectos de la algoritmia.

1.4. Algunos elementos de enlace entre lo conceptual y lo algorítmico

Un elemento de enlace a considerar es el hecho de que entre la noción de *Predicción* y la *serie de Taylor* existe una relación muy fuerte, como lo ha señalado Cantoral (1990). También otro elemento es la relación que mantienen la noción de *Acumulación* y la noción de *función primitiva* con el teorema fundamental del cálculo, como lo ha señalado Cordero (1994). Estos elementos nos proporcionan evidencias de la existencia del enlace entre las nociones y los algoritmos, en el Cálculo integral, pero el discurso matemático escolar vigente propicia su separación.

Entonces, una condición necesaria, pero no suficiente, para propiciar el enlace entre lo conceptual y lo algorítmico, en la enseñanza del Cálculo integral, es un aspecto que tienen en común. Dicho aspecto es un problema específico por resolver que implique, requiera, o exija de una integración para hallar la solución.

La información que obtuvimos, tanto de la parte conceptual como de la parte algorítmica, nos permitió observar que, en cierto modo, tienen ese aspecto en común; el cual tomamos como un elemento de enlace.

2. MARCO TEÓRICO

En este apartado presentamos las premisas específicas que guían esta investigación. Como ya mencionamos, el estudio se ubica dentro del acercamiento enfocado al *rediseño del discurso matemático escolar*, en particular de la integral. Sin embargo, por la naturaleza de nuestro problema de investigación, nos auxiliamos de la teoría de los campos conceptuales. Estas dos aproximaciones tienen un punto en común que consiste en no privilegiar a los conceptos matemáticos *per se* (Cantoral et al., 1990; Vergnaud, 1990a). A continuación se describen las características de cada una.

2.1. Discurso matemático escolar

Para los fines de esta investigación tomamos algunas premisas, seguidas por el grupo de investigación del Área de Educación Superior del Departamento de Matemática Educativa, como las siguientes:

- *"...dentro del fenómeno de la enseñanza del cálculo se ha olvidado por completo que dicho fenómeno se proyecta hacia futuros usuarios del tema , no hacia futuros expertos del mismo..."*
- *"...los conceptos y métodos del cálculo tienen un origen empírico muy concreto, sobre todo aquellos que son de mayor interés para los usuarios de estos conocimientos. Esto es totalmente olvidado en el actual discurso didáctico..."*
- *"...la estructura general del actual discurso matemático teórico suele ser la base menos propicia para la comunicación de las ideas matemáticas (en particular las del cálculo)..."* (Cantoral et al., 1990).

Estas premisas son la guía de esta investigación, por ejemplo: el origen empírico muy concreto, al cual se hace referencia, son los fenómenos de variación, cambio o flujo continuo en la naturaleza.

También se ha señalado que debe darse énfasis a nociones como la de *predicción* y la de *acumulación*, propias de los fenómenos de variación continua, más que en los conceptos matemáticos, como los de derivada e integral (Cantoral, 1990; Cordero, 1994). Estos señalamientos apuntan hacia el objetivo de un rediseño del discurso matemático escolar.

2.2. Teoría de los campos conceptuales

En este apartado se describen las características de la teoría de campos conceptuales, de un campo conceptual y, por último, las premisas específicas que utilizamos en este trabajo de investigación.

La teoría de campos conceptuales es una teoría cognoscitivista, que busca proporcionar un marco teórico coherente y algunos principios básicos para el estudio del desarrollo y del aprendizaje de características complejas, principalmente de aquellas que provienen de las ciencias y de la técnica. Ya que ofrece un marco para el aprendizaje, esto le interesa a la didáctica, pero no es en sí misma una teoría didáctica. Esta teoría no es específica de las matemáticas (Vergnaud, 1990a).

La razón que se tiene para estudiar la enseñanza y el aprendizaje de los campos conceptuales, esto es, conjuntos extensos de situaciones cuyo análisis y tratamiento dependen de varias clases de conceptos, procedimientos y representaciones simbólicas que están relacionados unos con otros, es el hecho de que los conceptos matemáticos procuran su significado desde una variedad de situaciones, y de que cada situación usualmente no puede ser analizada con la ayuda de un solo concepto, sino que, más bien, requiere de varios de ellos (Vergnaud, 1990b).

De manera que la noción de campo conceptual se puede definir como: *un espacio de problemas o de situaciones problema cuyo tratamiento implica conceptos y procedimientos, de varios tipos, en estrecha conexión* (Vergnaud, 1981).

La noción de campo conceptual permite estudiar, de manera mejor integrada, el desarrollo simultáneo y coordinado de los diferentes conceptos necesarios para la comprensión de un conjunto organizado de clases de problemas, los procedimientos que permiten tratar a estos problemas y, por último, los sistemas simbólicos mediante los cuales pueden ser representados dichos problemas (Vergnaud, 1981).

Por último, mencionamos las premisas específicas que están relacionadas con el desequilibrio entre lo conceptual y lo algorítmico, es decir, las premisas acerca de la naturaleza de algoritmo, y sus derivados, así como también lo que significaría *comprender un algoritmo*. Todo esto en el contexto de los campos conceptuales.

En cierto modo, la noción de *algoritmo* permite clarificar los vínculos entre conocimiento y acción (Vergnaud, 1991). Esto es importante debido a que un concepto no puede ser reducido a su definición, si se está interesado en su aprendizaje y en su enseñanza, sino que es a través de situaciones problema por resolver como un concepto adquiere sentido para el estudiante (Vergnaud, 1990a); entonces, el maestro no debería efectuar la comunicación de un conocimiento, sino la transmisión de la situación problema adecuada que exija, por parte del alumno, poner en acción el conocimiento considerado. Así, la definición que consideramos de algoritmo es:

> *"una regla (o conjunto de reglas) que permite, para todo problema de una clase dada con anterioridad, conducir a una solución, si existe una, o, dado el caso, mostrar que no hay solución"* (Vergnaud, 1991, p. 258).

Como se puede observar, en la definición de algoritmo se requiere de una caracterización de clases de problemas para instalarse en el contexto de la definición.

Así es como las premisas importantes que consideramos son las siguientes:

- En todos los casos en los que se puede caracterizar una clase de problemas, se justifica la búsqueda de algoritmos.
- No se puede esperar encontrar algoritmos sin un análisis profundo de la estructura de las relaciones que intervienen en los problemas considerados. (Vergnaud, 1991).

Ahora, mencionamos algunos de los derivados de algoritmo:

- Los algoritmos son reglas de acción, pero no todas las reglas de acción son algoritmos; en efecto, existen reglas de acción no algorítmicas.
- Las reglas no algorítmicas (reglas heurísticas), son los *procedimientos* utilizados por los estudiantes que no conducen, necesariamente, a la solución de los problemas abordados.
- Las reglas algorítmicas son los *procedimientos* utilizados por los estudiantes que conducen, necesariamente, a la solución de los problemas abordados. (Vergnaud, 1991)

De estas derivaciones, se considera que *regla de acción* equivale a *procedimiento*; se clasifican en dos: *procedimientos algorítmicos y procedimientos no algorítmicos.*

Sin embargo, un procedimiento algorítmico puede estar situado en el ámbito de las representaciones calculables (representación simbólica que se presta para realizar cálculos), o no estarlo. Si está situado en el ámbito de las representaciones calculables se llama, simplemente, *algoritmo.*

Por otro lado, respecto a lo que significaría comprender un algoritmo consideramos las siguientes premisas:

- Es un gran error pedagógico considerar que la enseñanza de las matemáticas, bajo el pretexto de que hay una parte bastante grande de ejercicios repetitivos, consiste en la adquisición de costumbres o de procedimientos preestablecidos por simple condicionamiento.
- El estudiante no adquiere costumbres, sino reglas, que pueden y deben aplicarse a nuevos problemas. Las adquiere sólidamente sólo si las comprende, es decir, si se da cuenta de la relación que éstas mantienen con la estructura relacional de los problemas a los cuales se aplican. (Vergnaud, 1991)

2.3. Discusión

De los apartados anteriores retenemos tres ideas: *Clases de Problemas, Estructura Relacional de un Problema y Fenómenos de Variación Continua.*

Porque en el contexto de los campos conceptuales, al hablar de algoritmo se requiere de una caracterización de las clases de problemas y de un análisis de la estructura de las relaciones que intervienen en los problemas considerados; y al discutir cómo un concepto adquiere sentido para los estudiantes se necesita precisar qué situaciones problema deberían resolver.

También, respecto al contenido matemático, en el contexto del rediseño del discurso matemático escolar, al hablar del concepto de integral, se tiene como referente a los *fenómenos de variación continua.*

Desde los dos contextos planteados, los conceptos y los algoritmos, en cierto modo, están condicionados por la necesidad de partir de problemas específicos por resolver, para que adquieran sentido las discusiones asociadas al Cálculo integral.

De manera que, la pregunta obligada es: ¿Cuál es el tipo de problemas cuya solución exige de una integración?

3. CONDICIÓN NECESARIA PARA PROPICIAR EL ENLACE ENTRE LO CONCEPTUAL Y LO ALGORÍTMICO

La condición necesaria identificada nos exige precisar, en lo más posible, el tipo de problemas que cumpla con los aspectos señalados en el análisis teórico.

Para identificar el tipo de problemas cuya solución exige de una integración, revisamos brevemente el devenir del Cálculo, pero centrando la atención en el tipo de fenómenos de variación o cambio que se estudiaban, el tipo de preguntas específicas planteadas en los fenómenos de variación y cómo estas preguntas originan descripciones cualitativas y cuantitativas, respectivamente.

La perspectiva histórica considerada, toma en cuenta los cambios de marco epistémico[2], es decir, la reformulación de preguntas a través de las cuales el Cálculo integral se ha desarrollado.

3.1. Antes del siglo XVII

Tanto Arquímedes como Aristóteles fueron algunos de los que más influyeron en la época. Señalamos sólo algunos hechos relacionados con los elementos del Cálculo integral.

Cuando Aristóteles estudió el movimiento de los cuerpos, el marco epistémico considerado fue: ¿Cuáles son las causas reales del movimiento? (Piaget & García, 1994).

El marco originó descripciones cualitativas del movimiento (fenómeno de variación); por ejemplo, tomemos el caso de la piedra que cae libremente o por un plano inclinado. Aristóteles, y sus seguidores medievales, se preguntaban acerca de la naturaleza del cuerpo que cae y de la forma en que se modifican sus atributos durante la caída. Dentro de este marco, Aristóteles no generó procedimientos para cuantificar el movimiento, simplemente porque no era parte de su marco epistémico.

Mientras que Arquímedes estudió algunos temas de geometría y su marco epistémico fue: ¿Cómo calcular el área de curvas geométricas (círculo, parábola, elipse), con propiedades conocidas?

Este marco originó descripciones cuantitativas del área de curvas geométricas (fenómeno de variación, si se considera a las curvas como generadas por un punto móvil que cambia de dirección continuamente), por lo que construyó procedimientos particulares e ingeniosos para calcular el área del círculo, parábola, elipse, basándose en propiedades características de estas curvas. También es importante señalar que en esta época todavía no hacían su aparición los ejes cartesianos, ni la descripción de curvas por ecuaciones.

Además, para calcular el área del círculo no se concebía la igualdad $Ac = \lim_{n \to \infty} Pn$, debido a que un *proceso infinito no podría dar algo finito*. Así, Arquímedes trató de evadir el infinito, por lo que hizo diversos cálculos de áreas, volúmenes, centros de gravedad, con su método ingenioso basado en la balanza física (Cantoral, 1983).

El marco epistémico juega un papel crucial en la construcción del conocimiento, hecho reconocido por la Epistemología Genética (Piaget & García, 1994). En este caso, el marco epistémico le permitió a Arquímedes cuantificar algunas magnitudes (área, volumen, etc.).

3.2. Siglos XVII y XVIII

En este periodo se estudian los mismos fenómenos de variación (curvas geométricas, movimiento de cuerpos), pero con otros marcos.

Galileo estudió el movimiento de los cuerpos, y su marco epistémico fue: ¿Qué relaciones se establecen entre distancias y tiempos de caída de los cuerpos? (Piaget & García, 1994).

2 "...en cada momento histórico y en cada sociedad, predomina un cierto marco epistémico, producto de paradigmas sociales y epistémicos. Una vez constituido un cierto marco epistémico, resulta indiscernible la contribución que proviene de la componente intríseca al sistema cognoscitivo. Así constituido, el marco epistémico pasa a actuar como una ideología que condiciona el desarrollo ulterior de la ciencia. Dicha ideología funciona como obstáculo epistemológico que no permite desarrollo alguno fuera del marco conceptual aceptado. Sólo en los momentos de crisis, de revoluciones científicas, hay una ruptura de la ideología científica dominante y se pasa a un estadio diferente con un nuevo marco epistémico..." (Piaget y García, 1994, p. 234).

Galileo elimina las preguntas sobre *causas reales* que hacían referencia a cualidades (atributos) e introduce mediciones. Pero *medir* es comparar para establecer relaciones entre distancias y tiempos.

El pasaje de atributos a relaciones implica una identificación de parámetros y su consiguiente cuantificación. Pero no sólo se trata de mediciones, sino que Galileo introduce el concepto de relación funcional entre las variables, que caracteriza el estado de movimiento de un cuerpo en momentos diferentes de su trayectoria; esto supone la introducción del tiempo como variable independiente.

El marco epistémico proporciona la base sobre la que se construye conocimiento; en este caso, la idea de considerar la posibilidad de cambiar un movimiento con velocidad variable por un movimiento con velocidad constante bajo ciertas condiciones, propiciaron el resultado $S(t) = -\frac{1}{2}at^2$ (regla para un movimiento rectilíneo uniformemente acelerado, con $S(0) = 0$ y $V(0)=0$.

Ahora analicemos el marco epistémico de Newton cuando estudiaba el movimiento de los cuerpos; este marco era: ¿Cómo se calcula la evolución ulterior del sistema de movimiento, si son conocidos los valores de los parámetros en un momento dado y en lugar dado (es decir, las llamadas condiciones iniciales)? (Piaget & García, 1994).

Así, el objeto fue *calcular* la evolución del sistema de movimiento, sin plantearse otras preguntas sobre las *causas reales* de él. Pero la evolución misma es calculada sobre la base de un sistema de transformaciones que permiten pasar de los valores de las variables, en el estado inicial, a los valores que adquieren en cualquier otro instante.

Esta transición de causas últimas a sistemas de transformación fue un paso decisivo en la historia de la mecánica, uno de los pilares más sólidos de la revolución del siglo XVII, y significó una modificación profunda en la idea de la relación entre la matemática y el mundo de los fenómenos físicos (Piaget & García, 1994). Es decir, el hecho de que la pregunta sea *calcular la evolución* implica cuantificar cierta variable en función de otra a partir de las condiciones iniciales, para explicar parcialmente un fenómeno de variación o cambio en donde el sistema de transformación juega un papel central.

Por otra parte, Pierre Fermat (1601-1665), estudió las curvas geométricas, considerando el siguiente marco epistémico: ¿Cómo se obtiene la cuadratura de diferentes familias de curvas? (es decir, calcular, lo que hoy sería, el área bajo la curva).

Es importante señalar que Fermat usaba los ejes rectangulares y además representaba a las curvas como relaciones explícitas entre la variable Y y la variable X de la forma $Y = f(X)$.

Fermat calculó el área bajo la curva de $Y = X^p$ en el intervalo $[0, a]$, es decir, $\int_0^a X^p\,dx$ para valores racionales de p $(p \neq -1)$. Para calcular el área bajo la curva de $Y = X^p$ emplea un procedimiento que consistió en considerar una partición del intervalo $[0, a]$ en forma de progresión geométrica para mostrar que:

$$\int_0^a x^p\,dx = \frac{a^{p+1}}{p+1}$$

Este resultado es una regla para calcular el área bajo la curva, de la familia de curvas $Y = X^p$ en el intervalo $[0, a]$.

Mientras que Leibniz estudió, en sus primeros trabajos, sucesiones de sumas y diferencias de números considerando el siguiente marco epistémico: ¿Cómo calcular el valor de una suma infinita?; por ejemplo:

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\frac{1}{15}+\ldots$$

Al tratar de calcular la suma infinita, Leibniz se auxilia del esquema de construcción del *triángulo aritmético de Pascal* para formar su *triángulo armónico*, y de esta forma observa que estos dos arreglos tenían una cierta relación inversa, a saber, que el triángulo aritmético involucra sumas y su triángulo armónico diferencias de números.

Estas ideas, que Leibniz usó para un contexto discreto (la suma y diferencias de números como operaciones inversas), las extrapoló al contexto continuo (como es el caso de las variables asociadas a las curvas geométricas). Al contemplar la sucesión infinita de valores de una variable, por ejemplo la variable x, la diferencia entre dos valores sucesivos era precisamente el dx, que era infinitesimal o despreciable comparado con los valores de x. Y al tomar la suma de tales diferencias, denotada por $\int dx$(el símbolo $\int$ es una deformación de la letra S de suma), se obtiene la variable completa x, es decir, $\int dx = x$. De esta forma obtiene la noción de diferencial e integral como procesos inversos e interrelacionados (Cantoral, 1983). Con estas ideas desarrolló un procedimiento algorítmico para calcular la longitud de una curva, la superficie de revolución, etc.

3.3. Siglos XVIII y XIX

La unión tan fructífera entre la matemática y la física propias del siglo XVII y parte del XVIII, sufrió una ruptura a partir del problema de la cuerda vibrante cuya solución tuvo consecuencias sobre el concepto de función.

En el siglo XVIII, Leonard Euler (1707-1783) abandonó el estudio de curvas geométricas y fundó la ciencia de los infinitésimos sobre una teoría formal de funciones. De alguna manera, esto significó la ruptura entre un Cálculo de variables (físicas o geométricas), como inicialmente empezó, y un Cálculo de funciones numéricas. Tal ruptura posibilita un nuevo marco epistémico que fue delineado en la obra de Fourier: ¿Qué significado tiene $\int f(x)dx$, donde $f(x)$ es una sucesión arbitraria de ordenadas?

Cauchy (1789-1857) inicia la construcción de una teoría de integración (Cordero, 1994). En este marco Cauchy escribió la definición de función continua. Luego construye su teoría de integración para funciones continuas. Una implicación de su definición es que $\int_a^b f(x)dx$ tiene un valor determinado para cualquier función arbitraria continua; sin embargo, su definición se extiende al caso de una función acotada, con un número finito de puntos de discontinuidad en un intervalo, y para ciertas funciones con un número infinito de puntos de discontinuidad.

Por otra parte, el marco epistémico de Riemann (1826-1866) consistió en lo siguiente: ¿Qué se entiende por $\int_a^b f(x)dx$, donde $f(x)$ es una sucesion arbitraria de ordenadas y además densamente discontinua? y ¿en qué casos es una función integrable o no lo es?

Como resultado de este marco epistémico, se reflexiona sobre el significado del objeto integral y no sobre los resultados que el proceso de integrar proporcionaba. Sin duda, en este periodo se trata ya de un *Cálculo de funciones numéricas*, es decir, el objeto de estudio ya no son las cantidades variables sino las funciones vistas como una sucesión arbitraria de ordenadas (Cantoral, 1990; Cordero, 1994).

Otro punto importante en este periodo es la separación entre física y matemática durante el siglo XIX. Esta separación se da a partir de las controversias que produjo el problema de la cuerda vibrante y el trabajo de Fourier (Farfán, 1993).

En este periodo los marcos epistémicos ya no se refieren a los fenómenos de variación continua, como en los periodos anteriores.

3.4. Discusión

Fue en el segundo periodo cuando surge el Cálculo infinitesimal (Cantoral, 1990) y también la unión entre física y matemáticas, es decir, la matematización de la física. También es en él donde Newton realiza su aporte más genial, que fue el de concebir los problemas de la dinámica como el tipo de problemas que más tarde se denominarían en la física *problemas con condiciones iniciales* (Piaget & García, 1994).

En el tercer periodo se reflexiona sobre el objeto matemático (la integral) y las discusiones giran alrededor de la función integrando ($f(x)$), vista como una sucesión arbitraria de ordenadas, y sobre el dominio de dicha función (Cordero, 1994). Además, los marcos epistémicos ya no se refieren a los fenómenos de variación continua como en los periodos anteriores.

Como los fenómenos de variación continua son el referente en el que surgen los conceptos de derivada e integral y también son los que favorecen pensar en la integral, hablando cognoscitivamente (Cordero, 1994); nuestra investigación se desarrolla en este contexto pero condicionado por el marco epistémico de Newton.

De manera que, el análisis realizado a través de los cambios de marco epistémico nos permitió precisar, en cierto modo, el tipo de problemas cuya solución exige de una integración, lo cual condensamos así:

"Son los problemas específicos que se derivan de los fenómenos de variación continua. Estos problemas específicos no se refieren a las *causas* del fenómeno de variación (¿por qué varían?) sino al *cuánto varían* una vez que se reconoce *cómo varía* el fenómeno; es decir, se plantean preguntas acerca de la ley que cuantifica al fenómeno de variación continua (cantidad desconocida $F(t)$ que relaciona funcionalmente a las variables involucradas). La configuración de esta ley depende de que sean dadas, o no sean dadas, las condiciones iniciales del problema específico".

4. HACIA LA CONSTRUCCIÓN DE UN CAMPO CONCEPTUAL COMO NECESIDAD DE LARELACIÓN ENTRE LO CONCEPTUAL Y LO ALGORÍTMICO

Debido a que asumimos la definición de algoritmo en el contexto de los campos conceptuales y la condición necesaria nos exige centrar la atención en las situaciones problema, hemos tratado de construir un campo conceptual de las estructuras integrativas.

A priori parece una contradicción intentar construir un campo conceptual de un concepto, pero esto es explicable por el desarrollo que ha tenido esta investigación, ya que surgió a partir del concepto de integral y luego nos condujo al conjunto de situaciones problema que le dan sentido a dicho concepto y que implican la relación entre lo conceptual y lo algorítmico. Sin embargo, una vez que tenemos el conjunto de situaciones problema y partimos de ellas para investigar las construcciones de los estudiantes, cuando interactúan con una secuencia de situaciones problema, necesariamente están involucrados otros conceptos, por ejemplo, el de diferencial, razón de cambio, por citar algunos; lo cual elimina la aparente contradicción.

De acuerdo a las características de la teoría de los campos conceptuales, descritas en el apartado 2, se presenta a continuación la clasificación de las situaciones problema cuya solución exige una integración. Solamente la clasificación es el inicio de un programa de investigación delineado por Vergnaud (1990b) que a la letra dice: analizar y clasificar la variedad de situaciones en cada campo conceptual.

Es importante resaltar que, además de los aspectos señalados por la teoría de los campos conceptuales para realizar la clasificación, incorporamos aspectos epistemológicos del contenido matemático específico matizados por la perspectiva del *rediseño del discurso matemático escolar*; los cuales determinan la naturaleza del campo conceptual que se presenta a continuación.

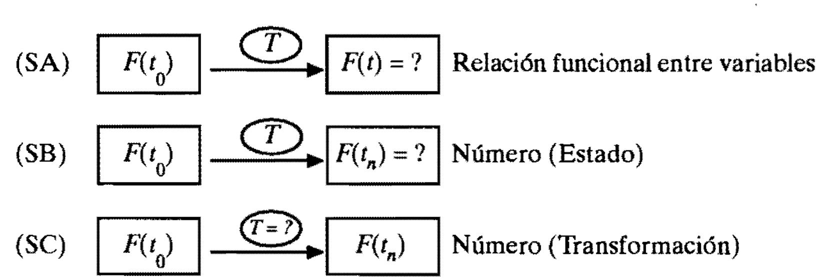
4.1. Clasificación de las situaciones problema

Una vez especificado el tipo de problemas, empezamos el proceso de clasificación. En primer lugar analizamos dos categorías de relaciones involucradas en las leyes que cuantifican al fenómeno de variación continua:

- Primera categoría: dadas las condiciones iniciales del problema, encontrar la ley que cuantifica al fenómeno de variación continua.
- Segunda categoría: encontrar la ley que cuantifica al fenómeno de variación continua cuando no son conocidas las condiciones iniciales del problema.

De cada categoría se derivan tres posibles situaciones, según la pregunta que se plantea en el problema específico derivado de un fenómeno de variación continua.

Para la primera categoría, son posibles tres situaciones[3]:



en donde: SA = Situación A; SB = Situación B; SC = Situación C; T = Transformación; $F(t_0)$ = Condición inicial conocida.

Figura 1

3 El concepto de situación es tomado en el estudio del apartado sobre las *situaciones* del escrito *La Théorie des Champs Conceptuels* de Vergnaud (1990a); es decir, los procesos cognocitivos y las respuestas del sujeto son función de las situaciones a las que se enfrenta.

En las tres situaciones se inicia la discusión de integración porque la pregunta es sobre la cantidad desconocida ($F(t)$, $F(t_n)$, o $F(t_n) - F(t_0)$ según sea el caso) que se quiere hallar. Además, se requiere reconocer cómo está variando el fenómeno de variación ($dF(t)/dt$), (Cordero, 1994).

Las tres situaciones abarcan a la llamada integración definida porque las condiciones iniciales del problema están dadas.

Para la segunda categoría las tres situaciones son:

$$\text{(SD)} \quad \boxed{F(t_0) = C} \xrightarrow{T} \boxed{F(t) = ?} \quad \text{Relación funcional entre variables}$$

$$\text{(SE)} \quad \boxed{F(t_0) = C} \xrightarrow{T} \boxed{F(t_n) = ?} \quad \text{Número (Estado)}$$

$$\text{(SF)} \quad \boxed{F(t_0) = C} \xrightarrow{T=?} \boxed{F(t_n)} \quad \text{Número (Transformación)}$$

en donde: SD = Situación D; SE = Situación E; SF = Situación F;
T = Transformación; C = Condición inicial desconocida.

Figura 2

Así, es posible analizar a cada una de las situaciones con las siguientes expresiones:

(SA): $* \; F(t_0) + \int_{t_0}^{t} F'(t)dt = F(t)$

$$* \; F(t_0) + F'(t_0)(t - t_0) + \frac{F''(t_0)(t-t_0)^2}{2} + \frac{F'''(t_0)(t-t_0)^3}{3} + \ldots = F(t)$$

(SB): $* \; F(t_0) + \int_{t_0}^{t_n} F'(t)dt = F(t_n)$

$$* \; F(t_0) + F'(t_0)(t_n - t_0) + \frac{F''(t_0)(t-t_0)^3}{2!} + \frac{F'''(t_0)(t-t_0)^3}{3!} + \ldots = F(t)$$

$$*F(t_0) + \sum_{i=0}^{n-1} F'(t_i)\,\Delta t \approx F(t_n)$$

(SC): $* \; F(t_n) - F(t_0) = \int_{t_0}^{t_n} F'(t)dt$

$$* \; F(t_n) - F(t_0) = F'(t_0)(t_n - t_0) + \frac{F''(t_0)(t_n-t_0)^2}{2!} + \ldots$$

$$*F(t_n) - F(t_0) \approx \sum_{i=0}^{n-1} F'(t_i)\,\Delta t$$

En las tres situaciones se inicia la discusión de integración porque la pregunta es sobre la cantidad desconocida ($F(t)$, $F(t_n)$, o $F(t_n) - F(t_0)$ según sea el caso) que se quiere hallar. Además, se requiere reconocer cómo está variando el fenómeno de variación ($dF(t)/dt$), (Cordero, 1994).

Así, es posible analizar a cada una de las situaciones con la siguiente expresión:

(SD): $* \; C + \int F'(t)dt = F(t)$

(SE): $* \; C + \int F'(t)dt = F(t)$ y evaluar en t_n

(SF): $* \; F(t_n) - C = \int F'(t)dt$

Estas tres situaciones abarcan a la llamada integración indefinida porque las condiciones iniciales del problema no están dadas.

Para las dos categorías se puede generar el siguiente conjunto de clases de problemas, dependiendo de cómo varía el fenómeno. Es decir, si la razón de cambio es constante $\left(\frac{dF(t)}{dt} = K, \text{ clase } 1\right)$, o si depende de la variable independiente $\left(\frac{dF(t)}{dt} = f(t), \text{ clase } 2\right)$, o si depende de la variable dependiente $\left(\frac{dF(t)}{dt} = f(F(t)), \text{ clase } 3\right)$, o si depende de ambas variables $\left(\frac{dF(t)}{dt} = f(t, F(t)), \text{ clase } 4\right)$, También, si lo que se reconoce en el problema específico derivado de un fenómeno de variación es la razón de cambio de la razón de cambio, ésta puede depender de la variable independiente, o de la variable dependiente, o de la razón de cambio, o de alguna combinación entre ellas.

Por ejemplo, de la situación A se genera el siguiente conjunto posible de clases de problemas, dependiendo de cómo varía el fenómeno. En otras palabras, esta clasificación está basada en las diferentes situaciones locales del fenómeno (ecuación diferencial), que con frecuencia se pueden escribir en la forma explícita como lo muestra el Cuadro 1.

Y dependiendo de la situación a la que pertenezca el problema puede ser, por ejemplo para la clase 2 de problemas, de clase 2a, 2b, 2c, 2d, 2e, 2f, según sea el caso.

Es importante señalar que consideramos en una sola clase a los problemas que se derivan de los fenómenos con un comportamiento a razón de cambio constante, porque son un antecedente esencial para abordar el estudio de los problemas que se derivan de los fenómenos con un comportamiento a razón de cambio variable, debido al hecho siguiente:

(SA)	Razón de cambio constante	$\frac{dF(t)}{dt} = K$	(clase 1a.)
	Razón de cambio variable	$\frac{dF(t)}{dt} = f(t)$	(clase 2a.)
		$\frac{dF(t)}{dt} = f(F(t))$	(clase 3a.)
		$\frac{dF(t)}{dt} = f(t,F(t))$	(clase 4a.)
	Razón de cambio variable de la razón de cambio	$\frac{d^2F(t)}{dt^2} = f(t)$	(clase 5a.)
		$\frac{d^2F(t)}{dt^2} = f(F(t))$	(clase 6a.)
		$\frac{d^2F(t)}{dt^2} = f(\frac{dF}{dt})$	(clase 7a.)
		$\frac{d^2F(t)}{dt^2} = f(t, F(t))$	(clase 8a.)
		$\frac{d^2F(t)}{dt^2} = f(t, \frac{dF}{dt})$	(clase 9a.)
		$\frac{d^2F(t)}{dt^2} = f(F(t) \frac{dF}{dt})$	(clase 10a.)
		$\frac{d^2F(t)}{dt^2} = f(t, F(t) \frac{dF}{dt})$	(clase 11a.)

Cuadro 1

Galileo estudia primero las propiedades del movimiento constante o uniforme para después poder abordar el estudio del movimiento naturalmente acelerado, debido, básicamente, a que el movimiento acelerado se verá, en algún sentido, constante (Cantoral, 1990).

Además, la complejidad de los problemas no se debe sólo a su pertenencia a una u otra de las clases de problemas que definimos, también intervienen otros factores como:

a) El orden y la presentación de las informaciones; debido a que juegan un papel importante en la complejidad de los problemas (Vergnaud, 1991).
b) El tipo de contenido; por ejemplo, no es la misma complejidad si el contexto es un circuito eléctrico o el movimiento de un cuerpo.

4.2. Análisis de la estructura relacional de algunas clases de problemas

Para explicar las distinciones entre las diferentes situaciones y discutir las estructuras relacionales de algunas clases de problemas, analizamos en este apartado ejemplos de Cinemática.

4.2.1. Análisis de un ejemplo sobre la razón de cambio constante (Primera Categoría)

Ejemplo 1: Si un cuerpo con movimiento uniforme estaba en la posición $S(0)$ en $t = 0$, calcular la posición ulterior del cuerpo en cualquier instante de tiempo t. (Clase 1a.)

Si consideramos un diagrama como el siguiente: de la Figura 3, que significa que $S(0)$ es la condición inicial (estado inicial), T es la transformación para pasar de $S(0)$ a $S(t)$, donde $S(t)$ es la relación funcional entre las variables; además, se sabe cómo se está moviendo el cuerpo durante la transformación (a razón de cambio constante).

La pregunta nos sitúa en un marco epistémico cuya característica es calcular la evolución ulterior del sistema de movimiento si son conocidas las condiciones iniciales (ver el apartado 3).

Efectivamente, la pregunta se caracteriza por pedir una relación funcional $S(t)$, es decir, una ley que cuantifica al movimiento uniforme de un cuerpo (fenómeno de variación).

Además, el problema nos proporciona las condiciones iniciales: si se hace coincidir el origen del sistema de referencia con la posición inicial se tendría $S(0) = 0$.

Para encontrar $S(t)$ se requiere encontrar un sistema de transformación T (que haga pasar de $S(0)$ a $S(t)$, para lo cual se cuenta con la información de la razón de cambio, en este caso, constante, en la que

$$\frac{\Delta S}{\Delta t} = constante$$

es independiente del tamaño del incremento Δt (por ser un movimiento uniforme).

En lo que sigue presentamos un análisis de la estructura de las relaciones entre las cantidades espacio y tiempo. Se pueden hacer dos tipos de análisis[4]: Uno vertical, que consiste en analizar una sola categoría de cantidades, y otro horizontal cuando se pasa de una categoría de cantidades a otra (por ejemplo, de tiempo a espacio).

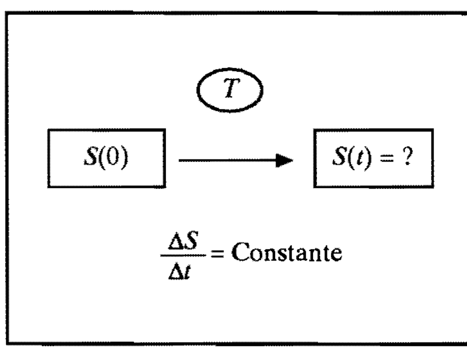


Figura 3

4 Estos dos tipos de análisis son usados por Vergnaud (1991) para analizar la estructura de las relaciones entre dos cantidades de diferente naturaleza.

Análisis vertical

Este análisis vertical se centra en la noción de operador-escalar (sin dimensión), el cual hace pasar de una línea a otra en una misma categoría de cantidades.

De la misma manera que se pasa de a segundos a t segundos, se pasa de la posición $S(a)$ metros a $S(t)$ metros:

El operador función que hace pasar de a segundos a $S(a)$ metros, es el mismo que hace pasar de t segundos a $S(t)$ metros.

El operador función se puede encontrar sobre la línea de arriba, donde es posible: como

$$\frac{\Delta S}{\Delta t} = k \quad \text{o} \quad \frac{S(a) - S(0)}{a - 0} = k \quad \text{luego}$$

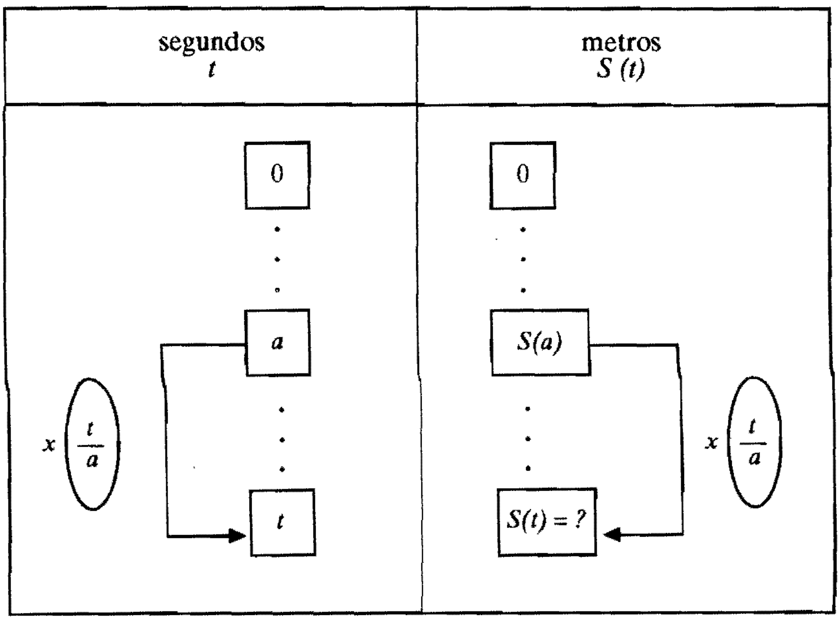


Figura 4

Así es como: $S(t) = S(a)\frac{t}{a}$

pero como $\frac{\Delta S}{\Delta t} = k$ o $\frac{S(a) - S(0)}{a - 0} = k$

luego $\frac{S(a)}{a} = k$, por las condiciones iniciales

entonces: $S(t) = kt$

Análisis horizontal

Este análisis horizontal está centrado en la noción de operador-función, que hace pasar de una categoría de cantidades a otra.

$S(a) = ka$ por las condiciones iniciales, en donde lo que permite pasar de a segundos a $S(a)$ metros es la multiplicación por k, entonces $S(t) = kt$, como indica la Figura 5.

Es importante remarcar que la pregunta en esta clase de problemas es acerca de la relación funcional que predice la posición del cuerpo en cualquier instante.

Del ejemplo 1 queremos resaltar lo siguiente:

- El movimiento uniforme es, en cierto modo, sencillo de analizar, pero lo que

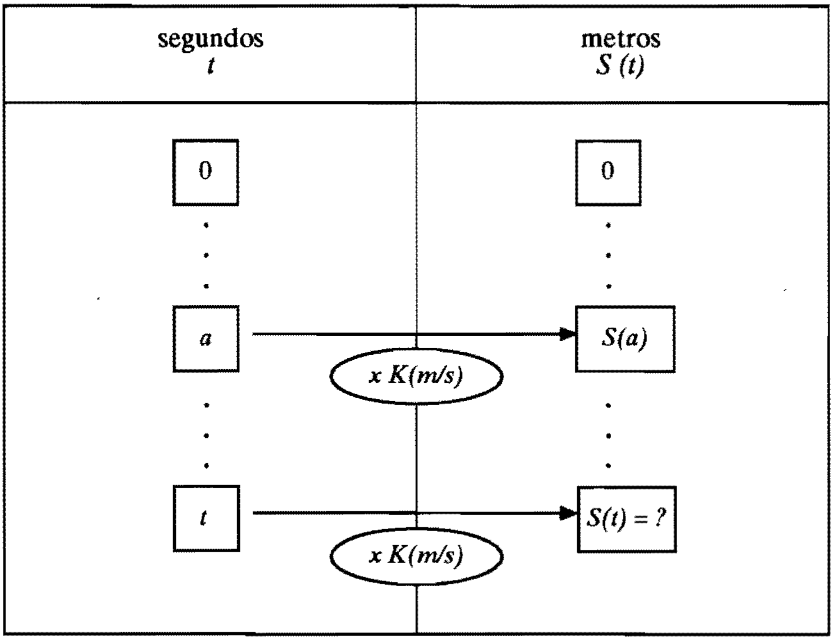


Figura 5

fundamentalmente importa es la posibilidad de que al tomar tiempos tan pequeños como se quiera se siga conservando el recorrer distancias iguales en tiempos iguales (razón de cambio constante).

• El análisis del movimiento uniforme es un antecedente muy importante para el estudio del movimiento no uniforme, como se puede observar en el trabajo de Galileo (ver Cantoral, 1990). Por lo cual, enseguida analizamos un ejemplo de movimiento no uniforme.

4.2.2. Análisis de un ejemplo sobre la razón de cambio variable (Primera Categoría)

Ejemplo 2: Si un cuerpo cae libremente desde cierta altura, partiendo del reposo, aquel se acelerará a razón constante ($\frac{\Delta V}{\Delta t} = K$). Calcular la posición ulterior del cuerpo en cualquier instante de tiempo t (clase 2a.), y en un instante particular t_n (clase 2b), si se desprecia la resistencia del aire.

De manera que si consideramos un diagrama como el siguiente:

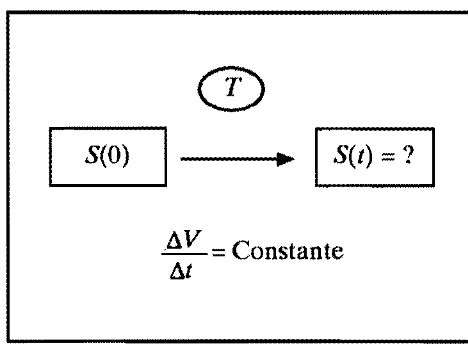


Figura 6

La pregunta nos sitúa en un marco epistémico cuya característica es calcular la evolución ulterior del sitema de movimiento si son conocidas las condiciones iniciales del problema (ver apartado 3).

Además el problema nos proporciona las condiciones iniciales, es decir, si se hace coincidir el sistema de referencia con la posición inicial se tendría $S(0)=0$, y como el cuerpo va adquiriendo poco a poco más velocidad conforme va cayendo, entonces su velocidad inicial es 0 cuando estaba en reposo ($V(0)=0$).

También se cuenta con la información de que la aceleración es constante, es decir, en incrementos de tiempo iguales adquiere incrementos iguales de velocidad, lo que se puede expresar de la siguiente manera:

$$\frac{\Delta V}{\Delta t}=k=g$$

con independencia del tamaño del incremento de tiempo.

Entonces, de acuerdo al análisis presentado en el ejemplo 1, el operador función que hace pasar de t segundos a $V(t)$ metros/segundo es el factor constante g (m/seg^2), de donde: $V(t)=gt$.

Sin embargo, lo que pide el problema es $S(t)=?$ y $S(t_n)=?$ en donde $\frac{\Delta S}{\Delta t}$ va cambiando conforme la piedra va cayendo. Analicemos tres posibles caminos:

Primer camino

El primer camino consiste en pasar localmente de una categoría de cantidades a otra (de tiempo a espacio) considerando que, en un intervalo de tiempo pequeño, la velocidad en el instante inicial del intervalo en cuestión se podría tomar como constante, y calcular el efecto en espacio o el incremento de espacio que se produce, a saber:

$$\Delta S_0 = V(t_0)\Delta t_0 = g t_0 \Delta t_0$$

$$\Delta S_1 = V(t_1)\Delta t_1 = g t_1 \Delta t_1$$

El paso de una categoría de cantidades a otra, en forma local, puede ser representado por el diagrama de la figura 7.

Sucesivamente, se calculan todos los efectos de espacio o incrementos de espacio, para cada intervalo de tiempo en que se ha dividido el intervalo $[0, t_n]$ (en donde: $\Delta t_0 = \Delta t_1 = \Delta t_n$).

Una vez que se tienen los incrementos de espacio, se realiza el análisis en una sola

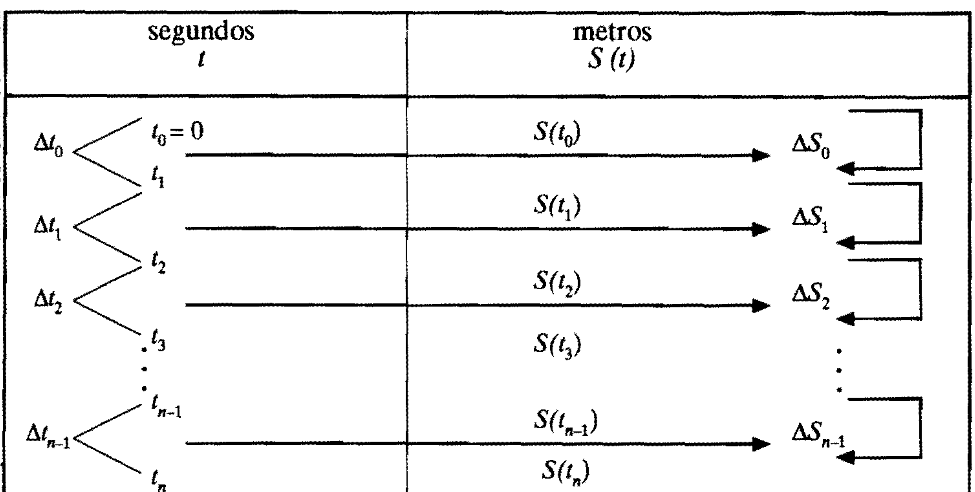


Figura 7

categoría de cantidades (el espacio), por lo que este análisis se realiza de manera vertical. Sin embargo, las cantidades involucradas son de naturaleza distinta aunque de igual dimensión (ya que ambas se expresan en metros); debido a que se busca una posición $S(t_n)$ y lo que se tiene son incrementos de espacio (distancias).

Así, sumando todos los efectos parciales, nos da el efecto total (acumulación o cambio total):

$$\Delta S_0 + \Delta S_1 + \Delta S_2 + \ldots + \Delta S_{n-1}$$

Luego, para llegar a $S(t_n)$ se tiene que hacer una suma acumulada:

$$S(t_0) + \Delta S_0 + \Delta S_1 + \ldots + \Delta S_{n-1} \approx S(t_n)$$

En este primer camino están presentes varias nociones. La primera es una *discretización de una magnitud continua* para poder cuantificarla, en este caso el tiempo y el espacio se han discretizado al hacer la partición. La segunda es una noción de *constantificación de lo variable* que consiste en la posibilidad de considerar a un movimiento variable como un movimiento constante en forma local, lo cual permite pasar de una categoría de cantidades a otra (de tiempo a espacio).

Una tercera noción es la que subyace del análisis vertical y consiste en acumular todos los efectos locales para encontrar el efecto total o *acumulación total* (en este caso sería $\sum_{i=0}^{n-1} \Delta S_i$).

Una cuarta noción es la de *predicción* del estado ulterior ($S(t_n) = ?$), en donde al estado inicial se le suma la acumulación total para encontrar el estado ulterior:

$$S(t_0) + \sum_{i=0}^{n-1} \Delta S_i \approx S(t_n)$$

En donde la *acumulación total* es la transformación para pasar de $S(t_0)$ a $S(t_n)$.

Este primer camino para llegar a $S(t_n)$ y otros análogos (pero con la misma estructura relacional) desembocan en los llamados *métodos de integración numéricos*, los cuales se pueden caracterizar como *algoritmos* en el sentido de la definición de algoritmo en el contexto de los campos conceptuales.

Segundo camino

Ahora analicemos un segundo camino. Se inicia conociendo que el operador función que hace pasar de t segundos a $V(t)$ metros/segundo es el factor constante $g(m/seg^2)$, a saber: $V(t) = gt$ debido a que $\frac{\Delta V}{\Delta t} = g$ (como ya se ha analizado en el problema a razón de cambio constante), se indica esto en la siguiente figura:

segundos t	metros $V(t)$
0	0
.	.
.	.
.	.
t $\xrightarrow{\times g(m/s^2)}$	$V(t) = gt$

Figura 8

Y si consideramos que localmente el movimiento es uniforme, tenemos que:

$$ds = v(t)dt \text{ o } ds = gtdt$$

En este camino se requiere encontrar un operador función que haga pasar de t a $S(t)$ (en el primer camino no encontrábamos un operador función directamente, si no que pasábamos localmente de una cantidad a otra y luego se acumulaba la cantidad espacio), como indica la figura siguiente.

segundos t	metros $S(t)$
0	0
.	.
.	.
.	.
t	$S(t)$

Figura 9

Para encontrar tal operador-función, se tiene que buscar una función que localmente se comporte como $ds = gtdt$; en otras palabras, una función cuya diferencial coincida con $ds = gtdt$, lo cual no requiere de un proceso de suma acumulada, sino de conocer una diversidad de funciones y su respectiva diferencial.

Este camino conduce, entonces, a la noción de encontrar una función cuyo diferencial coincida con el diferencial dado; a esta función se le conoce como función primitiva.

Esta noción de función primitiva también ha tenido un papel muy importante en la construcción de la teoría de integración, al margen de cualquier definición de integral (Cordero, 1994).

Una vez encontrada la función primitiva, ésta hace pasar directamente de t a $S(t)$, para cualquier t. Así, la función primitiva es:

$$S(t) = \frac{gt^2}{2}$$

Ahora, si se quiere calcular, por ejemplo, $S(t_2) - S(t_1) = ?$(clase 2c) se pasa a través de este operador función de t_1 a $S(t_1)$ y de t_2 a $S(t_2)$ y después se calcula la diferencia de posiciones, en la cantidad espacio, para encontrar una distancia.

Es importante señalar que las posiciones $S(t_1)$ y $S(t_2)$ son *estados*, y la diferencia $S(t_2) - S(t_1)$ es la *transformación* que hace pasar de la cantidad $S(t_1)$ a la cantidad $S(t_2)$ en la cantidad espacio, como se indica enseguida:

segundos t	metros $S(t)$
0	0
$t_1 \longrightarrow$	$S(t_1) = \frac{gt_1^2}{2}$
$t_2 \longrightarrow$	$S(t_2) = \frac{gt_2^2}{2}$

Figura 10

entonces: $S(t_2) - S(t_1) = \frac{gt_2^2}{2} - \frac{gt^2_1}{2}$

Además, como los estados son posiciones y la transformación es una distancia, entonces son de naturaleza distinta aunque conservan la misma dimensión (ya que ambas se expresan en metros).

Aparte de la noción de función primitiva, están las nociones como la de *constantificación de lo variable* que está en paralelo con la representación en forma local (diferencial) siguiente: $dS = V(t)dt$, que posibilita poder hallar la situación global.

Por último, queremos señalar que en la búsqueda de la función primitiva se construyen los llamados *métodos de integración* y una diversidad de tablas de integrales; sin embargo, en el contexto de los campos conceptuales podríamos decir que no son procedimientos algorítmicos, ya que existen diferenciales como por ejemplo:

$dF(t) = e^{-t^2}$ ó $dF(t) = \frac{\text{sen } t}{t} dt$, que

pertenecen a los problemas de clase 2, en los cuales no se puede encontrar una función (en términos de funciones elementales) tal que su diferencial coincida con los diferenciales dados; de manera que se podría estar ensayando un número de veces indefinido y no encontrar la solución de este problema. Por ello no se cumple con la definición de algoritmo, pues ésta menciona que el procedimiento (regla de acción) debe permitir conducir a una solución *para todo problema de una clase dada con anterioridad.*

Tercer camino

Este tercer camino está basado en la noción de *constantificación de lo variable*, pero apoyada en la idea de *promedio* que permite la construcción de lo que se llama la serie de Taylor (Imaz, 1989). Primero lo realizaremos para este ejemplo y después lo haremos de manera general.

Si se considera la posibilidad de que en un tiempo dt la velocidad con la que inicia el movimiento en el instante t_0 se tome constante, entonces $dS \approx V(t_0)dt$, por lo que $S(t_0 + dt)$ será:

$$S(t_0 + dt) \approx S(t_0) = V(t_0)dt$$

Y también, si consideramos que en un dt la velocidad con la que termina el movimiento en $t_0 + dt$ se tome constante, entonces:

$$dS \approx V(t_0)dt \text{ y } S(t_0 + dt) \approx S(t_0) + V(t_0 + dt)dt,$$

como indica la Figura 11.

Si ahora se calcula el promedio entre las dos aproximaciones, para obtener una mejor aproximación, se tendrá:

$$S(t_0 + dt) \approx \frac{[S(t_0) + V(t_0)dt] + [S(t_0) + V(t_0 + dt)dt]}{2}$$

$$S(t_0 + dt) \approx S(t_0) + \frac{[V(t_0) + V(t_0 + dt)]\, dt}{2}$$

pero de acuerdo al ejemplo 1,

$$V(t_0 + dt) = g(t_0 + dt) = gt_0 + gdt = V(t_0) + gdt$$

(se trata de una igualdad porque la aceleración es constante).

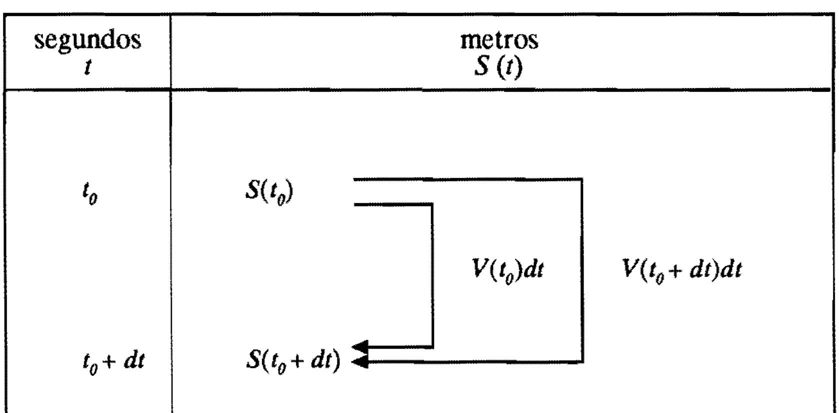


Figura 11

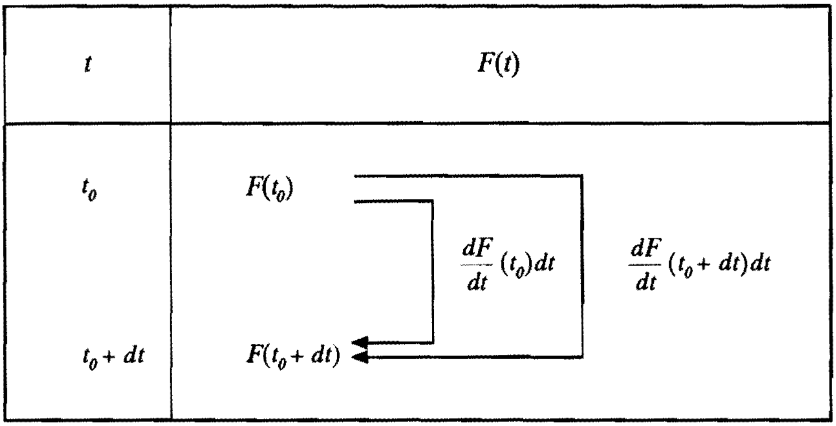


Figura 12

Sustituyendo $V(t_0 + dt)$ en el promedio:

$$S(t_0 + dt) \approx S(t_0) + \frac{[V(t_0) + V(t_0) + gdt)]\,dt}{2}$$

Lo anterior se convierte en una igualdad porque $a(t_0) = a(t_0 + dt) = a(t) = g$, y queda:

$$S(t_0 + dt) = S(t_0) + V(t_0)dt + \frac{gdt^2}{2}$$

Ahora, si sustituimos t_0 por su valor ($t_0 = 0$) entonces se tiene que:

$$S(0 + dt) = S(0) + V(0)dt + \frac{gdt^2}{2}$$

$$S(dt) = S(0) + V(0)dt + \frac{gdt^2}{2}$$

El próximo paso es muy importante, porque aunque parece una simple sustitución de t por $dt (t = dt)$, lo que hace es pasar de la situación local [$S(dt)$] a la situación global [$S(t)$], entonces: $S(t) = S(0) + V(0)\text{t} + gt^2 / 2$, es decir, la estructura local se conserva en la estructura global, junto con las condiciones iniciales del problema. En este ejemplo, como $S(0) = 0$ y $V(0) = 0$ entonces:

$$S(t) = \frac{gt^2}{2}$$

Si se desarrolla esta idea del *promedio* de manera general, queda lo siguiente:

Partiendo de la cantidad desconocida $F(t) = ?$, que es la relación funcional entre variables que predice la evolución ulterior del fenómeno de variación continua. Además son conocidas las condiciones iniciales del fenómeno.

La pregunta sobre $F(t)$ es acerca de la situación global, por lo que primero procedemos a realizar un análisis de la situación local.

En la situación local se considera a la razón de cambio en t_0 ($dF(t_0) / dt$) como constante para el intervalo dt, entonces:

$$F(t_0 + dt) \approx F(t_0) + \frac{dF(t_0)\,dt}{dt} \qquad (1)$$

Y si ahora se considera a la razón de cambio en $t_0 + dt$ ($dF(t_0 + dt) / dt$) como constante para el intervalo dt, entonces:

$$F(t_0 + dt) \approx F(t_0) + \frac{dF(t_0 + \text{dt})\,dt}{dt} \qquad (2)$$

La estructura relacional queda como indica la Figura 12.

Para encontrar una mejor aproximación se calcula el promedio entre (1) y (2):

$$F(t_0 + dt) \approx \frac{[F(t_0) + F'(t_0)dt] + [F(t_0) + F'(t_0 + dt)dt]}{2}$$

Simplificando:

$$\mathrm{F}(t_0 + dt) \approx F(t_0) + \frac{F'(t_0) + F'(t_0 + dt)]dt}{2} \qquad (3)$$

Sin embargo:

$$F'(t_0 + dt) \approx F'(t_0) + F''(t_0)dt \qquad (4)$$

Sustituyendo (4) en (3):

$$F'(t_0 + dt) \approx F(t_0) + \frac{[F'(t_0) + F'(t_0) + F''(t_0)dt]dt}{2}$$

Simplificando:

$$\mathrm{F}(t_0 + dt) \approx F(t_0) + F'(t_0)dt + \frac{F''(t_0 + dt)dt^2}{2} \qquad (5)$$

Si a partir de (5) se considera la aproximación:

$$F'(t_0 + dt) \approx F(t_0) + F'(t_0)dt + \frac{F''(t_0 + dt)dt^2}{2} \qquad (6)$$

Calculando el promedio de las tres aproximaciones, (1), (2) y (6), se obtiene una mejor aproximación para $F(t_0 + dt)$, como sigue:

$$\mathrm{F}(t_0 + dt) \approx F(t_0) + F'(t_0)dt + \frac{F''(t_0)dt^2}{2} + \frac{F'''(t_0)dt^3}{3 \cdot 2}$$

Y así sucesivamente, se obtiene el promedio entre todas las aproximaciones que se van calculando. La serie de Taylor se va construyendo con estos promedios:

$$\mathrm{F}(t_0 + dt) \approx F(t_0) + F'(t_0)dt + \frac{F''(t_0)dt^2}{2} + \frac{F'''(t_0)dt^3}{3 \cdot 2} + \ldots$$

Después se pasa de la situación local a la situación global a través de $t = t_0 + dt$, lo que en términos de la estructura de las relaciones equivale a pasar, en la categoría de la cantidad t, de $t_0 + dt$, a t y, en la categoría de la cantidad $F(t)$, de $F(t_0 + dt)$ a $F(t)$, como indica la siguiente (Figura 13).

t	$F(t)$
t	$F(t_0)$
$t_0 + dt$	$S(t_0 + dt)$
·	·
·	·
t	$F(t)$

Figura 13

entonces:

$$F(t) = F(t_0) + F'(t_0)(t - t_0) + \frac{F''(t_0)(t - t_0)^2}{2} + \frac{F'''(t_0)(t - t_0)^3}{3!} + \ldots$$

En este tercer camino está presente la noción de *constantificación de lo variable* a través del *promedio* y la noción de *predicción* articulada con la noción de *acumulación*, que permiten la construcción de la llamada serie de Taylor.

En esta serie es inherente un procedimiento de *derivación sucesiva*, que se puede caracterizar como un procedimiento algorítmico o *algoritmo* de acuerdo a lo discutido en el apartado 2.

Así, el algoritmo consistiría en lo siguiente:

- De la situación local, $dF(t) = F'(t)dt$, extraer $F'(t)$.

- Encontrar la derivada de $F''(t)$, es decir, $F'(t)$.
- Luego encontrar la derivada de $F'(t)$, es decir $F'''(t)$, y así sucesivamente. Esto es posible ya que $F(t)$ es una función analítica (las funciones analíticas son propias de los fenómenos de variación continua o flujo continuo en la naturaleza).
- Enseguida se encuentran las condiciones iniciales que falten, ya sea, $F(t_0)$ o $F'(t_0)$ o $F'''(t)$, según sea el caso.
- Por último, sustituir en la serie las condiciones iniciales.

4.3. Diversos algoritmos y su estructura relacional

Con el objetivo de poner en evidencia algunos alcances de la estructura relacional descrita en el primer camino del apartado 4.2.2., analizamos diversos algoritmos que están presentes en el Cálculo integral y las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias.

Discutimos el algoritmo de los métodos numéricos siguientes: Método de Euler, Método de Euler Modificado, Método de Runge-Kutta, Regla del Trapecio, Regla del Punto Medio, Regla del Punto Extremo, Regla de Simpson.

4.3.1. El algoritmo del llamado método de Euler

Por lo regular el método de Euler para ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden se presenta, en los libros de texto, en la forma siguiente:

Dado el problema de valor inicial

$$y' = f(x, y),\ y(x_0) = y_0 \text{ (Clases 4b y 4c)}$$

se aplica la fórmula iterativa:

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) \qquad (n \geq 0)$$

para calcular aproximaciones sucesivas y_1, y_2, ... a los valores $y(x_1)$, $y(x_2)$, ... de la solución "exacta" en los puntos respectivos $x_1, x_2, \ldots$

En cuanto al nombre, algunos textos lo llaman *método de las quebradas de Euler, método de la línea tangente o método de la primera derivada*, dependiendo de los argumentos que emplean en la construcción de la fórmula. Sin embargo, la mayoría de autores le dan una interpretación geométrica.

Nosotros, para identificar la estructura relacional, simplemente consideramos la fórmula iterativa en su forma desarrollada:

$$y_n = \underbrace{\underbrace{\underbrace{\underbrace{y_0 + hf(x_0, y_0)}_{y_1} + hf(x_1, y_1)}_{y_2} + hf(x_2, y_2)}_{y_3} + \ldots + hf(x_{n-1}, y_{n-1})}_{y_n}$$

Así, la estructura relacional queda de la siguiente manera:

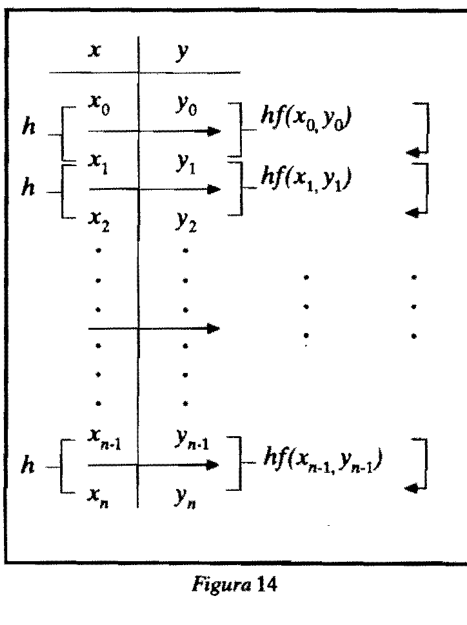


Figura 14

en la cual aquello que permite pasar localmente de la cantidad x a la cantidad y es la consideración de que, en un intervalo pequeño de la cantidad x, la razón de cambio variable se podría tomar como constante e igual a la razón de cambio en x_0, y calcular el efecto en la cantidad y o el incremento que se produce en la cantidad y, a saber: $hf(x_0, y_0)$.

Y así sucesivamente, se calculan todos los efectos en la cantidad y o incrementos de la cantidad y, para cada intervalo pequeño de la cantidad x en que se ha dividido el intervalo $[x_0, x_n]$.

Una vez que se tienen los incrementos de la cantidad y, se realiza el análisis en una sola categoría de cantidades (la cantidad y), por lo que este análisis se realiza de manera vertical. Sin embargo, las cantidades involucradas son de naturaleza distinta aunque de igual dimensión, debido a que lo que se busca es un estado (y_n) y lo que se tiene son incrementos de la cantidad y. Así, se tiene que sumando todos los efectos parciales nos da el efecto total (acumulación o cambio total):

$$hf(x_0, y_0) + hf(x_1, y_1) + hf(x_2, y_2) + \dots + hf(x_{n-1}, y_{n-1})$$

Luego, para llegar a y_n se tiene que hacer una suma acumulada:

$$y_0 + hf(x_0, y_0) + hf(x_1, y_1) + \dots + hf(x_{n-1}, y_{n-1}) = y_n$$

$$y_n \approx y(x_n)$$

En este análisis están involucradas varias nociones. La primera es una discretización de una magnitud continua para poder cuantificarla, en este caso las cantidades x y y se han discretizado.

La segunda es una noción de *constantificación de lo variable* que consiste en la posibilidad de considerar a una razón de cambio variable $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ como una razón de cambio constante en forma local, lo cual permite pasar de una categoría de cantidades a otra (de x a y).

Una tercera noción es la que subyace del análisis vertical y consiste en acumular todos los efectos locales para encontrar el efecto total o la acumulación total; en este caso

$$\sum_{i=0}^{n-1} hf(x_i, y_i)$$

Una cuarta noción es la de predicción del estado ulterior ($y_n = ?$), en la que al estado inicial se le suma la acumulación total para encontrar el estado ulterior:

$$y_0 + \sum_{i=0}^{n-1} hf(x_i, y_i) = y_n$$

$$y_n \approx y(x_n)$$

En donde la *acumulación total* es la transformación para pasar de y_0 a y_n.

Por otro lado, si $y' = f(x)$ y dada la condición inicial $y(x_0) = y_0$ (clases 2b y 2c), el método de Euler quedaría:

$$y_n = y_0 + hf(x_0) + hf(x_1) + \dots + hf(x_{n-1})$$

Lo cual es la llamada *regla del punto extremo* en el Cálculo integral. Dicha regla tiene la misma estructura relacional e involucra las mismas nociones que en el caso anterior, debido a que el análisis que presentamos es válido también para esta clase de problemas. Así como también es válido para las clases de problemas 3b y 3c ($y' = f(y)$) en donde el método de Euler quedaría:

$$y_n = y_0 + hf(y_0) + hf(y_1) + hf(y_2) + \dots + hf(y_{n-1})$$

Para finalizar este apartado, analicemos ahora el Método de Euler para ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden. Por lo regular se presenta en la forma siguiente:

$$y_n = \underbrace{\underbrace{\underbrace{y_0 + hy'_0 + \frac{h^2}{2} f(x_0, y_0, y'_0)}_{y_1} + hy'_1 + \frac{h^2}{2} f(x_1, y_1, y'_1)}_{y_2} + \ldots + hy'_{n-1} + \frac{h^2}{2} f(x_{n-1}, y_{n-1}, y'_{n-1})}_{y_n}$$

Cuadro 2

Se da el problema de valor inicial

$$y'' = f(x, y, y'),\ y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y'_0$$

[clases 11b y 11c]

Suponiendo que f es tal que el problema tiene una solución única en algún intervalo que contiene a x_0, se aplica la fórmula iterativa:

$$y_{n+1} = y_n + hy'_n + \frac{h^2}{2} y''_n$$

donde:

$$y'_{n+1} = y'_n + hy'_n \quad \text{y} \quad y''_n = f(x_n, y_n, y'_n)$$

Para calcular aproximaciones sucesivas $y_1, y_2, y_3, \ldots$ a los valores $y(x_1), y(x_2), \ldots$ de la solución "exacta" en los puntos $x_1, x_2, \ldots$ De modo semejante, los valores aproximados de la derivada $y'(x)$ en esos puntos se denotan por $y_1, y_2, \ldots$, respectivamente.

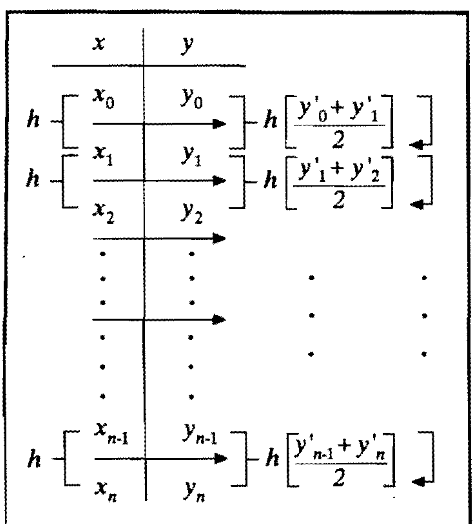


Figura 15

Para identificar la estructura relacional consideramos a la fórmula iterativa en forma desarrollada en el cuadro 2.

Así, la estructura relacional queda de la manera que se muestra en la Figura 15, en la cual aquello que permite pasar localmente de la cantidad x a la cantidad y es la consideración de que, en un intervalo pequeño de la cantidad x, la razón de cambio variable se podría tomar como constante e igual al promedio entre la razón de cambio y_0 (es decir, y'_0) y la razón de cambio en y_1 (o sea y'_1), y así poder calcular el efecto en la cantidad y o el incremento de la cantidad y que se produce, a saber:

$$h\,\frac{(y'_0 + y'_1)}{2}$$

y como: $y'_1 \approx y'(x_1) \approx y'(x_0 + h)$
entonces, $y'_1 \approx y'_0 + y''_0 h$
de manera que el *promedio* queda:

$$\frac{(y'_0 + y'_0 + y''_0 h)}{2} = y'_0 + y''_0 \frac{h}{2}$$

por lo que el incremento en la cantidad y queda:

$$h\,\frac{(y'_0 + y'_1)}{2} = hy'_0 + \frac{h^2}{2} y''_0$$

Y así sucesivamente, se calculan todos los efectos o incrementos en la cantidad y, para cada intervalo pequeño de la cantidad x en que se ha dividido el intervalo $[x_0, x_n]$.

Una vez que se tienen los incrementos de la cantidad y, se realiza el análisis en una sola categoría de cantidades (la cantidad y), por lo que este análisis se realiza de manera vertical.

Sin embargo, las cantidades involucradas son de naturaleza distinta aunque de igual dimensión, debido a que lo que se busca es un estado (esto es, y_n) y lo que se tiene son incrementos de la cantidad y. Así, sumando todos los efectos parciales nos da el efecto total (acumulación o cambio total):

$$hy'_0+\frac{h^2}{2}y''_0+hy'_1+\frac{h^2}{2}y''_1+\ldots+hy'_{n-1}+\frac{h^2}{2}y''_{n-1}$$

o también:

$$hy'_0+\frac{h^2}{2}f(x_0,y_0,y'_0)+hy'_1+\frac{h^2}{2}f(x_1,y_1,y'_1)$$
$$+\ldots+hy'_{n-1}+\frac{h^2}{2}f(x_{n-1},y_{n-1},y'_{n-1})$$

Luego, para llegar a y_n se tiene que hacer una suma acumulada:

$$y_0+hy'_0+\frac{h^2}{2}y''_0+hy'_1+\frac{h^2}{2}y''_1+\ldots+hy'_{n-1}+\frac{h^2}{2}y''_{n-1}=y_n$$

$$y_n\approx y(x_n)$$

En este análisis están involucradas varias nociones. La primera es una *discretización de una magnitud continua* para poder cuantificarla, en este caso las cantidades x y y se han discretizado.

La segunda es una noción de *constantificación de lo variable* que consiste en la posibilidad de considerar a una razón de cambio variable como una razón de cambio constante e igual al *promedio* entre la razón de cambio en y_k (es decir, y'_k) y la razón de cambio en y_k+1 (o sea, y'_{k+1}), con $k=0,1,2,\ldots,n-1$. Lo cual permite pasar de una categoría de cantidades a otra (de x a y), en forma local.

Una tercera noción es la que subyace del análisis vertical y consiste en acumular todos los efectos locales para encontrar el efecto total o la *acumulación total*; en este caso sería:

$$\sum_{i=0}^{n-1}hy'_i+\sum_{i=0}^{n-1}\frac{h^2}{2}f(x_i,y_i,y'_i)$$

Una cuarta noción es la de predicción del estado ulterior ($y_n=?$), en donde al estado inicial se le suma la acumulación total para encontrar el estado ulterior:

$$y_0+\textit{acumulación total}=y_n$$
$$y_n\approx y(x_n)$$

En donde la *acumulación total* es la transformación para pasar de y_0 a y_n.

4.3.2. El algoritmo del llamado método de Euler modificado

Por lo regular, el método de Euler modificado para ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden se presenta, en los libros de texto, en la forma siguiente:

Dado el problema de valor inicial

$$y'=f(x,y),\ y(x_0)=y_0\ \text{[clases 4b y 4c]}$$

se aplica la fórmula iterativa:

$$y_{n+1}=y_n+\frac{1}{2}h[f(x_n,y_n)+f(x_{n+1},y_{n+1})]\quad(n\geq 0)$$

en donde:

$$y_{n+1}=y_n+hf(x_n,y_n)\quad\text{[Método de Euler]}$$

para calcular aproximaciones sucesivas y_1, y_2,... a los valores $y(x_1)$, $y(x_2)$,... de la solución "exacta" en los puntos respectivos x_1, x_2,...

Si consideramos la fórmula iterativa en forma desarrollada:

$$y_n = \underbrace{\underbrace{\underbrace{y_0 + h\left[\frac{f(x_0, y_0) + f(x_1, y_1)}{2}\right]}_{y_1} + h\left[\frac{f(x_1, y_1) + f(x_2, y_2)}{2}\right]}_{y_2} + \ldots + h\left[\frac{f(x_{n-1}, y_{n-1}) + f(x_n, y_n)}{2}\right]}_{y_n}$$

Así, la estructura relacional queda de la manera que muestra la Figura 16, en la cual aquello que permite pasar localmente de la cantidad x a la cantidad y es la consideración de que, en un intervalo pequeño de la cantidad x, la razón de cambio variable se podría tomar como constante e igual al *promedio* entre la razón de cambio en y_0 [esto es, $y'_0 = f(x_0, y_0)$] y la razón de cambio en y_1 [es decir, $y'_1 = f(x_1, y_1)$], y así poder calcular el efecto o el incremento que se produce en la cantidad y, a saber:

$$h\left[\frac{f(x_0, y_0) + f(x_1, y_1)}{2}\right]$$

Y así sucesivamente, se calculan todos los efectos en la cantidad y o incrementos de la cantidad y, para cada intervalo pequeño de la cantidad x en que se ha dividido el intervalo $[x_0, x_n]$.

Una vez que se tienen los incrementos de la cantidad y, se realiza el análisis en una sola categoría de cantidades (la cantidad y), por lo que este análisis se realiza de manera vertical. Sin embargo, las cantidades involucradas son de naturaleza distinta aunque de igual dimensión, debido a que se busca un estado (y_n = ?) pero lo que se tiene son incrementos de la cantidad y.

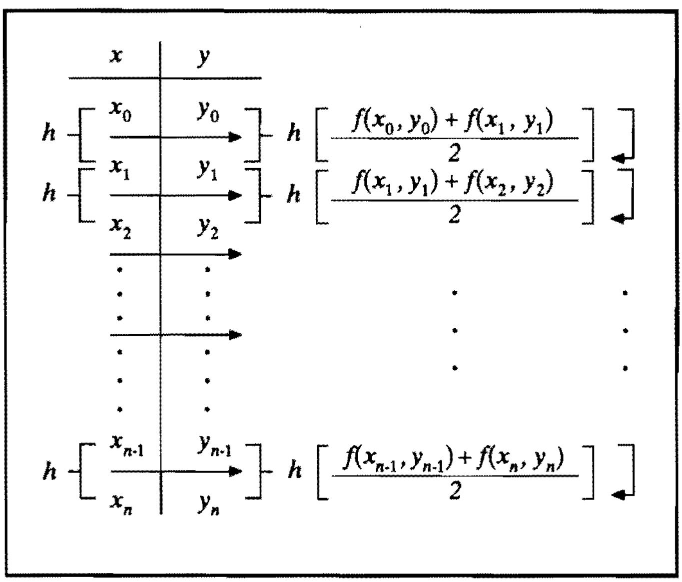


Figura 16

Así, sumando todos los efectos parciales (locales) nos da el efecto total (acumulación o cambio total):

$$\frac{h}{2}\,[f(x_0, y_0) + 2f(x_1, y_1) + 2\,f(x_2, y_2) + \ldots + 2f\,(x_{n-1}, y_{n-1}) + f(x_n, y_n)]$$

Luego, para llegar a y_n se tiene que hacer una suma acumulada:

$$y_0\,\frac{h}{2}\,[f(x_0, y_0) + 2f(x_1, y_1) + 2\,f(x_2, y_2) + \ldots + 2f\,(x_{n-1}, y_{n-1}) + f(x_n, y_n)] = y_n$$

En este análisis están involucradas varias nociones. La primera es una *discretización de una magnitud continua* para poder cuantificarla, en este caso, las cantidades x y y se han discretizado.

La segunda es una noción de *constantificación de lo variable* que consiste en la posibilidad de considerar a una razón de cambio variable como una razón de cambio constante e igual al promedio entre la razón de cambio en y_k [es decir, $y'_k = f(x_k, y_k)$] y la razón de cambio en y_{k+1} [o sea, $y'_{k+1} = f(x_{k+1}, y_{k+1})$], con $k = 0,1,\ldots,(n\text{-}1)$. Esta noción permite pasar de una categoría de cantidades a otra (de x a y), en forma local.

Una tercera noción es la que subyace del análisis vertical y consiste en acumular todos los efectos locales para encontrar el efecto total o la acumulación total; en este caso sería:

$$\frac{h}{2}\,f\,(x_0, y_0) + \sum_{i=1}^{n-1} hf(x_i, y_i) + h\ f(x_n, y_n)$$

Una cuarta noción es la de predicción del estado ulterior (y_n=?), en donde al estado inicial se le suma la acumulación total para encontrar el estado ulterior:

$$y_0 + \textit{acumulación total} = y_v$$
$$y_n \approx y(x_n)$$

En donde la *acumulación total* es la transformación para pasar de y_0 a y_n.

Por otro lado, si $y' = f(x)$ y dada la condición inicial $y(x_0) = y_0$ (clases 2b y 2c), el método de Euler modificado quedaría:

$$y_n = y_o + \frac{h}{2}\,[f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \ldots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)]$$

lo cual es la llamada *regla del Trapecio* en el Cálculo integral. Dicha regla tiene la misma estructura relacional e involucra las mismas nociones, debido a que el análisis que presentamos es válido también para esta clase de problemas. Así, también es válido para las clases de problemas 3b y 3c [$y' = f(y)$], en donde el método de Euler modificado quedaría:

$$y_n = y_o + \frac{h}{2}\,[f(y_0) + 2f(y_1) + 2f(y_2) + \ldots + 2f(y_{n-1}) + f(y_n)]$$

4.3.3. El algoritmo del llamado método de Runge-Kutta

Por lo regular el método de Runge-Kutta para ecuaciones diferenciales de primer orden se presenta, en los libros de texto, en la forma siguiente:

Dado el problema de valor inicial

$$y' = f(x, y)\,,\ y(x_0) = y_0 \qquad \text{[clases 4b y 4c]}$$

se aplica la fórmula iterativa:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}\,[A_n + 2B_n + 2C_n + D_n] \quad (n \geq 0)$$

en donde:

$$A_n = f(x_n, y_n)$$
$$B_n = f(x_n + \tfrac{h}{2}, y_n + \tfrac{h}{2}A_n)$$
$$C_n = f(x_n + \tfrac{h}{2}, y_n + \tfrac{h}{2}B_n)$$
$$D_n = f(x_n + h, y_n + hC_n)$$

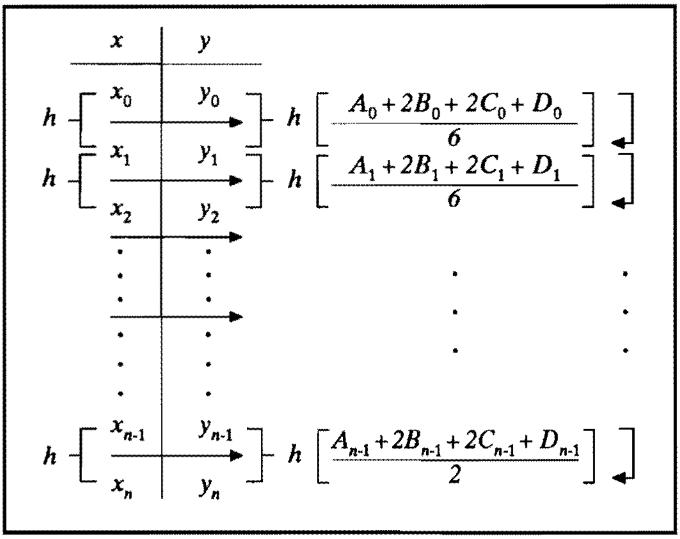


Figura 17

para calcular aproximaciones sucesivas $y_1, y_2, \ldots$ a los valores $y(x_1)$, $y(x_2)$ de la solución "exacta" en los puntos respectivos $x_1, x_2, \ldots$

Nosotros, para identificar la estructura relacional, consideraremos la fórmula iterativa así:

$$y_n = y_{n-1} + h\left[\frac{A_n + 2B_{n-1} + 2C_{n-1} + D_{n-1}}{6}\right] \quad (n \geq 1)$$

La estructura relacional es análoga a las anteriores, por lo cual queda de la manera que indica la Figura 17.

Analicemos en detalle lo que permite pasar localmente de la cantidad x a la cantidad y: (Figura 18)

En la cual aquello que permite pasar localmente de la cantidad x a la cantidad y es la consideración de que, en un intervalo pequeño de la cantidad x, la razón de cambio variable se podría tomar como constante e igual al promedio ponderado entre las razones de cambio tomadas en puntos diferentes del intervalo $x_{n-1} \leq x \leq x_n$ $(n \geq 1)$. Así, $A_0 = f(x_0, y_0)$ es la razón de cambio en el extremo izquierdo del intervalo; $B_0 = f(x^+_0, y^+_0)$ es la razón de cambio en el

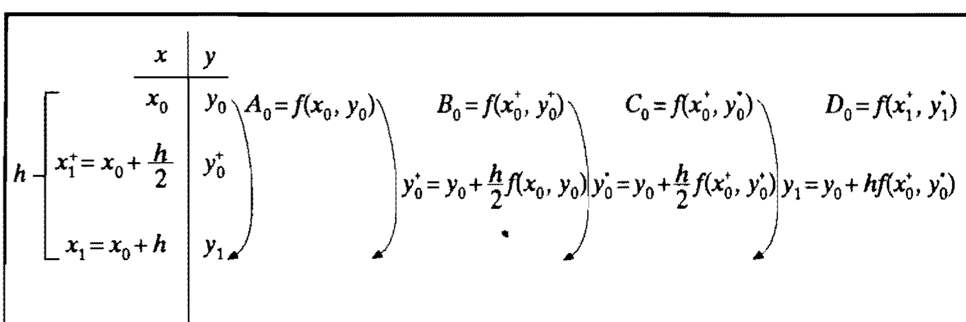


Figura 18

punto medio, usando la fórmula de Euler para ir de x_0 a $x_0 + h/2$; $C_0 = f(x'0, y'0)$ es una segunda aproximación a la razón de cambio en el punto medio; y, por último, $D_0 = f(x_1, y_1)$ es la razón de cambio en $x_0 + h$, usando la fórmula de Euler y la razón de cambio C_0 para ir de x_0 a $x_0 + h$.

De manera que el efecto o incremento en la cantidad y que se produce es:

$$h\left[\frac{A_0 + 2B_0 + 2C_0 + D_0}{6}\right]$$

Y así sucesivamente, se calculan todos los efectos en la cantidad y o incrementos de la cantidad y, para cada intervalo pequeño de la cantidad x en que se ha dividido el intervalo $[x_0, x_n]$.

Una vez que se tienen los incrementos de la cantidad y, se realiza el análisis en una sola categoría de cantidades (la cantidad y), por lo que este análisis se realiza de manera vertical. Sin embargo, las cantidades involucradas son de naturaleza distinta aunque de igual dimensión, debido a que se busca un estado (y_n = ?) y lo que se tiene son incrementos de la cantidad y.

Así, sumando todos los efectos parciales (locales) nos da el efecto total (acumulación o cambio total):

$$\frac{h}{6}\left[A_0 + 2B_0 + 2C_0 + D_0 + \ldots + A_{n-1} + 2B_{n-1} + 2C_{n-1} + D_{n-1}\right]$$

Luego, para llegar a y_n se tiene que hacer una suma acumulada:

$$y_0 + \frac{h}{6}\left[A_0 + 2B_0 + 2C_0 + D_0 + \ldots + A_{n-1} + 2B_{n-1} + 2C_{n-1} + D_{n-1}\right] = y_n$$

donde: $y_n \approx y(x_n)$

En este análisis están involucradas varias nociones. La primera es una *discretización de una magnitud continua* para poder cuantificarla, en este caso las cantidades x y y se han discretizado.

La segunda es una noción de *constantificación de lo variable* que consiste en la posibilidad de considerar a una razón de cambio variable como una razón de cambio constante e igual al *promedio ponderado* entre las razones de cambio tomadas en puntos diferentes del intervalo $x_n \leq x \leq x_{n+1}$ $(n \geq 0)$. Lo cual permite pasar de una categoría de cantidades a otra (de x a y), en forma local.

Una tercera noción es la que subyace del análisis vertical y consiste en acumular todos los efectos locales para encontrar el efecto total o la *acumulación total*; en este caso sería:

$$\sum_{i=0}^{n-1} \frac{h}{6}(A_i + 2B_i + 2C_i + D_i)$$

Una cuarta noción es la *predicción* del estado ulterior (y_n = ?), en donde al estado inicial se le suma la acumulación total para encontrar el estado ulterior:

$$y_0 + \textit{acumulación total} = y_n$$
$$y_n \approx y(x_n)$$

En donde la *acumulación total* es la transformación que permite pasar de y_0 a y_n.

Por otro lado, si $y' = f(x)$ y dada la condición inicial $y(x_0) = y_0$ (clases 2b y 2c), el método de Runge-Kutta quedaría:

$$y_n = y_{n-1} + \frac{h}{6}(A_{n-1} + 4B_{n-1} + D_{n-1}) \; (n \geq 1)$$

debido a que A_n, B_n, C_n y D_n se reducen a:

$$A_n = f(x_n)$$
$$B_n = f(x_n + \tfrac{h}{2}) = C_n$$
$$D_n = f(x_n + h)$$

entonces:

$$y_n = y_{n-1} + \frac{h}{6}[f(x_{n-1}) + 4f(x_{n-1} + \tfrac{h}{2}) + f(x_{n-1} + h)]$$

$$(n \geq 1)$$

desarrollando:

$$y_n = y_0 + \frac{h}{6}[f(x_0) + 4f(x_0 + \tfrac{h}{2}) + f(x_0 + h)$$
$$+ f(x_1) + 4f(x_1 + \tfrac{h}{2}) + f(x_1 + h) + \ldots$$
$$\ldots + f(x_{n-1}) + 4f(x_{n-1} + \tfrac{h}{2}) + f(x_{n-1} + h)]$$

también:

$$y_n = y_0 + \frac{h}{6}[f(x_0) + 4f(x_0 + \tfrac{h}{2}) + 2f(x_1)$$
$$+ 4f(x_1 + \tfrac{h}{2}) + 2f(x_2) + \ldots$$
$$\ldots + 2f(x_{n-1}) + 4f(x_{n-1} + \tfrac{h}{2}) + f(x_n)]$$

Si consideramos $k = \dfrac{h}{2}$ entonces:

$$y_n = y_0 + \frac{k}{3}[f(x_0) + 4f(x_0 + k) + 2f(x_0 + 2k)$$
$$+ 4f(x_0 + 3k) + 2f(x_0 + 4k) + \ldots$$
$$\ldots + 2f(x_0 + 2(n-1)k) + 4f(x_0 + (2n-1)k) + f(x_0 + 2nk)]$$

Si $x_m = x_0 + mk$ con $m = 2n$ entonces:

$$y_n = y_0 + \frac{k}{3}[f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2)$$
$$+ 4f(x_3) + 2f(x_4) + \ldots$$
$$\ldots + 2f(x_{m-2}) + 4f(x_{m-1}) + f(x_m)]$$

lo cual es la llamada *regla de Simpson* en el Cálculo integral. Dicha regla tiene la misma estructura relacional e involucra las mismas nociones debido a que el análisis que presentamos, acerca de la estructura relacional, es válido también para esta clase de problemas.

5. CONCLUSIONES

Partimos de una problemática propia de la enseñanza en la que están inmersos los estudiantes de Cálculo integral y que consiste en la separación entre lo conceptual y lo algorítmico. De manera que, a lo largo de la investigación tratamos de encontrar elementos que permitan entender de qué naturaleza es un procedimiento algorítmico en el Cálculo integral y en las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO), y si éstos están disociados de la conceptualización asociada a la integral, para tener una perspectiva cada vez más clara acerca de lo que podría significar *comprender un algoritmo* por los estudiantes. Y tratar de combatir la idea de que el estudiante aprende los procedimientos preestablecidos por simple condicionamiento o ejercitación.

Para propiciar el enlace entre lo conceptual y lo algorítmico, identificamos teóricamente una condición necesaria que se refiere a la existencia de situaciones problema a partir de las cuales se forman nociones y procedimientos, en estrecha relación, asociados al Cálculo integral.

En el contexto de los campos conceptuales, analizamos y clasificamos las diversas situaciones problema cuya solución exige de una integración. Luego, con ejemplos de Cinemática, realizamos un análisis detallado de la estructura relacional de algunas clases de problemas tratando de mostrar diversos procedimientos de solución y algunas de las nociones involucradas en dicho análisis. Además, mostramos diversos algoritmos y la estructura relacional que tienen asociada.

5.1. Hallazgos

De acuerdo con lo discutido en el apartado 4, identificamos tres estructuras relacionales, a saber: (Figura 19)

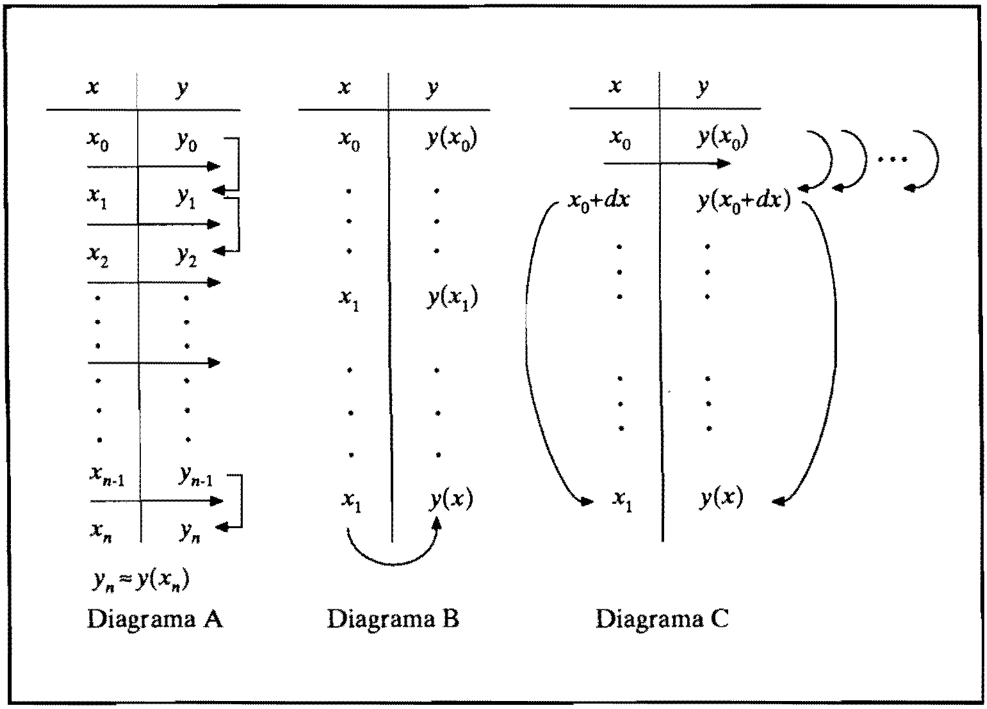


Figura 19

El diagrama A abarca la mayoría de los llamados *métodos numéricos* en el Cálculo integral (regla del punto extremo, del punto medio, del trapecio, de Simpson) y en las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (método de Euler, Euler modificado, Runge-Kutta).

Esta estructura relacional involucra nociones tales como: *Discretización de una magnitud continua, Predicción, Acumulación y Constantificación de lo variable*; así como un procedimiento de suma. Por último, esta estructura está asociada a procedimientos algorítmicos o *algoritmos.* En otras palabras, los llamados métodos de Euler, Euler modificado, Runge-Kutta y las llamadas regla del punto extremo, del punto medio, del trapecio, de Simpson son *algoritmos* que tienen asociada la estructura relacional del diagrama A.

El diagrama B abarca la mayoría de los llamados *métodos de integración o técnicas de integración* en el Cálculo integral (integración por partes, sustitución trigonométrica, funciones racionales y fracciones parciales, sustituciones de racionalización, etc.) y en las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias [EDO de primer orden: variables separables, homogéneas, exactas, lineales, etc. EDO lineales de segundo orden con coeficientes constantes: método de coeficientes indeterminados, método de variación de parámetros. EDO lineales de segundo orden con coeficientes que son funciones de la variable independiente: método de series de potencias y método de Frobenius (para un punto *regular singular*)].

Esta estructura relacional involucra nociones tales como: *noción de función primitiva,* *Predicción, Acumulación y Constantificación de lo variable*; así como un procedimiento de antiderivación. Por último, esta estructura está asociada a procedimientos no algorítmicos.

Es necesario aclarar que los métodos de variación de parámetros, coeficientes indeterminados y series infinitas, son esencialmente de ensayo debido a que se supone una solución de cierta forma y luego se busca hacer coincidir la ecuación diferencial dada con la ecuación diferencial formada a partir de la solución supuesta; por lo que, en cierto modo, se está intentando pasar directamente de una categoría de cantidades a otra.

El diagrama C abarca la serie de Taylor cuya estructura está asociada a un procedimiento algorítmico; es decir, la serie de Taylor es un *algoritmo* que tiene asociada la estructura relacional del diagrama C, por ejemplo: para las clases de problemas 1a, 1b, 1c, 2a, 2b, 2c, 3a, 3b, 3c, 4a, 4b, 4c, el procedimiento algorítmico consiste en derivar sucesivamente, evaluar la condición inicial en las derivadas sucesivas y sustituir en la serie de Taylor. Es conveniente aclarar que cuando la EDO es, por ejemplo, de la forma $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ se usa derivación implícita y dependiendo de la complejidad de $f(x, y)$ puede resultar también complejo calcular las derivadas sucesivas. Esta estructura involucra nociones tales como: *Constantificación de lo variable a través del promedio, Acumulación y Predicción.*

Con la identificación de éstas tres estructuras relacionales podemos mencionar algunos hechos respecto a nuestra hipótesis de trabajo:

Cada algoritmo tiene asociada una estructura relacional, la cual involucra ciertas nociones, además la estructura relacional adquiere relevancia en el contexto de un problema específico que se deriva de un fenómeno de variación continua, en donde los problemas específicos no se refieren a las causas del fenómeno de variación (¿por qué varían?) sino al *cuánto varían* una vez que se reconoce *cómo varía* el fenómeno.

Un elemento que se desprende de esta investigación, en el terreno del *rediseño del discurso matemático escolar*, se refiere a lo siguiente: una condición necesaria para propiciar el enlace entre lo conceptual y lo algorítmico, en la enseñanza del Cálculo integral, es un aspecto que tienen en común. Dicho aspecto se refiere a un problema específico por resolver que implique, requiera, o exija de una integración para hallar la solución.

Así que precisamos, en lo mayormente posible, ese tipo de problemas a través del análisis de los cambios de marco epistémico (ver apartado 3). Justificamos, en cierto modo, porque seleccionamos el marco epistémico de Newton a partir del cual construimos un campo conceptual del Cálculo, es decir, generamos un espacio de situaciones problema que le dan sentido al Cálculo integral y cuyo tratamiento implica el enlace entre lo conceptual y lo algorítmico. En donde el eje de lo conceptual está delineado por las nociones de *predicción, acumulación y constantificación de lo variable* articuladas a través de los procedimientos socialmente establecidos (*antiderivación, suma y derivación sucesiva*) que forman una parte del eje de lo algorítmico (ver apartado 4).

Por otro lado, la clasificación de problemas que presentamos es solamente una primera aproximación; sin embargo, es importante que se siga consolidando la clasificación, ya que es un instrumento para el análisis de las situaciones y para el análisis de las dificultades conceptuales encontradas por los estudiantes (Vergnaud, 1990a).

Es importante aclarar que no buscamos como objetivo central de la investigación hacer una clasificación sino que realizamos una clasificación de problemas porque asumimos la definición de algoritmo en el contexto de los campos conceptuales y por las exigencias de la condición necesaria identificada.

Solamente la clasificación es el inicio de un programa de investigación delineado por Vergnaud (1990b) que a la letra dice: analizar y clasificar la variedad de situaciones en cada campo conceptual.

Como se puede apreciar, realizamos nuestra investigación con base en algunos supuestos de la epistemología genética y de la teoría de los campos conceptuales así como considerando aspectos epistemológicos del Cálculo integral matizados por la perspectiva del *rediseño del discurso matemático escolar.*

Precisando, nos auxiliamos de la teoría de los campos conceptuales y de la epistemología genética por la necesidad de responder a una pregunta que surgió en el contexto del *rediseño del discurso matemático escolar*, por eso nuestras reflexiones se ubican en dicho contexto.

De manera que, las rupturas y posibles relaciones entre lo conceptual y lo algorítmico, en la enseñanza del Cálculo integral, es un punto importante que se debe seguir profundizando. En este trabajo de investigación sólo presentamos una posible perspectiva de dicho punto.

5.2. Implicaciones

Nuestra investigación nos permitió percibir a la *epistemología del Cálculo integral* en el sentido de caracterizar la epistemología de un campo conceptual del Cálculo construido a partir del marco epistémico de Newton.

Una implicación tanto teórica como metodológica consiste en la posibilidad de construir otros campos conceptuales del Cálculo *pertinentes* a partir de otros marcos epistémicos, por ejemplo, si a partir del marco epistémico de Cauchy se construye un campo conceptual del Cálculo entonces es posible analizar la relación entre lo conceptual y lo algorítmico desde otra perspectiva; sin embargo, lo más importante será desentrañar los mecanismos para pasar de un campo conceptual a otro. La pertinencia de los posibles campos conceptuales generados dependerá del contexto sociocultural específico de los estudiantes y de los profesores que interactúan en la institución escolar y será un aspecto importante a considerar en el análisis del *rediseño del discurso matemático escolar.*

BIBLIOGRAFÍA

Aleksandrov, A. D., et al. (1991). *La matemática: su contenido, métodos y significado.* Tomo I. (8a. reimpresión). España: Editorial Alianza Universidad.

Artigue, M. (1991). Analysis. En D. Tall ((d.), *Advanced Mathematical Thinking.* (Cap. 11, pp. 167-198). Mathematics Education Library. Kluwer Academic Publisher.

Artigue, M. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En P. Gómez (Ed.), *Ingeniería didáctica en educación matemática* (pp. 97-140). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des Mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7 (2), 33-115.

Cantoral, R., et al. (1990). Cálculo-Análisis. Una revisión de la investigación educativa reciente en México. En R. Cantoral & R. M. Farfán (Eds.), *Memorias del Segundo Simposio Internacional Sobre Investigación en Matemática Educativa* (pp. 55-69). Cuernavaca, Morelos, México.

Cantoral, R. (1983). *Procesos del cálculo y su desarrollo conceptual.* Tesis de Maestría. Sección de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN. México.

Cantoral, R. (1990). *Desequilibrio y equilibración. Categorías relativas a la apropiación de una base de significaciones propias del pensamiento físico para conceptos y procesos matemáticos de la teoría elemental de las funciones analíticas.* Tesis Doctoral. Sección de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN, México.

Cantoral, R. (1994). Los textos de Cálculo: una visión de las reformas y contrareformas. En T. Cordero, M. Murillo & T. Peralta (Eds.), *Memorias de la Octava Reunión Centroamericana y del Caribe sobre Formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa.* (pp. 11-20). San José, Costa Rica.

Cauchy, A. L. (1994). *Curso de análisis.* (C. Alvarez Jiménez, Trads.). México: Colección Mathema, Facultad de Ciencias, Universidad Nacional Autónoma de México. (Trabajo original publicado en 1821)

Chevallard, Y. (1991). *La Transpositión Didactique.* Grenoble, Francia: La Pensee Sauvage Editions.

Cordero, F. (1992). Una base de significados en la enseñanza de la matemática avanzada. En R. Cantoral, C. Imaz & R. M. Farfán (Eds.), *Memorias de la Sexta Reunión Centroamericana y del Caribe Sobre Formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa* (Vol. 2, pp. 267-296). Cuernavaca, Morelos, México.

Cordero, F. (1993). *La integral como un modelo de la noción de acumulación.* Lecciones de Cálculo para docentes de ingeniería. (Vol. 4). México: Cinvestav-IPN, Departamento de Matemática Educativa.

Cordero, F. (1994). *Cognición de la integral y la construcción de sus significados: Un estudio del discurso matemático escolar.* Tesis Doctoral. Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN, México.

Dreyfus, T. (1990). Advanced Mathematical Thinking. En P. Nesher & J. Kilpatrick (Eds.) *Mathematics and Cognition: A Research Synthesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 113-134). Cambridge University Press.

Dubinsky, E. & Schwingendorf, K. (1990). *Constructing Calculus Concepts: cooperation in a computer laboratory.* U.S.A.: MAA Notes Series.

Dubinsky, E. (1991). Reflective Abstraction in Advanced Mathematical Thinking. En D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (Cap. 7, pp. 95-126). Mathematics Education Library. Kluwer Academic Publishers.

Farfán, R. M. (1993). *Construcción de la noción de convergencia en ámbitos fenomenológicos vinculados a la ingeniería.* Estudio de caso. Tesis Doctoral. Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN, México.

Imaz, C. (1987). ¿Qué es la matemática educativa? En E. Bonilla, O. Figueras & F. Hitt (Eds.), *Memorias de la Primera Reunión Centroamericana y del Caribe sobre Formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa* (pp. 267-272). Mérida, Yucatán, México: Cinvestav, Sección de Matemática Educativa.

Imaz, C. (1989). *Taylor's Series: An empirical approach.* México: Cinvestav-IPN, Sección de Matemática Educativa.

Muñoz, G. (1993a). Un estudio acerca de la relación entre la noción de Acumulación y la construcción del algoritmo de la integral. En R. M. Farfán (Ed.), *Memorias del IV Seminario Nacional de Investigación en Didáctica del Cálculo.* (pp. 119-124). Monterrey, Nuevo León, México.

Muñoz, G. (1993b). Nociones, algoritmos, y resolución de problemas en el Cálculo Integral. En E. Filloy & F. Cordero (Eds.), *Memorias del Quinto Simposio Internacional sobre Investigación en Matemática Educativa* (pp. 213-218). Mérida, Yucatán, México: Cinvestav-IPN, Departamento de Matemática Educativa.

Muñoz, G. (1994). Un estudio acerca de la relación entre un sistema nocional y los algoritmos, en el Cálculo integral. En T. Cordero, M. Murillo & T. Peralta (Eds.), *Memoria de la Octava Reunión Centroamericana y del Caribe sobre Formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa* (pp. 101-106). San José, Costa Rica.

Muñoz, G. & Cordero, F. (1994). About Symbiosis Between Notion and Algorithm in Integral Calculus. Short Oral Presentation. *Proceedings of the Eighteenth Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.* University of Lisboa, Portugal.

Muñoz, G. (1996a). *Elementos de enlace entre lo Conceptual y lo Algorítmico en el Cálculo integral.* Tesis de Maestría. Departamento de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN, México.

Muñoz, G. (1996b). Algunos elementos de enlace entre lo Conceptual y lo Algorítmico en el Cálculo Integral. En J. Rodríguez (Ed.), *Memoria de la Décima Reunión Centroamericana y del Caribe sobre Formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa* (pp. 109-114). Puerto Rico.

Muñoz, G. (1997a). On the relationship between conceptual and algorithmic aspects in integral calculus: an example in kinematics. En J.Dossey, J. Swafford, M. Permantie & A. Dossey (Eds.), *Proceedings of the Nineteenth Annual Meeting North American Chapter of* *the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 63-64). Bloomington/Normal, Illinois, U.S.A.:ERIC Clearinghouse for Science, Mathematics, and Environmental Education. Illinois State University.

Muñoz, G. (1997b). Un aspecto del enlace entre lo conceptual y lo algorítmico en el cálculo integral: Un ejemplo en la Cinemática. En R. Farfán (Ed.), *Actas de la Undécima Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp. 64-68). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Muñoz, G. (1997c). On the relationship between conceptual and algorithmic aspects in integral calculus: an example in Kinematics. Investigación aceptada y presentada en la sesión general del *Research Conference in Collegiate Mathematics Education*, que se realizó del 4 al 7 de Septiembre de 1997 en la Central Michigan University.

Ortega, M. J. (1992). *La serie de Taylor en la enseñanza de la Cinemática.* Tesis de Maestría. Sección de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN. México.

Orton, A. (1983). Students Understanding of integration. *Educational Studies in Mathematics*, 14, 1-18.

Peltier, M. (1993). Una visión general de la Didáctica de las Matemáticas en Francia. *Educación Matemática*, 5 (2), 4-10.

Piaget, J. & García R. (1994). *Psicogénesis e Historia de la Ciencia.* (6™. ed.). México: Editorial Siglo XXI.

Polya, G. (1986). *Cómo Plantear y Resolver Problemas.* (13a. Reimpresión). México: Trillas.

Quezada, Ma. (1986). *Cálculo de Primitivas en el Bachillerato: su correlación con los algoritmos algebraicos y de cálculo diferencial.* Tesis de Maestría. Sección de Matemática Educativa, Cinvestav-IPN. México.

Salat, R. (1992). *Cálculo infinitesimal.* Lecciones de Cálculo para Docentes de Ingeniería. (Vol. 3). México: Cinvestav-IPN, Departamento de Matemática Educativa.

Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical Problem Solving.* U.S.A.: Academic Press, Inc.

Vergnaud, G. (1981). Quelques Orientations Theoriques et Methodologiques des Recherches Francaises en Didactique des Mathematiques. *Proceedings of the fifth Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathématics Education* (pp. 7-17).

Vergnaud, G. (1990a). La Théorie des Champs Conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques.* 10 (3), 133-170.

Vergnaud, G. (1990b). Epistemology and Psychology of Mathematics Education. En P. Nesher & J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics and Cognition: A Research Synthesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 14-30). Cambridge University Press.

Vergnaud, G. (1991). *El niño, las matemáticas, y la realidad.* México: Editorial Trillas.

Vinner, S. & Tall, D. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12, 151-169.

Wenzelburger, E. (1994). *Didáctica del Cálculo Integral.* México: Grupo Editorial Iberoamérica.