



Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa  
Comité Latinoamericano de Matemática Educativa  
relime@mail.cinvestav.mx  
ISSN (Versión impresa): 1665-2436  
MÉXICO

2000  
Marta B. Fernández Casuso  
PERFECCIONAMIENTO DE LA ENSEÑANZA-APRENDIZAJE DEL TEMA LÍMITE DE  
FUNCIONES CON EL USO DE UN ASISTENTE MATEMÁTICO.  
*Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, julio, año/vol. 3,  
número 002  
Comité Latinoamericano de Matemática Educativa  
Distrito Federal, México  
pp. 171-187

Red de Revistas Científicas de América Latina y el Caribe, España y Portugal

Universidad Autónoma del Estado de México

reDalyC  
LA MEMORIA CIENTÍFICA EN LÍNEA  
<http://redalyc.uaemex.mx>

## Perfeccionamiento de la enseñanza-aprendizaje del tema límite de funciones con el uso de un asistente matemático.

Marta B. Fernández Casuso\*

### RESUMEN

Este estudio propone un sistema didáctico para la impartición del tema: límite de una función de una variable con el uso de un asistente matemático para la asignatura Matemática I, en la Carrera de Ingeniería en Telecomunicaciones, en Cuba. Se exploraron las posibilidades de empleo de asistentes matemáticos, y atendiendo a la base material de estudio existente actualmente en el ISPJAE\* y de acuerdo a sus potencialidades se selecciona el DERIVE como el más idóneo. La propuesta resuelve los problemas detectados en la prueba de diagnóstico introduciendo la Informática en el proceso enseñanza- aprendizaje del tema, se basa en la teoría de la formación por etapas de las acciones mentales y contiene en su estructura los tres modelos que permiten el desarrollo de dichas acciones. La tesis incluye la propuesta de cómo validar el sistema didáctico que se sugiere para corroborar la ganancia metodológica de la misma.

### ABSTRACT

This study proposes a didactic system to impart the theme: limit of a function of a variable with the use of a mathematical assistant in Mathematics I, in the Career of Engineering in Telecommunications in Cuba. The possibilities of using mathematical assistants were explored and, considering the material basis of the study currently available in the "José A. Echevarría" Higher Polytechnic Institute (ISPJAE\*), and based on its potential, DERIVE is selected as the most ideal. The proposal solves problems detected in the diagnosis test, introducing data processing in the teaching-learning process of the theme, it is based on the theory of the formation of mental action in stages and its structure contains the three models that permit such action to develop. The thesis includes the proposal of how to validate the didactic system suggested in order to corroborate the methodology advantage it provides.

### RÉSUMÉ

Cette étude propose un système didactique pour la présentation d'un thème : limite d'une fonction d'une variable grâce au recours à un assistant mathématique pour l'unité de valeur Mathématiques I de la Maîtrise en Ingénierie des Télécommunications de l'île de Cuba. Nous avons examiné la possibilité d'utiliser des assistants mathématiques, et sur la base du matériel d'étude existant à l'heure actuelle à L'Institut Supérieur Polytechnique José A. Echeverría (ISPJAE\*), et selon son potentiel, il nous est apparu que le DERIVE était l'assistant idéal. La proposition résout tous les problèmes détectés lors du diagnostic, introduisant l'informatique dans l'enseignement-apprentissage du sujet, et se base sur la théorie de la formation des actes intellectuels par étapes et sa structure contient les trois modèles qui permettent le développement des actes en question. La thèse comprend la proposition d'évaluation du système didactique suggéré pour en constater les bénéfices méthodologiques.

### RESUMO

Este estudo propõe um sistema didático para a iniciação do tema: limite de uma função de uma variável com o uso de um assistente matemático para a disciplina Matemática I, do curso de Engenharia em Telecomunicações, em Cuba. Se exploraram as possibilidades de emprego de assistentes matemáticos e atendendo à base material do estudo existente atualmente no ISPJAE\* e de acordo a suas potencialidades se selecionou o DERIVE como o mais adequado. A proposta se fundamenta na resolução de problemas detectados na prova de diagnóstico introduzindo a informática no processo de ensino-aprendizagem do tema, se fundamenta na teoria da formação por etapas das ações mentais e contém em sua estrutura os tres modelos que permitem o desenvolvimento de ditas ações. A tesis inclui a proposta de como avaliar o sistema didático que sugere para colaborar na contribuição metodológica da mesma.

## INTRODUCCIÓN

Este fin de siglo se caracterizó por el acelerado desarrollo de tecnologías de la información y la comunicación, y la explotación de su potencial marcará, sin duda alguna, el comienzo del siglo XXI.

En la actualidad, el conocimiento de diferentes técnicas computacionales ocupa en Cuba un lugar importante en la formación del Ingeniero en Electrónica y Telecomunicaciones. En particular, en esta carrera se imparten asignaturas, como por ejemplo: Procesamiento de señales y Procesamiento digital de imágenes, que requieren actualmente del conocimiento profundo de dichas técnicas, además puede que en determinado momento el estudiante, o ya el ingeniero, necesite calcular una transformada o quizás un límite para el trabajo que esté realizando y si ha tenido instrucción relacionada con los asistentes matemáticos podrá rápidamente resolver su problema. Éste es un factor importante que determina la necesidad de dedicar tiempo, desde el ciclo básico en el nivel terciario, a la introducción de asistentes matemáticos dentro de las asignaturas, así como de técnicas de computación en el currículum académico de dicha especialidad.

“El uso de la computación puede aportar a la enseñanza de la Matemática una mejor comprensión del alcance de sus métodos, su empleo en la resolución de problemas reales y en consecuencia una mayor motivación del estudiante de los primeros años” (Alvarez et al., 1994).

Con la implantación del Plan de estudios C, a comienzos de la década anterior, en esta especialidad, se puso en práctica la realización de algunos laboratorios de DERIVE en las asignaturas de la disciplina, los cuales han tenido muy buena acogida por parte de los estudiantes. Se escogió este asistente por tener un lenguaje fácil, estructurado, con capacidad gráfica y modular, entre otras ventajas. Pero los laboratorios sólo se limitaron a la resolución de ejercicios y problemas utilizando los comandos del DERIVE. Sin embargo, “la importancia de considerar la selección de estrategias y un modelo de aprendizaje adecuado (construcción del conocimiento) nos hace pensar que la tecnología de computadoras a través de laboratorios se hace compatible con los fenómenos cognitivos y las situaciones didácticas asociadas al aprendizaje” (Solanilla & Corrales, 1996). Es por ello que surge la idea de presentar el tema límite de funciones, que contiene uno de los conceptos más abstractos de la Matemática y de mayor dificultad en la asimilación de los estudiantes, basándonos en métodos más dinámicos de aprendizaje y tendientes a incorporar el conocimiento matemático mediante visualización, descubrimiento y exploración.

El análisis de los textos que abordan el concepto de límite, utilizados en las carreras de Ingeniería en Cuba, ha mostrado que hay abundantes notaciones y pobre interpretación geométrica y que no abundan observaciones y aclaraciones de las mismas.

La utilización de la tecnología de computación puede ser un medio de enseñanza al igual que un libro o vídeo, pero con un mayor nivel de interactividad.

Uno de los conceptos centrales en la Matemática I, que se imparte en la carrera de Telecomunicaciones en el primer año, es el límite de una función en un punto.

El concepto de límite es uno de los más difíciles de formar en los estudiantes, es trascendental en el aprendizaje del Cálculo, ya que otros conceptos como continuidad, derivada, integral y serie recurren a él. Esto justifica la importancia de cualquier esfuerzo que se realice en pos de lograr un aprendizaje eficiente del mismo.

Sin embargo, en la enseñanza del tema Límite de Funciones de una variable real en forma tradicional, los estudiantes tienen dificultades en la identificación del concepto y en la visualización del mismo.

El objetivo del trabajo es la detección de causas que permitan constatar estas dificultades, así como el diseño de un sistema didáctico apoyado en las tendencias pedagógicas actuales y el uso de un asistente matemático que contribuya a alcanzar niveles superiores de desarrollo de conocimiento y habilidad en el cálculo de límites en los estudiantes de la Facultad de Eléctrica.

Por ello se propone una variante de sistema didáctico donde se utilizará el asistente matemático DERIVE como medio de enseñanza en conferencia y como herramienta de trabajo en clase práctica. Se muestra el programa DELTA, realizado sobre el asistente DERIVE, para la utilización en la conferencia y se plantean nuevos objetivos relacionados con la utilización de asistentes en la enseñanza y el aprendizaje

del tema de límites de una función en un punto (puede ser este impropio) correspondientes a la asignatura Matemática I de la carrera Ingeniería en Telecomunicaciones para contribuir a la integración de la computación en la Matemática para las carreras de Ciencias Técnicas.

## **FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA**

“La enseñanza profesional se hace cada día más compleja, ya que tiene la responsabilidad de capacitar al profesional para enfrentar en el futuro los cambios que de seguro tendrán lugar. Actualmente la tarea principal de las Universidades cubanas es elevar la calidad del graduado, lo que implica una mejor formación integral, acorde con los principios de la sociedad socialista y de la formación de graduados con perfil amplio” (Calderón, 1995).

La Pedagogía actual, en el nivel terciario, no puede dejar de considerar los avances técnicos y tecnológicos de nuestra época. Por tanto debe ser capaz de, partiendo del papel que tienen los medios en el proceso de enseñanza y sobre la base de requerimientos pedagógicos, utilizar todos estos recursos en el lugar que les corresponda con el fin de favorecer el logro de los fines que se propone. Debe dosificar el peso específico que ellos puedan tener según las diferentes variantes y modalidades de curso.

El medio de enseñanza está íntimamente relacionado con las restantes categorías del proceso, específicamente, la relación más importante es entre los métodos y los medios ya que no se puede concebir uno ajeno al otro.

Según la resolución 220/79 del MES se entiende por medio de enseñanza:

“El sistema de componentes materiales que apoyan y elevan la calidad del proceso docente educativo” y establece la clasificación según su naturaleza en objetos naturales e industriales, objetos impresos y estampados, medios sonoros y de proyección y materiales para la enseñanza programada y de control (MES, 1979).

Las computadoras, en cualquiera de sus versiones, son en la práctica un medio para la ejecución automática, a velocidades relativamente altas, de algoritmos para fines diversos. La aplicación de la computadora en el campo de la enseñanza no se aparta de esta definición general, ya que se trata de crear un conjunto de algoritmos que posibiliten la explotación de los medios técnicos disponibles, poniéndolos en función de informar, controlar, dirigir y evaluar la actividad del estudiante, de modo que éste pueda alcanzar los objetivos previstos.

La computadora ofrece un ambiente favorable para el diálogo, con lo cual toma vida el estudio de una lección, y el alumno encuentra una contraparte que actúa en correspondencia con los criterios del profesor ante cada una de sus respuestas.

A la enseñanza de las Matemáticas asistidas por computadoras se le puede atribuir las siguientes ventajas frente a la enseñanza tradicional:

1. Motivación que produce en los estudiantes.
2. Personalización del proceso de aprendizaje, permitiendo que cada sujeto aprenda a su propio ritmo.
3. Información inmediata que proporciona al alumno sobre sus respuestas, permitiéndole volver sobre sus pasos.
4. Facilita la tarea del profesor a la hora de utilizar diferentes estrategias didácticas con distintos grupos de clase.

En la Universidad Politécnica de Valencia desde hace varios cursos se trabaja en la incorporación a la enseñanza de las Matemáticas de asistentes matemáticos, en especial en el uso de DERIVE.

Llorens Fuster, profesor de la Universidad Politécnica de Valencia en su texto: *Introducción al uso del DERIVE*, sostiene que “la utilización de esos recursos no sólo abre nuevas perspectivas a los ejercicios y aplicaciones, sino que se puede usar eficazmente para que se entiendan mejor los conceptos”. (Llorens Fuster, 1995)

No obstante es bueno señalar que se pueden cometer errores con el abuso de la utilización de este medio. Gómez Moreno señala tres errores:

1. La total deshumanización del sistema educativo.
2. "Comodidad" para los profesores ya que la computadora los descarga de la labor de enseñar; la máquina enseña, el profesor descansa.
3. "Comodidad" para el estudiante ya que realiza menor esfuerzo en los cálculos.

Coincidimos con los criterios de Gómez Moreno (1990) quien plantea: "debemos reconocer que la ayuda que el microcomputador y otras modernas herramientas nos prestan en la labor de transmitir conocimientos, desplaza la principal actividad del profesor de la información a la formación". Al dedicar más tiempo a interactuar con cada estudiante se mejora la calidad de la enseñanza. Además la utilización de la computadora por el profesor exige que éste se enfrente a ella para que la utilice, que adquiera experiencia con ella antes de introducirla en clases, claro está, se trata de un trabajo adicional y deberá invertir buen tiempo extra, pero de sumo interés, si de ganar calidad se trata.

La experiencia ha demostrado que el conocimiento recibido con poco esfuerzo se olvida rápidamente. El aprendizaje es proporcional al esfuerzo realizado por el alumno. Al facilitar el acceso a la información se eliminan obstáculos en la comunicación, pero se debe fomentar el desarrollo, en nuestros alumnos, de la intuición y la creatividad. Por ello, los estudiantes deberán esforzarse ante la computadora, pero debe ser un esfuerzo a un alto nivel no sólo por manejar el equipo, sino por desarrollar la creatividad en la resolución de problemas, cada vez más cercanos a la realidad. Este esfuerzo adicional al de resolver problemas tradicionales, que no hallamos en los textos, es algo que debemos llegar a lograr en los estudiantes. Estamos entonces aumentando la actividad inteligente del alumno, lo que contribuye a su mejor formación.

Sin embargo, la excesiva dependencia de la computadora en el proceso docente educativo puede crear problemas más serios de los que se intentan resolver. Los profesores y profesionales vinculados a la enseñanza de las matemáticas que se oponen a la introducción de la computadora en la enseñanza exponen los siguientes criterios:

- Falta de especificidad en el contexto educativo. Una herramienta de software es tan abstracta y desconceptualizada como una teoría matemática. Puede convertirse en una "caja negra" que los alumnos utilizan apretando botones sin tener idea de lo que están haciendo. La computadora en lugar de desmitificar la Matemática, contribuye a su mistificación.
- Efectos adversos en la creatividad y habilidades en la resolución de problemas, al crear en el alumno una excesiva dependencia de la máquina y al anestesiar sus impulsos de buscar otras representaciones del problema o relaciones entre partes del problema.
- La esperanza de que al liberar al alumno de una excesiva dependencia de sus habilidades computacionales, potenciaría un mayor esfuerzo en la comprensión conceptual, devalúa gravemente la importancia que esta habilidad computacional tiene en el forjado de un entendimiento conceptual (Pérez Carrera, 1996).

También señalaremos que el papel educativo que juega el profesor en el proceso de enseñanza aprendizaje pudiera afectarse ya que se pierde, en buena medida, la comunicación con el estudiante en cuanto a la dirección y control del aprendizaje.

No debemos olvidar que al hablar de enseñanza asistida por computadora la palabra es enseñanza y no computadora (Vacas & Juanes, 1991). Por ello la utilización de la computadora en el aula no debe ser un fin sino un medio para alcanzar determinados objetivos psicopedagógicos. En consecuencia a la hora de elegir un software debemos pensar en:

¿Sirve para alcanzar los objetivos previstos?

¿Qué aporta al proceso de enseñanza - aprendizaje?

### **ENTREVISTA A LOS PROFESORES**

En la entrevista, los profesores y el jefe de la disciplina Matemática en la Facultad de Eléctrica señalaron, sobre la enseñanza de límite en forma tradicional, las siguientes dificultades:

- Interpretar el concepto de límite de una función en un punto a partir de la definición de Cauchy.

- Interpretar geoméricamente el concepto.
- Resolver problemas de aplicaci3n o que conlleven un mayor n3mero de c3lculos.
- El n3mero de intentos que el alumno necesita para resolver un problema.

### **PRUEBA DE DIAGN3STICO**

Se realiz3 una prueba de diagn3stico para detectar las dificultades en el aprendizaje del tema despu3 de ser impartido, en dos grupos de las especialidades Autom3tica y Telecomunicaciones, por profesores con m3s de quince a3os de experiencia en el dictado de la asignatura y que ostentan la categor3a de Profesor Titular y Profesor Asistente.

Para la elaboraci3n del diagn3stico se realiz3 previamente un an3lisis de los objetivos con el fin de descomponerlos en acciones y as3 medir el cumplimiento de las caracter3sticas de las mismas. Se decidi3 que estas acciones fueran las siguientes:

- Identificar la adecuada definici3n de l3mite de una funci3n en un punto
- Reconocer, mediante un gr3fico, si una funci3n tiene l3mite.
- Calcular el l3mite de una funci3n por diferentes v3as.
- Modelar relaciones entre fen3menos f3sicos, el3ctricos etc. Esta 3ltima acci3n no la medimos en el diagn3stico, ya que consideramos que la misma se va formando a lo largo del semestre y la medici3n se realiza al culminar de impartir el tema.

El diagn3stico se llev3 a cabo mediante un cuestionario, con 3tems de respuesta cerrada sobre ideas del l3mite de una funci3n en un punto, con el objeto de medir los niveles de interpretaci3n del concepto. Una segunda pregunta fue, para el reconocimiento gr3fico del l3mite de una funci3n en un punto donde se dan todas las posibilidades geom3tricas de an3lisis del l3mite y un tercer tipo de ejercicio fue de c3lculo de l3mite en forma manual.

Con vistas a detectar si hab3a diferencias en las calificaciones de los estudiantes que pertenecen a las dos carreras establecimos la siguiente hip3tesis de nulidad: No hay diferencias significativas entre los resultados obtenidos en la pregunta con relaci3n a la carrera. De esta manera la hip3tesis alternativa ser3a que los resultados obtenidos difieren en cuanto a la carrera.

Para corroborar dichas hip3tesis se aplic3 la prueba estad3stica de la mediana. Esta prueba es un procedimiento para probar si dos grupos independientes difieren en sus tendencias centrales. M3s exactamente, esta prueba dar3 informaci3n acerca de la probabilidad de que dos grupos independientes (no necesariamente del mismo tama3o) se hayan tomado de poblaciones con la misma mediana (marca de la clase donde se acumula el 50% de los datos).

Se tom3 en cuenta para la aplicaci3n de esta prueba estad3stica un nivel de significaci3n  $\alpha = 0.05$

Aplicando la prueba de la mediana en la pregunta correspondiente a la interpretaci3n del concepto se obtuvo que la mediana combinada es 2, y se corrobor3 que no existen diferencias significativas con relaci3n a la carrera desde el punto de vista estad3stico. Pero adem3s se observ3, en esta prueba, que la concentraci3n de los resultados estaban alrededor de la nota 2; esto nos muestra deficiencias en la interpretaci3n del concepto de l3mite.

Con relaci3n a la visualizaci3n gr3fica del concepto, los resultados de esta pregunta se corroboraron con los obtenidos en la prueba de la mediana. Como se puede observar, s3lo el 48% interpreta adecuadamente el concepto de l3mite y s3lo un grupo rebasa este porcentaje, por lo que podemos concluir que existen deficiencias en la definici3n del concepto cuando se ense3a en forma tradicional.

Se pudo observar, en el c3lculo de l3mites, que los porcentajes son superiores a los de las preguntas anteriores. Esto muestra que se ejerce una mayor incidencia en el c3lculo de l3mites en forma manual, dedic3ndole m3s tiempo a este aspecto en el proceso de ense3anza - aprendizaje del tema.

Los resultados de las calificaciones de la prueba se reflejan en la siguiente Tabla.

	2	3	4	5	%
TL - 11	4	6	10	1	80
TL - 12	8	8	7	1	76
A - 11	4	2	10	1	75
A - 12	1	4	13	0	94
total	14	20	40	3	81

*Nota.* TL – 11 y TL – 12 = grupos muestra, en la experiencia, formados con alumnos de primer año de la especialidad en Telecomunicaciones; A –11 y A – 12 = grupos testigos formados con alumnos de primer año en la especialidad de Automática. Ambas especialidades de la Facultad de Ingeniería Eléctrica del ISPJAE. En tanto que 2, 3, 4, 5 son las notas obtenidas por los estudiantes. (2 = desaprobado; 3 = aprobado; 4 = muy bien; 5 = excelente).

El análisis realizado nos muestra que en ambas carreras los resultados no difieren pero nos hace reflexionar sobre la pobre asimilación de los conceptos, aunque no así sobre los cálculos, pues si bien el ingeniero que queremos formar debe saber calcular, también debe saber interpretar los conceptos razonando adecuadamente el paso de lo finito a lo infinito, y otros procesos lógicos relacionados con el concepto de límite de una función en un punto.

Es por ello necesario instrumentar la forma de impartir este tema de manera activa utilizando los recursos novedosos a nuestro alcance: el uso de la computadora a través de los asistentes matemáticos que permitan interactuar con la definición, para lograr que los alumnos puedan interiorizar con más calidad el concepto y como herramienta de trabajo, para que ellos puedan calcular límites con mayor nivel de complejidad y además comprobar los resultados obtenidos de su estudio independiente y también aplicarlo en el análisis de gráficos de funciones o en cualquier situación problemática donde sea factible su utilización.

### **PROPUESTA**

Se propone impartir el contenido del tema de límite en un primer curso de Matemática para estudiantes de Ingeniería, apoyado por los acercamientos gráficos y numérico para la definición del concepto con la utilización del DERIVE, lo que nos permite una mayor fidelidad y exactitud en las representaciones visuales respecto a la que se obtiene con los instrumentos normales, lápiz y papel, tiza y pizarra.

En la propuesta didáctica también se introducen cambios relacionados con:

- La precisión de los objetivos del tema.
- Utilización del DERIVE como medio de enseñanza y como apoyo al desarrollo de habilidades de los estudiantes, lo cual presupone aprovechar la liberación de los cálculos que el asistente matemático proporciona para hacer énfasis en otras habilidades.
- Utilización de métodos activos de enseñanza que conlleven al estudiante a un desarrollo gradual por etapas, a una formación sólida de habilidades teóricas y prácticas y a un conocimiento adquirido de forma lógica y razonable.
- Aplicar nuevas formas de control del aprendizaje.

### **MODELO DE LOS OBJETIVOS**

Para la elaboración de los objetivos se tuvieron en cuenta los resultados de la prueba de diagnóstico, analizada anteriormente, que precisan las insuficiencias en la apropiación de los contenidos del tema por los estudiantes utilizando formas tradicionales de enseñanza. Teniendo en cuenta la variante de que el estudiante va a utilizar el asistente matemático DERIVE, el cual contribuirá a facilitar la apropiación de los contenidos, se definen como objetivos generales del tema los siguientes:

Al finalizar la impartición de los contenidos los alumnos deberán ser capaces de:

1. Caracterizar, identificar e interpretar el concepto de límite de una función en un punto. Interpretar el límite infinito de funciones reales de variable real.
2. Interpretar geoméricamente el concepto de límite de una función en un punto.
3. Calcular límites por las diferentes vías en forma manual y utilizando el asistente DERIVE. Aplicarlos a la resolución de problemas, a la comparación de funciones y al cálculo de asíntotas.
4. Caracterizar el proceso de límite como una relación de causa - efecto, lo cual requiere un punto de vista dialéctico.
5. Identificar, interpretar y demostrar resultados teóricos sencillos relacionados con las propiedades y teoremas de límite.
6. Controlar la correspondencia entre las respuestas de la computadora con las expectativas de solución a los efectos de tomar decisiones.

Cada objetivo fue expresado mediante tareas típicas para lograr, a través de las mismas, que el estudiante vaya aproximándose al logro del objetivo de esta instancia.

### **MODELO DE LOS CONTENIDOS**

En este trabajo se plantea la alternativa de impartir los contenidos del tema límite de funciones de una variable en todos los casos posibles, esto es, límite finito cuando la variable tiende a un valor finito o cuando tiende al infinito y límite infinito cuando la variable tiende a un valor finito o infinito. Esto debido a que la utilización del asistente se limita al caso de una variable ya que DERIVE no calcula límite doble, sólo límites iterados para funciones de varias variables y no es posible dar el caso general de límite de funciones para un punto de acumulación del dominio de una función de varias variables, para establecer posteriormente los casos particulares, como se ha impartido en otras carreras. Se mantienen, por tanto, los contenidos del tema límite indicados en el programa del plan C de la disciplina Matemática para la carrera de Ingeniería en Telecomunicaciones.

Este tema no puede ser abordado aisladamente ya que se considera que forma parte de otro gran tema en la asignatura Matemática I que es el análisis del comportamiento de una función real de una variable real. Esto debido a que el análisis del límite de una función en un punto es una propiedad local de las funciones, y por ello, desde el primer tema que se trata en el programa de la asignatura referido a las funciones elementales, sus propiedades y sus gráficas, puede ser intuido, a partir de las gráficas de funciones en determinados puntos donde presenten características singulares. Pero además, dicho tema es de gran aplicación ya que, por ejemplo, el tratamiento de asíntotas tanto verticales como horizontales se propone allí, y se pueden realizar problemas de razón de cambio a partir de la definición de límite del cociente incremental.

### **MODELO DE ORGANIZACIÓN DEL PROCESO DE ASIMILACIÓN**

Se propone un conjunto de indicaciones generales a tener en cuenta para el desarrollo del tema, muchas de las cuales ya estaban planteadas en el programa vigente y se proponen otras que han surgido como consecuencia de los resultados de los aspectos investigados. Sobresalen las siguientes:

- La computación estará en el desarrollo del tema, con tales fines se utiliza en conferencia en clases de laboratorio, así como en evaluaciones, sin obviar el estudio independiente de los estudiantes.
- La importancia esencial de la Matemática, en la formación del ingeniero, radica en que es el lenguaje de la modelación. El soporte simbólico con la ayuda de la cual se expresan las leyes que gobiernan el objeto de trabajo del ingeniero, por tanto, hay que otorgar prioridad al desarrollo de la capacidad de modelar utilizando los conceptos y el lenguaje de la Matemática, así como la habilidad de interpretar modelos ya creados sobre la base de los conceptos de la disciplina.
- El papel del estudio independiente y de la apropiación activa del conocimiento se incrementa haciendo prevalecer, como formas de enseñanza, las clases; las clases de laboratorio con presencia del asistente matemático; el seminario, donde los estudiantes preparan el contenido de ejercicios del tema seleccionado e informan y debaten los resultados del estudio realizado. Se promueve el uso de la computación y la utilización de programas modulares, así como el estudio de la bibliografía a través de resúmenes y ejercicios relacionados con el tema.

- Se pone énfasis en el trabajo con los conceptos, los símbolos y las demostraciones de propiedades de los objetos matemáticos para reforzar el papel de la asignatura en el desarrollo del pensamiento lógico y de la capacidad de razonamiento de los estudiantes.

En la organización del proceso de asimilación del tema se consideran: la impartición del contenido del tema límite de funciones utilizando el asistente matemático DERIVE como recurso para la visualización del concepto, lo cual supone mejorar la comprensión de los mismos, aprovechar la liberación de los cálculos que el asistente matemático proporciona para hacer énfasis en otras habilidades, entre ellas, la determinación de asíntotas que tributa al trazado de la gráfica de una función, objetivo terminal de la asignatura; utilización de métodos activos de enseñanza que conlleven al estudiante a un desarrollo gradual por etapas, a una formación sólida de habilidades teóricas y prácticas, así como a un conocimiento adquirido en forma lógica y razonable al sistema de tareas; las actividades que permitan vincular el tema con la computación, y con otras asignaturas de la carrera; y la aplicación de un método de evaluación que propicie el desarrollo del control y autocontrol de los estudiantes.

Las diferentes actividades docentes serán preparadas de manera tal que el cálculo de límites se realice con la inclusión de suficientes situaciones gráficas que permitan la comprensión del ejercicio por los estudiantes y que propicien el debate, la reflexión, la toma de postura crítica, tanto individual como colectiva en cada actividad educativa.

Se proponen los siguientes componentes para estructurar el tema:

1. Conferencia con el uso de la computadora.
2. Clase práctica de dos tipos: en el aula y en el laboratorio de computadoras.
3. Seminario.
4. Tarea extraclase.
5. Evaluación escrita y en la computadora.

Se propone la impartición del tema con la siguiente distribución de contenidos y formas de enseñanza:

**Clase 1** Límite de una función en un punto. (Conferencia)

**Clase 2** Ejercitación de los contenidos de la clase anterior. (Clase práctica)

**Clase 3** Límites infinitos y en el infinito. Asíntotas. (Conferencia)

Para motivar la clase, donde se van a introducir estos conceptos, se utilizarán gráficos de funciones con asíntotas verticales y oblicuas que son un valioso instrumento para visualizar los conceptos de límite infinito y en el infinito. Además de las definiciones se dará el teorema 4.8 del texto<sup>1</sup>; que utilizan los alumnos y que trata sobre las propiedades de estos límites y pueden posteriormente realizarse ejercicios de cálculo de límites. Se puede utilizar DERIVE para mostrar los gráficos de las funciones con sus correspondientes asíntotas.

**Clase 4** Formas indeterminadas. Límites fundamentales. Ejercitación. (Seminario)

Debe incluirse la demostración del límite fundamental trigonométrico después de haberse visualizado en pantalla.

**Clase 5** Infinitos e infinitésimos. Comparación de órdenes de magnitud. Ejercicios. (Clase práctica)

En esta clase pueden mostrarse gráficas de algunos infinitésimos que después podamos comprobar analíticamente su velocidad de convergencia. Lo mismo puede hacerse para algunos infinitos.

**Clase 6** Laboratorio sobre límites de funciones.

En la primera conferencia, el objetivo consiste en identificar las características esenciales que se dan en el proceso de límite: la relación funcional que se establece entre las magnitudes que intervienen en el

<sup>1</sup> Este teorema establece las operaciones con límites infinitos y corresponde al capítulo cuatro del libro de texto (ver Rodríguez et al., 1988)

mismo, la caracterización del concepto de límite como una relación de causa y efecto, lo cual requiere un tratamiento dinámico; ya que se produce un proceso de “convergencia” entre dos magnitudes, que existe una relación funcional entre ellas, y que este proceso se produce al acercarnos a un punto del dominio produciendo un efecto en las imágenes  $x_0$ , resaltando que se acercan a un valor fijo. Para ello proponemos utilizar el programa DELTA (sobre DERIVE) que consta de cuatro funciones:

**Primer módulo:** Tratamiento introductorio.

Se proponen diferentes gráficos para analizar el comportamiento de la función en una vecindad del punto. En particular, se considera dentro de las mismas el acercamiento a un punto  $x_0$  de una parábola que posteriormente seguiremos analizando.

**Segundo módulo:** Tratamiento numérico.

Realizar una tabla de valores de una función conocida (en específico la parábola) para valores del argumento muy próximos al punto  $x_0$ , explicar su comportamiento mediante breves comentarios.

**Tercer módulo:** Tratamiento algebraico.

Se presentan al alumno, de manera progresiva, las ideas básicas que conducen a cada uno de los conceptos hasta adquirir todos los elementos necesarios. Se pasa de inmediato a una definición formal con todo el rigor matemático del concepto de límite tratándose como una relación de causa y efecto. Esto requiere un tratamiento dinámico; ya que se produce un proceso de “convergencia” entre dos magnitudes existiendo una relación funcional entre ellas, y que aparece cuando al acercarnos a un punto  $x_0$  del dominio, las imágenes se acercan a un valor fijo  $L$ .

**Cuarto módulo:** Tratamiento gráfico o visual.

Para aclarar el material teórico y contribuir a asimilarlo más profundamente se confeccionó la función PLOT, en el programa DELTA, que permite analizar detalladamente y por sí sola las definiciones de límite, obtener la relación entre las franjas horizontal y vertical dada a través de la relación para determinadas funciones. Esto pudiera también hacerse con un retroproyector y un buen juego de láminas pero se perdería la posibilidad de mostrar “en vivo” lo que ocurre, ya que el profesor puede darle la posibilidad al estudiante de probar esta relación escogiendo los valores de  $\varepsilon$  que desee para corroborar lo que muestra.

Ésta es una de las cuestiones centrales del proceso de interiorización del concepto, puesto que la visualización puede servir de base a una abstracción o como elemento heurístico, aunque también puede ayudar a comprender más una relación abstracta.

## **PROGRAMA DELTA**

**Está compuesto por cuatro funciones principales.**

**FUNCIÓN LOOK:** Traza la gráfica de la función que se desea analizar y resalta el punto  $p$  en el que se calculará el límite posibilitándonos, con el comando OPTIONS-STATE-TRACE, formarnos una idea del comportamiento de la función al acercarnos por ambos lados del punto  $p$ .

**Sintaxis LOOK**( $a, b, c, p$ ) donde  $a, b, c$  son números reales que son los coeficientes de una función de segundo grado; y  $p$  es el punto en que se analiza el límite.

**FUNCIÓN TABLE:** Muestra una tabla con algunos de los valores que toma el argumento  $x$  mientras tiende al punto  $p$  y sus imágenes correspondientes.

**Sintaxis TABLE**( $a, b, c, p$ ).

**FUNCIÓN DELTA:** Permite obtener la expresión general que relaciona las magnitudes  $\varepsilon$  y  $\delta$ .

**Sintaxis DELTA** ( $a, b, c, p, l, e, d$ ). El programa utiliza  $e$  en sustitución de  $\varepsilon$  y  $d$  para

δ.

**FUNCIÓN PLOT:** Permite obtener la interpretación geométrica del límite para el caso analizado

**Sintaxis** PLOT( $a, b, c, p, l, e, d$ ).

Este programa sirve de apoyo material para la ilustración de forma lógica del concepto ya que permite al profesor interactuar junto a sus alumnos con la definición, obtener la relación de manera simbólica, para funciones hasta polinomios de segundo grado y visualizar la representación gráfica del concepto, pero esta vez en movimiento, lo que produce una demostración “en vivo” del comportamiento de la función en las cercanías de un punto a través de la corrida del programa para diversos valores de  $x$ .

### **CLASE PRÁCTICA TRADICIONAL**

La clase práctica tradicional se realiza con grupos de hasta 25 estudiantes. En ella se llevan a cabo otras etapas del proceso enseñanza aprendizaje como son:

- Reforzamiento de los conceptos vistos en conferencia.
- Solución manual de ejercicios simples.
- Modelación de problemas.

### **CLASE PRÁCTICA EN LABORATORIO**

Se concibe esta clase como una sesión donde se usa la computación simbólica, poniéndose en juego la observación, identificación e investigación. Ello implica que deba ser un lugar donde el estudiante tenga libertad para hacer comentarios sobre el tema en estudio, preguntas y conjeturas que el profesor debe aclarar, no sin antes permitir al estudiante la comprobación de su análisis para que pueda por sí mismo detectar las fallas en su razonamiento y retroalimentar su conocimiento. En esta actividad, lo importante no es el resultado final sino el proceso involucrado: observación, reflexión, corrección y prueba de resultados. Se busca así que el papel del estudiante no sea realizar cálculos rápidamente ni resolver acertadamente una lista de ejercicios, sino analizar y razonar sobre los resultados que muestre la computadora. Así, está desarrollando la habilidad de controlar que refiere la doctora H. Hernández, en su artículo “*Un recurso metacognitivo para la resolución de problemas en Matemática: el autocontrol*” (Hernández Fernández, 1993).

Se plantea un cambio radical de un método pasivo de recepción de la información a un método activo de construcción del conocimiento matemático, por lo cual, la participación del estudiante es fundamental (Dubinsky, 1995). Por ello los laboratorios, en este tema, se conciben para la identificación de conceptos a través de su visualización mediante un gráfico o una tabla de valores, para calcular límites por la definición; puede hacerse uso del programa DELTA ya que para los programas de las carreras de Ingeniería no se requiere de ejercicios de mayor nivel de complejidad, y por supuesto para el cálculo de límites.

El laboratorio, de acuerdo a los objetivos que se proponga el profesor, puede ubicarse en uno de los siguientes casos.

- Que se desarrolle para la presentación del tema. Debe iniciarse entonces con un problema que motive la discusión sobre el mismo. Caben en este tipo los de descubrimiento o de familiarización con el software.
- Aquellos que tratan con aplicaciones cuyos datos no puedan manipularse en la clase tradicional por lo extenso de los cálculos. En este caso se incluyen los dedicados a desarrollar habilidades matemáticas y se sugiere incidir en el estudiante en el análisis de los resultados para que éstos no se reduzcan a un simple cálculo numérico.
- Aquellos donde se pretende ampliar o reforzar el material estudiado en clases. Estos son dedicados a la sistematización e integración de los contenidos impartidos previamente en conferencias o en clases prácticas. Se sugiere dar preguntas, elaboradas previamente por el profesor, que motiven el análisis de la situación y que hagan al estudiante observar, predecir o conjeturar resultados, de acuerdo al tema explicado con anterioridad.

La preparación de esta clase requiere de más tiempo que la clase tradicional para el

profesor. Los ejercicios deben ser seleccionados de manera tal que motiven al estudiante, que les sirvan de instrumento para interactuar con los conceptos, pero al mismo tiempo, que lo obliguen a la utilización de la computadora para resolver su problema; bien por la dificultad o bien por extensión de los cálculos. Estas clases se desarrollarán en aulas especializadas que requieren una computadora personal o, por lo más, dos estudiantes.

Después de la realización del laboratorio, los estudiantes deberán entregar un informe con los resultados y valoraciones heurísticas de los mismos.

## **SISTEMA DE TAREAS**

Considerando lo anteriormente expuesto se infiere que la tarea juega un papel esencial como guía del estudiante en las diferentes etapas del aprendizaje; en virtud que orienta el estudio independiente del mismo. En ella, además de ejercicios de cálculo, se les plantean problemas relacionados con el tema. La tarea contiene ejercicios de los siguientes tipos:

- De cálculo manual o con el uso del DERIVE.
- Conceptuales.
- Problemas para modelar y resolver con el uso de la computadora.

La tarea debe ser diseñada para el trabajo en clase, para la autopreparación de los estudiantes o para el control de los mismos. En su diseño se toma en cuenta: los objetivos de la tarea; el sistema de conocimientos y habilidades que se requiere formar, los tipos de ejercicios a desarrollar en el proceso de asimilación.

Es loable destacar que la utilización de la computación como medio de enseñanza también está actuante en el estudio independiente de los estudiantes; que pueden hacer uso de la misma para retroalimentar los conocimientos adquiridos del tema y continuar desarrollando la habilidad de controlar y, aún más, de autocontrolar su aprendizaje de manera eficiente.

## **EVALUACIÓN**

Debido a que el control debe reflejar la continuidad de la asimilación de conocimientos, del desarrollo de habilidades tanto en nivel como en volumen en el tema, ésta se medirá a través de controles frecuentes, parciales y final, determinando en cada caso objetivos, frecuencia y medios a utilizar. Cada forma de control es sólo una componente del sistema pero, lógicamente, cada una sola no es suficiente para garantizar la eficiencia del proceso.

Para cada forma de control deben tomarse en cuenta las tareas típicas, que deben estar en correspondencia con la organización de la ejercitación que facilite y, a su vez, determine la posición de cada forma de control.

El control frecuente posibilita percatarnos, de forma operativa, del grado de comprensión que se logra sobre las acciones y con qué éxito pasan los estudiantes por los diferentes niveles de asimilación de los contenidos. Además de los instrumentos conocidos que se realizan dentro de las actividades docentes también hay control frecuente cuando el estudiante trabaja con el asistente matemático, ya que tiene que ir monitoreando, regulando y evaluando los resultados que obtiene en la computadora y además el profesor en el laboratorio controla el desarrollo del alumno y sus progresos en el trabajo con el asistente.

Se propone además, para evaluar a los estudiantes de forma parcial, que entreguen el informe de laboratorio. También realizar un control parcial a través de un examen que debe realizarse en dos partes: una escrita y otra con la computadora, para verificar las habilidades adquiridas con el uso del asistente DERIVE.

## **CONCLUSIONES**

Se muestra un sistema didáctico para impartir el tema límite de funciones de una variable apoyado por un asistente matemático, para la asignatura Matemática I en la Carrera de Ingeniería en Telecomunicaciones.

Para llegar a este resultado se aplicó una prueba de diagnóstico que se procesó estadísticamente. Dicha prueba arrojó que existían problemas en:

La interpretación del concepto de límite de una función en un punto.

El reconocimiento gráfico del límite de una función en un punto.

Se entrevistaron a profesores de diferentes centros con el objeto de realizar un análisis de la utilización de asistentes matemáticos para la impartición de la asignatura, encontrándose que en los casos que se usa, sólo se hace para realizar ejercicios de cálculo simplemente pero no se explotan otras potencialidades del mismo.

Se realizó un análisis de los diferentes asistentes matemáticos con posibilidades de utilización atendiendo a la factibilidad de aplicación en la asignatura, a las potencialidades del mismo y a las posibilidades según la base material existente actualmente en el ISPJAE, seleccionando DERIVE como el más idóneo.

La propuesta didáctica tiende a resolver los problemas detectados en la prueba de diagnóstico, introduciendo la Informática en la asignatura mediante un asistente matemático para: impartir los contenidos, como medio de enseñanza; mejorar la comprensión conceptual del límite; y como herramienta de trabajo que contribuye a realizar ejercicios y problemas de mayor complejidad de manera eficiente, de forma tal que se logre una mayor interacción del estudiante con la definición de límite. Para esto, se rediseñó el tema desde los objetivos, los conocimientos y habilidades hasta las formas de organización del proceso de enseñanza - aprendizaje acorde a las posibilidades que brinda el asistente matemático en el mismo.

### **RECOMENDACIONES**

1.- Realizar el experimento propuesto en el primer año de la carrera de Ingeniería en Telecomunicaciones para validar la propuesta metodológica que se realiza en este trabajo, para ello es imprescindible elaborar la tarea extraclase correspondiente.

2.- De acuerdo a los resultados de la validación si estos son positivos, extender el trabajo a los restantes temas de la asignatura Matemática I en dicha carrera.

### **BIBLIOGRAFÍA**

Alvarez, M., Fernández, A. & Anzola, E. (1994). Incorporación de la computadora a la impartición de la Matemática numérica. *Revista Cubana de Educación Superior*, 14 (2).

Arcos, I. (1993). Visualización en el Cálculo. Lectura de gráficas en el caso específico de los límites. En E. Filloy & F. Cordero (Eds.), *Memorias del Quinto Simposio Internacional sobre Investigación en Matemática Educativa* (pp. 157-162). Mérida, Yucatán, México: Cinvestav-IPN, Departamento de Matemática Educativa.

Berman, G. N. (1989). *Problemas y ejercicios del Análisis Matemático*. Moscú: Editorial MIR.

Calderón Ariosa, R. (1996). *La enseñanza del Cálculo integral: Una alternativa basada en el enfoque Histórico - Cultural y de la actividad*. Tesis de Doctorado no publicada, CEPES, La Habana, Cuba.

Castillo, A. (1996). *DERIVE su presencia en la enseñanza del Cálculo Diferencial e Integral en la ingeniería*. Cuba: La Habana, Ministerio de Educación: Publicación de Pedagogía /97.

Delgado Rubí, J. R. (1996). *La enseñanza de la Matemática en el umbral del siglo XXI*. Cuba, La Habana: Publicación del II Taller sobre enseñanza de las Matemáticas. ISPJAE.

Dubinsky, E., Schwingendorf, K. E. & Manhews, D. (1995). *Calculus: Concepts and Computers*. New York, EE. UU.: McGraw- Hill.

Fernández de Alaiza, B. (1998). *La psicología cognitiva contemporánea y sus aplicaciones en la enseñanza de las Matemáticas en Cuestiones de Didáctica de la Matemática. Conceptos y procedimientos en la Educación Polimodal y Superior*. Rosario, Argentina: Editora Homo Sapiens.

Gómez Moreno, B. (1990). El microcomputador: versátil herramienta en los cursos de Física. *Revista Informática Educativa*, Santafé de Bogotá. Colombia.

Guzmán, M. de (1996). *El rincón de la pizarra*. Madrid, España: Ediciones Pirámide, S.A.

Hernández Fernández, H. (1993). Vigotsky y la estructuración del conocimiento matemático. Una experiencia cubana. En *Didáctica de la Matemática: Artículos para el debate*. Quito, Ecuador.

Hernández Fernández, H. (1993). La huella de la Matemática en el pensamiento. En *Didáctica de la Matemática: Artículos para el debate*. Quito, Ecuador.

Hernández Fernández, H. (1993). Objetivos en la formación matemática. En *Didáctica de la Matemática: Artículos para el debate*. Quito, Ecuador.

Hernández Fernández, H. (1993). Principios didácticos. En *Didáctica de la Matemática: Artículos para el debate*. Quito, Ecuador.

Hernández Fernández, H. (1993). Un recurso metacognitivo para la resolución de problemas en Matemática: el autocontrol. En *Didáctica de la Matemática: Artículos para el debate*. Quito, Ecuador.

Hernández, R. L. (1995). "Funciones" *Un entrenador inteligente*. Tesis de maestría no publicada, CREPIAI, ISPJAE, La Habana, Cuba.

Llorens Fuster, J. L. (1995). *Aplicaciones de DERIVE. Análisis Matemático*. España: Publicación de la Universidad Politécnica de Valencia.

Martínez, F. (1993). *Una variante de sistema didáctico para la enseñanza del Calculo Diferencial*. Tesis de doctorado no publicada, ISPJAE, La Habana, Cuba.

MES (1990). *Programa de la disciplina Matemática Superior*. La Habana, Cuba: Ministerio de Educacion Superior.

MES. (1987). *Programa Nacional de Computación*. La Habana, Cuba: Ministerio de Educacion Superior.

MES. (1979) *Resolución 220*. La Habana, Cuba: Ministerio de Educacion Superior.

Pérez Carrera, P. (1996). *Matemática asistida por ordenador. Cálculo Infinitesimal. Apuntes Núm. 65*, España: Publicación de la Universidad Politécnica de Valencia.

Pérez, C. (1996). *Matemática informatizada con MATLAB*. España: Editorial RA- MA

Sánchez, F. C. (1982). *Análisis Matemático I*. La Habana, Cuba: Editora Pueblo y Educación.

Simoniello de Alvarez, A. M. (1996). Taller sobre el uso del ordenador en el aprendizaje de Matemáticas y en la resolución de problemas. En J. Rodríguez (Ed.), *Memorias de la Décima Conferencia Centroamericana y del Caribe sobre formación de profesores e investigación en Matemática Educativa*. Puerto Rico.

Solanilla, J. F. (1996). Aprendizaje de conceptos y principios matemáticos a través del ambiente de programación y la computación simbólica. Propuesta metodológica. En J. Rodríguez (Ed.), *Memorias de la Décima Conferencia Centroamericana y del Caribe sobre formación de profesores e investigación en Matemática Educativa*. Puerto Rico.

Talizina, N. (1988). *Psicología de la enseñanza*. Moscú: Editorial Progreso

Talizina, N. F. (1984). Conferencias sobre "Los fundamentos de la enseñanza Superior. Cuba: DEPES, Universidad de La Habana.