Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa
Vol. 3, Núm.1, marzo, 2000, pp. 71-85.

Concepciones de los alumnos de Bachillerato y Curso de Orientación Universitaria sobre límite funcional y continuidad[1]

Modesto Sierra Vázquez, Mª Teresa González Astudillo y Carmen López Esteban[2]

RESUMEN

Para establecer las concepciones de los alumnos de Bachillerato y Curso de Orientación Universitaria (C.O.U.) sobre el límite funcional y la continuidad, se han analizado y categorizado las justificaciones utilizadas por 145 sujetos al contestar un cuestionario con tareas en las que estaban involucrados dichos conceptos. Se ha constatado que algunas de estas concepciones están relacionadas con las que han aparecido a lo largo de la historia de las matemáticas, y que otras están inducidas por la enseñanza recibida.

ABSTRACT

To establish the conceptions of the students of Bachillerato and Curso de Orientación Universitaria about functional limit and continuity, it has been analized and categorized the answers employed by 145 pupils when they answered a questionaire with problems about this two topics. lt has been proved that some conceptions were linked with the ones that has been appeared along the history of mathematics, and the others, were induced by the teaching received.

RÉSUMÉ

Pour nous identifier les conceptions des élèves de Bachillerato et Curso de Orientación Universitaria (C.O.U.), sur la limite fonctionnelle et le continuité, ils sont analysé et mettre en categorie les arguments utilisés par 145 élèves sur un questionnaire avec items qu'empêchent les concepts anterieurs. On a constaté les relations entre quelquenes conceptions et ceux qui sont devenus pour l'histoire des mathématiques, pour le reste s'observe l'influence du l'enseigné reçu.

RESUMO

Para estabelecer as concepções dos alunos de Bacharelado e o ano de Orientação Universitaria sobre o limite funcional e as continuidades, analisaram e caterogizaram as justificações utizadas por 145 sujeitos ao responder um questionairo com trabalhos nos que estavam envolvidos ditos conceitos, constataram-se que algumas destas concepções estão relacionadas com as que apareceram na história das Matemáticas, e que autras estão induzidas pela instrução recebida.

[1] Este trabajo es parte de un proyecto de investigación financiado por el Centro de Investigación y Documentación Educativa (C.I.D.E.) del M.E.C. y por la Junta de Castilla y León.

[2] Departamento de Didáctica de la Matemática y las Ciencias Experimentales. Universidad de Salamanca.

INTRODUCCIÓN

Los conceptos de límite y continuidad han estado presentes en los programas del Bachillerato español desde los años treinta de nuestro siglo hasta nuestros días, e igualmente los encontramos en el nuevo Bachillerato[3]. Los profesores de enseñanza secundaria manifiestan las dificultades que surgen en la enseñanza-aprendizaje de estos dos conceptos, claves para la comprensión de las matemáticas superiores, y herramientas necesarias para el estudio de las Ciencias Físico-Naturales, Humanas y Sociales.
Investigaciones en educación matemática realizadas fuera de nuestro país, han confirmado que los alumnos no alcanzan una comprensión clara de estos conceptos (Tall, 1980; Tall y Vinner, 1981; Robert, 1983; Cornu, 1981. 1983; Davis y Vinner, 1986; Sierpinska, 1987; El Bouazzoui, 1988; Williams, 1991).

La investigación sobre las concepciones de los alumnos se ha revelado como un medio para comprender sus procesos de aprendizaje, En una primera aproximación, las concepciones de un sujeto sobre un concepto matemático designan el modo en el que ese sujeto comprende y utiliza el concepto. Confrey (1990) presenta un trabajo de síntesis acerca de la investigación en concepciones; entre nosotros, Ruiz Higueras (1993) ha llevado a cabo un trabajo similar. Ambos autores concluyen que junto al término concepción, se han utilizado otros, como modelo, representación mental y concepto-imagen. Existe un problema con el vocabulario que utilizan unos y otros, y a veces las definiciones son vagas y responden a posiciones teóricas diferentes. Para Vergnaud (1990), por ejemplo, una representación es una comprensión que se manifiesta a través de procedimientos, mientras que Janvier (1987) menciona tres acepciones diferentes del término representación: i) organización material del símbolo, ii) organización del conocimiento en el sistema mental humano o en la memoria a largo término y iii) las imágenes mentales; utiliza el término concepción para referirse al segundo significado, Por otra parte Tall y Vinner (1981) diferencian entre concept-definition y concept-image, definiendo este último como la estructura cognitiva que está asociada con el concepto y que incluye todas las imágenes mentales, las propiedades asociadas y los procesos. Para nosotros, las concepciones de los alumnos designan una estructura mental de carácter general, que incluye creencias, conceptos, significados, reglas, imágenes mentales y preferencias, conscientes o inconscientes Thompson, 1992).

Además, de acuerdo con El Bouazzoui (1988) podemos distinguir entre concepciones manifestadas por los alumnos, por los profesores, vehiculadas por los manuales y las que son identificadas en la génesis histórica de la noción. Algunos de los estudios anteriormente referenciados (por ejemplo, Sierpinska, 1995, 1987; El Bouazzoui, 1988) muestran que existe una estrecha relación entre las dificultades de los alumnos y los problemas de la construcción del conocimiento matemático a lo largo de la historia, lo que nos lleva a la necesidad de estudiar dichas relaciones en nuestro contexto educativo.

[3] En el momento de llevar a cabo esta investigación (1997), la estructura de la educación secundaria en España era:
- Bachillerato unificado y Polivalente (B.U.P.), alumnos 14-17 años, impartido en Institutos de Bachillerato, constituyendo un nivel no obligatorio. Las matemáticas eran materia fundamental en primero y segundo y optativa en tercero.
- Curso de Orientación Universitaria (C.0.U.), alumnos 17-18 años, impartido también en los mismos Institutos. De hecho este curso era el último del Bachillerato, Superado el mismo existía (y sigue existiendo) una prueba de acceso a la Universidad. Esta estructura está en proceso de cambio, debido a la imp1antación progresiva de la Ley de Ordenación General del Sistema Educativo (L.0.G.S.E.), aprobada en 1990.

DESCRIPCIÓN DE LA INVESTIGACIÓN

El objetivo que pretendemos, es descubrir las concepciones que tienen los alumnos de secundaria sobre los conceptos de límite y continuidad, y encontrar las posibles relaciones existentes entre ellas y las concepciones que han aparecido a lo largo de la historia.

Para analizar las concepciones de los alumnos, se utilizó un cuestionario. Las situaciones planteadas en dicho cuestionario son abiertas para que los alumnos puedan expresar libremente sus ideas acerca de ambos conceptos. Fue contestado algunas semanas después de que recibieran la instrucción correspondiente a los conceptos en cuestión. Estudiando las respuestas de los alumnos a los diferentes ítems, se han inferido las concepciones subyacentes a dichas respuestas. Se trata de un estudio exploratorio que nos pueda iluminar sobre los procesos mentales de los alumnos, con el objetivo último de diseñar secuencias de aprendizaje para los conceptos de límite y continuidad.

Previamente a la elaboración del cuestionario se diseñó un precuestionario que fue contestado por 80 alumnos del Curso de Orientación Universitaria (C.O.U) (de hecho, el último curso del Bachillerato español). Al mismo tiempo, fue presentado a un grupo de profesores de secundaria para que hicieran sugerencias acerca de los diferentes ítems. Del estudio del precuestionario, se obtuvieron algunas conclusiones que permitieron perfeccionarlo. Dicho estudio, a su vez, nos permitió agrupar las respuestas de los alumnos en unos primeros criterios de justificación.

El cuestionario definitivo constaba de nueve ítems para el límite y otros nueve para la continuidad. Por lo que se refiere al cuestionario sobre el límite, se diseñó de modo que estuvieran presentes todas las formas posibles de representación. Así, hay uno en el que aparece una tabla de valores, cuatro son gráficas de funciones, dos son expresiones algebraicas de funciones, uno presenta una situación geométrica, y en el último ítem se pedía a los alumnos que escribieran cómo explicarían la noción de límite a otro compañero. Se han cubierto todos los posibles casos de funciones con límite finito, con límite infinito, sin límite, límites laterales coincidentes y no coincidentes, y un caso de indeterminación. El punto donde se pide calcular el límite en unos casos es finito y en otros + o -.

En cuanto al cuestionario de continuidad, también se diseñó de modo que estuvieran presentes diferentes formas de representación: hay cinco ítems referidos a gráficas de funciones, tres a expresiones algebraicas, y en el último, al igual que con el límite, se pedía a los alumnos que escribieran cómo explicarían el concepto de continuidad a otro compañero. Se ha cubierto tanto la continuidad como los posibles casos de discontinuidad, en todos los ítems se pedía a los alumnos que justificaran sus respuestas.

Este cuestionario fue contestado por 145 alumnos (87 mujeres y 58 hombres) que correspondían a seis grupos, dos de 2º de Bachillerato (B.U.P., alumnos de 15-16 años) y cuatro del Curso de Orientación Universitaria (C.0.U., alumnos 17-18 años); se han elegido estos dos niveles por ser aquellos que tienen en su programación los conceptos de límite y continuidad.

Todos los grupos son mixtos, y en la siguiente tabla se puede observar la distribución por institutos, grupos y alumnos.

INSTITUTO	AULA	ALUMNOS	EFECTIVOS
Lucía de Medrano (LM)	C.O.U. B	1-30	30
La Vaguada (LV)	C.0.U. C	31-53	23
La Vaguada (LV)	C.0.U. A	54-76	23
La Vaguada (LV)	C.O.U. B	77-96	20
Ramos del Manzano (RM)	2ºA	97-123	27
Ramos del Manzano (R M)	2ºB	124-145	22
		TOTAL	145

El I.E.S. Ramos del Manzano, es un instituto de una zona rural (Vitigudino), y los dos restantes son de una zona urbana (Salamanca). Además, todas las aulas de C.O.U. pertenecen a la opción en la cual, las materias científicas como biología, química, física y matemáticas, forman parte del núcleo esencial de la enseñanza.

El análisis del cuestionario se llevó a cabo utilizando el programa estadístico SPSS, en dos partes:

1. Análisis cuantitativo, donde se ha estudiado: porcentaje de resolución por alumnos, el porcentaje de resolución por ítems, análisis jerárquico de conglomerados y análisis factorial.

2. Análisis cualitativo, analizando las justificaciones utilizadas por los alumnos en sus respuestas. Para cada alumno hemos entresacado la justificación utilizada en cada ítem. Se ha buscado la forma de agrupar en un mismo criterio, las justificaciones que parecen traducir la misma idea, lo que ha originado los criterios de justificación (categorías). Esta clasificación ha sido realizada por los investigadores, es decir, es subjetiva en el sentido de que no está hecha por los alumnos. En principio, el análisis del precuestionario nos había proporcionado una lista de criterios de justificación que fue refinada en el análisis del cuestionario final. Mediante este proceso se establecieron 11 criterios de justificación para el límite y 13 para la continuidad. Algunas respuestas se podían incluir en más de una categoría porque en las explicaciones se entremezclaban varias ideas. La norma que usamos para decidir en cuál se clasificaba tenía en cuenta tanto las justificaciones utilizadas en otros ítems como la repetición de una misma idea en un mismo ítem. Entre dichas justificaciones, hay al mismo tiempo algunas que son válidas y otras no. El sentido de este análisis cualitativo era averiguar cuáles eran los criterios de justificación predominantes así como la relación entre los ítems y dichos criterios de justificación.

Simultáneamente, se estudió el desarrollo histórico de los conceptos de límite y continuidad. Este análisis histórico cumple varias funciones. En primer lugar, pone de manifiesto que las nociones de límite y continuidad no se desarrollan de modo aislado sino en conexión con otras. En segundo lugar, muestra el contexto de problemas en los que han aparecido

ambos conceptos. En tercer lugar, nos hace ver que el desarrollo no ha sido lineal, sino con avances, retrocesos, indecisiones; en fin, nos da cuenta de las concepciones que han aparecido a lo largo de la historia de la matemática. Algunas de estas concepciones, aparecerán en las justificaciones de los alumnos en sus respuestas a las distintas tareas planteadas. En este trabajo, por razones de extensión, solamente se presentan dichas relaciones.
Asociamos cada concepción con el nombre de un matemático, presentando una descripción global de la misma, pero entendiendo que no es exclusiva o propia de ese matemático, sino que en general refleja el pensamiento de una época o de una escuela encarnada por ese autor. Así, por ejemplo, Schubring (1987) considera que en el famoso libro de texto *Cours d'Analyse* de Cauchy, la Escuela Politécnica fue en realidad el autor institucional.

Otras justificaciones se han calificado como "conocimiento escolar", siguiendo la denominación utilizada por El Bouazzoui (1988) que la define como "conocimientos producidos por un alumno y que son los teoremas aprendidos o conocimientos construidos por él mismo mediante el contrato didáctico". Para nosotros, serán todas aquellas inducidas por la enseñanza recibida por los alumnos con la introducción de ciertos conceptos (límites laterales, asíntotas, continuidad por la derecha y por la izquierda, etc.), utilización de representaciones gráficas y simbólicas y demostración de algunos teoremas.

RESULTADOS

En el análisis cuantitativo se han estudiado, entre otros, las respuestas correctas/incorrectas, siendo el porcentaje de respuestas correctas por alumno para el límite del 44,74% con una desviación típica del 32% y para la continuidad de 54,4% y desviación típica del 26,6%.

El porcentaje de resolución correcta por ítem fue el siguiente:

LÍMITE

Porcentaje	Ítem
23,42	LT1
34,48	LG3
40,00	LG5
41,38	LGE8
46,90	LG4
53,10	LE6
55,65	LG2
61,38	LE7

Se observa que la forma de expresión de la función condiciona las respuestas de los alumnos, siendo el orden de dificultad; tablas, gráficas y expresiones algebraicas. En cuanto al ítem LGE8 su nivel de dificultad lo podemos asociar con el de las gráficas. Estos resultados pueden ser debidos al mayor énfasis que se pone en la enseñanza de las expresiones algebraicas frente a las gráficas y tablas.

CONTINUIDAD

Porcentaje	Ítem
9,66	CE8
44,14	CE7
45,52	CG5
46,90	CG3
59,31	CG4
63,45	CG1
73,10	CE6
75,15	CG2

El ítem CE9 es contestado correctamente por menos del 10%; esto se debe a nuestro juicio, a que es una función “rara”, restringiéndose el estudio de la continuidad al conjunto de los números naturales. En el caso de 2º de B.U.P. ningún alumno lo resuelve correctamente; la definición de continuidad no “funciona” en este caso. Por el contrario, más del 70% de los alumnos, resuelven correctamente los ítems CG2 y CE6, que se refieren a una gráfica con agujero y un polinomio respectivamente; en el primer caso utilizan la idea intuitiva de continuidad y, en el segundo, un teorema conocido. Llama la atención que el ítem. CGI, no sea contestado correctamente por un 36,55%, cuando los investigadores esperábamos que casi todos los alumnos tuvieran éxito en dicho ítem, creemos que esto puede ser debido a que es una función con puntos angulosos, a la que el mismo Euler negaba la condición de continuidad. En los ítems CG3 y CG4, las funciones son discontinuas en ciertos puntos, aunque están definidas en los mismos, esta condición puede chocar con la concepción de algunos alumnos de que una función es continua si está definida en el punto. Finalmente en el ítem CG5 hay una dificultad añadida relacionada con el infinito.

En cuanto al análisis cualitativo se han analizando las justificaciones utilizadas por los alumnos en sus respuestas.

Límite. Los criterios de justificación para el límite son:

L1: Aproximarse. L2: El valor de la función en el punto. L3: Utilización de límites laterales, L4: La función es continua. L5: Utilización de la fórmula de la derivada. L6: Utilización de funciones conocidas. L7: La función tiene ramas. L8: Concepto de indeterminación. L9: Visual. L10: Definición formal. L11: Otras. Además se ha considerado L12: Respuesta si/no sin justificación y L13: Ausencia de respuesta.

Para cada ítem. se ha hecho la tabla de frecuencias de los criterios de justificación utilizados para responder a dicho ítem. Estos datos han permitido construir la siguiente tabla de contingencia donde las filas son los ítems y las columnas los criterios de justificación.

	LT1	LG2	LG3	LG4	LG	LE6	LE7	LGE8	L9	?
Ll	23	17	14	1	7	39	4	72	35	212
L2	5	27	6	6	11	lo	9	1	14	89
L3	54	25	4	45	61	15	89	2	20	315
L4	4	20	3	17	6	6	1	0	1	58
L5	1	1	0	0	0	0	5	0	4	11
L6	3	1	54	5	9	1	0	10	0	73
L7	0	0	0	2	4	0	2	0	08	
LS	o	o	o	o	o	17	1	0	0	18
L9	11	3	17	2	2	1	1	0	3	40
L10	5	4	1	0	1	14	0	0	22	47
L11	4	4	5	1	9	3	2	7	14	48
L12	16	17	13	22	16	21	4	8	2	119
L13	19	26	27	33	19	18	26	55	30	253

Considerando la frecuencia de los criterios, el más usado es L3, luego L 1 y L2. La definición formal es utilizada esporádicamente.

Cada ítem es contestado mayoritariamente por un criterio:

Ítem	Criterio	Porcentaje
LT1	L3	37
LG2	L2 y 1,3	18,5 y 17,1
LG3	L6	37
LG4	L3	30,8
LG5	L3	41,1
LE6	LI	26
LE7	L3	61
LGE8	Ll	49,3
L9	LI	24

Analizando las respuestas dadas en el último ítem, se observa que hay un elevado número de alumnos (alrededor del 20%) que no responden; el mayor número de respuestas corresponden al criterio L1 (aproximarse) que refleja la concepción intuitiva de los alumnos acerca del límite, estando en segundo lugar los criterios L1O (definición formal utilizando ε, δ) y L3 (utilización de límites laterales por la derecha y por la izquierda).

Relacionando los criterios de justificación con 1as concepciones que han aparecido a lo largo de la historia y con el conocimiento escolar, resulta:

Criterio	Concepción	Descripción
Ll	D'Alembert y Cauchy	Relacionada con la idea de "aproximarse", aunque en D'Alembert el límite no se puede alcanzar y en Cauchy es alcanzable
L2	Euler y Lagrange	Centrada exclusivamente en los aspectos relacionales de la función, sin tener en cuenta los entornos.
L3	Conocimiento escolar	Concepto de límite lateral.
L4	Continuidad	Contaminación del concepto de límite por el de continuidad.
L5	Conocimiento escolar	Concepto de derivada
L6		Relación con funciones conocidas.
L7	Euler y conocimiento escolar	Función definida por ramas.
L8	Conocimiento escolar	Concepto de indeterminación.
L9		Concepto de representación gráfica de una función.
LIO	Weierstrauss	Definición formal utilizando ε, δ

Continuidad. Los criterios de justificación para la continuidad son:

C1: Se dibuja sin levantar el lápiz del papel. C2: La curva es discontinua porque tiene saltos. C3: Curva que tiene asíntotas. C4: Asimilación con funciones conocidas, C5: Función definida a trozos. C6: Existe $f(x_0)$ *y* $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$. C7: Utilización de teoremas.

C8: La función es derivable. C9: Definición formal. C10: Relación entre los límites laterales sin tener en cuenta el valor de la función en el punto. C11: La función está definida en todo punto. C12: Continua en (a, b) pues es continua en todo punto del intervalo. C13: Otras. Además se han considerado C14: Respuesta si/no sin justificación y C15: Ausencia de respuesta.

Al igual que con el límite, se construyó la siguiente tabla de contingencia, donde las filas son los ítems y las columnas son los criterios de justificación.

	CGI	CG2	CG3	CG4	CG5	CE6	CE7	CE8	C9	Σ
CI	50	22	21	15	8	2	9	3	62	242
C2	8	4	7	32	8	0	5	1	2	67
C3	0	0	0	0	22	0	0	0	0	22
C4	0	0	0	3	0	13	0	6	0	22
C5	7	3	1	6	5	0	6	0	0	28
C6	13	17	41	12	17	1	32	14	36	183
C7	0	0	1	0	0	85	5	4	1	96
C8	0	0	1	0	0	2	0	0	2	5
C9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
C10	3	2	2	25	8	1	32	7	5	85
C11	23	62	24	14	30	17	10	17	10	207
C12	17	15	14	3	1	21	4	5	0	161
C13	8	6	10	11	16	5	8	51	5	120
C14	9	7	12	11	13	4	7	6	0	69
C15	1	1	5	7	11	8	21	25	16	95

Los criterios más usados son, por este orden, C1 y C11, a pesar de que este último criterio no es correcto. Los alumnos tienen una idea muy intuitiva de continuidad. Aunque en un número muy elevado de ocasiones utilizan el criterio C6, sin embargo ningún alumno utilizó en ninguna ocasión el criterio C9 (definición formal de continuidad).

El porcentaje de utilización del criterio predominante en cada ítem se muestra en la tabla siguiente:

Ítem	Criterio	Porcentaje
CGI	C1	34,2
CG2	C11	42,5
CG3	C6	28,1
CG4	C2 y C10	21,9 y 17,1
CG5	C11	20,5
CE6	C7	58,2
CE7	C6 y C10	21,9 y 21,9
CE8	C13	34,9
C9	C1	42,5

Es interesante analizar las respuestas dadas en el último ítem y su relación con las dadas para las demás ítems; se observa que el criterio de justificación más utilizado por los alumnos es el criterio C1 (se dibuja sin levantar el lápiz del papel) lo que está en consonancia con los utilizados en el resto de los ítems y refleja la concepción intuitiva de los alumnos acerca de la continuidad; también hay que señalar el elevado número de respuestas asociadas al criterio C6 (existe $f(x_0)$ y $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$); sin embargo, el criterio erróneo C11 (la Función está definida en el punto) es utilizado por pocos alumnos a pesar de ser el segundo más usado para resolver las tareas propuestas; el criterio C9 (definición formal) nunca es usado por los alumnos.

Relacionando estos criterios de justificación de los alumnos con las concepciones históricas resulta:

Criterio	Concepción	Descripción
Cl y C2	Intuitivo-geométrica	Ligada a la idea de que la función es continua si se puede dibujar sin levantar el lápiz del papel.
C3	Conocimiento escolar	Concepto de asíntota.
C4	Conocimiento escolar	Relación con funciones conocidas.
C5 y C8	Euler	Una función es continua si está definida por una sola expresión analítica.
C6	Cauchy	Igualdad entre el valor de la función en el punto y su límite en dicho punto.
C7	Conocimiento escolar	Aplicación de teoremas.
C9	Weierstrass	Formalización del concepto utilizando ε y δ
C10	Conocimiento escolar	Concepto de límite lateral.
C11	Conocimiento escolar (errónea)	Definición de la función en el punto.
C12	Conocimiento escolar	Concepto de continuidad en un intervalo.

CONCLUSIONES

Las respuestas de los alumnos al cuestionario, muestran en primer lugar, la dificultad de la comprensión de los conceptos de límite y continuidad aun después de su enseñanza. Esto se manifiesta tanto por las respuestas erróneas como por las justificaciones que utilizan algunos alumnos. Ítems que a juicio de los profesores deberían ser resueltos correctamente por casi todos los alumnos (por ejemplo el CG1) han tenido un nivel de respuestas correctas insatisfactorio.

Por otra parte, esta investigación ha probado la diferencia que existe entre la definición de los conceptos de límite y continuidad y las concepciones que tienen los alumnos en relación con estos conceptos. Cuando los alumnos se enfrentan a tareas, no utilizan las definiciones formales, sino ciertos esquemas o concepciones que han construido mentalmente, a partir de los ejemplos que ha puesto el profesor, interacciones con los compañeros. apuntes, enseñanzas anteriores, utilización de libros de texto, etc. Por consiguiente, se corroboran los resultados obtenidos en investigaciones similares (por ejemplo, Tall y Vinner (1981); El Bouazzoui (1988).

Nuestro trabajo ha mostrado precisamente cuáles son esas concepciones. Se observa también, al analizar la tabla de justificaciones, que tanto para el límite como para la continuidad, la mayoría de los alumnos utilizan diferentes criterios de justificación, por lo que parece razonable pensar que cada uno de ellos tiene una multiplicidad de concepciones.

Por otra parte, se ha constatado que algunas de estas concepciones están relacionadas con las que han aparecido a lo largo de la historia de las Matemáticas, lo que sugiere que en los cursos de formación de profesores debe incluirse la Historia de la Matemática desde la perspectiva de su enseñanza; otras, denominadas "conocimiento escolar", están inducidas por la enseñanza recibida.

BIBLIOGRAFÍA

Artigue, M. (1995). La enseñanza de los principios de] cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En Artigue, M. y otros (eds.) *Ingeniería didáctica en educación matemática*, 97-140. Grupo Editorial Iberoamérica. México

Confrey, J. (1990). A revue of the research on student conceptions in mathematics, science and programming. *Revue on Research Education*, 16, 3-55.

Cornu, B. (1981). Apprentissage de la notion de límite. Modeles spontanes etmodeles propes. *Proceedings of the Fifth Conference of International Group of Psychology of Mathematics Education*, 322-326.

Cornu. B. (1983). Quelques obstacles a l'apprentissage de la notion de limite. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 4(2), 236-268.

Davis, R.B. y Vinner, S. (1986). The notion of limit: some seemingly unavoidable misconception stages. *The Journal of Mathematical Behavoir,* 5, 281-303.

El Bouazzoui, H. (1988). *Conceptions des éleves et des professeurs a propos de la notion de continuité d'une fonction.* Theses du grade de Ph.D. Université Laval.

Janvier, C. (1987). Representation and Understanding: The notion of function as an example. En C. Janvier (ed.) *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics.* Londres: LEA Publications.

Robert, A. (1983). L'acquisition de la notion de convergence des suites numeriques dans l'enseignement supérieur. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 3(3), 307-341.

Ruiz Higueras, L. (1993). *Concepciones de los alumnos de secundaria sobre la noción de función. Análisis epistemológico y didáctico.* Universidad de Granada. (Tesis doctoral inédita).

Schubring, G. (1987). On the Methodology of Analysing Historical Textbooks: Lacroix as Textbook Author. *For the learning of mathematics,* 7(3). 41-51.

Sierpinska, A. (1985). Obstacles epistémologiques relatifs a la notion de limite. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 6(1), 5-67.

Sierpinska, A. (1987). Humanities students and epistemological obstacles related to limits. *Educational Studies in Mathematics.* 18, 371-397.

Sierra, M., González, Mª.T. y López, C. (1997). *Los conceptos de límite y continuidad en la educación secundaria: transposición didáctica y concepciones de los alumnos.* Universidad de Salamanca (Documento inédito).

Tall, D. (1980). Mathematical Intuition with special reference to limiting processes. *Proceedings of the Fourth International Conference for the Psychology of Mathematics Education.* 170-176.

Tall, D. y Vinner, S, (1981). Concept image and concept definition with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics.* 12, 151-169.

Thompson, A.G. (1992). Teachers' Beliefs and Conceptions: A Sythesis of Research, En Grows (ed.) *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning. Nueva* York: MacMillan Publishing Company.

Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactiques des Mathématiques,* 10 (23), 133-170.

Williams, S. (1991). Models of limit held by college calculus students. *Journal for Research in Mathematics Education, 22,* 219-236.

ANEXOS

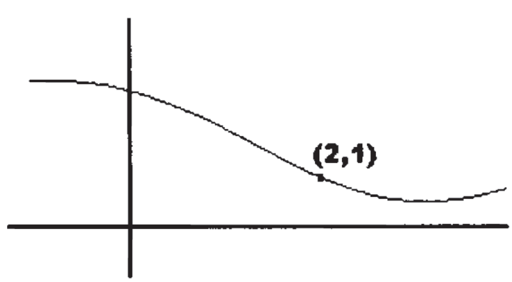
Cuestionario sobre el límite.

LT1. - Para explicar el concepto de límite de una función en un punto, un profesor escogió una función y dio valores a la izquierda y a la derecha de 0, obteniendo la siguiente tabla de valores:

x	y
-0.1	0.01
-0.05	0.0025
-0.03	0.0009
-0.01	0.0001
-0.001	0.00001
-0.0001	0.0000001
0	0
0.0001	1.00020001
0.001	1.002001
0.01	1.0201
0.03	1.0609
0.05	1.1025
0.1	1.21

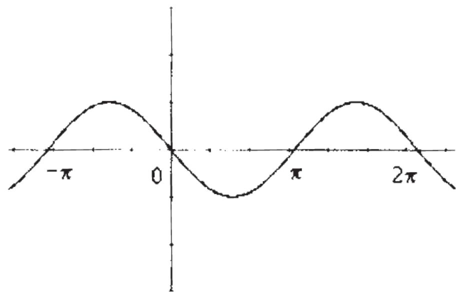
¿Qué puedes afirmar de $\lim_{x \to 0} f(x)$?

LG2. - En un libro de texto, aparece la siguiente gráfica de una función.



Decide *razonadamente* cuál es el $\lim_{x \to 2} f(x)$.

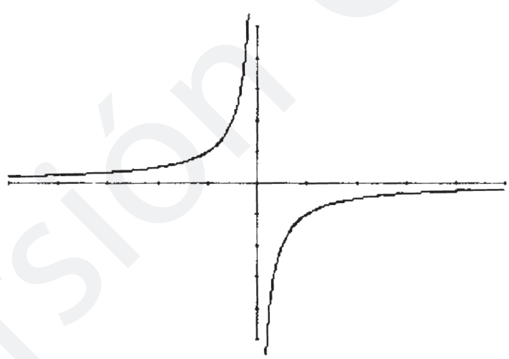
LG3. - Dada una función $y = f(x)$ cuya gráfica es la siguiente:



¿Cuál es el límite, en caso de que exista, de $f(x)$ cuando x→∞? ¿Por qué?

LG4. - Dibuja la gráfica de una función $y = f(x)$ tal que no exista su límite cuando $x \to 1$. Razona tu respuesta.

LG5. - Dada la función y = $f(x)$ cuya gráfica es la siguiente



¿Cuál es el límite en caso de que exista cuando $x \to 0$? ¿Por qué?

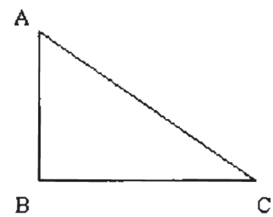
LE6. - ¿Qué significa que $\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1}$ sea igual a 3?

LE7. - Sea una función de R en R, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 1, x < 1 \\ x^2, x \geq 1 \end{cases}$$

Calcula el límite, en caso de que exista, de $f(x)$ cuando $x \to 1$. Justifica tu respuesta.

LGE8. - ¿Cuál es el límite del área del triángulo cuando el punto C se aproxima a B? Justifica tu respuesta.



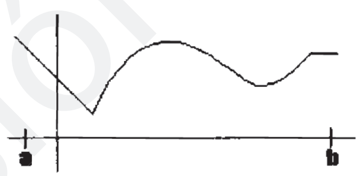
L9. -Suponte que tienes que explicar a un compañero qué es el límite de una función en un punto, ¿qué le dirías?

Cuestionario de continuidad.

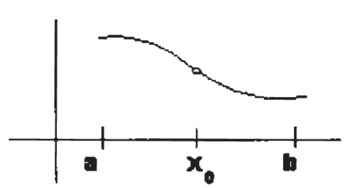
De entre las gráficas siguientes, ¿cuáles representan una función continua en el intervalo [a, b]?

Justifica tu respuesta:

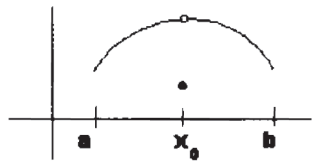
CG1. -



CG2. -

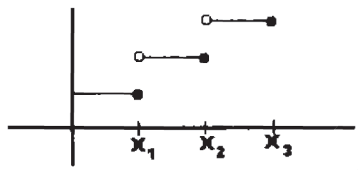


CG3. -

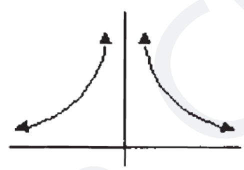


De entre las gráficas siguientes, ¿cuáles representan una función continua en R? Justifica tu respuesta.

CG4. -



CG5. -



CE6. - Sea f una función de R en R, definida por $f(x) = 3x^2+x-1$. ¿Es continua en R? ¿Por qué?

CE7. - Sea f una función de R en R, definida por $f(x) = \begin{cases} x, & x \leq -1 \\ -x^2 + 1, & -1 < x < 1 \\ 2x-2, & x \geq 1 \end{cases}$

¿Es continua? ¿Por qué?

CE8. - Sea f una función de R en R, definida por $f(x) = \begin{cases} 3, & x \in N \\ 4, & x \notin N \end{cases}$ ¿Es continua en cualquier número natural ($x \in N$)?¿Por qué?

C9. - Suponte que tiene que explicar a un compañero qué es una función continua, ¿qué le dirías?