Alexander Betancur Sánchez, Solange Roa Fuentes, Silvia Juliana Ballesteros

UNA DESCOMPOSICIÓN GENÉTICA PRELIMINAR DEL CONCEPTO DE EIGENVALOR Y EIGENVECTOR: EL ANÁLISIS DE LIBROS DE TEXTO COMO SUSTRATO EN LA CONSTRUCCIÓN DE MODELOS COGNITIVOS

A preliminary genetic decomposition of the concept of eigenvalue and eigenvector: the analysis of textbooks as a substrate in the construction of cognitive models

RESUMEN

En la teoría APOE (Acción, Proceso, Objeto, Esquema) el diseño de una descomposición genética es resultado del Análisis Teórico (primer componente del ciclo de investigación de la teoría) donde el análisis de libros de texto es uno de los elementos a considerar. Sin embargo, a la fecha de este reporte no se encuentran publicaciones que den cuenta de cómo realizar el análisis de libros de texto y el proceso detrás de la construcción de una descomposición genética. En este escrito se usan los criterios propuestos por Campos (2017) para analizar tres libros de texto de álgebra lineal, específicamente en relación al concepto de eigenvalor y eigenvector junto con una metodología que da cuenta del diseño de una descomposición genética preliminar para el concepto de eigenvalor y eigenvector sobre operadores lineales considerando: el insumo del análisis de libros de texto, los reportes de investigación existentes y la experiencia de los investigadores como profesores y estudiantes.

PALABRAS CLAVE:

- *Eigenvalores y Eigenvectores*
- *Teoría APOE*
- *Descomposición genética*
- *Libros de texto*

ABSTRACT

In APOS theory (Action, Process, Object, Scheme), the design of a genetic decomposition is the result of Theoretical Analysis (first component of the theory's research cycle) where textbook analysis is one of the elements to be considered. However, as of the date of this report, there are no publications on how to perform textbook analysis and the process behind the construction of a genetic decomposition. In this writing, the criteria proposed by Campos (2017) are used to analyze three

KEY WORDS:

- *Eigenvalues and Eigenvectors*
- *APOS Theory*
- *Genetic decomposition*
- *Textbook*

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (2021) *24* (3): 245-276.
Recepción: Noviembre 1, 2019 / Aceptación: Julio 15, 2021. DOI: 10.12802/relime.21.2431

linear algebra textbooks, specifically in relation to the concept of eigenvalue and eigenvector along with a methodology that accounts for the design of a preliminary genetic decomposition for the concept of eigenvalue and eigenvector on linear operators considering: the input of textbook analysis, existing research reports and the experience of researchers as teachers and students.

RESUMO

Na teoria APOE (Action, Process, Object, Scheme), a concepção de uma decomposição genética é resultado da Análise Teórica (o primeiro componente do ciclo de investigação da teoria) onde a análise de livros de texto é um dos elementos a ser considerado. No entanto, à data deste relatório, não existem publicações que dêem conta de como realizar a análise dos livros escolares e do processo por detrás da construção de uma decomposição genética. Neste artigo utilizamos os critérios propostos por Campos (2017) para analisar três manuais de álgebra linear, especificamente em relação ao conceito de autovalor e autovector, juntamente com uma metodologia que dá conta da concepção de uma decomposição genética preliminar para o conceito de autovalor e autovector em operadores lineares considerando: o contributo da análise de manuais escolares, relatórios de investigação existentes e a experiência de investigadores como professores e estudantes.

PALAVRAS CHAVE:
- *Autovalores e Autovetores*
- *Teoria da APOE*
- *Decomposição genética*
- *Livros didáticos*

RÉSUMÉ

Dans la théorie APOS (Action, Process, Object, Scheme), la conception d'une décomposition génétique est le résultat d'une analyse théorique (première composante du cycle de recherche de la théorie) où l'analyse des manuels est l'un des éléments à prendre en compte. Cependant, à la date de ce rapport, il n'existe aucune publication qui rende compte de la manière de réaliser l'analyse des manuels scolaires et du processus de construction d'une décomposition génétique. Dans cet article, nous utilisons les critères proposés par Campos (2017) pour analyser trois manuels d'algèbre linéaire, spécifiquement en relation avec le concept de valeur propre et de vecteur propre ainsi qu'une méthodologie qui rend compte de la conception d'une décomposition génétique préliminaire pour le concept de valeur propre et de vecteur propre sur les opérateurs linéaires en considérant : l'apport de l'analyse des manuels, les rapports de recherche existants et l'expérience des chercheurs en tant qu'enseignants et étudiants.

MOTS CLÉS:
- *Valeurs propres et de Vecteurs propres*
- *Théorie APOS*
- *Décomposition génétique*
- *Manuels scolaires*

1. Introducción

El objetivo principal de este estudio es dar cuenta del desarrollo de la primera componente del ciclo de investigación que propone la teoría APOE (Acrónimo de Acción, Proceso, Objeto, Esquema), Análisis Teórico (Arnon et al., 2014). Principalmente mostrar cómo el análisis de tres libros de texto (Poole, 2011; Del Valle, 2011; Hoffman y Kunze, 1973), contribuye en la formulación de una descomposición genética (DG) preliminar del concepto de eigenvalor y eigenvector. Dada la naturaleza cognitiva de la teoría APOE, las investigaciones que la toman como fundamento parten de las definiciones matemáticas de los conceptos. Por tanto, resulta de gran interés señalar la relevancia del análisis de libros de texto como punto de partida, que promueve la articulación de resultados de otras investigaciones y la experiencia de los investigadores para ponerlos todos juntos en un modelo cognitivo (DG).

En Matemática Educativa los libros de texto juegan un rol fundamental en la comunicación y preservación del conocimiento que se actualiza en procesos educativos. Expresan el producto de una red de conexiones culturales, económicas, políticas e históricas, en donde se destacan como repositorios válidos de conocimiento y recursos culturales importantes de comunicación. Los libros de texto se han utilizado como un recurso para la presentación de problemas, como un medio para apoyar la instrucción en el aula por parte del docente y para el estudiante como un medio para orientar el autoaprendizaje (Occelli y Valeiras, 2013; Fan, 2013).

A pesar de la relevancia de los libros de texto en la formulación de una DG, la teoría APOE no propone qué criterios utilizar para su análisis, ni una metodología a seguir para tenerlos en cuenta, por tanto, en este artículo buscamos visibilizar su papel. A continuación, se muestra una visión general de investigaciones realizadas sobre los libros de texto en nuestra disciplina, que permite ubicar el estudio que se reporta en este escrito.

2. *Los libros de texto y la investigación en Matemática Educativa*

La investigación sobre los libros de texto en Matemática Educativa se ha venido consolidando en los últimos años. Una evidencia de esto es el desarrollo de la *International Conference on Mathematics Textbook Research and Development* (ICMT, por sus siglas en inglés, 2014). Los libros de texto han ocupado a grupos de discusión en sesiones consecutivas del *International Congress on Mathematical Education* (ICME, por sus siglas en inglés), ICME-10, ICME-11 e ICME-13.

Fan (2013) y Fan, Zhu y Miao (2013) dan cuenta de la dinámica que sigue la investigación sobre libros de texto. Estos autores se refieren a cuatro categorías en los temas de investigación: (1) papel de los libros de texto, (2) análisis y comparación de libros de texto, (3) uso de los libros de texto y otras áreas (por ejemplo, la relación entre el libro de texto y el aprendizaje de los estudiantes) y (4) otros que no corresponden a las categorías anteriores. Como mostramos a continuación, en el contexto Latinoamericano se identifican algunas de las categorías mencionadas entre otras que permiten ampliar el panorama.

El Comité Latinoamericano de Matemática Educativa (CLAME) ha publicado en el Acta Latinoamericana de Matemática Educativa (ALME) investigaciones relacionadas con libros de texto; sin embargo, estas son escasas. En ALME 31, por ejemplo, se presentan estudios que involucran análisis de libros de texto para: estudiar el pensamiento crítico de los docentes en relación a los problemas presentados en los libros de texto (Ruiz-Estrada, Slisko y Nieto-Frausto, 2018), discutir las reformas educativas que ha sufrido el país de México (Ibarra, 2018) e identificar los significados y representaciones que son promovidos o no por los libros de texto en relación a un concepto (Osorio y Díaz-Levicoy, 2018).

En ALME 32 los estudios reportados destacan el análisis de libros de texto para: reconocer cómo se presenta y caracteriza un concepto, el tipo de problemas y sus representaciones (Amaro, Hernandez y Slisko, 2019); también se identifican estudios con una intención epistemológica, encaminada en identificar significados (Pérez y Cantoral, 2019; Paz-Corrales y Cantoral, 2019; Giacoleti-Castillo y Cordero, 2019).

Investigadores como Cook y Stewart (2014), Cook, Zaskis y Estrup (2018) y Campos (2017) han tomado algunos aspectos presentados en 1987 por Harel para analizar libros de texto, específicamente de Álgebra Lineal (AL). Cook, Zaskis y Estrup (2018), por ejemplo, usan dos criterios: la secuenciación de contenido y el material introductorio, para estudiar la presentación y desarrollo del producto de matrices en 24 libros de texto de AL. Como secuencias principales del contenido se destacan tres: 1. Iniciar con el producto Matriz-vector Ax como una combinación de las columnas de A, 2. Iniciar con Ax como un producto punto de los renglones de A por el vector columna x, y 3. Iniciar con AB como el producto punto entre los renglones de A con las columnas de B. La discusión desarrollada en Cook, Zaskis y Estrup (2018) se ocupa principalmente de las secuencias 1 y 3. Los autores categorizan estas secuencias en dos enfoques, para la primera secuencia el concepto puede entenderse utilizando otros conceptos y elementos conocidos, enfoque denominado isomorfización; y para la tercera secuencia, el concepto puede entenderse más adelante una vez se reconozcan otros conceptos más avanzados, enfoque denominado aplazamiento. Aunque estos dos enfoques parecen distantes o se muestran en aparente contradicción, los investigadores enfatizan en la importancia de indagar a fondo sobre tales secuencias para contar con evidencia empírica que muestre las implicaciones en el aprendizaje de los estudiantes. Además, se propone la necesidad de investigar sobre aspectos que podrían articularse y ser complementarios en las dos secuencias, así como de qué manera podrían incorporarse en la enseñanza.

Desde nuestra perspectiva, Cook, Zaskis y Estrup (2018) muestran la necesidad de precisar a partir de la secuencia presentada por los libros de texto, sus implicaciones en la comprensión que los estudiantes pueden lograr de un concepto determinado. Postulamos que la necesidad de esta mirada cognitiva puede ser suplida a través del uso de la teoría APOE, dado que es posible reconocer las estructuras y mecanismos mentales involucrados en las secuencias de instrucción para un concepto. Asimismo, dar cuenta de las relaciones, conexiones y transformaciones que un estudiante puede realizar sobre el concepto y cómo esto puede dar cuenta de una comprensión más profunda.

A continuación, destacamos algunos elementos de la teoría APOE, que en adelante nos permiten comunicar con precisión no solo las secuencias en la presentación del concepto de eigenvalor y eigenvector en tres libros de texto, sino, plantear hipótesis sobre sus implicaciones en la comprensión que pueden lograr los estudiantes a partir de alimentar un modelo cognitivo hipotético.

3. La teoría APOE

La teoría APOE permite describir cómo puede construir los conceptos matemáticos un estudiante y aporta orientaciones para su enseñanza. Desde APOE se propone que los estudiantes comprenden (aprenden) los conceptos y/o nociones matemáticas cuando construyen y usan ciertas estructuras mentales a partir de un mecanismo general denominado por Piaget como *abstracción reflexiva*. Como casos particulares del mecanismo de abstracción reflexiva Dubinsky define los mecanismos de interiorización, coordinación, encapsulación y reversión, entre otros, que permite la aplicación de Acciones sobre Objetos construidos previamente e iniciar la estructuración de nuevos Objetos (Arnon et al., 2014).

A continuación, se describe cómo evoluciona en la mente de un estudiante sus concepciones sobre un concepto K según Arnon et al., (2014). Para un concepto matemático K, un estudiante tiene una concepción Acción de K, si depende de indicaciones externas para aplicar transformaciones sobre Objetos previos (elementos necesarios para iniciar la construcción de K). Al reflexionar sobre las Acciones que realiza puede hacer modificaciones en la mente sin seguir un paso a paso, se dice que ha interiorizado la Acción en un Proceso. El tránsito de una estructura Proceso del concepto K a una estructura Objeto está determinado por el mecanismo de encapsulación. Este mecanismo es motivado por una actividad matemática que requiere concebir el Proceso como un todo y determinar el tipo de Acciones que puede aplicarle al Objeto. Con respecto al concepto K el conjunto de Acciones, Procesos, Objetos y otras estructuras subyacentes que se relacionan coherentemente forman un Esquema del concepto K (Arnon et al., 2014). En la teoría se entiende que el aprendizaje es dinámico y en la medida que se construyan relaciones y transformaciones de forma consciente o inconsciente entre Acciones, Procesos, Objetos y otros Esquemas evoluciona el Esquema. La triada intra, inter y trans permite caracterizar las relaciones construidas entre las estructuras del Esquema ya sea por asimilación o acomodación y dar cuenta de su desarrollo (Trigueros, 2018).

La descripción de las estructuras y mecanismos mentales asociados a un concepto particular se denomina en APOE como descomposición genética (DG); esta corresponde a un modelo cognitivo sobre cómo un estudiante puede llegar a comprender una porción de conocimiento matemático y es considerada el corazón de la teoría.

En lo que sigue se precisa el ciclo de investigación en el marco de la teoría APOE y cómo lo usamos en este reporte. También se destaca el análisis de libros de texto como un elemento clave en la formulación de una DG preliminar.

4. Método de la investigación

El método de investigación de la teoría APOE se define a través de tres componentes que interactúan entre si: Análisis teórico, Diseño e implementación de la enseñanza y Recolección y análisis de datos (Arnon et al., 2014). Algunos estudios han publicado el desarrollo de las tres componentes (Salgado y Trigueros, 2014; 2015; Parraguez y Oktaç, 2010; Roa-Fuentes y Parraguez, 2017), otros consideran detenerse a profundidad en diseño y desarrollo del Análisis teórico (González y Roa-Fuentes, 2017; Roa-Fuentes y Oktaç, 2010, Campos, 2017); estos generalmente proponen una DG preliminar que funge de hipótesis sobre cómo puede ocurrir el aprendizaje de un concepto. En este reporte nos centramos en el Análisis teórico, entendiendo que es la base para la aplicación del ciclo y el desarrollo de futuros estudios (Roa-Fuentes y Oktaç, 2010). Como ya mencionamos, interesa examinar cómo los libros de texto contribuyen en la formulación de una DG preliminar, discusión que continuamos en la siguiente sección a partir de resultados de otras investigaciones en Matemática Educativa sobre el concepto de interés, eigenvalor y eigenvector.

4.1. *El análisis de libros de texto como elemento clave en la formulación de una descomposición genética preliminar*

En Arnon et al., (2014) se reconoce el estudio de libros de texto como un insumo para el análisis teórico, así como los reportes de investigación, estudios epistemológicos y la experiencia de los investigadores sobre una noción o concepto matemático. En particular, el análisis de libros de texto entorno a un concepto permite identificar estrategias pedagógicas para su enseñanza, aspectos clave para el análisis de los datos y otras consideraciones para explicar cómo sucede el aprendizaje. Como destacan Cook y Stewart (2014) y Cook, Zaskis y Estrup (2018) es fundamental analizar varios libros de texto para reconocer encuentros y tensiones en las orientaciones pedagógicas motivando la reflexión y el diseño de investigaciones que den cuenta de su pertinencia o complementariedad.

La construcción de un concepto matemático no sigue un camino único. Arnon et al., (2014) aclaran que pueden considerarse diferentes descomposiciones genéticas para un concepto. Por ejemplo, para la TL Roa-Fuentes y Oktaç (2010; 2012) proponen dos DG's: la primera parte de la aplicación de Acciones sobre vectores específicos y la segunda de una estructura Objeto de funciones definidas entre espacios vectoriales de dimensión finita (Transformaciones). Tales modelos obedecen en parte a la presentación que los libros de texto realizan del concepto, sus implicaciones sobre las estructuras y los problemas propuestos. En concordancia con Kilpatrick (2014) sabemos que el aprendizaje de los estudiantes está condicionado en parte, tanto por materiales físicos, por ejemplo, los libros de texto, como por el uso y/o interpretación que el profesor hace de ellos.

Desde la perspectiva de esta investigación, considerando los criterios propuestos por Campos (2017) se analiza tres libros de texto, específicamente, identificando el desarrollo de los conceptos de eigenvalor y eigenvector. A través de tales criterios, los cuales describimos más adelante, buscamos rastrear e identificar conocimientos previos, qué avances son requeridos y cómo podrían promoverse de manera que tengan lugar nuevas estructuras mentales y se progrese en la comprensión del concepto de eigenvalor y eigenvector. Tal análisis permite integrar a la reflexión sobre la construcción de conocimiento matemático otro "interlocutor" al diálogo, de tal manera que la DG preliminar sea el resultado de una deliberación profunda desde diferentes perspectivas.

En relación a las estructuras sobre el concepto de eigenvalor y eigenvector en matrices, Salgado y Trigueros (2014) reportan características de las estructuras Acción, Proceso y Objeto para el concepto, lo cual es un antecedente importante en el presente reporte; a continuación, se describen tales estructuras.

4.2. *Acción, Proceso y Objeto: eigenvalores y eigenvectores a partir de matrices*

En esta sección se presenta de manera sintética una DG previa presentada por Salgado y Trigueros (2014) que propone la construcción de los eigenvalores y eigenvectores a partir del concepto de matriz. La descripción de las estructuras que se muestra a continuación son el filtro inicial con el cual se da paso al análisis de los libros de texto.

Acción: se reconocen los eigenvalores y eigenvectores en algunos contextos, pero en otros se realizan solo procedimientos sin llegar a conclusiones correctas; no es posible explicar si un escalar o vector es un eigenvalor o eigenvector de una matriz dada. Existe una dependencia de alguna indicación externa, por ejemplo, en R^2 o R^3 para la cual es posible graficar los vectores v y Av para determinar si son paralelos. Por otra parte, al realizar un procedimiento sobre la ecuación característica $(A-\lambda I)\, v = 0$ se dan conclusiones equivocadas como: "el vector cero es un eigenvector de la matriz A" (Salgado y Trigueros, 2014).

Proceso: es característico reconocer eigenvalores y eigenvectores de una matriz sin necesidad de recurrir necesariamente a un procedimiento sobre la ecuación característica $(A-\lambda I)\, v = 0$, es decir, el estudiante puede reconocer propiedades de la matriz o sus relaciones con otros conceptos del AL que le permiten explicar y justificar situaciones que involucran los eigenvalores y eigenvectores. También, se entiende claramente que un efecto de transformación de un vector bajo una matriz donde los vectores Av y v sean paralelos determina que v es un eigenvector y el escalar que los iguala es el eigenvalor. Así, el signo del escalar se asocia e interpreta en relación con la dirección del eigenvector (Salgado y Trigueros, 2014).

Objeto: se reconocen claramente propiedades de los eigenvalores y eigenvectores de una matriz. Hay conciencia de ciertas relaciones con otros conceptos y se actúa sobre los eigenvalores y eigenvectores para explicar o justificar alguna situación, por ejemplo, diagonalizar una matriz. También, se reconocen los espacios propios o eigenespacios asociados a un eigenvalor, se pueden realizar comparaciones entre eigenespacios e identificar propiedades, por ejemplo, la dimensión asociada a cada eigenespacio (Salgado y Trigueros, 2014).

En lo que sigue, describimos los criterios propuestos por Campos (2017) específicamente en términos del concepto de eigenvalor y eigenvector dando cuenta de la manera en que son usados en este estudio.

4.3. *Criterios para el análisis de los libros de texto y elaboración de una descomposición genética preliminar*

El primer criterio, Estructura General del texto, busca identificar la secuencia de los conceptos, su dependencia, conocimientos previos y las orientaciones propuestas con el fin de reconocer parte de la intención pedagógica del libro para el concepto de eigenvalor y eigenvector. El segundo, Presentación y definición de los conceptos, se enfoca en analizar cómo tiene lugar el concepto, lo que impulsa su definición y el reconocimiento de las estructuras y mecanismos mentales que podrían estar presentes. Los Ejemplos y ejercicios corresponden al tercer criterio que busca rastrear y descifrar cómo pueden estar siendo promovidas las estructuras mentales Acción, Proceso, Objeto y Esquema para el concepto de eigenvalor y eigenvector por el texto. Finalmente, el criterio Lector modelo, busca identificar cuáles estructuras, aunque no fueron promovidas explícitamente, son asumidas por el texto para abordar problemas o nuevos aprendizajes. Tal reconocimiento de las estructuras y mecanismos ayuda a completar el panorama en relación a la estrategia que sigue el libro de texto para que el lector alcance una comprensión profunda del concepto. En el desarrollado de los criterios se usan como referentes: las definiciones generales de las estructuras y mecanismos mentales (Arnon et al., 2014), la descripción de las estructuras para el concepto de eigenvalor y eigenvector por Salgado y Trigueros (2014), además, de los insumos de otras investigaciones relacionadas con el concepto, así como de la experiencia de los investigadores como profesores y estudiantes.

En Campos (2017) se usan los criterios para analizar el libro *Linear Algebra* (Friedberg y otros, 2003) e identificar una aproximación al camino cognitivo sigue libro para el aprendizaje del concepto de eigenvalor y eigenvector. La diferencia principal del presente estudio con Campos (2017) es que usamos los criterios para analizar tres libros de texto de AL: Poole (2011), Del Valle (2011) y Hoffman y Kunze (1973), con el propósito de tener un insumo de tal manera que el diálogo entre los investigadores y los reportes de investigación al respecto, abran paso al diseño de una DG preliminar para eigenvalores y eigenvectores sobre operadores lineales. El interés del estudio no es reconocer la posible DG que sigue cada libro de texto para el aprendizaje del concepto.

En el contexto de una universidad pública en Colombia dichos libros de textos son usados en diferentes niveles de escolaridad, en particular el Hoffman y Kunze (1973) es implementado para cursos de postgrado en matemáticas.

Los momentos desarrollados en el análisis en los libros de texto fueron seis: 1. Revisar tabla de contenido, prefacio y recomendaciones para el estudiante y /o profesor. 2. Estudiar secciones anteriores al concepto de interés. 3. Identificar formas de introducir y definir los conceptos, posibles estructuras y mecanismos mentales requeridos. 4. Revisar ejemplos e identificar posibles estructuras y mecanismos mentales requeridos y cómo se promueven. 5. Analizar ejercicios y/o problemas e identificar posibles estructuras y mecanismos mentales requeridos y cómo se promueven. 6. Reflexionar de forma global sobre las estructuras necesarias y los mecanismos mentales involucrados para el aprendizaje del concepto. Tales momentos destacan la operatividad de los criterios de análisis de los libros de texto.

Con el insumo obtenido del análisis de los tres libros textos los investigadores discutieron los puntos de encuentro, complementariedad y de tensión involucrando en el diálogo reflexivo los reportes de la literatura. En la Figura 1 se precisa la dinámica de las reflexiones dirigidas hacia la constitución de la DG preliminar, ciclos entre las estructuras y mecanismos mentales relativos a conocimientos previos y presentación de la definición, estructuras y mecanismos promovidas en los ejemplos y ejercicios, por otra parte, las estructuras y mecanismos mentales descuidados y las observaciones identificadas en los reportes de investigación sobre el concepto en cuestión. La interacción en diferentes direcciones entre los elementos destacados en la Figura 1 da paso en la reflexión de los investigadores a una hipótesis sobre cómo puede ocurrir el aprendizaje y tiene lugar entonces la propuesta de una DG preliminar.

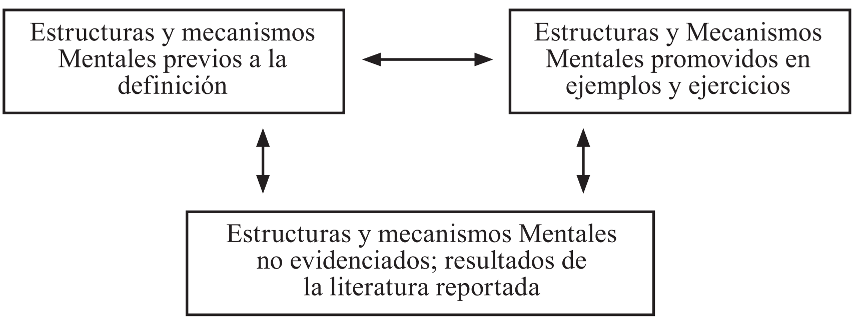


Figura 1. Ciclo para la elaboración de una descomposición genética preliminar teniendo como insumo principal el análisis de libros de texto

5. Análisis de libros de texto y descomposición genética preliminar para eigenvalor y eigenvector

En lo que sigue se exponen aspectos relevantes en relación con los primeros tres criterios de análisis para los libros de texto de Poole (2011), Del Valle (2011) y Hoffman y Kunze (1973). El criterio Lector Modelo y las reflexiones sobre los reportes de investigación en Matemática Educativa se articulan a la discusión para luego dar paso a la presentación de una DG preliminar para el concepto de eigenvalor y eigenvector sobre operadores lineales.

Capítulo 1	1.0 Introducción: el juego de la pista de carreras
	1.1 Geometría y álgebra de vectores
	1.2 Longitud y ángulo: el producto punto
	1.3 Rectas y planos
	1.4 Aplicaciones
Capítulo 2	2.0 Introducción: trivialidad
	2.1 Introducción a los sistemas de ecuaciones lineales
	2.2 Métodos directos para resolver sistemas lineales
	2.3 conjuntos generadores e independencia lineal
	2.4 Aplicaciones
	2.5 Métodos iterativos para resolver sistemas lineales

Capítulo 3	3.0 Introducción: matrices en acción
	31. Operaciones con matrices
	3.2 Álgebra matricial
	3.3 La inversa de una matriz
	3.4 La factorización LU
	3.5 Subespacios, bases, dimensión y Rank
	3.6 Introducción a las transformaciones lineales
	3.7 Aplicaciones
Capítulo 4	4.0 Introducción: un sistema dinámico de grafos
	4.1 Introducción a eigenvalores y eigenvectores
	4.2 Determinantes
	4.3 Eigenvalores y Eigenvectores de matrices $n \times n$
	4.4 Semejanza y diagonalización
	4.5 Métodos iterativos para calcular eigenvectores
	4.6 Aplicaciones y el teorema de Perron-Frobenius

Figura 2. Contenido de los primeros cuatro capítulos en Poole (2011)

5.1. *Estructura general de los libros de texto*

Álgebra lineal una introducción moderna (Poole, 2011) inicia con el trabajo sobre vectores en R^2 y R^3, para luego desarrollar definiciones generales de operaciones para vectores en R^n. En los cinco primeros capítulos no hay referencia explícita a la definición de espacio vectorial, sin embargo, conceptos como: combinación lineal, dependencia e independencia lineal, conjunto generador, espacio generado y base se definen en R^n y matrices, antes del capítulo de espacios vectoriales. En la sección 3.6 (ver Figura 2, tabla de contenido) se presenta la definición de TL como una función $T{:}R^n \to R^m$ que preserva combinaciones lineales, para rápidamente centrar la discusión en su representación matricial. El capítulo 4 da paso a la presentación del concepto de eigenvalor y eigenvector, iniciando con una discusión centrada en un "Sistema dinámico de grafos". En el capítulo 6 se expone con mayor profundidad el concepto de TL gracias a la formulación general del concepto de Espacio Vectorial. Ahora bien, en este texto no se encontró referencia a eigenvalores y eigenvectores en operadores lineales, aún más, el término operador lineal solo es referido dos veces y no es en relación con el concepto de interés.

Por su parte, *Álgebra lineal para estudiantes de ingenierías y ciencias* (Del Valle, 2011) se refiere a matrices y sistemas lineales en los dos primeros capítulos. Los espacios vectoriales corresponden al capítulo tres donde se hace mención sobre vectores en R^2 y R^3, luego la atención se concentra en R^n, el espacio de polinomios y el espacio de funciones. Así, la exposición sobre TL cubre un panorama amplio y denso, es en este contexto donde tiene lugar la definición de operador lineal (Figura 3) y eigenvalor y eigenvector.

Definición 5.7 *Si $T \in \mathscr{L}(\mathbf{E},\mathbf{E})$; es decir, T es una transformación lineal de un espacio* **E** *en sí mismo, se acostumbra decir que T es un* ***operador lineal*** *en el espacio* **E**.

Figura 3. Definición de operador lineal (Del Valle, 2011, p. 426)

El libro *Álgebra Lineal* de Hoffman y Kunze (1973) inicia con la definición de ecuaciones lineales y el concepto de cuerpo; de esta manera, toda la presentación del texto se hace sobre un cuerpo arbitrario F. Los capítulos 2 y 3 son dedicados a espacios vectoriales y TL respectivamente, en estos se refieren a operadores lineales como un Grupo con la operación de composición. La mirada estructural de los conceptos permea todo el texto, en particular, el capítulo 4 se dedica al álgebra de polinomios y su factorización sobre un cuerpo F. Así, el concepto de eigenvalor y eigenvector es presentado en el contexto de formas canónicas elementales del AL.

En la Tabla I destacamos elementos clave en relación con la Estructura general de los tres libros, al analizar la secuencia y/o dependencia de los conceptos se consideran puntos de tensión, complementariedad y encuentro. Particularmente, un elemento de tensión identificado se refiere a los conocimientos previos para la presentación del concepto de eigenvalor y eigenvector. Al respecto los investigadores fueron discutiendo tal tensión y sus implicaciones en la comprensión de estudiantes y profesores, sus intereses, los alcances y limitaciones del primer acercamiento con el concepto y la manera en que evoluciona o no.

5.2. *Presentación de eigenvalores y eigenvectores en los libros de texto*

El segundo criterio de análisis permite evidenciar cómo la estructura del texto y la visión de los autores sobre el AL es determinante en la motivación e introducción del concepto de eigenvalor y eigenvector.

TABLA I

Elementos a destacar sobre la estructura general de los textos Poole (2011), Del Valle (2011) y Hoffman y Kunze (1973)

Poole (2011)	*Del Valle (2011)*	*Hoffman y Kunze (1973)*
Inicia con la representación geométrica de vectores en R^2 y R^3 predomia el trabajo sobre casos particulares. Los SEL y matrices se relacionan con vectores en R^2 y R^3. Un primer curso de AL en pregrado debe incluir los conceptos de eigenvalor y eigenvector, además, el concepto de proyección ortogonal. Antes del capítulo de eigenvalores y eigenvectores a una sección (3.6) a una introducción sobre las TL. En el capítulo 6 se desarrolla a mayor profundidad espacios vectoriales y TL	Predomina una estructura aritmética y algebraica generalizada. Se incluyen espacios vectoriales de dimensión finita e infinita, para continuar con producto interior, norma, valores y vectores propios considerados como el cuerpo del AL. El concepto de vector se centra en la generalidad del espacio vectorial. Eigenvalores y Eigenvectores son presentados después de los capítulos de espacios vectoriales y TL.	Introduce sistemas algebraicos arbitrarios y el concepto de Cuerpo como estructura. Formas elementales (valores y vectores propios) y espacios con producto interno considerados necesarios para un primer curso de AL. El concepto de Eigenvalor y Eigenvector se introduce después de TL y el álgebra de polinomios. El concepto de eigenvalor y Eigenvector aparece como introducción a la teoría de formas canónicas.

TABLA II

Motivación al introducir el concepto de eigenvalor y eigenvector

Poole (2011)	*Del Valle (2011)*	*Hoffman y Kunze (1973)*
Sistemas dinámicos de grafos; estados estacionarios de vectores. Introducción mediante problemas de grafos. Contexto de matrices cuadradas.	Diagonalizar un operador lineal; encontrar representaciones matriciales sencillas (diagonales) que faciliten estudiar propiedades intrínsecas (determinante, eigenvalores).	Diagonalizar un operador lineal. ¿Todo operador lineal T se puede representar por medio de una matriz diagonal con respecto a alguna base ordenada?

En la Tabla II se presenta la manera en que cada libro de texto introduce o motiva el estudio de los eigenvalores y eigenvectores. El concepto en Poole (2011) tiene lugar en el contexto de cadenas de Markov y el Modelo de Leslie de crecimiento poblacional. Se invita al lector a estudiar algunas matrices y vectores particulares donde se puede reconocer que al hacer el producto matriz – vector (Ax), el resultado corresponde a un vector múltiplo escalar del vector x.

Definición Sea A una matriz de $n \times n$. Un escalar λ se llama ***eigenvalor*** de A si existe un vector $\mathbf{x}$ distinto de cero tal que $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$. Tal vector $\mathbf{x}$ se llama ***eigenvector*** de A correspondiente a λ.

Figura 4. Definición de Eigenvalor y Eigenvector (Poole, 2011, p.265)

Después de la definición de eigenvalor y eigenvector (Figura 4) aparecen los ejemplos presentados en la Figura 5 (En el libro de texto se presenta la respectiva solución). Ahora se busca determinar cuándo es cierto que un escalar sea un eigenvalor o que un vector sea un eigenvector de una matriz.

Ejemplo 4.1 Demuestre que $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ es un eigenvector de $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ y encuentre el eigenvalor correspondiente.

Ejemplo 4.2 Demuestre que 5 es un eigenvalor de $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ y determine todos los eigenvectores correspondientes a este eigenvalor.

Figura 5. Primeros ejemplos (Poole, 2011, p. 266)

Con relación a la definición en Poole (2011) reconocer que el vector Ax es múltiplo escalar de x podría demandar en una concepción Proceso de múltiplo escalar y una concepción Objeto de Matriz y vector. El mecanismo de coordinación puede ser clave para que un lector reconozca la igualdad entre los vectores Ax y λx e identifique a λ como eigenvalor y x como eigenvector de la matriz A. Después de los ejemplos mencionados en la Figura 5 un lector requiere traer varios elementos geométricos, matriciales y algebraicos para comprender y dar cuenta de cuáles son los eigenvalores y eigenvectores en situaciones donde no se cuestione por un escalar o vector como se hizo en los ejemplos de la Figura 5. Así, se presenta el concepto de determinante y discute en relación con los eigenvalores y eigenvectores (ver Figura 2).

Los textos Del valle (2011) y Hoffman y Kunze (1973) presentan el concepto de eigenvalor y eigenvector en un contexto matemático motivado por la tarea de diagonalizar un operador lineal. Los autores coinciden en interpretar dicho problema como encontrar una representación matricial diagonal respecto a cierta base. Del valle (2011) destaca que esto facilita el estudio de propiedades intrínsecas, es decir, invariantes respecto a la base escogida, ejemplo, el determinante. Por su parte, Hoffman y Kunze (1973), resaltan que esto aporta al reconocimiento de subespacios invariantes; separar el espacio vectorial y ver qué es lo importante que hace el operador lineal al espacio vectorial.

Previo a la definición de eigenvalor y eigenvector, Del valle (2011) guía al lector en reflexionar sobre cómo una representación matricial diagonal implica que los vectores de la base seleccionada son transformados de manera especial, esto es, en múltiplos escalares. Tal reflexión se presenta considerando un operador lineal arbitrario sobre un espacio vectorial de dimensión *n*. Por lo tanto, reconocemos que la definición tiene lugar al caracterizar el efecto de transformación que deben sufrir los vectores de la base bajo el operador lineal para que exista una representación matricial diagonal.

Definición 5.17 ***(Valores propios de operadores lineales)*** *Sean* $\mathbf{E}$ *un espacio vectorial (no necesariamente de dimensión finita) y* $T : \mathbf{E} \to \mathbf{E}$ *un operador lineal.*

1. *Se dice que* $\lambda \in \mathbb{R}$ *es un* ***valor propio*** (valor característico, eigenvalor, autovalor) *de* T *si existe un vector* $\vec{u} \in \mathbf{E}$*, con* $\vec{u} \neq \vec{0}_{\mathbf{E}}$*, tal que*

$$T(\vec{u}) = \lambda\vec{u} \tag{5.20}$$

2. *Si* λ *es un valor propio de* T *y* $\vec{u} \in \mathbf{E}$ *es un vector no nulo que satisface (5.20), entonces se dice que* $\vec{u}$ *es un* ***vector propio*** (vector característico, eigenvector, autovector) *del operador* T *correspondiente al valor propio* λ.

Figura 6. Definición de Eigenvalor y Eigenvector (Del Valle, 2011, p. 458)

En la figura 6 se muestra la definición del concepto de eigenvalor y eigenvector por Del Valle (2011). El autor precisa que tal definición se cumple para espacios vectoriales de dimensión infinita, en este sentido se consideran ejemplos que corresponden a operadores lineales sobre el espacio de funciones infinitamente diferenciables. En particular, el primer ejemplo requiere pensar en un escalar arbitrario sobre *R* y establecer un análisis en los casos cuando el escalar es cero y/o distinto de cero. En seguida Del Valle (2011) invita al lector a considerar relaciones y equivalencias con conceptos destacados en capítulos anteriores. Tal referencia involucra representaciones matriciales relativas a una base y posteriormente, tal como se muestra en la Figura 7, se presenta una cadena de equivalencias dadas por el operador lógico bicondicional. En términos cognitivos esto podría requerir al lector coordinar ciertos Procesos, a la vez que darse la interacción entre elementos del Esquema de TL y espacio vectorial.

Sea A una matriz cuadrada de orden n: dado que un sistema cuadrado homogéneo tiene soluciones no triviales si y sólo si la matriz de coeficientes del mismo tiene determinante cero, tenemos:

$$\begin{aligned}\lambda \text{ es valor propio de } A &\Leftrightarrow \text{existe } \vec{u} \in \mathbb{R}^n - \{\vec{0}_{\mathbb{R}^n}\} \text{ tal que } A\vec{u} = \lambda\vec{u} \\ &\Leftrightarrow \text{el sistema homogéneo } (A - \lambda I_n)\vec{x} = \vec{0}_{\mathbb{R}^n} \\ &\quad\ \text{tiene soluciones no triviales} \\ &\Leftrightarrow \det(A - \lambda I_n) = 0\end{aligned}$$

donde I_n es la matriz identidad de orden n. Ahora, si $\lambda \in \mathbb{R}$ es un valor propio de la matriz A, entonces debe existir una solución no trivial del sistema homogéneo

$$(A - \lambda I_n)\vec{x} = \vec{0}_{\mathbb{R}^n}$$

Así, los vectores propios correspondientes a λ son las soluciones no triviales de este sistema homogéneo.

Figura 7. Relación bicondicional de existencia con relación al concepto de eigenvalor y eigenvector (Del Valle, 2011, p. 464)

Destacamos la presencia del operador lógico bicondicional para referirse a los eigenvalores y eigenvectores, Figura 7, (Del Valle, 2011); este aspecto que está presente en definiciones y algunos teoremas, pero puede ser descuidado tanto por profesores como estudiantes. Campos (2017) considera que los libros de texto acostumbran a presentar la implicación en una dirección, asumiendo que la otra no produce dificultades al lector.

Finalmente, destacamos que, aunque la motivación en Del Valle (2011) es en esencia la misma que la planteada por Hoffman y Kunze (1973), según se describe en tabla II, las definiciones marcan diferencias en los dos textos. Por un lado, la definición en Hoffman y Kunze (1973) se enmarca en espacios vectoriales sobre un cuerpo arbitrario F y en ésta se define a la vez el espacio propio o eigenespacio como se muestra en la Figura 8.

Definición. Sea V un espacio vectorial sobre el cuerpo F y sea T un operador lineal sobre V. Un *valor propio* de T es un escalar c de F tal que existe un vector no nulo α con $T\alpha = c\alpha$. Si c es un valor propio de T, entonces

(a) cualquier α tal que $T\alpha = c\alpha$ se llama un *vector propio* de T asociado al valor propio c;
(b) la colección de todos los α tales que $T\alpha = c\alpha$ se llama espacio *propio asociado* a c.

Figura 8. Definición de Eigenvalor y Eigenvector (Hoffman y Kunze, 1973, p.181)

Por otra parte, el enfoque estructural del texto de Hoffman y Kunze (1973) marca un discurso posterior a la definición que podría exigir al lector una demanda cognitiva mayor a la requerida por el texto de Del Valle (2011). Un aspecto que se reitera en este libro de texto es poder articular varias relaciones y conocimientos de secciones anteriores del libro para avanzar en la búsqueda de características, equivalencias y estrategias que permitan describir los eigenvalores y eigenvectores de un operador lineal recurriendo a alguna representación matricial. En la Figura 9, en el párrafo antes de la definición, se destaca una parte de una cadena de conexiones que los autores bosquejan para referirse a los eigenvalores y eigenvectores en representaciones matriciales.

> Si β es cualquier base ordenada de V y $A = [T]_\beta$, entonces $(T–cI)$ es inversible si, y solo si, la matriz $(A–cI)$ es inversible. En consecuencia, se tiene la siguiente definición.
>
> *Definición.* Si A es una matriz $m \times n$ sobre el cuerpo F, un *valor propio* de A en F es un escalar c de F tal que la matriz $(A–cl)$ es singular (no inversible).

Figura 9. Referencia a eigenvalor en matrices en Hoffman y Kunze (1973, p.181)

Consideramos que, en los tres textos, aunque se muestra una dependencia diferente entre los conceptos y un abordaje teórico en distintas profundidades, se reconoce la necesidad de ciertas estructuras y mecanismos mentales, que pueden ser capturados en una interacción entre el Esquema de TL y Esquema de espacio vectorial. De manera que es posible entender la definición y avanzar en el estudio de eigenvalores y eigenvectores. Al referirnos a los Esquemas queremos destacar la importancia de las conexiones, relaciones y transformaciones entre elementos o conceptos que evolucionan; por ejemplo, reconocer los polinomios, funciones o matrices como vectores, de esta manera se pueden ir dinamizando tales Esquemas referidos.

A continuación, se destacan algunas consideraciones sobre los ejemplos y ejercicios propuestos por los libros de texto centrando la atención en las estructuras y mecanismos mentales que podría ser promovidas por los autores para el aprendizaje de eigenvalores y eigenvectores.

5.3. *Sobre ejemplos y ejercicios propuestos en los libros de texto*

Después de estudiar y revisar los ejemplos y ejercicios ofrecidos por los libros de texto, se desarrolló un plan para caracterizar los ejemplos y ejercicios y dar cuenta de cómo se promueve el aprendizaje del concepto de eigenvalor y eigenvector. Las categorías básicas consideradas con sus respectivas etiquetas se describen a continuación. Éstas toman como base las descripciones referentes a las estructuras mentales presentadas por Salgado y Trigueros (2014) que fueron sintetizadas en este escrito en la sección 4.2.

A: ejemplos y/o ejercicios que se remiten a ilustrar o seguir un procedimiento o usar directamente un teorema.

P: ejemplos y/o ejercicios que requieren considerar acercamientos diferentes a un procedimiento mecanizado y reflexionar sobre el mismo. Implica explicar, analizar y desarrollar nuevas estrategias.

O: ejemplos y/o ejercicios que requieren usar de manera consistente y coherente los eigenvalores y/o eigenvectores y/o sus implicaciones con el fin de analizar, demostrar y/o resolver situaciones más complejas que pueden involucrar otros conceptos.

Las categorías con etiqueta A-P y P-O fueron consideradas dado que se reconocieron ejemplos y/o ejercicios que podrían involucrar aspectos simultáneamente más de una categoría. Por ejemplo, la categoría A-P describe ejemplos y/o ejercicios que involucra aplicar un procedimiento o teorema y, además, explicar o justificar situaciones que confrontan las ideas que va desarrollando el lector. La configuración de dichas categorías ayuda a fijar la atención en cómo cada libro de texto parece motivar las concepciones Acción, Proceso u Objeto para el lector sobre el concepto de eigenvalor y eigenvector. En cada libro de texto se identificó la secuencia con relación a las categorías A, P y O. El símbolo → hace referencia al orden en que se presentan en el texto los ejemplos y/o ejercicios según las categorías establecidas. De esta manera, P ↔ O, indica que en el libro los ejemplos y/o ejercicios siguen entre algunos de la categoría P, otros de la categoría O y continua el orden de presentación de esa manera. Así, en la Tabla III se presenta la clasificación de los ejemplos y ejercicios según las categorías mencionadas.

En los libros analizados los ejemplos ubicados en la categoría A tiene un mayor porcentaje; en los libros de Poole (2011) y Del Valle (2011) el mayor porcentaje de los ejercicios propuestos se ubica en la categoría A. Solo el libro de Del Valle (2011) presenta Ejercicios Resueltos y como se muestra en la Tabla III, el 100% se encuentran en la categoría O. Como se puede ver en las columnas de la Tabla III, las categorías no son lineales y en el caso de Del Valle (2011) los ejemplos inician en la categoría O.

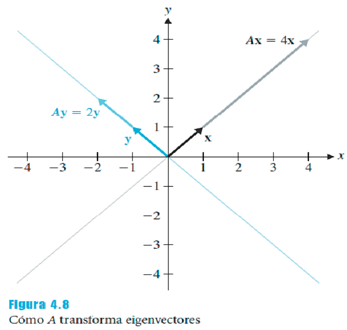
Respecto a la categoría A-P, en Poole (2011) el porcentaje es mayor mientras que en Del Valle (2011) es el más bajo. Este aspecto fue de interés para los investigadores, pues tales ejemplos y ejercicios se reconocieron como situaciones donde el lector necesitaba reflexionar y reconocer significados o características de los eigenvalores y eigenvectores. Desde una mirada cognitiva y considerando la teoría APOE, tales situaciones podrían promover el desarrollo de una concepción Proceso de eigenvalor y eigenvector en un lector, sin embargo, en los libros de texto revisados estos son muy pocos.

TABLA III
Clasificación de ejemplos y ejercicios según categorías definidas

Poole (2011)	*Del Valle (2011)*	*Hoffman y Kunze (1973)*
Ejemplos: A: 6 (55%); P: 3 (27%); A-P: 2 (18%). Secuencia: A → P. *Ejercicios propuestos:* A: 25 (31%); A-P:10 (13%); P:23 (29%); P-O:4 (5%); O:18 (22%). Total: 80 *Secuencia:* A → P ↔ O.	*Ejemplos:* A: 3 (42%); P: 2(29%); O: 2 (29%) Secuencia: O → A → P Ejercicios Propuestos: A: 38(33%); A-P:4(3%); P: 32(28%); P-O:8(6%); O:36 (32%). Ejercicios Resueltos. O: 11 (100%) Total: 117 *Secuencia:* P → A ↔ P ↔ O.	*Ejemplos:* A: 2 (75%); P: 1 (25%). Secuencia: A → P *Ejercicios propuestos:* A–P: 2(13%); P:5(34%); O:8 (53%); Total:15 *Secuencia:* A-P → P ↔ O.

Al considerar un lector que inicia el estudio del concepto de eigenvalor y eigenvalor con el texto de Del Valle (2011) podría enfrentar grandes retos cognitivos por la secuencia que sigue la presentación de los ejemplos y ejercicios. Posiblemente, un lector más experimentado pueda lidiar mejor con la secuencia presentada en Del Valle (2011), no obstante, tal problema no nos ocupa en este reporte y es necesario investigar a profundidad sobre tal asunto. Por otra parte, la categoría P-O se dio solamente en los ejercicios propuestos y para los textos de Poole (2011) y Del Valle (2011). Vale la pena destacar que tales ejercicios se encuentran muy poco en los libros revisados y fueron también reconocidos como situaciones que podría impulsar una comprensión más profunda del lector sobre los eigenvalores y eigenvectores.

En lo que sigue se presentan algunos ejemplos y ejercicios de los libros de texto acompañados de reflexiones sobre cómo pueden favorecer el aprendizaje del concepto de eigenvalor y eigenvector.



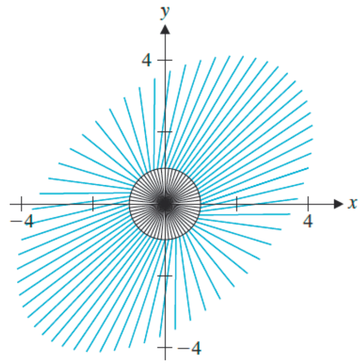


Figura 10. Ejemplos y ejercicios que involucran la interpretación geométrica de eigenvalores y eigenvectores en Poole (2011) p. 268-269

Los ejemplos y ejercicios en Poole (2011) se caracterizan por involucrar representaciones geométricas del concepto. En la Figura 10, la imagen izquierda ilustra cómo la matriz transforma a dos vectores que son eigenvectores. Otras situaciones involucran analizar más de un vector y su respectiva imagen; parte derecha de la Figura 10. Desde la perspectiva de la teoría APOE, este tipo de situaciones podría favorecer una concepción Proceso del concepto dado que un lector no requiere actuar directamente sobre un vector específico mediante la matriz de transformación; necesita argumentar la existencia de eigenvalores y eigenvectores, en este caso debe reconocer la relación de colinealidad entre los vectores.

En la sección anterior se indicó que la relación bicondicional suele presentarse en los libros de texto en un solo sentido. Particularmente, el concepto de eigenvalor y eigenvector involucra una relación bicondicional de existencia: si λ es un eigenvalor de T debe existir un eigenvector y, por otra parte, si v es un eigevector de T debe existir un eigenvalor. Por su parte, Poole (2011) no se refiere explícitamente a tal relación, sin embargo, parece asumirla, pero descuida enfatizarle al lector respecto a esto. En enunciado del ejemplo de la figura 11 se refiere a los eigenvalores, pero no hay ninguna observación respecto a los eigenvectores, consideramos que podría ser importante acompañar los comentarios de las respuestas con reflexiones sobre los eigenvectores.

En la Figura 12 se presenta un ejercicio de Del Valle (2011) que corresponde a la categoría A-P. Es importante destacar que este ejercicio involucra los eigenvalores de las matrices AB y BA, en el enunciado aparece una afirmación de validación o verificación seguida de la pregunta: ¿tienen los mismos vectores propios correspondientes? La cual involucra los eigenvectores e invita a la reflexión acerca de si son los mismos eigenvectores. Esta situación puede promover un mejor entendimiento de los eigenvalores y eigenvectores en relación a la terna $\{T, \lambda, v\}$ involucrada, es decir, representación matricial u operador lineal, escalar y vector; también aporta a la comprensión de la relación de existencia entre eigenvalor y eigenvector bajo el operador lineal o su representación matricial.

Ejemplo 4.7 Encuentre los eigenvalores de $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ (a) sobre $\mathbb{R}$ y (b) sobre los números complejos $\mathbb{C}$.

Solución Debe resolver la ecuación

$$0 = \det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 + 1$$

a + bi

(a) Sobre $\mathbb{R}$ no hay soluciones, de modo que A no tiene eigenvalores reales.
(b) Sobre $\mathbb{C}$ las soluciones son $\lambda = i$ y $\lambda = -i$. (Vea el Apéndice C.)

Figura 11. Ejemplo que involucra la existencia de eigenvalores sobre diferentes cuerpos en Poole (2011, p. 271)

421 Si $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, calcular los valores propios de AB y BA. Por el ejercicio precedente estos productos deben tener los mismos valores propios, ¿tienen los mismos vectores propios correspondientes?

Figura 12. Ejercicio de la categoría A-P de Del Valle (2011, p. 571)

Los libros de texto Del Valle (2011) y Hoffman y Kunze (1973) son los que definen el concepto de eigenvalor y eigenvector sobre operadores lineales. Dichos textos se refieren a representaciones matriciales asociadas a TL en espacios vectoriales de dimensión finita relativas a una base, particularmente, para operadores lineales tales representaciones son matrices cuadradas. En la figura 13 se muestra un ejercicio del Hoffman y Kunze (1973) donde se cuestiona sobre el polinomio característico del operador identidad y el operador cero. En ambas preguntas se debe reconocer una representación matricial del operador lineal asociada a alguna base β, en particular se puede elegir la base canónica y encontrar el polinomio característico para la matriz $I - \lambda I$, con λ en F. No obstante, lo anterior puede implicar reconocer la invariancia de los eigenvalores a representaciones matriciales y ser entendida ahora sobre las raíces del polinomio característico.

2. Sea V un espacio vectorial de dimensión n sobre F. ¿Cuál es el polinomio característico del operador identidad sobre V? ¿Cuál es el polinomio característico para el operador cero?

Figura 13. Ejercicio sobre polinomio característico de un operador lineal (Hoffman y Kunze, 1973, p. 188)

Algunos ejercicios presentados en Hoffman y Kunze (1973) hacen referencia a operadores lineales sobre R^3 a partir de una representación matricial asociada a la base canónica. Por ejemplo, en un ejercicio se pide determinar si el operador lineal es diagonalizable mostrando que existe una base para R^3 formada por eigenvectores. La manera de referirse al operador lineal es usando una matriz 3×3 e indicando que es la representación matricial relativa a la base canónica. En relación con lo anterior, en el análisis de los textos de Del Valle (2011) y Hoffman y Kunze (1973) no se reconocieron ejercicios que promovieran un entendimiento de los eigenvalores como un invariante a representaciones matriciales. Rápidamente se considera el polinomio característico y la atención se concentra en este como una manera que referirse y caracterizar los eigenvalores de un operador lineal. Cognitivamente y desde la teoría APOE lo anterior puede involucrar un tránsito importante; totalizar el Proceso de eigenvalor y eigenvector y avanzar hacia la concepción Objeto.

En los libros de texto revisados en relación con el concepto de eigenvalor y eigenvector identificamos que se ocupan más en presentar ejemplos que consiste en seguir un procedimiento o usar un teorema. Las situaciones que invitan al lector a explorar, reflexionar, relacionar y cuestionar aspectos sobre el concepto son escasas. Rápidamente se enfrenta al lector con ejercicios que implican hacer una demostración o resolver una situación que demandan un alto entendimiento del concepto, lo que en términos de la teoría APOE podría requerir tal vez una concepción Objeto.

A continuación, conectamos y complementamos las reflexiones con los reportes de investigación sobre el concepto de eigenvalor y eigenvectores en el campo de la Matemática Educativa.

5.4. *Reflexiones sobre eigenvalores y eigenvectores desde la Matemática Educativa*

Reportes de investigación en Matemática Educativa sobre el concepto de eigenvalor y eigenvector señalan que el componente procedimental y algorítmico suele ser privilegiado por los profesores y estudiantes, descuidando la comprensión conceptual (Bouhjar, Andrews-Larson, Haider y Zandieh, 2018). Asimismo, los libros de texto hacen transiciones rápidas, omitiendo aclaraciones pertinentes para dar paso a la parte procedimental; aspecto que fue posible evidenciar en los libros de texto analizados. Algunas consecuencias de lo anterior es la incapacidad de los estudiantes para reconocer la naturaleza matemática de los objetos implicados en la igualdad $Av=\lambda v$ y cómo es transformada en $(A-\lambda I)v=0$ (Stewart y Thomas, 2011). Los estudios publicados también destacan la importancia y necesidad de diseñar una instrucción del concepto de eigenvalor y eigenvector usando programas de tecnología computacional e involucrando situaciones de modelación o aplicación (Klasa, 2010; Beltrán, Murillo y Jordán, 2017; Beltrán-Meneu, Murillo-Arcila y Albarracín, 2017), esto con el propósito de introducir el concepto en un contexto concreto para los estudiantes y favorecer la construcción de conocimiento más allá de desarrollar destrezas procedimentales.

Por otra parte, en relación con los modos de pensamiento y formas de representación (Sierpinska, 2000; Hillel, 2000) característicos del AL, Caglayan (2015) destaca la importancia de establecer relaciones y conexiones entre las formas de representación para el concepto de eigenvalor y eigenvector con el fin de favorecer la comprensión y el desarrollo de significados más robustos. Algunos estudios como Plaxco, Zandieh y Wawro (2018), Zandieh, Wawro y Rasmussen (2016) y otros de los referidos anteriormente coinciden en iniciar la instrucción del concepto de eigenvalor y eigenvector considerando un contexto más concreto para el estudiante, que promueva significados y representaciones, incluyendo los ambientes de geometría dinámica. Pero, ¿cómo guiar el diseño de tal instrucción para los eigenvalores y eigenvectores? Al respecto Klasa (2010) menciona que puede considerarse la teoría APOE para diseñar la instrucción a la luz de una descomposición genética desde la TL; involucrando de esta manera los operadores lineales.

Estudios desde la perspectiva de la teoría APOE (Salgado y Trigueros, 2014; 2015; Yáñez, 2015; Campos, 2017) destacan estructuras y mecanismos mentales en la construcción de eigenvalor y eigenvector, articuladores geométricos en R^2 y R^3 y recomendaciones para la enseñanza. En particular, Salgado y Trigueros (2014) presentan una DG para el concepto de eigenvalor y eigenvector con matrices. De la DG se destacan como estructuras previas la matriz y vector como Objetos, el conjunto solución de un sistema de ecuaciones lineales, espacio nulo, conjunto generador y espacio generado como Procesos. Como aspecto clave en la DG destacamos la construcción como Objeto de la ecuación $Av = \lambda v$. Así, se realizan acciones sobre la ecuación para determinar condiciones que garanticen solución no trivial. Esta manera de construcción del concepto difiere con el modelo que se propone en la siguiente sección.

Por otra parte, es importante señalar que el modelo de Salgado y Trigueros (2014) involucra coordinar varios Procesos, lo que guarda congruencia con las reflexiones recogidas del análisis de libros de texto. Desde la reflexión y la deliberación entre los investigadores, proponemos la interacción entre los Esquemas de TL y espacio vectorial y Proceso de factorización de un polinomio sobre un cuerpo, como estructuras previas para el concepto de eigenvalor y eigenvector dado que captura la importancia del nivel de relaciones y conexiones entre los conceptos; otro aspecto diferenciador del modelo propuesto en Salgado y Trigueros (2014). En este sentido los articuladores geométricos como la rotación respecto al origen de 180° y 0° y la colinealidad referidos por Yáñez (2015) hacen parte de las relaciones involucradas entre los Esquemas de TL y espacio vectorial. Tales relaciones pueden irse consolidando de manera anticipada a la instrucción directa sobre eigenvalores y eigenvectores.

6. Descomposición genética preliminar para eigenvalores y eigenvectores

La presentación de la DG preliminar que sigue se enmarca en los operadores lineales definidos sobre espacios vectoriales de dimensión finita. Se hace una descripción sobre las estructuras previas, posteriormente se precisan las construcciones consideradas como necesarias para el aprendizaje del concepto de eigenvalor y eigenvector acompañadas por un gráfico que sintetiza aspectos clave.

6.1. *Estructuras previas a la construcción del concepto de eigenvalores y eigenvalores*

Como resultado de todo lo expuesto en las secciones anteriores, a continuación, se parte de las estructuras previas necesarias para iniciar la construcción del concepto de eigenvalor y eigenvector. De manera general se propone el Esquema de TL y el Esquema de espacio vectorial en un nivel *Inter* y la factorización de polinomios sobre un cuerpo como Proceso. En la figura 14, los recuadros con líneas punteadas y conectados por las flechas moradas se refieren a las estructuras previas.

Un nivel *Inter* del Esquema de TL implica establecer relaciones entre TL y otras estructuras básicas como Proceso de base y Objeto de vector (González y Roa-Fuentes, 2017). Tales estructuras son importantes, pues el aprendizaje de eigenvalores y eigenvectores implica trabajar con operadores lineales y sus representaciones matriciales. Otras estructuras involucradas en el Esquema son Proceso de matriz asociada, espacio nulo y determinante. Dado un operador lineal $T{:}V\to V$ (TL cuyo dominio y codominio es el mismo), las representaciones geométrica, funcional y matricial están relacionas respecto a la base relativa a V. Una estructura Proceso de TL permite expresar cualquier vector $v\in V$ como una combinación lineal de los vectores de la base $\beta = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$; de esta manera, el operador lineal (TL) queda determinado mediante los vectores v_i de la base β (González y Roa-Fuentes, 2017). Así, mediante el Proceso de operador lineal se pueden obtener las imágenes $T(v_i)$ con $i=1, ..., n$, las cuales están en V y por lo tanto son una combinación lineal de los vectores de la base β. Una representación matricial del operador lineal T será el resultado de la coordinación entre el vector de coordenadas relativo a la base β, $[T(v_i)]_\beta$, y el Proceso de matriz (Trigueros, Maturana, Parraguez y Rodríguez, 2015).

Aunque se mencionan por separado los Esquemas de TL y espacio vectorial estos se encuentran relacionados e interactúan entre sí; un concepto en particular que motiva dicha interacción es el concepto de base. Parraguez y Oktaç (2010) consideran que un nivel *Inter* del Esquema de espacio vectorial implica establecer relaciones entre conceptos como subespacios, TL, bases, entre otros. Se contempla que una concepción previa de espacio vectorial permite acceder a otras estructuras como vector y la operación múltiplo escalar. Una concepción Proceso de múltiplo escalar permite pensar en forma dinámica, esto es, dado un escalar $k \in K$- cuerpo y un vector $v \in V$, la transformación kv produce un nuevo vector que pertenece al espacio vectorial V. La estructura Objeto de vector, permite concebir a un vector como un elemento de un espacio vectorial y según la experiencia con conceptos matemáticos se reconoce que los vectores también pueden ser polinomios, matrices, funciones, entre otros.

Finalmente, una concepción Proceso de factorización de un polinomio sobre un cuerpo K le permite al estudiante determinar sus raíces o justificar por qué no existe raíces sobre dicho cuerpo.

6.2. *Estructuras y mecanismos mentales para construir el concepto de eigenvalor y eigenvector*

En un nivel *Inter* del Esquema de TL se puede reconocer que un operador lineal es una TL definida de un espacio vectorial V en sí mismo. Las líneas punteadas de naranja que se suspenden de las estructuras previas en la figura 14, destacan el inicio de la construcción de los Esquemas a partir de R^n, considerando un momento inicial en R^2 y R^3. Tales Esquemas se dinamizan y actualizan en función de nuevas experiencias que involucren otros espacios de dimensión finita como C^n, P_n (espacio de polinomios de grado menor o igual a n), M_{mn} (espacio vectorial de matrices de tamaño $m \times n$), entre otros, los cuales admiten representaciones matriciales relativas a una base. Los diferentes recuadros y flechas negras en la figura 14 sintetizan los aspectos claves de las construcciones necesarias.

Considerando un espacio vectorial V de dimensión finita sobre un cuerpo K, la construcción comienza con la realización de dos Acciones (Figura 14). La primera Acción es de comparación: Dado un operador lineal $T{:}V \rightarrow V$, sobre un espacio vectorial V o una representación matricial A_T y un vector especifico $v_0 \in V$ se busca un escalar λ_0 tal que $T(v_0) = \lambda_0 v_0$. Esta Acción puede ser interiorizada en un Proceso (*Proceso 1,* figura 14) para dar cuenta de la existencia de un escalar λ_0. Tal construcción también puede provenir de la coordinación entre el Proceso de operador lineal y el Proceso de múltiplo escalar. Así, se reconoce a $T(v_0)$ o $A_T v_0$ y $\lambda_0 v_0$ como nuevos vectores del espacio vectorial V; bajo el cumplimiento de la relación de igualdad se puede denominar a v_0 y λ_0 como un eigenvector y eigenvalor de T respectivamente. Tal coordinación puede ser motivada en espacios vectoriales como R^2 y R^3 de forma geométrica mediante la colinealidad entre v_0 y $T(v_0)$ o v_0 y $A_T v_0$ (Yáñez, 2015).

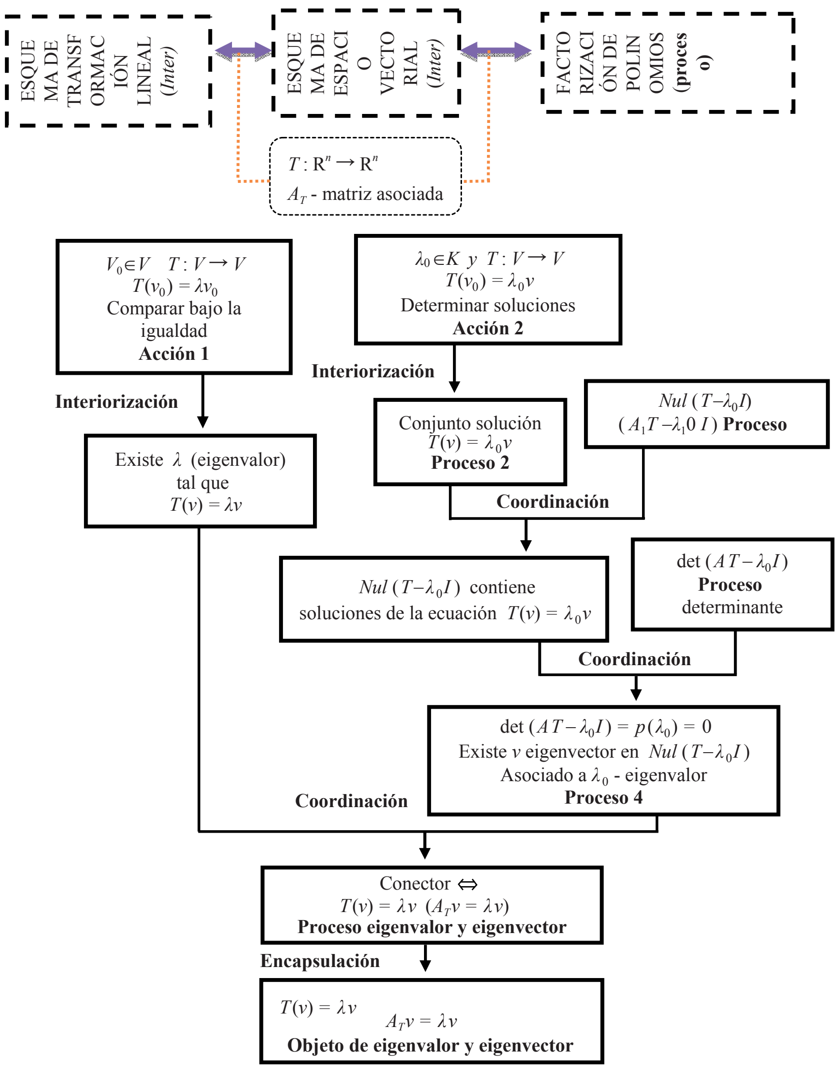


Figura 14. Descomposición genética hipotética del concepto de Eigenvalor y Eigenvector a partir del análisis de libros de texto.

Dado λ_0 en el cuerpo K y un operador lineal T o representación matricial A_T, la segunda Acción consiste en determinar vectores v_0 que verifiquen $T(v)=\lambda_0 v$ o $A_T v=\lambda_0 v$. La interiorización de esta Acción (*Proceso 2,* figura 14) permite reconocer la existencia de vectores v_0 no nulos como eigenvectores del operador T o la matriz A_T con correspondiente eigenvalor λ_0. El Proceso 2 puede coordinarse con el Proceso de espacio nulo mediante la contenencia de eigenvectores del operador lineal T o A_T en el espacio nulo de $T-\lambda_0 I\,(A_T-\lambda_0 I)$. El Proceso resultante (*Proceso 3,* figura 14) es coordinado con el Proceso de determinante el cual permite identificar que si $(A_T-\lambda_0 I)=0$ entonces, existen vectores diferentes de cero en $Nul\,(T-\lambda_0 I)\,[Nul\,(A_T-\lambda_0 I)]$ (*Proceso 4,* figura 14). Mediante tales construcciones mentales se entiende que encontrar los eigenvalores y eigenvectores de T o A_T equivale a determinar escalares λ_0 y vectores v_0 tal que $v_0 \in Nul\ (T-\lambda_0 I)\,[Nul\ (A_T-\lambda_0 I)]$. Así, el Proceso de espacio nulo da paso a reconocer que $(A_T-\lambda_0 I)\,v_0=0$, dotando de sentido la ecuación característica $(A_T-\lambda I)\,v=0$]. A partir de lo anterior se puede relacionar el det $det\ (A_T-\lambda I)$ como una condición para que existan vectores no nulos en $Nul\ (T-\lambda I)[Nul\ (A_T-\lambda I)]$ y denominar al det $det\ (A_T-\lambda I)$ como el polinomio característico.

El Proceso 4 y el Proceso 1 se coordinan mediante la relación bicondicional (↔) de existencia dando resultado al Proceso de eigenvalor y eigenvector (figura 14). Una concepción Proceso de eigenvalor y eigenvector, por ejemplo, implica reconocer que si v_0 es un eigenvector asociado al eigenvalor λ_0, entonces todo vector diferente de cero del espacio generado por v_0 es un eigenvector de T asociado al mismo eigenvalor λ_0. De esta manera, se acepta al $Nul\ (T-\lambda_0 I)$ como el eigenespacio asociado al eigenvalor λ_0. Lo anterior puede ser motivado mediante la comparación del espacio generado por diferentes eigenvectores (Salgado y Trigueros, 2014; 2015). La coordinación bajo la relación bicondicional de existencia permite entender que: si v es un eigenvector de T (A_T) entonces, existe un escalar λ en el cuerpo K tal que $T(v)=\lambda v$ o $(A_T v=\lambda v)$. Y, si λ es un eigenvalor de T (A_T) entonces, existen vectores $v \in V$ no nulos tal que $T(v)=\lambda v$ o $(A_T v=\lambda v)$.

A partir de la comparación entre diferentes representaciones matriciales del operador lineal es posible reconocer que los valores λ que son raíces del polinomio característico son invariantes a cualquier representación matricial de T. Mediante el mecanismo de encapsulación se da paso a considerar el Proceso eigenvalor y eigenvector como una totalidad, identificando que las raíces del polinomio característico determinan todos los eigenvalores de T o A_T y de esta manera se puede establecer todos los eigenespacios (E_λ); subespacios vectoriales de V donde el operador lineal es invariante (Camacho y Oktaç, 2016). Se puede considerar sumar eigenvalores de un mismo operador lineal y analizar si el escalar resultante es un eigenvector del operador (Wawro, Watson, Zandieh, 2019). En este punto hay plena consciencia que, al hablar por ejemplo de eigenvalor, necesariamente se involucran los eigenvectores o viceversa, es decir, la encapsulación del Proceso de eigenvalor y eigenvector permite reconocerlo como un objeto conformado por parejas (λ, v) que definen una relación funcional, donde $\lambda \in K$ y $v \in E_\lambda$ diferente del vector cero. En este sentido, se pueden aplicar Acciones sobre E_λ como determinar la dimensión y comprarla con otros eigenespacios relativos a otros eigenvalores. Asimismo, es posible aplicar Acciones sobre el Objeto eigenvalor y eigenvector, por ejemplo, para formar una base del espacio V que solo contiene eigenvectores, es decir, una eigenbase. Lo anterior consideramos que da paso al estudio y construcción de conceptos como la diagonalización de operadores lineales.

7. Reflexiones finales

Este escrito contribuye a literatura en tres aspectos importante. La primera corresponde al Análisis Teórico en la teoría APOE, particularmente, al análisis de libros de texto como insumo para el diseño de una DG preliminar. Este reporte aporta una metodología consistente en la que interactúan tres de los aspectos referidos por Arnon et al., (2014) para el diseño de una DG: análisis de libros de texto, reportes de investigación y la experiencia de los investigadores como profesores y estudiante. En este sentido, el presente estudio deja más visible el proceso detrás del Análisis Teórico en APOE. Consideramos que las categorías de clasificación en el análisis de los ejemplos y ejercicios de los libros de texto (ver sección 5.3), pueden ser utilizadas en otras investigaciones y es útil para reconocer el énfasis que desarrolla un libro de texto y la manera en que promueve una comprensión más profunda de un concepto matemático. Por otra parte, destacamos tres aportes principales del análisis de libros al diseñar una DG preliminar: i) fortalece la comprensión matemática del concepto a los investigadores, ii) fomenta la discusión y reflexión entre los investigadores y otras investigaciones reportadas iii) permite identificar acercamientos e intenciones pedagógicas para la instrucción y aspectos que pueden ser descuidados en la enseñanza. Tales aportes están relacionados con consideraciones mencionadas por Dubinsky (1991) sobre aspectos relevantes al diseñar una DG.

La segunda contribución es hacia el aprendizaje de eigenvalor y eigenvector al proponer una DG preliminar a la comunidad de educadores matemáticos que puede ser usada para orientar la instrucción en el aula. La DG preliminar propuesta promueve las tres interpretaciones de la TL: funcional, matricial y geométrica (Maturana, Parraguez y Trigueros, 2015). Dado que el concepto de eigenvalor y eigenvector generalmente se reserva para cursos más avanzados de AL, el estudio presentado en este escrito muestra la importancia de la construcción de Esquemas para la comprensión de las matemáticas. El modelo cognitivo propuesto puede adaptarse a la experiencia de los estudiantes, ya sea en un nivel básico sobre operadores lineales definidos de R^n en R^n, o en otro tipo de espacios vectoriales, cuando esta estructura ha evolucionado. En primer curso de AL iniciando con los espacios vectoriales R^2 y R^3 y según la experiencia con otros espacios vectoriales de dimensión finita como C^n, P_n, M_{mn}, se puede evolucionar el aprendizaje del concepto. Destacamos el énfasis marcado por la DG propuesta sobre las relaciones, conexiones entre los conceptos y la experiencia matemática que dinamiza los Esquemas.

La tercera contribución se relaciona con el uso de los libros de texto por los profesores para realizar la instrucción de un concepto. Considerando los libros analizados en este reporte, destacamos la importancia que los profesores conozcan de los libros de texto la intención pedagógica que sigue, los aspectos más destacados en relación a un concepto matemático y también los que son descuidados antes de usarlos para la instrucción en el aula. Un reconocimiento sobre como un libro de texto promueve la construcción de estructuras mentales clave para el aprendizaje de un concepto permite tomar decisiones más pertinentes sobre recursos de instrucción complementarios para ser incorporados en la enseñanza del concepto.

Las futuras investigaciones pueden considerar determinar el nivel de comprensión que los profesores tienen del concepto de eigenvalor y eigenvector para prever el alcance que pueden lograr en su práctica en el aula; y por tanto determinar qué tan profunda puede llegar a ser la comprensión de los estudiantes. Además, el estudio de eigenvalores y eigenvectores desde cada interpretación de los operadores lineales en un primer curso de AL iniciando con los espacios vectoriales R^2 y R^3. Al respecto, se está desarrollando una investigación con el propósito de tener evidencia empírica sobre cómo podría darse la instrucción del concepto a partir de las tres interpretaciones. Finalmente, también consideramos que la DG propuesta es una hipótesis que motiva el desarrollo de otras investigaciones, en particular, el supuesto sobre la totalidad del Proceso de eigenvalor y eigenvector en relación al polinomio característico.

Agradecimientos

Este proyecto fue parcialmente financiado por el Programa de Movilidad de la Vicerrectoría de Investigación y Extensión de la Universidad Industrial de Santander (VIE-UIS).

Referencias bibliográficas

Amaro, G., Hernández, L., y Slisko, J. (2019). La proporcionalidad en libros texto mexicanos de educación básica. Aspectos conceptuales. *En Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 32*. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C

Arnon, I., Cottril, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Roa-Fuentes, S., Trigueros, M. y Weller, K. (2014). *APOS Theory. A framework for research and curriculum development in mathematics education*. New York: Springer. DOI: 10.1007/978-1-4614-7966-6.

Beltrán-Meneu, M., Murillo-Arcila, M. & Albarracin, L. (2017). Emphasizing visualization and physical applications in the study of eigenvectors and eigenvalues. *Teaching Mathematics and its applications* 36, 123- 135. doi:10.1093/teamat/hrw018.

Beltrán-Meneu, M., Murillo-Arcila, M. & Jordán, E. (2017). A teaching proposal for the study of eigenvectors and eigenvalues. *Journal of Technology and Science Education* 7(1), 100 - 113. doi: 10.3926/jotse.260.

Bouhjar, K., Andrews-Larson, C., Haider, M & Zandieh, M. (2018). Examining Students' Procedural and Conceptual Understanding of Eigenvectors and Eigenvalues in the Context of Inquiry-Oriented Instruction. (pp. 193-216) In: Stewart S., Andrews-Larson C., Berman A., Zandieh M. (eds) *Challenges and Strategies in Teaching Linear Algebra*. ICME-13 Monographs. Springer, Cham.

Caglayan, G. (2015). Making sense of eigenvalue–eigenvector relationships: Math majors' linear algebra – Geometry connections in a dynamic environment, *The Journal of Mathematical Behavior*, 40, 131-153

Camacho., G & Oktaç, A. (2016). Exploración de una transformación lineal de R^2 en R^2. El uso de geometría dinámica para ampliar o adecuar construcciones mentales. En *Actas Quinto Simposio Internacional ETM* (pp. 253-266). Florina, Grecia.

Campos, V. (2017). *Los conceptos valor propio y vector propio en un texto de álgebra lineal: una mirada desde la teoría APOE*. Instituto Politécnico Nacional, Ciudad de México, México. DOI: 10.13140/RG.2.2.33372.08325

Cook, J. P. & Stewart, S. (2014). Presentation of matrix multiplication in introductory linear algebra textbooks. En T. Fukawa-Connolly, G. Karakok, K. Keene y M. Zandieh (Eds.), *Proceedings of the 17th Annual Conference on Research in Undergraduate Mathematics Education* (pp. 518-522). Denver, Colorado. Recuperado de http://sigmaa.maa.org/rume/RUME17.pdf.

Cook, P., Zaskis, D., & Estrup, A. (2018). Rationale for Matrix Multiplication in Linear Algebra Textbooks. (pp. 193-216) In: Stewart S., Andrews-Larson C., Berman A., Zandieh M. (eds) *Challenges and Strategies in Teaching Linear Algebra*. ICME-13 Monographs. Springer, Cham.

Del Valle, J.C. (2011). *Álgebra lineal para estudiantes de ciencias e ingenierías*. México: McGraw-Hill.

Fan, L. (2013). Textbook research as scientific research: towards a common ground on issues and methods of research on mathematics textbooks. *ZDM, The International Journal on Mathematics Education, 45* (5), 765-777. https://doi.org/10.1007/s11858-013-0530-6

Fan, L., Zhu, Y. & Miao, Z. (2013). Textbook research in mathematics education: Development status and directions. ZDM, *The International Journal on Mathematics Education*, 45 (5), 633-646. https://doi.org/10.1007/s11858-013-0539-x

Friedberg, S. H., Insel, A. J. y Spence, L. E. (2003). Álgebra Lineal. México: Pearson Educación.

Giacoleti-Castillo, F.M y Cordero, F. (2019). Usos y significados de la transformada de Laplace en una comunidad de ingenieros electrónicos. *En Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 32* (pp. 429-438). México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C

González-Rojas, D. E., y Roa-Fuentes, S. (2017). Un esquema de transformación lineal: construcción de objetos abstractos a partir de la interiorización de acciones concretas. *Enseñanza de las Ciencias*, 35(2), 0089-107. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2150

Harel, G. (1987). Variations in linear algebra content presentations. *For the Learning of Mathematics*, 7 (3), 29-32.

Hillel, J. (2000). Modes of description and the problem of representation in linear algebra. In J.-L. Dorier (Ed.), *On the teaching of linear Algebra*. (pp. 191–207). Grenoble, France: Kluwer Academic Publishers.

Hoffman, K y Kunze, R. (1973). *Álgebra lineal*. México: *Prentice-Hall Hispanoamericana, S. A*.

Ibarra, S. (2018). Un estudio sobre la educación matemática en el contexto de la reforma integral de la educación media superior en México. *En Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 32* (pp. 1666-1672). México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

Kilpatrick, J. (2014). From clay tablet to computer tablet: the evolution of school mathematics textbooks. In Jones, et al., (Eds) *Proceedings of the International Conference on Mathematics Textbook Research and Development (ICMT-2014) (pp.3-11).* Southampton: University of Southampton.

Klasa, J. (2010). A few pedagogical designs in linear algebra with Cabri and Maple. *Linear algebra and its applications*, 432(8), 2100-2111. doi:10.1016/j.laa.2009.08.039

Maturana, I., Parraguez, M. y Trigueros, M. (2015). El Esquema del Concepto Transformación Lineal. Una Mirada a tres Interpretaciones desde la Teoría APOE. *Educación Matemática en las Américas 2015 Volumen 10: Algebra y Cálculo.* Editores: Comité Interamericano de Educación Matemática.

Occelli, M y Valeiras, N. (2013). Los libros de texto como objeto de investigación: una revisión bibliográfica, *Enseñanza de las ciencias,* 31(2), pp. 133-152.

Osorio, M., y Díaz-Levicoy, D. (2018). Tipos de gráficos estadísticos en libros de texto de matemática para la educación primaria peruana. *En Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 32* (pp. 849-856) México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

Parraguez, M., & Oktac¸, A. (2010). Construction of the vector space concept from the viewpoint of APOS theory. *Linear Algebra and its Applications*, 432, 2112–2124.

Paz-Corrales, L. y Cantoral, R. (2019). Estudio socioepistemológico sobre la confrontación entre la geometría de descartes y la geometría analítica. *En Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 32* (pp. 394-403). México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

Pérez, R. y Cantoral, R. (2019). Estudio sobre el papel de la confrontación en el tratamiento de la física clásica de newton al discurso matemático escolar. *En Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 32* (pp. 55-64). México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

Plaxco, D., Zandieh, M &Wawro, M. (2018) Stretch Directions and Stretch Factors: A Sequence Intended to Support Guided Reinvention of Eigenvector and Eigenvalue. (pp. 175-192) In: Stewart S., Andrews-Larson C., Berman A., Zandieh M. (eds) Challenges and Strategies in Teaching Linear Algebra. ICME-13 Monographs. Springer, ChamPoole, D. (2011). *Álgebra Lineal. Una introducción Moderna* (3º Ed.). México: Thomson.

Romero Félix, C. F., y Oktaç, A. (2015). Coordinación de registros y construcciones mentales en un ambiente dinámico para el aprendizaje de transformaciones lineales. In I. M. Gómez-Chacón et al. (eds.) *Actas Cuarto Simposio Internacional ETM* (pp. 387–400), Madrid, Spain.

Roa-Fuentes, S. y Oktaç, A. (2010). Construcción de una descomposición genética: Análisis teórico del concepto transformación lineal. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 13 (1), 89-112.

Roa-Fuentes, S., & Parraguez, M. (2017). Estructuras mentales que modelan el aprendizaje de un teorema del álgebra lineal: Un estudio de casos en el contexto universitario. *Formación universitaria*, 10(4), 15-32. doi: 10.4067/S0718-50062017000400003

Ruiz-Estrada, H., Slisko, J., y Nieto-Frausto, J. (2018). Detección de errores y contradicciones en un problema de un libro de texto de matemáticas: una exploración inicial del pensamiento crítico de los maestros. *En Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 32* (pp. 106-114) México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

Salgado, H., y Trigueros, M. (2014). Una experiencia de enseñanza de los valores, vectores y espacios propios basada en la teoría APOE. *Educación Matemática*, 26(3), 75-107.

Salgado, H., & Trigueros, M. (2015). Teaching eigenvalues and eigenvectors using models and APOS theory. *The Journal of Mathematical Behavior*, 39, 100-120. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2015.06.005

Sierpinska, A. (2000). On some aspects of students' thinking in linear algebra. In J.-L. a (Ed.), *On the Teaching of Linear Algebra* (pp. 209–246). Grenoble, Francia: Kluwer Academics Publishers.

Thomas, M. & Stewart, S. (2011). Eigenvalues and eigenvectors: embodied, symbolic, and formal thinking. *Mathematics Education Research Group of Austaralasia*. 23, 275 - 296. Versión electronica doi: 10.1007/s13394-011-0016-1.

Trigueros, M., Maturana, I., Parraguez, M. y Rodríguez, M. (2015). Construcciones y mecanismos mentales para el aprendizaje del teorema matriz asociada a una transformación línea. *Educación Matemática*, 27(2), 95-124.

Trigueros, M. (2018). Learning Linear Algebra Using Models and Conceptual Activities. (pp. 29-50) In: Stewart S., Andrews-Larson C., Berman A., Zandieh M. (eds) *Challenges and Strategies in Teaching Linear Algebra*. ICME-13 Monographs. Springer, Cham.

Wawro, M., Watson, K. & Zandieh, M. (2019). Student understanding of linear combinations of eigenvectors. ZDM, *The International Journal on Mathematics Education*. https://doi.org/10.1007/s11858-018-01022-8

Yáñez, A. (2015). Construcción de los conceptos de valores y vectores propios en R^2 y R^3 desde la teoría APOE. Tesis de Maestría no publicada, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. Chile.

Zandieh, M; Wawro, M & Rasmussen, C. (2016) An Example of Inquiry in Linear Algebra: The Roles of Symbolizing and Brokering, PRIMUS, 1-29. DOI:10.1080/10511970.2016.119961.

Autores

Alexander Betancur Sánchez. Universidad Industrial de Santander. Colombia.
alexanderbetancursanchez@gmail.com

Solange Roa Fuentes. Universidad Industrial de Santander. Colombia.
sroa@matematicas.uis.edu.co

Silvia Juliana Ballesteros. Universidad Industrial de Santander. Colombia.
Julianaballesterosg@hotmail.com