Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa
RELIME
ISSN 1665-2436 | eISSN 2007-6819
Vol. 29, e670
Artículo
https://doi.org/10.12802/relime.2026.29.e670

Acumulación de grados-hora y categoría de modelación. Una resignificación de la integral definida con profesores de matemáticas

Accumulation of Degree-hours and category of modelling. A resignification of the definite integral with mathematics teachers

Claudio Gaete-Peralta
Universidad de los Andes, Chile

Jaime Huincahue
Universidad Católica del Maule, Chile

Resumen

Esta investigación analizó la resignificación de la integral definida de profesores de matemáticas en una situación de cambio argumentada por una acumulación. Para tal propósito, se realizó un estudio de caso instrumental con cuatro profesores en Chile, quienes desarrollaron una situación escolar apoyada en GeoGebra. Enmarcado en el programa socioepistemológico Sujeto Olvidado y Transversalidad de Saberes, los datos fueron analizados con constructos de la categoría de modelación y técnicas de análisis de documentos. Los resultados mostraron una resignificación en la que cantidades de variación continua funcionaron como instrumento, las comparaciones de estados como procedimiento y áreas entre curvas y acumulaciones de grados-hora como significaciones. En las discusiones se propusieron fases de modelación desde un enfoque educativo para identificar resignificaciones situadas del conocimiento matemático. Como conclusiones, se espera que este estudio contribuya al diseño e implementación de situaciones escolares para analizar resignificaciones al transitar por las distintas fases de este modelo.

Palabras clave:

- *Acumulación*
- *Categoría de modelación*
- *Profesores de matemática*
- *Integral definida*
- *Socioepistemología*

Cómo citar:

Gaete-Peralta, C. y Huincahue, J. (2026). Acumulación de grados-hora y categoría de modelación. Una resignificación de la integral definida con profesores de matemáticas. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 29*, e670. https://doi.org/10.12802/relime.2026.29.e670

Publicación oficial de investigación del Clame Comité Latinoamericano de Matemática Educativa https://relime.org

Recepción: 22/06/2025 Aceptación: 08/05/2026 Publicación: 01/06/2026

Abstract

This research analyzed the resignification of the definite integral by mathematics teachers in a situation of change, argued by accumulation. To this end, an instrumental case study was conducted with four teachers in Chile, who developed a classroom-based learning activity using GeoGebra. Framed within the socioepistemological program Forgotten Subject and Transversality of Knowledge, the data were analyzed using constructs from the category of modelling and document analysis techniques. The results revealed a resignification in which quantities of continuous variation functioned as the instrument, comparisons of states as the procedure, and areas between curves and accumulations of degree-hours as the meanings. The discussions proposed modeling phases from an educational perspective to identify situated resignifications of mathematical knowledge. In conclusion, this study is expected to contribute to the design and implementation of school situations to analyze the students' resignifications through the different phases of this model.

Keywords

- *Accumulation*
- *Category of modelling*
- *Mathematics teachers*
- *Definite integral*
- *Socioepistemology*

Resumo

Esta pesquisa analisou a reinterpretação da integral definida por professores de matemática em um contexto de mudança, caracterizado pela acumulação. Para tanto, foi realizado um estudo de caso instrumental com quatro professores no Chile, que desenvolveram uma atividade de aprendizagem em sala de aula utilizando o GeoGebra. Enquadrado no programa socioepistemológico Sujeito Esquecido e Transversalidade do Saber, os dados foram analisados utilizando construtos da categoria de modelagem e técnicas de análise documental. Os resultados revelaram uma reinterpretação na qual quantidades de variação contínua funcionaram como instrumento, comparações de estados como procedimento e áreas entre curvas e acumulações de graus-hora como significados. As discussões propuseram fases de modelagem a partir de uma perspectiva educacional para identificar reinterpretações situadas do conhecimento matemático. Em conclusão, espera-se que este estudo contribua para o planejamento e implementação de atividades de aprendizagem em sala de aula para analisar reinterpretações à medida que os alunos progridem pelas diferentes fases deste modelo.

Palavras-chave

- *Acumulação*
- *Categoria de Modelagem*
- *Professores de matemáticas*
- *Integral definida*
- *Socioepistemologia*

Résumé

Cette recherche analyse la réinterprétation de l'intégrale définie par des enseignants de mathématiques dans un contexte de changement, caractérisé par l'accumulation. À cette fin, une étude de cas instrumentale a été menée auprès de quatre enseignants chiliens, qui ont développé une activité d'apprentissage en classe à l'aide de GeoGebra. S'inscrivant dans le cadre du programme socio-épistémologique « Sujet oublié et transversalité des savoirs », les données ont été analysées à l'aide de concepts issus de la modélisation et de techniques d'analyse documentaire. Les résultats révèlent une réinterprétation où les quantités de variation continue servent d'instrument, les comparaisons d'états de procédure, et les aires entre les courbes ainsi que les accumulations de degrés-heures de calcul de significations. Les discussions proposent des phases de modélisation, d'un point de vue pédagogique, afin d'identifier les réinterprétations situées des connaissances mathématiques. En conclusion, cette étude devrait contribuer à la conception et à la mise en œuvre d'activités d'apprentissage en classe permettant d'analyser les réinterprétations au fur et à mesure de la progression des élèves à travers les différentes phases de ce modèle.

Most Clés

- *Accumulation*
- *Catégorie de Modélisation*
- *Professeurs de mathématiques*
- *Intégrale définie*
- *Socioépistémologie*

Vol. 29, e670 https://doi.org/10.12802/relime.2026.29.e670

1. Introducción

La integral definida es un concepto crucial en ciencias, ingeniería, economía y muchas otras disciplinas, ya que permite modelar y explicar diversos tipos de fenómenos, por lo que razonar con integrales definidas se convierte en una habilidad clave que los estudiantes deben desarrollar en cursos de matemáticas y en distintas especialidades de formación técnica y profesional. Este concepto admite múltiples significados e interpretaciones (p.e. Greefrath et al., 2021; Jones, 2020; Sealey, 2006) y diversos estudios han mostrado las dificultades que los estudiantes presentan para comprenderlo (p.e. Jones, 2020; Serhan, 2015), generando diferentes problemáticas educativas. Un ejemplo de esto es el estudio de Sealy (2014), que propone una secuencia de tareas de resolución de problemas enfocadas en el significado de la integral definida como el producto entre $f(x)$ y Δx, evidenciando mayores dificultades en esta conceptualización, aun considerando la simpleza de las operaciones matemáticas.

Este tipo de interpretación también aparece en otras investigaciones, que reportan innovaciones didácticas mediante estrategias numéricas en entornos digitales (Caglayan, 2016) o mediante representaciones que enfatizan procesos infinitesimales asociados a la integral definida (Ely, 2017), con resultados positivos en los contextos estudiados. Junto con estas aproximaciones, se mantienen las interpretaciones conceptuales tradicionales de la integral definida, como el área bajo la curva o la suma infinitesimal acumulativa.

Desde la perspectiva de Tall (Rasslan y Tall, 2002; Tall y Vinner, 1981), la comprensión de la integral definida está condicionada por la brecha entre las definiciones formales del cálculo y las imágenes conceptuales que los estudiantes efectivamente construyen, ya que muchos estudiantes operan con imágenes fragmentarias asociadas al área bajo la curva o a procedimientos algebraicos, sin articularlas con estructuras más generales del análisis, lo que revela la necesidad de promover conexiones más sólidas entre procesos y conceptos en el aprendizaje del cálculo. En este marco, la noción de acumulación se vuelve un punto crítico y de interés didáctico, pues constituye un puente para integrar significados locales y globales de la integral, y una vía para transitar desde imágenes intuitivas hacia estructuras conceptuales más estables.

Para Thompson y Silverman (2008), la acumulación es una de las nociones más importantes para la comprensión de la integral definida. Kouropatov y Dreyfus (2014) señalan que, a través de esta noción, es posible relacionar la integral definida e indefinida con la derivada, y que también permite dar cuenta de diferentes tipos de aplicaciones. Diversas investigaciones en educación matemática (p.e. Bueno et al., 2023; Aranda y Callejo, 2020;

Kouropatov, 2016; Swidan y Yerushalmy, 2016) han abordado la noción de acumulación mediante la función de acumulación $F_a(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, con $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ continua, la cual, según Swidan y Yerushalmy (2016), permite crear oportunidades para que los estudiantes aprendan y apliquen la integración de forma significativa. En esa línea, desde distintas perspectivas teóricas, diversos estudios han ofrecido enfoques alternativos para la enseñanza y el aprendizaje de la integral definida, considerando diversas conceptualizaciones del concepto de acumulación. En el caso de Kouropatov y Dreyfus (2014) se considera como elemento para construir la integral definida la función de acumulación; en Swidan y Yerushalmy (2016), la acumulación es vista como suma de los productos $f(x) \cdot \Delta x$, en Swidan (2020) se establece una progresión del concepto de acumulación discreta a continua, o en Jones y Ely (2023) que conciben la acumulación como dos estructuras cuantitativas (sumar piezas infinitesimales o seguir dinámicamente una cantidad que varía según una tasa). Estas investigaciones, entre muchas otras, se centran en distintos objetos matemáticos asociados a la función de acumulación para llevar a cabo procesos de enseñanza de la integral definida.

Por otra parte, distintas aproximaciones socioculturales en educación matemática han ampliado las oportunidades de aprendizaje y enseñanza al promover una democratización educativa que reconoce el conocimiento matemático de las personas como un conocimiento situado que transforma la matemática escolar (p.e. Cordero, 2023; D'Ambrosio, 2014; Rosa et al., 2016; Tall y Vinner, 1981). Este conocimiento está presente en las personas de manera específica y plural, y se resignifica en distintos escenarios, como la escuela, el trabajo y la vida (Cordero et al., 2024), donde la resignificación es entendida como la construcción del conocimiento mismo acorde a la organización del grupo humano, normado por lo institucional (Cordero et al., 2015). En el caso particular de la integral definida, diversos estudios han dado cuenta de que el conocimiento matemático de la acumulación que proviene de las personas promueve su resignificación con diversos significados asociados (p.e. Gaete-Peralta et al., 2024, 2025; Marcía et al., 2022; Marcía, 2020). A pesar de ello, este tipo de usos no actúan como referentes para la enseñanza de la integral definida (Opazo-Arellano et al., 2022), lo cual limita la posibilidad de diálogo entre la matemática escolar y el conocimiento puesto en uso de la acumulación de diferentes comunidades.

Desde el programa socioepistemológico Sujeto Olvidado y Transversalidad de Saberes (SOLTSA), la resignificación del conocimiento matemático se caracteriza mediante constructos teóricos de la categoría de modelación (Cordero et al., 2022), una variedad socioepistemológica de modelación matemática que emerge cuando las comunidades

Vol. 29, e670 https://doi.org/10.12802/relime.2026.29.e670

ponen en uso su conocimiento matemático en situaciones específicas. Esta observación cobra relevancia al considerar que, tradicionalmente, las concepciones predominantes sobre la modelación en educación matemática han soslayado este tipo de usos (Cordero et al., 2022). En el caso particular de la integral definida, el estudio realizado por Marcía (2020) utiliza la noción de acumulación de Cordero (2003) para caracterizar las resignificaciones de la integral definida en situaciones específicas de cambio en donde la acumulación se conceptualiza como una argumentación de la situación, es decir, como un hilo conductor desde el cual emergen los conocimientos matemáticos (Cordero et al., 2015); y la situación de cambio es entendida como un fenómeno de variación que incluye un cambio en una cantidad o estado inicial, E_0, la cual, bajo un proceso, es transformada en otra cantidad o estado final, E_f (Marcía, 2020).

A partir de lo señalado anteriormente, y con el propósito de contribuir a la construcción de marcos de referencia para la matemática escolar que favorezcan resignificaciones de la integral definida, se plantea la siguiente pregunta de investigación: ¿cómo realizan resignificaciones de la integral definida ciertas comunidades de conocimiento en situaciones específicas de cambio, considerando la acumulación como argumentación? Responder a esta pregunta permitirá caracterizar resignificaciones de la integral definida mediante la categoría de modelación, generando evidencia empírica que favorezca la articulación entre la matemática escolar y el conocimiento matemático situado, y fortalecer la comprensión de la integral definida desde una perspectiva socioepistemológica.

2. Marco teórico

Para responder a la pregunta de investigación, este estudio se situó en el programa socioepistemológico SOLTSA, que busca valorar epistemológicamente la puesta en uso del conocimiento matemático por parte de comunidades de conocimiento en situaciones específicas de su vida cotidiana. Específicamente, este programa tiene como propósito revelar los usos del conocimiento matemático ($U(CM)$) y sus resignificaciones que emergen de comunidades en diferentes escenarios: la escuela, el trabajo o la profesión y la vida cotidiana (Cordero, 2023). El primer escenario aborda los procesos de formación escolarizada, mientras que el segundo se refiere a las disciplinas y a los especialistas en sus respectivos lugares de trabajo. Finalmente, el tercer escenario engloba a la gente en su cotidiano, ya sea en oficios o en cualquier expresión de sus habilidades (Barrios y Cordero, 2025).

Para el programa SOLTSA, el constructo de situación específica funciona como marco para analizar la matemática de forma contextual y, con ello, conocer los $U(CM)$ (Cordero, 2023).

El constructo $U(CM)$ se caracteriza mediante un debate entre funcionamiento y forma, donde el primero responde a para qué es usado el conocimiento y el segundo a cómo es usado el conocimiento (Parra y Méndez, 2021). Al producto de este debate se le denomina resignificación de usos del conocimiento matemático, $Re(U(CM))$.

Las dos líneas de trabajo que desarrolla SOLTSA actúan simultáneamente: a) la resignificación del conocimiento matemático y b) su impacto educativo. En la primera línea se problematizan las categorías de conocimiento matemático presentes en las comunidades de conocimiento matemático en distintos escenarios: la escuela, el trabajo y la vida. El primer escenario aborda los procesos de formación escolarizada, mientras que el segundo se refiere a las disciplinas y a los especialistas en sus respectivos lugares de trabajo. Finalmente, el tercer escenario engloba a la gente en su cotidianidad, ya sea en oficios o en cualquier expresión de sus habilidades (Barrios y Cordero, 2025). En la segunda línea de trabajo se proyecta el impacto educativo en escenarios locales, con comunidades de la docencia y del estudiantado en los diferentes niveles educativos, a saber: básica, media y superior (Cordero, 2023), para conformar los multifactores y estadios que contribuyen a la conformación de programas de acompañamiento permanentes entre el profesorado de matemáticas (Cordero et al., 2022).

Desde el programa SOLTSA, las resignificaciones del conocimiento matemático en los escenarios descritos anteriormente se analizan con constructos teóricos de la categoría de modelación (Cordero et al., 2022), como en el presente estudio, dado que estos elementos contribuyen a la construcción de marcos de referencia para que la matemática escolar pueda dar cuenta de los $U(CM)$ que ocurren en diferentes situaciones propias del cotidiano de la gente y valorar la funcionalidad del conocimiento matemático, entendida como un conocimiento útil de las personas en situaciones de su vida cotidiana (Arendt, 2005).

2.1. La categoría de modelación

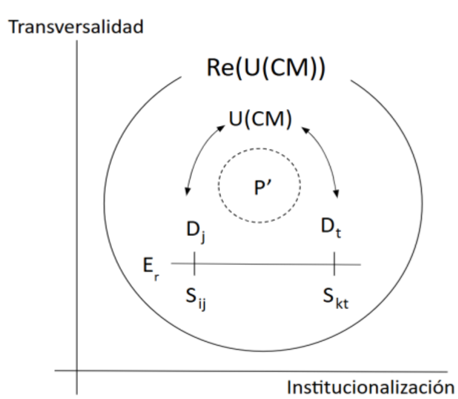
En concordancia con Cordero et al. (2022), la modelación matemática en educación suele concibir la realidad y las matemáticas como unidades separadas, con la intención de vincularlas mediante procesos cíclicos preexistentes. Para Cordero et al. (2022), este tipo de perspectivas de modelación se basa en un principio P: la modelación matemática como un proceso cíclico que conecta las matemáticas con el resto del mundo. En esa línea, diversas investigaciones han utilizado la modelación matemática con base en este principio para contribuir a una mejora en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, como es el del ciclo de Blum y Leiß (2007) (p.e. Aroeira et al., 2024) o el ciclo de Blum-Borromeo (Borromeo-Ferri, 2010) (p.e. Huincahue et al., 2018), entre muchos otros.

La categoría de modelación (Cordero et al., 2022) se relaciona con la modelación matemática, pero no corresponde a una perspectiva de modelación basada en el principio P. Desde el programa SOLTSA, esta categoría es una variedad teórica de modelación matemática, basada en un principio P': la modelación matemática como un proceso que valora la funcionalidad del conocimiento matemático en la relación recíproca entre las matemáticas y el cotidiano de la gente (Cordero et al., 2022). El principio P' genera la categoría de modelación, es decir, la puesta en uso del conocimiento matemático de la gente en los cotidianos descritos anteriormente, y sostiene una visión de la modelación como un proceso en el que el conocimiento matemático de la gente no se encuentra separado de su entorno situacional.

Para el programa SOLTSA, la resignificación de conocimiento matemático es caracterizada a través del constructo resignificación de usos de conocimiento matemático, $Re(U(CM))$. La Figura 1 presenta un esquema que articula los constructos teóricos de la categoría de modelación. Los usos de conocimiento matemático, $U(CM)$, emergen de comunidades en situaciones específicas (S_{in}) propias de diferentes escenarios o dominios (D_n), para construir lo matemático, es decir, el conocimiento matemático propio de la comunidad. Esta construcción se caracteriza por medio de una epistemología de usos, estructura conformada por elementos transversales a diferentes escenarios, dominios y situaciones específicas (Barrios y Cordero, 2025): situaciones núcleo desglosadas en significaciones, procedimientos e instrumentos, los que en conjunto derivan la argumentación de la situación, correspondiente a una $Re(U(CM))$ construida por la comunidad.

Figura 1

Esquema de la categoría de modelación



Nota. Tomada de Cordero et al. (2022)

Vol. 29, e670 https://doi.org/10.12802/relime.2026.29.e670

Una $Re(U(CM))$ también puede construirse entre escenarios o dominios. Cuando este tipo de resignificaciones se construye, se habla de transversalidades entre estos escenarios o dominios. Las resignificaciones de usos construidas por comunidades tienen, a su vez, elementos específicos asociados a los aspectos funcionales de la puesta en uso del conocimiento matemático en la situación S_{ij} (Barrios y Cordero, 2025). Estos elementos, representados por un eje E_r, singularizan epistemológicamente la actividad matemática que se desarrolla en S_{ij}. Lo anterior implica que la categoría de modelación valora la pluralidad epistemológica en su entorno de institucionalización, lo que quiere decir que existe una valoración del conocimiento matemático construido por una comunidad, reconociendo su propia estructura de validación, derivada de sus reglas, historia, tradición y cultura (p.e. Cordero, 2019; Pérez-Oxté, 2021).

A partir de lo realizado en distintas investigaciones socioepistemológicas, se ha construido la Socioepistemología del Cálculo y el Análisis (ver Figura 2), un marco de referencia que a través de constructos de la categoría de modelación expresa resignificaciones del conocimiento matemático que emergen en ocho tipos de situaciones núcleo: variación, transformación y aproximación (Cordero, 2008), cambio (Marcía, 2020), selección (Cordero et al., 2019), ponderación (Medina Lara, 2019), periodización (Pérez-Oxté, 2021) y medición (Gaete-Peralta et al., 2024). Estas situaciones núcleo sirven como bases epistemológicas para el diseño de situaciones escolares de socialización para la matemática escolar, cuyo aspecto fundamental consiste en considerar los usos del conocimiento matemático como base para llevar a cabo una resignificación del conocimiento matemático, en contrapartida de aquellos diseños que promueven la emulación de un concepto (Morales, 2020).

Figura 2

Socioepistemología del Cálculo y el Análisis

	Situaciones							
Construcción de lo matemático	Variación	Cambio	Transformación	Aproximación	Selección	Ponderación	Periodización	Medición
Significaciones	Flujo Movimiento Acumulación Estado Permanente	Área bajo la curva Posición de un móvil Movimiento de un fluido Constante térmica	Patrones de comportamiento gráficos y analíticos	Límite Derivación Integración Convergencia	Patrón de adaptación	Distribución de comportamiento	Distribución de comportamientos	Medida de magnitudes
Procedimientos	Comparación de dos estados	Comparación de dos estados	Variación de parámetros	Operaciones lógico formales (cociente)	Distinción de cualidades	Equiparar	Equiparación	Clasificación
Instrumento	Cantidad de variación continua	Cantidad de variación continua	Instrucción que organiza comportamientos	Formas analíticas	Lo estable	Punto de equilibrio	Interpolación	Lo medible
Argumentación	Predicción	Acumulación	Comportamiento tendencial	Analiticidad de las funciones	Optimización	Compensación	Anticipación	Cuantificación

Nota. Tomado de Gaete-Peralta et al. (2024, p.270)

Con el propósito de analizar cómo una determinada comunidad realiza una resignificación en situaciones de cambio y vinculan este tipo de situaciones con el concepto de integral definida, en la siguiente sección se explicará la noción de acumulación y cómo su integración con la categoría de modelación permite generar resignificaciones de este concepto.

2.2. La noción de acumulación

La noción de acumulación (Cordero, 2003) emerge en situaciones de cambio cuando se comparan dos cantidades o estados, uno inicial (E_0) y otro final (E_f), mediante la resta $E_f - E_0 = A$ y la suma $E_f = E_0 + B$. La resta representa una noción de acumulación desde un punto de vista estático, en tanto que es "algo" que se concentra (denotado por A), mientras que la suma representa una noción de acumulación desde un punto de vista dinámico, en tanto que es "algo" que se está agregando (denotado por B).

Marcía (2020) utiliza la categoría de modelación para conducir los procesos de resignificación de la integral definida en situaciones específicas de cambio argumentadas por una acumulación. Por una parte, en el dominio de la modelación biomatemática, los usos de la acumulación emergieron de comunidades de modeladores biomatemáticos para llevar a cabo una resignificación en una situación de cambio, argumentada por una acumulación de grados-día. Por otro lado, en un escenario escolar, estos usos emergieron de una comunidad de estudiantes de docencia de matemáticas para generar una resignificación en una situación de cambio, con una argumentación asociada a la acumulación de agua. Los procesos de resignificación realizados por ambas comunidades presentaron características epistemológicas singulares, acompañados de procesos de institucionalización, lo que permitió una resignificación de la integral definida. A pesar de la existencia de dichas singularidades, esta investigación caracterizó una transversalidad que sucedió entre este dominio y el escenario escolar, a partir de una situación núcleo de cambio (ver Figura 2) conformada instrumentos ligados a cantidades de variación continua, procedimientos asociados a una comparación de dos estados (el inicial y el final, a través de una resta y una suma) y significaciones asociadas al área bajo la curva, la posición de un móvil, el movimiento de un fluido o la constante térmica. Estos elementos, conjuntamente, derivan la argumentación de la situación de cambio: la acumulación.

3. Metodología

La presente investigación se enmarcó en un paradigma interpretativo, adoptando un enfoque cualitativo (Creswell y Creswell, 2018), con el propósito de describir e interpretar en profundidad cómo los participantes resignificaron la integral definida durante el desarrollo de una situación escolar.

Además, se consideró la categoría de modelación (Cordero et al., 2022) para guiar los procesos de resignificación de los usos del conocimiento matemático. Esta decisión es coherente con diversas investigaciones socioepistemológicas previas, tales como la acumulación y la integral definida (Marcía, 2020), los estudios sobre la reproducción del comportamiento (Mendoza-Higuera et al., 2022), la estabilidad en ecuaciones diferenciales (Giacoleti-Castillo et al., 2024) y la cuantificación (Gaete-Peralta et al., 2024). En dichos trabajos, la categoría de modelación ha funcionado como un marco teórico-metodológico que ha permitido identificar los componentes epistemológicos del proceso de modelación, secuenciar sus distintos estadios, tanto para la confección de diseños de situaciones escolares como para su análisis posterior, y mostrar su operatividad en distintos dominios de conocimiento.

3.1. Contexto y participantes

Se realizó un estudio de caso instrumental (Stake, 2007) con profesores de matemáticas de educación en Chile, con el fin de comprender detalladamente los argumentos matemáticos y resoluciones asociadas al concepto de integral definida durante el desarrollo de una situación escolar (ver Figura 3). La elección de los participantes consideró a personas con formación disciplinar consolidada en matemáticas —en particular, en cálculo integral— y que tuviesen experiencia docente, con la finalidad de que pudieran identificar otros entornos de resignificación de los usos del conocimiento matemático asociados a la integral definida. Por ello, los criterios de selección fueron dos: (i) ser profesor(a) de matemáticas titulado(a) y (ii) tener experiencia docente asociada a la integral definida.

De acuerdo con los criterios establecidos, 4 profesores de matemáticas (3 hombres y 1 mujer) fueron seleccionados para participar de este estudio (denotados como P1, P2, P3 y P4), todos con un perfil docente, tanto en instituciones de educación secundaria como en instituciones de educación superior (entre 5 y 10 años de experiencia), e investigativo (estudios de posgrado en didáctica de la matemática). A los profesores se les pidió que formaran dos grupos para desarrollar una situación escolar durante dos sesiones de 90 minutos cada una. Los profesores crearon grupos de manera aleatoria, que fueron denominados G1 (conformado por P1 y P2) y G2 (conformado por P3 y P4). Finalmente, todos los profesores participaron voluntariamente en esta actividad mediante consentimiento informado.

3.2. Diseño de la situación escolar

La temática elegida para el diseño de la situación escolar fue la acumulación de grados-hora, unidad de medida utilizada en la fenología para estudiar el crecimiento de las plantas. Cada planta está adaptada para crecer a partir de una temperatura mínima (de base) y decaer su crecimiento a partir de una temperatura máxima (Wagner-Riddle, 2005). La cantidad de calor acumulada por una planta, como requisito para un crecimiento y desarrollo sostenidos, tradicionalmente se mide en grados-día (DD). Sin embargo, en casos en los que resulta más pertinente calcular esta cantidad de calor por hora, es común utilizar una unidad de medida llamada grados-hora (DH), según $DH = DD \cdot 24$ (Gu, 2016).

Estas unidades de medida se emplean en estudios entomológicos y permiten analizar fenologías y ciclos de vida de ácaros presentes en productos orgánicos, y son de interés para la protección de alimentos y otros productos comestibles. Su aplicación pone de relieve una mirada interdisciplinaria para abordar problemas de modelización matemática (como actividad científica, en el sentido de Villa-Ochoa, 2007), integrando saberes de la entomología y matemáticas (Huincahue, 2011). En el ámbito educativo, el estudio de Gaete-Peralta (2020) constituye una expresión de la integral definida a partir de estas unidades de medida, al emplearla en el análisis de variaciones para el cálculo teórico de constantes térmicas. Posteriormente, Marcía et al. (2022) proponen una situación escolar vinculada a la integral definida, entendida como la acumulación de cantidades que varían con el tiempo. En el presente estudio, la elección de la medida grados-hora se considera más precisa que la de grados-día, pues aporta mayor precisión al diseño y permite una mejor aproximación a la realidad que se busca modelar.

La confección del diseño de situación escolar se realizó con base en la situación núcleo de cambio (Marcía, 2020), y su propósito fue que los profesores calcularan acumulaciones de grados-hora en diversos intervalos de tiempo. Para esta finalidad, el diseño contó con un applet de GeoGebra como herramienta de apoyo, el que incorporó los siguientes elementos: 1) una curva de temperatura ambiente de una ciudad de Chile (en grados Celsius) en función del tiempo t (en horas del día), con $0 \leq t \leq 23$, y 2) un deslizador del tiempo t para hacer barridos de área bajo la curva de temperatura ambiente, $A(t)$.

El diseño buscó que los profesores usaran la acumulación en una situación específica de cambio (donde lo que cambió fue la cantidad de grados-hora acumulados por una planta hasta las t horas, $A(t)$), cuya argumentación se basó en el cálculo de las acumulaciones de grados-hora de una planta en intervalos de tiempo específicos. El rol de los deslizadores fue permitir a los profesores visualizar gráficamente tres cosas: i) $A(t)$, $0 \leq t \leq 23$, ii) la resta $A(t_2) - A(t_1), t_2 > t_1$, y iii) que $A(t)$ era una cantidad que variaba de forma continua con respecto al tiempo t.

El diseño de la situación escolar (Figura 3) contempló dos momentos: el primero (preguntas 1, 2 y 3) buscó que los profesores le dieran un significado a $A(t)$, a la resta $A(t_2) - A(t_1)$, $t_2 > t_1$ y que calcularan, desde un punto de vista estático, acumulaciones de grados-hora en intervalos de tiempo específicos. El segundo momento (pregunta 4) buscó que los profesores calcularan, desde un punto de vista dinámico, acumulaciones de grados-horas. Tras su elaboración, la situación escolar fue sometida a un proceso de validación de contenido, en el que fue resuelta y analizada por dos especialistas en didáctica de la matemática que trabajan de forma investigativa en el nivel superior. El proceso permitió identificar observaciones menores relacionadas con la redacción y la secuencia de las preguntas formuladas en ambos momentos de la tarea. Una vez incorporados dichos comentarios, se dio por finalizada la confección del diseño de la situación escolar.

Vol. 29, e670 https://doi.org/10.12802/relime.2026.29.e670

Figura 3

Diseño de la situación escolar

Acumulación de grados-hora

La temperatura es uno de los principales factores de incidencia en el desarrollo de plantas e insectos. Además, muchas plantas e insectos poseen una temperatura base, T_b, la cual se puede entender como aquella temperatura mínima que requieren para desarrollarse. Si durante un cierto período de tiempo, la temperatura ambiente es menor a T_b, su desarrollo se detiene por el frío. A modo de ejemplo, en el caso de plantas, la acelga posee una temperatura base $T_b = 4°C$, mientras que para el caso de insectos, la polilla de la manzana *Cydia pomonella*, $T_b = 11{,}2°C$. Para alcanzar ciertos niveles de desarrollo, muchas plantas e insectos necesitan acumular una cierta cantidad de grados-hora.

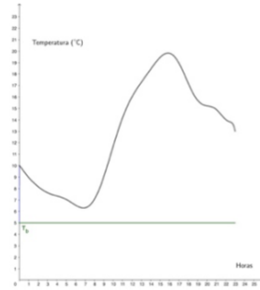


Figura 1. modelamiento de la temperatura por hora.

Conocer la cantidad de grados-hora acumulados por una planta permite conocer, por ejemplo, cuánto tiempo le falta a una planta para desarrollarse por completo. Suponga que se conoce la curva de temperatura ambiente en una ciudad de Chile con respecto al tiempo (en horas del día) del día 01 de agosto de 2022 (como se aprecia en la figura 1) y que tenemos una planta específica cuya temperatura base es $T_b = 5°C$, ¿cómo calcular la cantidad de grados-hora acumulados por dicha planta?

Apoyándose del siguiente applet de GeoGebra: https://www.geogebra.org/m/dgyvr9qk, responda las siguientes preguntas:

1. Si denotamos por $A(t)$ al área sombreada (azul o rojo), ¿qué significa $A(t)$, $0 \leq t \leq 23$, en el contexto del problema? Justifique su respuesta.
2. ¿Qué significado tiene la resta $A(t_2) - A(t_1)$, para $t_2 > t_1$, en el contexto del problema?
3. Determine la cantidad de grados-hora acumulada por la planta en los siguientes casos:
   a. 09:00 hrs. y 10:00 hrs.
   b. 10:00 hrs. y 12:00 hrs.
   c. 10:00 hrs. y 14:30 hrs.
4. Se sabe que hasta las 9:00 horas la planta acumuló 22 grados-hora,
   a. ¿Cuántos grados-hora acumuló la planta hasta las 10:00 horas?
   b. ¿Cuántos grados-hora acumuló la planta hasta las 12:00 horas?
   c. ¿Cuántos grados-hora acumuló la planta hasta las 23:00 horas?

3.3. Recolección y análisis de datos

Durante el desarrollo de la situación escolar, la recolección de datos se llevó a cabo mediante: a) registros escritos de los desarrollos de la situación escolar por parte de los profesores; b) fotografías de las producciones realizadas por los profesores; y c) registros audiovisuales de la situación implementada, los cuales fueron transcritos para su posterior análisis.

Los datos recolectados fueron analizados con constructos teóricos de la categoría de modelación, específicamente los constructos $U(CM)$ y los que forman parte de la situación núcleo de cambio (Marcía, 2020), los cuales se trenzaron con técnicas de análisis de documentos (Kutsyuruba, 2023), entendido como un proceso de análisis que combina el análisis de contenido (Krippendorff, 1990) y el análisis temático reflexivo (Braun y Clarke, 2006; Braun, Clarke, Hayfield y Terry, 2019).

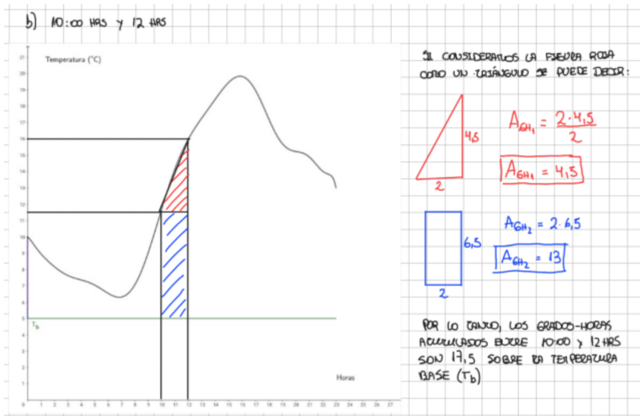
Para Braun y Clarke (2006), el análisis temático es realizado en seis etapas, ellas son: 1) familiarización con los datos, 2) generación de códigos iniciales, 3) búsqueda de temas, 4) revisión de temas, 5) definición y denominación de temas y 6) producción del reporte. Durante el proceso de análisis, se consideró la triangulación entre investigadores (Arias, 2000) como criterio de validez interna en las etapas. Los investigadores que participaron en este proceso fueron dos, ambos con el grado de doctorado en didáctica de la matemática con experiencia en procesos de codificación cualitativa.

La primera etapa consistió en la lectura de todos los datos recolectados, para plantear un primer entendimiento de la información obtenida. En esta etapa, cada investigador realizó una lectura personal para comprender la información que se derivaba de los datos. Al final de esta etapa, cada investigador infirió usos de la acumulación y, de manera inductiva, propuso códigos y codificaciones a partir de extractos de datos provenientes de las producciones de los profesores, con el fin de inferir significaciones, procedimientos e instrumentos. Posteriormente, los investigadores se reunieron para discutir lo que cada uno entendió de sus lecturas y presentar sus inferencias sobre los usos de la acumulación, así como sus propuestas de códigos y codificaciones. En la segunda etapa, los investigadores se reunieron para discutir sus inferencias y propuestas y lograr consensos al respecto. La Tabla 1 muestra algunos ejemplos de asignación de códigos a extractos de datos, consensuados por los investigadores. En la etapa 3 se realizó un refinamiento del proceso de codificación y se generaron subtemas y temas potenciales. La Tabla 2 muestra los códigos y subtemas resultantes tras este refinamiento.

Vol. 29, e670 https://doi.org/10.12802/relime.2026.29.e670

Tabla 1

Ejemplos de asignaciones de códigos a segmentos cortos de datos

<table>
<tr><th>Extracto de datos</th><th>Código(s) asignado(s)</th></tr>
<tr><td>

(Extracto de la respuesta de G1)</td><td>Área de un triángulo; área de un rectángulo; suma de áreas; grados-hora acumulados</td></tr>
<tr><td>“En el ítem 3a encontramos que de las 9 a 10 horas los grados hora acumulados son 7 grados hora. Entonces, hasta las 10 horas la planta habrá acumulado A=22+7=29 grados hora.”(Extracto de la respuesta G2)</td><td>Área de un triángulo; área de un rectángulo; suma de áreas; grados-hora acumulados</td></tr>
<tr><td>“Para determinar la cantidad de grados-hora acumulados por la planta entre las 9°°- 10°°, podemos utilizar el applet manipulando el deslizador rojo hasta t=10 y luego hacemos lo mismo con el deslizador azul hasta t=9.” (Extracto de la respuesta de G2)</td><td>Suma de grados-hora</td></tr>
</table>

Tabla 2

Códigos resultantes y subtemas emergentes

Códigos	Subtemas emergentes	Elementos que construyen lo matemático
Área de un triángulo; área de un rectángulo; suma de áreas; grados-hora acumulados.	Área encerrada entre curva de temperatura T y recta $y = T_b$ en un intervalo específico. Acumulación de grados-hora en un intervalo de tiempo específico.	Significaciones

Resta de grados-hora; suma de grados-hora; resta de áreas.	Comparación entre dos cantidades acumuladas de grados-hora.	Procedimientos
Movimiento continuo	Acumulación continua de grados-hora	Instrumento

La etapa 4 consistió en una revisión de los temas potenciales, analizando todas las generaciones y asociaciones de códigos realizadas en las etapas anteriores. En este sentido, la etapa 4 incluyó una revisión de las etapas 1, 2 y 3, lo que permitió elaborar una primera versión de los temas. La etapa 5 se centró principalmente en generar los nombres y las definiciones de los temas para representar fielmente los datos. Por último, la etapa 6 consistió en generar un mapa temático para caracterizar la resignificación de la integral definida de los profesores durante el desarrollo de la situación escolar.

Finalmente, los usos de la acumulación que emergieron durante el desarrollo de la situación escolar fueron analizados mediante el binomio funcionamiento-forma, acorde a lo realizado en distintos trabajos socioepistemológicos (p.e. Cordero et al., 2019; Gaete-Peralta et. al, 2024).

4. Resultados y análisis

A continuación, se presenta un análisis que da cuenta de cómo profesores de matemáticas llevaron a cabo una resignificación de la integral definida durante el desarrollo de la situación escolar.

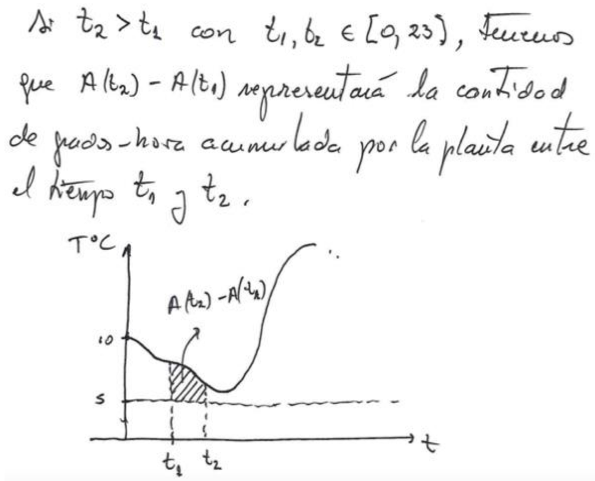
4.1. Primer momento

Antes de responder las preguntas planteadas en el diseño de la situación escolar, los grupos de profesores ingresaron al applet de GeoGebra para comprender los elementos que conforman esta aplicación interactiva. Al mover los deslizadores para t $(0 \leq t \leq 23)$ los profesores notaron que las áreas $A(t)$ variaron de forma continua. Durante el desarrollo de la situación, los grupos de profesores significaron la expresión $A(t)$, $0 \leq t \leq 23$, como la cantidad de grados-hora acumulados por la planta a las t horas. Respecto al significado de la resta $A(t_2) - A(t_1)$, $t_2 > t_1$, los grupos señalaron que dicha resta representaba una acumulación de grados-hora de la planta entre las horas t_1 y t_2. La respuesta de G2 se muestra en la Figura 4.

Vol. 29, e670 https://doi.org/10.12802/relime.2026.29.e670

Figura 4

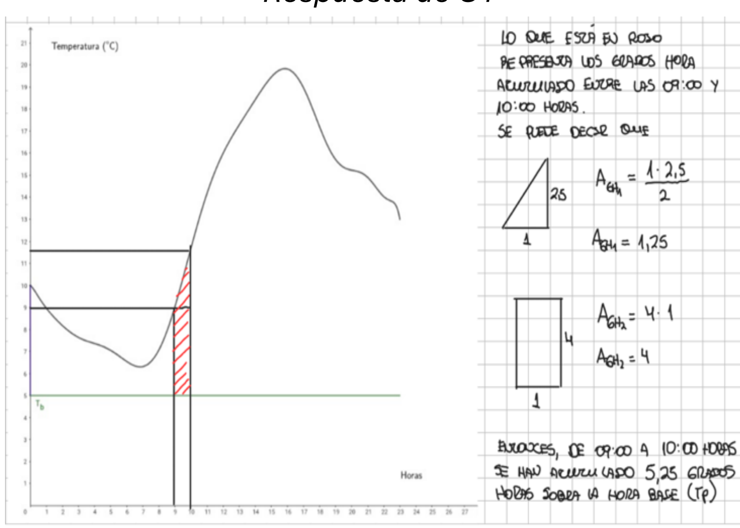
Respuesta de G2



Para determinar la cantidad de grados-hora acumulados entre las t_1 y t_2 horas, los grupos de profesores buscaron estrategias para aproximar el área delimitada por la curva de temperatura T, la recta horizontal T_b y los ejes verticales $t = t_1$ y $t = t_2$. A modo de ejemplo, la Figura 5 muestra lo realizado por G1 para calcular la cantidad de grados-hora acumulada por la planta entre las 09:00 y 10:00 hrs. Su estrategia consistió en sumar el área de un triángulo y de un rectángulo para determinar que la cantidad acumulada era de $5,25$ grados-hora.

Figura 5

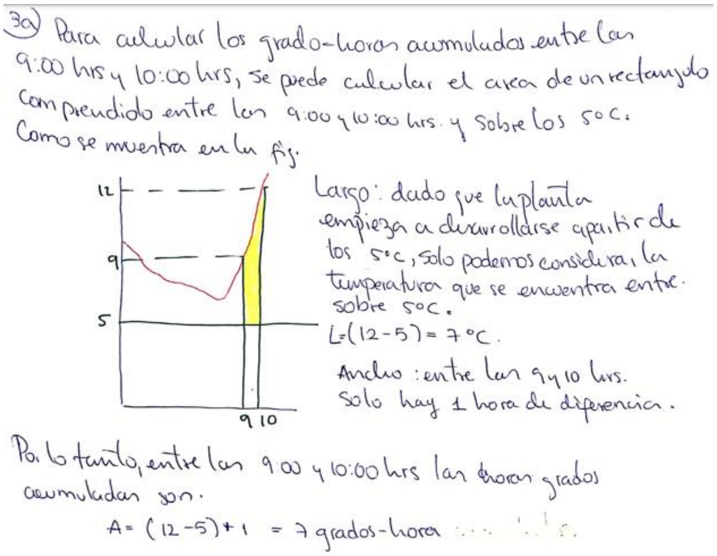
Respuesta de G1



Otra estrategia utilizada para determinar la acumulación de grados-hora entre las 09:00 y 10:00 horas, fue la realizada por G2, quien aproximó dicha acumulación por exceso, a través del área de un rectángulo de base $[9{,}10]$ y altura igual al segmento de recta vertical que va desde $T_b = 5$, hasta $T = 12$, estableciendo que dicha acumulación era igual a 7 grados-hora (ver Figura 6).

Figura 6

Respuesta de G2



Es importante señalar que los valores 5,25 y 7 tuvieron dos significados para los grupos de profesores: uno asociado a áreas específicas de regiones encerradas entre curvas; y otro asociado a acumulaciones de grados-hora en determinados intervalos de tiempo.

A modo de síntesis, la Tabla 3 muestra los usos de la acumulación de los profesores que ocurrieron en el primer momento.

Tabla 3

Usos de la acumulación de los profesores durante el primer momento

Funcionamiento	Forma
Para determinar la acumulación de grados-hora entre las 09:00 y 10:00 hrs.	A_1 es igual a la suma de áreas de triángulos y rectángulos utilizados para aproximar el área de la región $A(10) - A(9)$.
Para determinar la acumulación de grados-hora entre las 10:00 y 12:00 hrs.	A_2 es igual a la suma de áreas de triángulos y rectángulos utilizados para aproximar el área de la región $A(12) - A(10)$.
Para determinar la acumulación de grados-hora entre las 10:00 y 14:30 hrs.	A_3 es igual a la suma de áreas de triángulos y rectángulos utilizados para aproximar el área de la región $A(14{,}5) - A(10)$.

Vol. 29, e670 https://doi.org/10.12802/relime.2026.29.e670

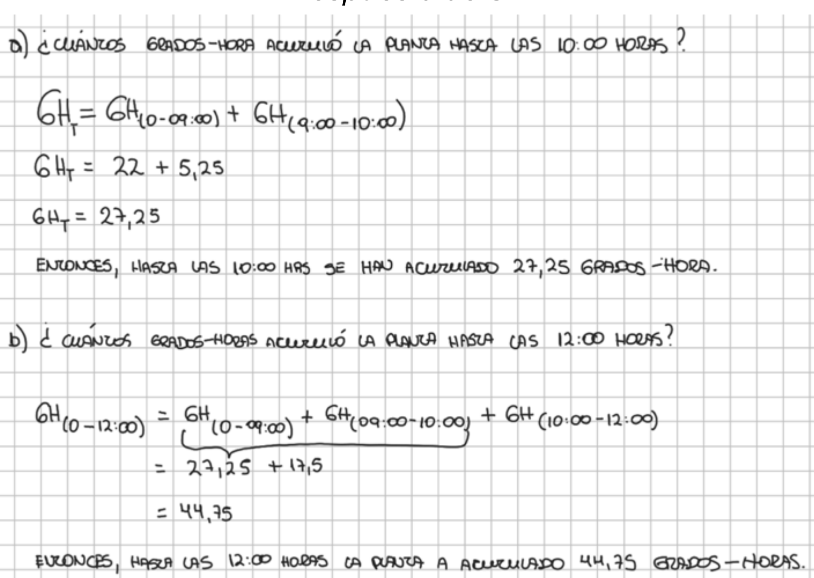
4.2. Segundo momento

Para determinar la cantidad de grados-hora acumulados por la planta hasta las 10:00 hrs, G1 procedió a realizar una comparación de dos estados: lo acumulado hasta las 9:00 horas y lo acumulado entre las 09:00 y las 10:00, a través de la suma $22 + 5{,}25 = 27{,}25$ grados-hora, lo cual representó lo acumulado por la planta hasta las 10:00 hrs (ver Figura 6). De manera similar, G2 realizó dicha comparación, pero mediante la suma $22 + 7 = 29$. Al respecto, P3 señaló: "En el ítem 3a encontramos que de las 9:00 a las 10:00 horas los grados-hora acumulados son 7. Entonces, hasta las 10:00 horas, la planta habrá acumulado 22 + 7 = 29 grados-hora."

La acumulación de grados-hora hasta las 12:00 horas fue realizada por G1 a través de una comparación de dos estados: lo acumulado hasta las 10:00 horas y lo acumulado entre las 10:00 y 12:00 horas, a través de la suma $27{,}25 + 17{,}5 = 44{,}75$ grados-hora, donde $17{,}5$ corresponde a la acumulación de grados-hora entre las 10:00 y 12:00 horas, calculada por G1 en el primer momento (ver Figura 7).

Figura 7

Respuesta de G1


a) ¿CUÁNTOS GRADOS-HORA ACUMULÓ LA PLANTA HASTA LAS 10:00 HORAS?

$GH_T = GH_{(0-09:00)} + GH_{(9:00-10:00)}$

$GH_T = 22 + 5{,}25$

$GH_T = 27{,}25$

ENTONCES, HASTA LAS 10:00 HRS SE HAN ACUMULADO 27,25 GRADOS-HORA.

b) ¿CUÁNTOS GRADOS-HORAS ACUMULÓ LA PLANTA HASTA LAS 12:00 HORAS?

$GH_{(0-12:00)} = \underbrace{GH_{(0-09:00)} + GH_{(09:00-10:00)}} + GH_{(10:00-12:00)}$

$= 27{,}25 + 17{,}5$

$= 44{,}75$

ENTONCES, HASTA LAS 12:00 HORAS LA PLANTA A ACUMULADO 44,75 GRADOS-HORAS.

Para determinar los grados-hora acumulados por la planta hasta las 23:00 horas, los profesores utilizaron diversas estrategias. Por ejemplo, G1 aproximó el área de la región del plano $A(23) - A(14{,}5)$ con ayuda de áreas de triángulos y rectángulos (ver Figura 8), lo cual le permitió establecer que entre las 14:30 y 23:00 hrs. la planta acumuló $98{,}75$ grados-hora. Lo anterior, le permitió a G1 establecer que hasta las 23:00 horas la planta acumuló $27{,}25 +$

$31{,}5 + 98{,}75 = 157{,}5$ grados-hora, donde $31{,}5$ representa la cantidad de grados-hora acumulados por la planta entre las 10:00 y 14:30 hrs (ver Figura 9).

Figura 8

Respuesta de G1

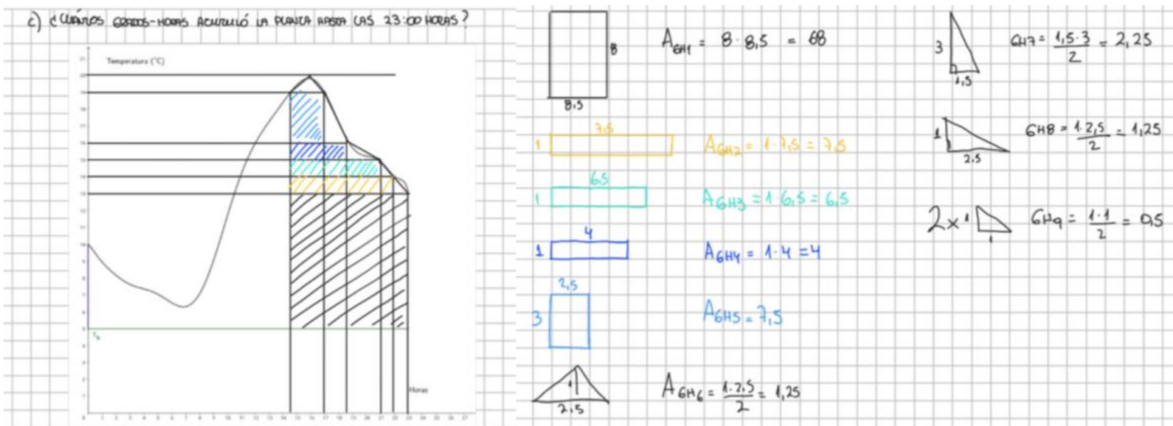
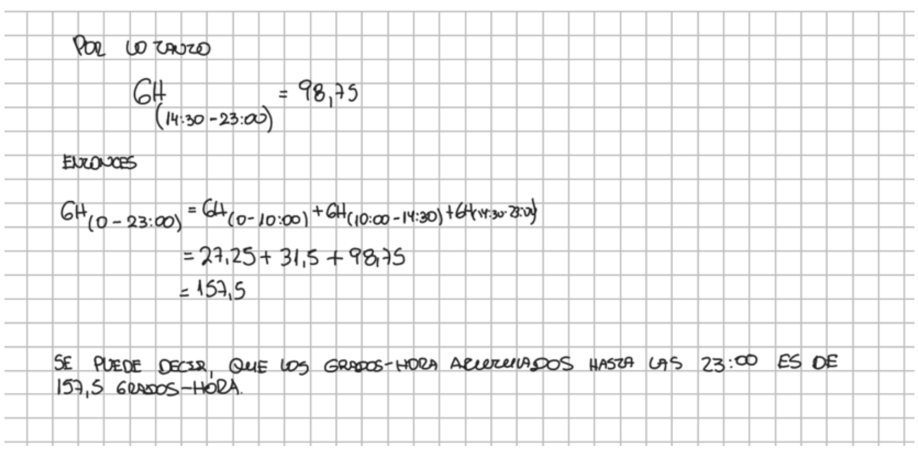


Figura 9

Respuesta de G1. La notación GH representa grados-hora



Los usos de la acumulación de los profesores durante el segundo momento se muestran en la Tabla 4.

Tabla 4

Usos de la acumulación durante el segundo momento

Funcionamiento	Forma
Para determinar los grados-hora acumulados hasta las 10:00 hrs. ($A(10)$)	$A(10) = 22 + A_1$
Para determinar los grados-hora acumulados hasta las 12:00 hrs. ($A(12)$)	$A(12) = 22 + A_1 + A_2$

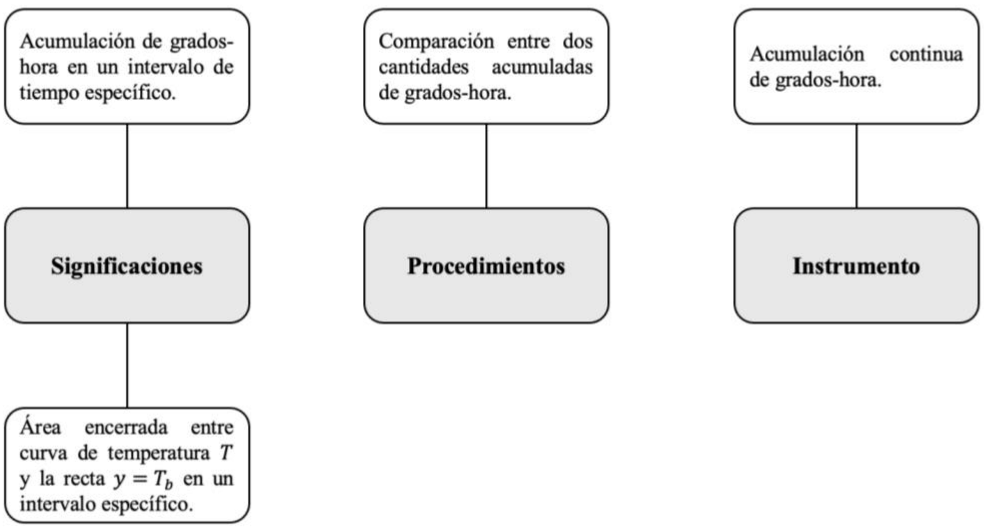
Para determinar los grados-hora acumulados hasta las 23:00 hrs. ($A(23)$)	$A(23) = 22 + A_1 + A_2 + A_4$, donde A_4 es igual a la suma de áreas de triángulos y rectángulos utilizados para aproximar el área de la región ($A(23) - A(12)$)

4.3. Mapa temático

La construcción del mapa temático (ver Figura 10) estuvo basada en la lista de códigos que aparecen en la Tabla 2 y en el análisis de la resignificación de la integral definida de los profesores de matemáticas tras el desarrollo de la situación escolar (secciones 4.1 y 4.2). Este mapa incluyó algunos subtemas con el fin de estructurar mejor los temas que permitieron caracterizar dicha resignificación.

Figura 10

Un mapa temático que caracteriza la resignificación de profesores



Nota. Los temas se presentan en gris y los subtemas en blanco.

En términos de los constructos teóricos de la categoría de modelación, los profesores resignificaron la integral definida en una situación específica de cambio argumentada por una acumulación, en donde cantidades de variación continua funcionaron como un instrumento sobre el cual se generaron procedimientos ligados a comparaciones de dos estados y las significaciones estuvieron asociadas a áreas entre curvas y a acumulaciones de grados-hora. Respecto a la institucionalización del conocimiento matemático, los profesores validaron el uso de áreas de triángulos y rectángulos como estrategia para el cálculo de áreas entre curvas, ante la imposibilidad de recurrir a estrategias propias del cálculo integral, conocidas por ellos por su experticia en el tema. El detalle de esta resignificación puede verse en la Tabla 5.

Tabla 5

Resignificación de la integral definida por profesores tras el desarrollo de la situación escolar

Construcción de lo matemático	Situación núcleo: cambio	Situación específica: situación en donde lo que cambia es la cantidad de grados-hora acumulados por una planta hasta las t horas, $A(t)$.
Instrumento	Cantidad de variación continua	$A(t)$ es una cantidad que varía de forma continua respecto al tiempo t.
Procedimiento	Comparación de dos estados	• Comparación de estados $A(t_1)$ y $A(t_2)$, $t_2 > t_1$, a través de la resta $A(t_2) - A(t_1) = A_i$, $i = 1,2,3$. • Comparación de estados $A(t_1)$ y $A(t_2)$, $t_2 > t_1$, a través de la suma $A(t_2) = A(t_1) + \sum_i^n A_i$.
Significación	Constante térmica/área bajo la curva	• El significado de A_i $(i = 1,2,3,4)$ se asocia a un área entre curvas y a una cantidad de grados-hora acumulada por una planta en un intervalo de tiempo específico. • El significado de $\sum_i^n A_i$ se asocia a un área entre curvas y a una cantidad de grados-hora que deben agregarse a lo ya acumulado por la planta hasta las t_1 horas, para determinar lo acumulado hasta las t_2 horas, $9 \leq t_1 < t_2 \leq 23$.
Argumentación	Acumulación	Acumulaciones de grados-hora de una planta en intervalos de tiempo específicos

5. Discusiones

La literatura sobre educación matemática (p.e. Aranda y Callejo, 2020; Kouropatov y Dreyfus, 2014) muestra que los procesos de enseñanza y aprendizaje de la integral definida tienden a centrarse en enfoques formales y mecanicistas, con significados que, para Ely (2017), están asociados a tres ideas: (1) el área de una región delimitada por el eje X y la curva de una función $f(x)$ entre $x = a$ y $x = b$; (2) una instrucción para hallar la antiderivada de una función $f(x)$ y evaluarla en $x = a$ y $x = b$; y (3) una suma de partes en un dominio específico. De esta forma, estos procesos terminan por presentar la integral definida como un objeto estático e inmutable, completamente ajeno a la posibilidad de modificación.

A partir del contexto descrito anteriormente, esta investigación se propuso ofrecer referentes educativos para superar el enfoque algorítmico en la enseñanza y el aprendizaje de la integral definida y promover una matemática funcional en el aula. Con este fin, se analizó la resignificación de la integral definida que ocurrió en una comunidad de profesores de matemáticas durante el desarrollo de una situación escolar. Dicha resignificación fue caracterizada con constructos teóricos de la categoría de modelación, específicamente de la situación núcleo de cambio (Marcía, 2020), en donde la emergencia de usos de la acumulación de los grupos de profesores (ver Tablas 3 y 4) permitió resignificar las integrales $\int_{t_1}^{t_2} T(t)\,dt$ y $\int_{9}^{t} T(t)\,dt$ a través de las expresiones A_i y $\sum_i^n A_i$, respectivamente.

5.1. El proceso de modelación

El esquema de la categoría de modelación da cuenta de los constructos teóricos que permiten caracterizar los $U(CM)$ y las $Res(U(CM))$ que ocurren en situaciones específicas, propias de diferentes escenarios o dominios de conocimiento. Diversas investigaciones en el programa SOLTSA (p.e. Cordero et al., 2019; Gaete-Peralta et al., 2024; Marcía, 2020; Pérez-Oxté, 2021) han invitado a la comunidad educativa a discutir sobre cómo suceden las resignificaciones de estudiantes cuando desarrollan situaciones escolares de socialización, en su condición de sujetos situados que pertenecen a una comunidad de conocimiento. Al respecto, los resultados de esta investigación aportan referentes para continuar con dicha discusión.

Para los grupos G1 y G2, el proceso de modelación inició al comprender la situación escolar, enfocándose principalmente en identificar ideas clave de la situación (p.e. grados-hora, temperatura base y datos gráficos provenientes del applet de GeoGebra) y entender las preguntas que conforman la situación; de esta manera, los grupos logran una *comprensión* de la situación escolar y de las preguntas que deben responder. En este caso, la decisión de los profesores sobre qué ideas son clave será relevante para la construcción de la resignificación de los usos del conocimiento matemático. En el caso de ambos grupos, se utilizaron adecuadamente ideas clave y un entendimiento de las preguntas de la situación escolar (descrito en las Tablas 3, 4 y 5).

Posteriormente, en una segunda fase llamada *construcción de lo matemático*, se identificó una progresión en la comprensión de las ideas clave al manipular el applet de GeoGebra, surgiendo funcionamientos y formas de los usos de la acumulación (ver Tablas 3 y 4), formulando un mismo recorrido secuencial de los constructos que conforman la epistemología de usos: instrumento, procedimientos, significaciones, las cuales derivaron argumentaciones de acumulación (ver Tabla 5). En esta fase, ambos grupos lograron construir las expresiones A_i y $\sum_i^n A_i$, que fueron consideradas, en el contexto de la situación escolar, como modelos.

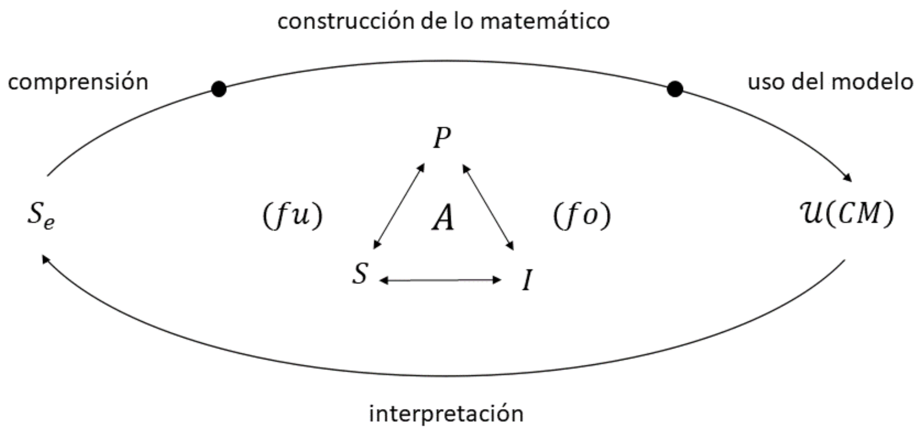
En la siguiente fase, que se ha denominado *uso del modelo*, es cuando los grupos hicieron uso de estos modelos para dar respuesta a las preguntas planteadas, permitiendo así, evidenciar los usos del conocimiento matemático durante el desarrollo de la situación escolar, identificando respuestas matemáticas a las preguntas.

Todas las fases mencionadas expresan distintos momentos del proceso de matematización, que implican la construcción y reformulación de significados al traducir una situación en estructuras matemáticas situadas e institucionalizadas por comunidades. En el marco de la categoría de modelación (Cordero et al., 2022), estos procesos requieren necesariamente operaciones de generalización e idealización: depurar el contexto, explicitar supuestos y reorganizar las condiciones de la situación escolar para hacer posible el uso funcional del conocimiento matemático. Aunque la generalización no es un propósito explícito de la categoría, resulta necesaria para identificar relaciones estables, reconocer invariantes y construir argumentos que articulen la situación original con las interpretaciones desarrolladas durante el proceso de modelación.

Al evidenciar los usos del conocimiento matemático, los grupos desarrollaron la fase de *interpretación*. En este caso, los resultados matemáticos se interpretaron en el contexto de la situación escolar para responder finalmente a las preguntas y para construir una resignificación del conocimiento matemático, en particular de la integral definida. En la Figura 11 se presenta un esquema del proceso de modelación —desde un enfoque educativo— identificado en la presente investigación, en el que se observan las distintas fases que los profesores desarrollaron.

Figura 11

Proceso de modelación desde un enfoque educativo



La presente propuesta se plantea como un esquema que emerge de los datos de la investigación, en el que se aprecia que los constructos que conforman la situación núcleo de cambio desempeñan un rol central en el proceso de modelación desde un enfoque educativo. En este caso, se identificaron todos los elementos de la situación núcleo (significados, procedimientos, instrumentos, argumentación) para caracterizar este proceso, desde la comprensión de la situación hasta el uso del modelo. Sin embargo, es relevante considerar futuras investigaciones centradas en las trayectorias que realizan los estudiantes durante este proceso, para conocer las formas en que transitan por el esquema propuesto e identificar otros componentes que permitan robustecer esta propuesta conceptual.

Si bien en la etapa de interpretación no se reconocieron distinciones ni relaciones entre los aspectos centrales, ello no significa que en otras situaciones no puedan existir este tipo de relaciones. Por ello, la presente discusión es identificada primeramente como una propuesta que se requiere trabajar de manera clara y directa, pero a la vez, es un área de la categoría de modelación que requiere mayores investigaciones, de tal manera de identificar formas de transitar por el proceso, las distintas dificultades que pueden existir en dicho tránsito y cómo la etapa de interpretación es abordada con distintos tipos de situaciones escolares.

Solar et al. (2022) señalan que la argumentación es un componente clave para favorecer la comprensión de los procesos de modelación (con base en el principio P), pues permite contrastar ideas y justificar su validez (Ayalon y Hershkowitz, 2018). En esa línea, son limitadas las investigaciones que han estudiado el rol de la argumentación en procesos de modelación matemática (p. e., Guc y Kuleyin, 2021; Tekin-Dede, 2019), empleando con frecuencia el modelo de Toulmin (2003) para analizar los procesos argumentativos. Por otro lado, y en concordancia con Crespo y Farfán (2005), los procesos argumentativos deben entenderse como resultado de interacciones y debates que pueden aportar elementos valiosos para dicha comprensión.

6. Conclusiones

Los resultados de este estudio invitan a la comunidad educativa a discutir la construcción de marcos de referencia que promuevan la emergencia de usos de la acumulación por parte de estudiantes y profesores, con el fin de llevar a cabo resignificaciones de la integral definida en situaciones específicas de cambio. En ese sentido, una tarea para la comunidad educativa es generar programas permanentes de acompañamiento que impacten en la formación de los estudiantes. Para dicho propósito, la confección e implementación de diseños de situaciones escolares, con base en los resultados empíricos de esta investigación, constituyen un aporte para lograr un impacto educativo, acorde con la segunda línea de trabajo del programa SOLTSA.

A su vez, otro de los aportes de esta investigación consiste en que el proceso de modelación propuesto en la Figura 11, y las evidencias empíricas de este estudio, ofrecen un escenario dinámico para que los usos de la acumulación, en el sentido de Cordero (2003), de comunidades escolares permitan generar resignificaciones de la integral definida como modelos para determinar acumulaciones de cantidades que varían continuamente respecto al tiempo. En este sentido, resulta fundamental que futuras investigaciones diseñen e implementen situaciones escolares para analizar cómo los estudiantes resignifican el conocimiento matemático al transitar por las distintas fases de este modelo y, además, contribuyan a robustecer los elementos que lo conforman.

Declaración de contribución y autoría

Claudio Gaete-Peralta: Conceptualización, Investigación, Metodología, Análisis formal, Redacción – borrador original, Redacción – revisión y edición.

Jaime Huincahue: Conceptualización, Investigación, Metodología, Análisis formal, Redacción – borrador original, Redacción – revisión y edición.

Referencias

Arendt, H. (2005). *La condición humana*. Paidós.

Aranda López, C., y Callejo de la Vega, M. L. (2020). Construcción del concepto de integral definida usando geometría dinámica utilizando distintos sistemas de representación. *Revista Paradigma*, *41*(extra 2) , 305–327. https://doi.org/10.37618/PARADIGMA.1011-2251.0.p305-327.id901

Aroeira, A. J., Carreira, S., y da Ponte, J. P. (2024). Teacher strategic interventions to support students in constructing the model of the situation in a modelling task. En H. S. Siller, V. Geiger y G. Kaiser (Eds), *Researching mathematical modelling education in disruptive times* (pp. 161–171). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-031-53322-8_12

Ayalon, M., y Hershkowitz, R. (2018). Mathematics teachers' attention to potential classroom situations of argumentation. *The Journal of Mathematical Behavior*, *49*, 163–173. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2017.11.010

Barrios Borges, E., y Cordero, F. (2025). Una perspectiva socioepistemológica de la modelación matemática: estudios de casos con enfoque etnográfico en las ingenierías.

En A. Solares-Rojas y A. P. Preciado Babb (Eds.), *La investigación en modelización matemática: un diálogo entre educadores de Latinoamérica y España* (pp. 115–134). Editorial SOMIDEM. https://doi.org/10.24844/SOMIDEM/S2/2025/01-05

Blum, W., y Leiß, D. (2007). How do students and teachers deal with modelling problems? En C. Haines, P. Galbraith y S. Khan (Eds.), *Mathematical modelling: education, engineering and economics* (pp. 222–231). Ellis Horwood. https://doi.org/10.1533/9780857099419.5.221

Borromeo-Ferri, R. (2010). On the influence of mathematical thinking styles on learners' modeling behavior. *Journal Für Mathematik-Didaktik*, *31*(1), 99–118. https://doi.org/10.1007/s13138-010-0009-8

Braun, V., y Clarke, V. (2006). Using thematic analysis in psychology. *Qualitative Research in Psychology*, *3*(2), 77–101. https://doi.org/10.1191/1478088706qp063oa

Braun, V., Clarke, V., Hayfield, N., y Terry, G. (2019). Thematic analysis. En P. Liamputtong (Ed.), *Handbook of research methods in health social sciences* (pp. 843–860). Springer. https://doi.org/10.1007/978-981-10-5251-4_103

Bueno, S., Burgos, M., D. Godino, J., y Pérez, O. (2022). Significados intuitivos y formales de la integral definida en la formación de ingenieros. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *25*(2), 135-168. https://doi.org/10.12802/relime.22.2521

Caglayan, G. (2016). Teaching ideas and activities for classroom: integrating technology into the pedagogy of integral calculus and the approximation of definite integrals. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *47*(8), 1261–1279. https://doi.org/10.1080/0020739X.2016.1176261

Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento*. Gedisa.

Cordero, F. (2003). *Reconstrucción de significados del Cálculo Integral. La noción de acumulación como una argumentación*. Grupo Editorial Iberoamérica.

Cordero Osorio, F. (2005). El rol de algunas categorías del conocimiento matemático en educación superior. Una socioepistemología de la Integral. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *8*(3), 256–286. https://relime.org/index.php/relime/article/view/509

Cordero, F. (2008). El uso de las gráficas en el discurso del cálculo escolar. Una visión socioepistemológica. En R. Cantoral, O. Covián, R. M. Farfán, J. Lezama y A. Romo (Eds.), *Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: un reporte Iberoamericano* (pp. 285–309). Díaz de Santos.

Cordero, F., Gómez, K., Silva-Crocci, H., y Soto, D. (2015). *El discurso matemático escolar: la adherencia, la exclusión y la opacidad*. Gedisa.

Cordero, F. (2016). Modelación, funcionalidad y multidisciplinariedad: el eslabón de la matemática y el cotidiano. En J. Arrieta y L. Díaz (Eds.), *Investigaciones latinoamericanas de modelación matemática educativa* (pp. 59–88). Gedisa.

Cordero, F., Del Valle, T., y Morales, A. (2019). Usos de la optimización de ingenieros en formación: el rol de la ingeniería mecatrónica y de la obra de Lagrange. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *22*(2), 185–212. https://doi.org/10.12802/relime.19.2223

Cordero, F., Mendoza-Higuera, E. J., Pérez-Oxté, I., Huincahue, J., y Mena-Lorca, J. (2022). A category of modelling: the uses of mathematical knowledge in different scenarios and the learning of mathematics. En M. Rosa, F. Cordero, D. Orey y P. Carranza (Eds.), *Mathematical modelling programs in Latin America* (pp. 247–267). Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-031-04271-3_12

Cordero, F. (2023). *Matemáticas, sus usos y significados. Un programa socioepistemológico de la Matemática Educativa*. Gedisa.

Cordero, F., Rosa, M., Orey, D., y Carranza, P. (2024). Modelling in the life of people: an alternative programme for teaching and learning of mathematics. En H. S. Siller, V. Geiger, y G. Kaiser (Eds.), *Researching mathematical modelling education in disruptive times* (pp. 549–558). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-031-53322-8_45

Crespo Crespo, C. R., y Farfán, R. M. (2005). Una visión socioepistemológica de las argumentaciones en el aula. El caso de las demostraciones por reducción al absurdo. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 8*(3), 287-317. https://relime.org/index.php/relime/article/view/510

Creswell, J. W., y Creswell, J. D. (2018). *Research Design*. Sage.

D'Ambrosio, U. (2014). Las bases conceptuales del programa Etnomatemática. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, *7*(2), 100–107. https://www.revista.etnomatematica.org/index.php/RevLatEm/article/view/126

Ely, R. (2017). Definite integral registers using infinitesimals. *The Journal of Mathematical Behavior*, *48*, 152–167. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2017.10.002

Gaete Peralta, C. (2020). La categoría de modelación y el concepto de integral definida: una mirada socioepistemológica. *UCMaule*, *58*(1), 83–105. http://doi.org/10.29035/ucmaule.58.83

Gaete-Peralta, C., Cordero, F., Huincahue, J., y Mena, J. (2024). Usos de la cuantificación y categoría de modelación. Una transversalidad de conocimiento matemático. *Uniciencia*, *38*(1), 1–24. https://doi.org/10.15359/ru.38-1.14

Gaete-Peralta, C., Espinoza, L., y Huincahue, J. (2025). Accumulated water and category of modelling: a case with Chilean student teachers. *Journal of Physics: conference series, 3117*. https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1742-6596/3117/1/012022

Giacoleti-Castillo, F., Cordero, F., Barrios-Borges, E., y Marcía-Rodríguez, S. (2024). Usos de la modelación matemática de la ingeniería. Marco de referencia alternativo para el docente. En M. D. Aravena-Díaz y D. Díaz-Levicoy (Eds.), *Modelación matemática y resolución de problemas: retos y oportunidades* (pp. 103–130). Centro de Investigación en Educación Matemática y Estadística.

Greefrath, G., Oldenburg, R., Siller, H. S., Ulm, V., y Weigand, H. G. (2021). Basic mental models of integrals: theoretical conception, development of a test instrument, and first results. *ZDM – Mathematics Education*, *53*(3), 649–661. https://doi.org/10.1007/s11858-020-01207-0

Gu, S. (2016). Growing degree hours - a simple, accurate, and precise protocol to approximate growing heat summation for grapevines. *International Journal of Biometeorology*, *60*(8), 1123–1134. https://doi.org/10.1007/s00484-015-1105-8

Guc, F. A., y Kuleyin, H. (2021). Argümantasyon kalitesinin matematiksel modelleme sürecine yansiması [Reflection of argumentation quality on mathematical modeling process]. Uludağ Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi [Journal of Uludag University Faculty of Education], *34*(1), 222- 262. https://doi.org/10.19171/uefad.850230

Huincahue, J. (2011). *Dinámicas de modelos de depredación continuos e impulsivos y estudio fenológico del Brevipalpus Chilensis* (Tesis de Maestría no publicada). Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.

Huincahue, J., Borromeo-Ferri, R. y Mena-Lorca, J. (2018). El conocimiento de la modelación matemática desde la reflexión en la formación inicial de profesores de matemática, *Enseñanza de las Ciencias*, *36*(1), 99–115. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2277

Huincahue, J., y Gaete-Peralta, C. (2024). Mathematical modeling in interdisciplinary academic scenarios: components for task construction. En H-S Siller, G. Kaiser y V. Geiger (Eds.), *Researching mathematical modelling education in disruptive times* (583–593). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-031-53322-8_48

Jones, S. R. (2020). Scalar and vector line integrals: a conceptual analysis and an initial investigation of student understanding. *Journal of Mathematical Behavior*, *59*, 100801. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2020.100801

Jones, S.R., y Ely, R. (2023). Approaches to integration based on quantitative reasoning: adding up pieces and accumulation from rate. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education, 9*(1), 8–35. https://doi.org/10.1007/s40753-022-00203-x

Kouropatov, A., y Dreyfus, T. (2014). Learning the integral concept by constructing knowledge about accumulation. *ZDM – Mathematics Education*, *46*(4), 533–548. https://doi.org/10.1007/s11858-014-0571-5

Kouropatov, A. (2016). *The integral concept in high school: constructing knowledge about accumulation*. (Tesis doctoral no publicada). Tel Aviv University.

Krippendorff, K. (1990). *Metodología de análisis de contenido. Teoría y práctica*. Paidós Comunicación.

Kutsyuruba, B. (2023). Document analysis. En J. M. Okoko, S. Tunison y K. D. Walker (Eds.), *Varieties of qualitative research methods* (pp. 139–146). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-031-04394-9_23

Marcía Rodríguez, S. L. (2020). *Resignificación de la integral en una comunidad de estudiantes de docencia de la matemática: una categoría de acumulación y la perspectiva de identidad disciplinar* [Tesis de maestría, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional]. https://repositorio.cinvestav.mx/handle/cinvestav/4030

Marcía, S., Mota, C., y Giacoletti, F. (2022). Integral definida y la noción de acumulación. En F. Cordero, M. Solís y C. Opazo (Coor.), *La matemática en la ingeniería. Modelación y transversalidad de saberes* (pp. 229–239). Gedisa.

Medina Lara, D. (2019). *Transformación educativa del docente de matemáticas. Un episodio: el uso de la compensación como una resignificación de la media aritmética* (Tesis de doctorado no publicada). Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional.

Mendoza-Higuera, E. J., Morales-Reyes, J. L., Giacoletti-Castillo, y Cordero, F. (2022). Categories of modelling and reproduction of behaviors in other disciplines: teaching mathematics in Engineering. En M. Rosa, F. Cordero, D. C. Orey y P. Carranza (Eds.), *Mathematical modelling programs in Latin America* (pp. 291–317). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-031-04271-3_14

Morales Reyes, J. L. (2020). *Resignificación de los usos de la derivada en un diseño escolar con perspectiva de dialéctica exclusión-inclusión: predicción, comportamiento tendencial y analiticidad* [Tesis de maestría, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional]. https://repositorio.cinvestav.mx/handle/cinvestav/3898

Opazo-Arellano, C., Marcía-Rodríguez, S., Chávez-Martínez, H. Barrios-Borges, E., y Cordero, F. (2022). Prospective mathematics teacher discipline identity and the modelling category: the value of the learner´s knowledge. En M. Rosa, F. Cordero, D. C. Orey y P. Carranza (Eds.), *Mathematical modelling programs in Latin America* (pp. 269–290). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-031-04271-3_15

Parra, T., y Méndez, C. (2021). Ejemplos de metodologías de investigación que discuten sobre el papel de la diversidad en la matemática educativa. En F. Cordero (Ed.), *La Matemática Educativa y Latinoamérica* (pp. 151-171). Gedisa.

Pérez-Oxté, I. (2021). *Anticipar-periodizar: una socialización de saberes matemáticos entre la Ingeniería y la docencia* [Tesis de doctorado, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional]. https://repositorio.cinvestav.mx/handle/cinvestav/4036

Pérez-Oxté, I. y Cordero, F. (2022). Modelling and anticipation of graphical behaviors in industrial chemical engineering: the role of transversality of knowledge in learning mathematics. En M. Rosa, F. Cordero, D. C. Orey y P. Carranza (Eds.), *Mathematical modelling programs in Latin America* (pp. 269–290). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-031-04271-3_13

Rasslan, S., y Tall, D. (2002). Definitions and images for the definite integral concept. En A. D. Cockburn y E. Nardi (Eds.), *Proceedings of the 26th International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 89–96). University of East Anglia.

Rosa, M., D'Ambrosio, U., Orey, D., Shirley, L., Alangui, W., Palhares, P., y Gavarrete, M. E. (2016). *Current and future perspectives of Ethnomathematics as a program*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-30120-4

Sealey, V. (2006). Definite integrals, Riemann sums, and area under a curve: what is necessary and sufficient? En S. Alatorre, J. L. Cortina, M. Sáiz, y A. Méndez (Eds.), *Proceedings of the 28th annual meeting of the North American chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 46–53). Universidad Pedagógica Nacional. https://www.pmena.org/pmenaproceedings/PMENA%2028%202006%20Proceedings.pdf

Sealey, V. (2014). A framework for characterizing student understanding of Riemann sums and definite integrals. *The Journal of Mathematical Behavior*, *33*, 230–245. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2013.12.002

Serhan, D. (2015). Students' understanding of the definite integral concept. *International Journal of Research in Education and Science*, *1*(1), 84–88. https://files.eric.ed.gov/fulltext/EJ1105099.pdf

Solar, H., Ortiz, A., Arriagada, V., y Deulofeu, J. (2022). Argumentative orchestration in the mathematical modelling cycle in the classroom. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education,* *18*(8), em2141. https://doi.org/10.29333/ejmste/12245

Stake, R. (2007). *Investigación con estudio de casos*. Morata.

Swidan, O., y Yerushalmy, M. (2016). Conceptual structure of the accumulation function in an interactive and multiple-linked representational environment. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, *2*(1), 30–58. https://doi.org/10.1007/s40753-015-0020-z

Swidan, O. (2020). A learning trajectory for the fundamental theorem of calculus using digital tools. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *51*(4), 542–562. https://doi.org/10.1080/0020739X.2019.1593531

Tall, D., y Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics, 12* (2), 151–169. https://doi.org/10.1007/BF00305619

Tekin-Dede, A. (2019). Arguments constructed within the mathematical modelling cycle. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 50*(2), 292-314. https://doi.org/10.1080 /0020739X.2018.1501825

Thompson, P. W., y Silverman, J. (2008). The concept of accumulation in calculus. En M. Carlson y C. Rasmussen (Eds.), *Making the connection: research and teaching in* *undergraduate mathematics* (pp. 43–52). Mathematical Association of America. https://doi.org/10.5948/UPO9780883859759.005

Toulmin, S. (2003). *The uses of argument*. Cambridge University Press. https://doi.org/10.1017/CBO97 80511840005

Villa-Ochoa, J. A. (2007). La modelación como proceso en el aula de matemáticas, un marco de referencia y un ejemplo. *TecnoLógicas*, *19*, 63–85. https://doi.org/10.22430/22565337.505

Wagner-Riddle, C. (2005). Agroclimatology. En J. E. Oliver (ed.), *Encyclopedia of World Climatology*. Springer. https://doi.org/10.1007/1-4020-3266-8_5