Pablo Agustin Sabatinelli, Viviana Carolina Llanos

ANÁLISIS MACRODIDÁCTICO BASADO EN LOS PROGRAMAS DE ÁLGEBRA LINEAL Y GEOMETRÍA ANALÍTICA: EVOLUCIÓN DE LOS SABERES EN LA FORMACIÓN DE INGENIEROS EN ARGENTINA

Macrodidactic analysis based on linear algebra and analytic geometry syllabi: evolution of knowledge in engineering education in Argentina

RESUMEN

Se analizan 504 planes de estudio de carreras de ingeniería en Argentina y 125 programas de las materias que reúnen los saberes de Álgebra Lineal (AL) y Geometría Analítica (GA) en el periodo 1810-2021. Nos proponemos conocer las transformaciones de dichos saberes a enseñar a partir de cuatro etapas definidas en la investigación. Se adopta como referencial teórico la Teoría Antropológica de lo Didáctico de Yves Chevallard. Los resultados ponen en evidencia los cambios en los saberes de AL y GA necesarios para la formación de los ingenieros en cada etapa y se analizan los motivos de dichas transformaciones.

PALABRAS CLAVE:

- *Plan de Estudios*
- *Álgebra*
- *Geometría*
- *Formación de Ingenieros*
- *Teoría Antropológica de lo Didáctico*

ABSTRACT

We analyze 504 curricula of engineering degrees in Argentina and 125 syllabuses of the courses of Linear Algebra (LA) and Analytic Geometry (AG) in the period 1810-2021. We aim to investigate the transformations of such knowledge to be taught from four stages defined in the research. Yves Chevallard's Anthropological Theory of Didactics is adopted as a theoretical reference. The results show the changes in the LA and AG knowledge necessary for the formation of engineers in each stage and the reasons for these transformations are analyzed.

KEY WORDS:

- *Curriculum*
- *Algebra*
- *Geometry*
- *Engineering education*
- *Anthropological Theory of the Didactic*

RESUMO

Analisamos 504 planos de estudos de cursos de engenharia na Argentina e 125 planos de estudos das disciplinas que reúnem os conhecimentos de Álgebra Linear (AL) e Geometria Analítica (GA) no período 1810-2021. Propomo-nos a conhecer as transformações deste saber a ensinar com base em quatro etapas definidas na investigação. A Teoria Antropológica do Didático de Yves Chevallard é adotada como referencial teórico. Os resultados mostram as transformações dos saberes da AL e da GA necessários à formação dos engenheiros em cada etapa e são analisadas as razões dessas transformações.

PALAVRAS CHAVE:

- *Programa de estudos*
- *Álgebra*
- *Geometria*
- *Educação em Engenharia*
- *Teoria Antropológica do Didático*

CC BY NC

Sabatinelli, P. A.. y Llanos, V. C. (2024). Análisis macrodidáctico basado en los programas de álgebra lineal y geometría analítica: evolución de los saberes en la formación de ingenieros en Argentina. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 27*(2), 237-264. https://doi.org/10.12802/relime.24.2724. Recepción: Enero 16, 2025 / Aceptación: Junio 11, 2025.

RÉSUMÉ

Nous analysons 504 syllabus de diplômes d'ingénieur en Argentine et 125 syllabus des matières qui regroupent les connaissances d'Algèbre Linéaire (AL) et de Géométrie Analytique (AG) dans la période 1810-2021. Nous proposons de découvrir les transformations de ces savoirs à enseigner à partir de quatre étapes définies dans la recherche. La théorie anthropologique de la didactique d'Yves Chevallard est adoptée comme référence théorique. Les résultats montrent l'évolution des savoirs AL et AG nécessaires à la formation des ingénieurs à chaque étape et les raisons de ces transformations sont analysées.

MOTS CLÉS:

- *Curriculum*
- *Algèbre*
- *Géométrie*
- *Formation des Ingénieurs*
- *Théorie Anthropologique du Didactique*

1. Introducción

Las carreras de ingeniería en Argentina, cualquiera sea la especialidad, tienen un ciclo básico común de aproximadamente 2 años y en el que se estudian saberes de Matemática, Física y Química. Dentro del área de Matemática, encontramos saberes de Cálculo Diferencial e Integral, Álgebra Lineal (AL) y Geometría Analítica (GA), entre otros. En trabajos anteriores, hemos realizado una recopilación de 168 investigaciones que se ocupan del problema de la enseñanza de AL y GA en la universidad (Sabatinelli et al., 2021). Solo en una de estas investigaciones se reconoce un estudio similar al que se realiza en este trabajo y es relativo a un diseño curricular para la enseñanza de AL desde un enfoque computacional. Este enfoque, sugerido por el Linear Algebra Curriculum Study Group (LACSG) tuvo una gran influencia en Estados Unidos y en varios países; y muchos libros para cursos de AL siguen los criterios propuestos por dicho grupo (Carlson et al., 1993). Actualmente, el LACSG reformuló algunas de sus propuestas y adoptó un enfoque STEM buscando fomentar la innovación, el pensamiento lógico y la creatividad en estudiantes y profesionales (Stewart et al., 2022). Por otra parte, el conjunto de las investigaciones antes mencionadas, dan cuenta de un problema más general que podríamos sintetizar como el fenómeno de la *escisión* de los saberes de AL y GA que conforman una misma asignatura, es decir, en su propuesta dichas disciplinas aparecen juntas, pero de hecho se enseñan como dos partes separadas. Vinculado a esto se identifica otro problema que Chevallard (2013) define como desarticulación de los temas y la consecuente *pérdida de sentido* de los saberes. Otro fenómeno vinculado es el de la utilidad de estos saberes en la formación de los ingenieros (Sabatinelli et al., 2021).

(cc) BY-NC

En general, en las facultades de ingeniería, la materia "Álgebra y Geometría Analítica" u otros nombres similares, es una materia anual percibida por los docentes y en consecuencia por los estudiantes, como dos partes bien diferenciadas de la misma materia: primero se estudia GA y luego, como sin relación AL, incluso separadas en dos semestres distintos. Convendremos en esta investigación llamar AyGA a estas materias. En otros casos, el plan de estudios establece dos materias diferentes (GA y AL) en semestres distintos y consecutivos, proponiendo un estudio por separado de los saberes de GA y AL. Sin embargo, el estudio conjunto de estas disciplinas se volvería insoslayable si se tiene en cuenta que esta separación no existe desde el *saber sabio* (Chevallard, 1985), es decir, la referencia, ni obedece a razones de naturaleza histórico-epistemológica (Sabatinelli y Llanos, 2022).

Se incluyen en el análisis los planes desde 1810, correspondientes a la Academia de Dibujo fundada por Manuel Belgrano en 1799, hasta los de las universidades nacionales actuales. Específicamente analizamos 504 planes de estudio y 125 programas de AyGA para conocer la organización de los saberes y el lugar otorgado a AL y GA en carreras de ingeniería en Argentina. Las preguntas que orientan la investigación son: ¿Cuáles son las transformaciones del saber matemático de AL y GA propuestos en los programas de dichas asignaturas? ¿Cómo interpretar esos efectos transpositivos y la escisión de los saberes de AL y GA a partir de la escala de los niveles de codeterminación didáctica?

2. Marco Teórico

La Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) (Chevallard, 1999), establece que las actividades matemáticas que se dan en el seno de una institución educativa no están aisladas del contexto histórico y epistemológico a la que la institución está sujeta y por lo tanto para interpretar esta actividad matemática es imprescindible estudiar los procesos de construcción y las transformaciones que un saber matemático sufre desde su creación en la comunidad matemática a la institución educativa donde se difunden (Chevallard, 1985). Estas restricciones y condiciones tienen diferentes orígenes: en la propia institución, en los organismos que las regulan, en la sociedad en la que esta institución influye y es influenciada, entre otras. En el marco de la TAD, Chevallard (2001, 2019) propone un instrumento teórico denominado *escala de niveles de codeterminación didáctica* para analizar y describir dichas transformaciones (véase Figura 1).

Humanidad↔Civilización↔Sociedad↔Escuela↔Pedagogía↔Disciplina↔Área↔Sector↔Tema↔Cuestión

Figura 1. Escala de los Niveles de codeterminación didáctica

 BY-NC

En cada una de estas etapas, se imponen restricciones y condiciones que terminan definiendo qué se puede estudiar de la cuestión considerada. Por una parte, en los niveles superiores es donde se piensan y discuten los planes de estudio para las carreras de ingeniería: en la noósfera coinciden las empresas y sus necesidades, la sociedad en su conjunto, el Ministerio de Educación, el Consejo Federal de Decanos de Ingeniería (CONFEDI), entre otros. Sin embargo, es responsabilidad del profesor definir las características de los programas de estudio de las asignaturas, según las sugerencias o recomendaciones que se plantean desde la noósfera. Por tal motivo, no utilizaremos aquí la escala de codeterminación completa, sino que nos circunscribiremos a la sección de la escala comprendida entre el nivel *sociedad* y el nivel *tema*; es decir desde los niveles en que opera la noósfera hasta aquellos en donde opera el profesor responsable de la elaboración del programa de estudio. El nivel *sociedad* corresponde al conjunto de personas o naciones a los que les es común su organización política, sistema educativo y el sistema legal que rige las actividades entre las personas que integran la sociedad (Chevallard, 2019; Otero, 2021). En esta investigación, son de interés, por ejemplo, la sociedad colonial en el Río de la Plata durante el siglo XIX o la sociedad argentina de principios de siglo XX. El nivel *escuela* agrupa cualquier institución de enseñanza, por ejemplo, universidades, una facultad determinada, escuela secundaria, centros de formación técnica o centros de capacitación laboral. Aquí nos interesamos en las diversas escuelas y academias que estuvieron bajo la órbita militar hasta la revolución de mayo de 1810, las universidades nacionales, la universidad obrera y la universidad tecnológica nacional. El nivel *pedagogía*, corresponde al "arte" de poner a los estudiantes en contacto con cierta obra a estudiar; esta obra o conjunto de obras que serán objeto de estudio están enmarcadas en una *disciplina*. En nuestro caso, la disciplina es la matemática, y las *áreas* de interés son AL y GA. A su vez, dentro de cada área es posible identificar *sectores* que estarán compuestos de *temas.* Por ejemplo, dentro del área GA identificamos al *sector* cónicas, compuesto de los *temas*: elipses, hipérbolas, entre otros.

Por otra parte, la TAD propone que es posible describir cualquier actividad realizada regularmente a través de un modelo único llamado praxeología (Chevallard, 1999; Bosch y Gascón, 2014). Éstas comprenden dos niveles: el de la praxis, que consta de tipos de tareas T y de las técnicas τ para llevar a cabo esas tareas; y el nivel de logos, que contiene las justificaciones de las técnicas para llevar a cabo las tareas. Estas justificaciones constituyen un bloque que consta de la tecnología θ que permite explicar y justificar por qué una técnica funciona adecuadamente, y una teoría Θ que explica y justifica la tecnología. La elección de la teoría y las tecnologías que de ella se desprendan, dependen de la institución a la que estamos asociando la praxeología e incluso del momento histórico al que nos estemos refiriendo para un análisis en el tiempo como el que se plantea en este caso.

(cc) BY-NC

3. Metodología

Recopilamos 504 planes y 125 programas de estudio de facultades de ingeniería de Argentina en el periodo 1810-2021; y más de 60 documentos producidos por la noósfera que incluyen leyes, decretos y disposiciones ministeriales, entre otros. Con base en esta documentación, identificamos qué características definieron a cada uno de los niveles de la escala desde *sociedad* a *pedagogía*. Como consecuencia, definimos cuatro etapas que se ajustan a los lineamientos en las transformaciones detalladas por el CONFEDI (Cristal, 2020), que marcan los principales cambios en la concepción de las carreras de ingeniería del país, y que atienden a cuestiones sociales, políticas, vinculadas al desarrollo de la industria, y que influyen en la formación de los ingenieros.

Sintetizamos las cuatro etapas (Sabatinelli y Llanos, 2024) como sigue:

- Etapa 1 (E1): corresponde al periodo 1810 a 1920 y está caracterizada por la conversión de los ingenieros con orientación militar a los ingenieros orientados a la producción y la industria (ingenieros civiles).
- Etapa 2 (E2): desde 1921 a 1976 corresponde al desarrollo de las carreras de ingeniería vinculado al proceso de industrialización que tuvo el país y de políticas económicas basadas en la sustitución de importaciones.
- Etapa 3 (E3): corresponde al periodo 1977 a 2002, y responde a una etapa de estancamiento y retroceso por la desindustrialización del país y políticas económicas que fomentaron la importación de productos elaborados.
- Etapa 4 (E4): desde 2003 que corresponde a una vuelta hacia la industrialización, el fomento de la industria nacional y algunas políticas públicas conducentes a fomentar la formación de ingenieros en Argentina.

Los documentos se distribuyen en cada etapa de la siguiente manera:

TABLA I
Planes y programas de estudio analizados para cada etapa

	Planes de estudio	*Programas de estudio*	
Etapa E1	20	3	23
Etapa E2	41	1	42
Etapa E3	123	11	134
Etapa E4	320	110	430
	504	125	629

 CC BY-NC

El desbalance entre la cantidad de documentos analizados en cada etapa se debe, por un lado, a las posibilidades actuales del acceso a la información, y por otro, a la cantidad de instituciones que forman ingenieros en Argentina desde los últimos dos periodos. Además, la cantidad de planes y programas correspondientes a las últimas etapas se corresponde con las reglamentaciones determinadas por el CONFEDI desde 1988 y la CONEAU desde 1995, que sientan las bases y criterios para la unificación de un ciclo básico común a todas las carreras de ingeniería del país, lo que produjo una modificación completa de planes y programas.

Previo al análisis de la *disciplina* y específicamente de AL y GA que es el *área* en cuestión, se realizó una identificación de los principales acontecimientos históricos, desarrollos y transformaciones de los saberes de AL y GA en las diferentes corrientes filosóficas dentro de la matemática en el tiempo que influyen en la descripción de los niveles de la escala de codeterminación (Kline, 2012; Sabatinelli y Llanos, 2022). Analizamos en qué punto estos cambios podrían afectar a la organización del saber en los planes y programas de estudio, y sintetizamos esta información en una tabla como la que se muestra en la Figura 2.

Nro.	*Etapa*	*Año*	*Universidad*	*Carrera*	*Materia*	*Régimen de cursado*	*Contenidos*	*Bibliografía*

Figura 2. Tabla de programas

Para cada programa, indicamos: en la columna "Nro." el número; en la columna "Etapa" la etapa histórica que corresponde (E1 a E4); en la columna "Año" el año correspondiente; en la columna "Universidad" la universidad a la que pertenece; en la columna "Carrera" la carrera a la que pertenece; en la columna "Materia" el nombre de la asignatura; en la columna "Régimen de cursado", si la materia es anual, semestral, cuatrimestral, etc.; en la columna "Contenidos" se listan todas las praxeologías incluidas y en la columna "Bibliografía" se registran los libros de texto recomendados. Las filas se completan con la información de cada programa.

En la tabla II se muestra un extracto para el programa PR7 correspondiente a la etapa E3, del año 1986, de la Universidad de Buenos Aires, para la carrera de Ingeniería Civil. La materia es Álgebra, de cursado anual.

(cc) BY-NC

TABLA II
Extracto de la Tabla de Programas

Contenidos	*Bibliografía*
Puntos en el espacio n-dimensional. Vectores. Producto escalar. Norma. Rectas y planos. Producto vectorial. Definición. Subespacios. Independencia lineal. Combinación lineal. Sistemas de generadores. Bases. Dimensión. Suma e intersección de subespacios. Suma directa. Espacios con producto interno. Espacios de matrices. Suma y producto de matrices. Ecuaciones lineales. Eliminación de Gauss-Jordan. Rango. Teorema de Roché-Frobenius. Determinantes. Propiedades. Determinante de un producto. Determinantes e inversas. Definición. Núcleo e Imagen. Monomorfismos, epimorfismos, isomorfismos. Composición de transformaciones lineales. Transformaciones lineales inversas. Números complejos. Operaciones. Forma binómica y trigonométrica. Teorema de De Möivre. Resolución de ecuaciones. Polinomios. Grado de un polinomio. Operaciones con polinomios. Raíces. Teorema del resto. Descomposición factorial. Teorema fundamental de Álgebra. Fórmula de interpolación de Lagrange. Matriz de una transformación lineal. Matriz de la composición. Matriz de la inversa. Cambios de Bases. Vectores y valores propios. Polinomio característico. Aplicaciones. Subespacios invariantes. Diagonalización.	ANTON, H.: Introducción al Álgebra lineal. (Ed. Limusa) LANG, S.: Álgebra lineal. (Fondo Educativo Interamericano) GROSSMAN, S.: Álgebra lineal. (Grupo Editorial Iberoamérica) KUROSCH, A. G.: Curso de Álgebra superior. (Ed. Mir) LIPSCHUTZ, S.: Álgebra lineal. (Serie Schaum Ed. Mc Graw Hill) GENTILE, Enzo: Álgebra lineal. (Ed. Docencia) KOLMAN, B.: Álgebra lineal. (Fondo educativo Interamericano) HERSTEIN, I. N.; WINTER, D. J.: Álgebra lineal y teoría de matrices. (Grupo Editorial Iberoamérica)

Los contenidos mínimos enunciados en los 504 planes de estudio y los recopilados entre los 125 programas de AyGA, nos permitieron identificar un total de 32 praxeologías incluidas en los mismos. Las praxeologías se nombran de P1 a P32 y esta organización responde al orden cronológico de su primera aparición en el conjunto de programas analizados. Es decir, las praxeologías se listan consecutivamente, independientemente de que aparezca o evolucione en años posteriores. Esto nos permite analizar y comparar entre las distintas etapas. De estas praxeologías, nos remitimos a identificar cuáles son específicas de cada etapa. Sin embargo, no es posible describir aquí sus componentes –como los tipos

 BY-NC

de tareas, técnicas o tecnologías asociadas–, ya que dicha información no se encuentra disponible en los programas ni en los planes de estudio de las carreras. Por tal motivo, se seleccionó la lista de libros de textos recomendados en cada programa, con el fin de realizar un análisis posterior.

Como hemos mencionado, no todas las praxeologías identificadas están presentes en todas las etapas. Esta identificación de las praxeologías propias de cada etapa, y los cambios dados entre una etapa y la siguiente, nos llevó a realizar una segunda clasificación, ya no de los planes, sino de las praxeologías incluidas en los mismos. En la investigación distinguimos para cada etapa las praxeologías que se eliminan o que "migran" hacia otra materia; aquellas que dejan de estudiarse y aquellas que permanecen en AyGA aunque con modificaciones.

A continuación, se realiza una descripción de las praxeologías identificadas en los programas de cada etapa (E1 a E4), seguida de una discusión que permite identificar los cambios entre las 32 praxeologías mencionadas en cada etapa, todas juntas. La *escala de los niveles de codeterminación didáctica* se utiliza siempre para justificar los motivos por lo que dichos cambios podrían tener lugar en cada momento.

4. Descripción de las praxeologías por etapas

4.1. *Etapa 1: 1810-1920*

En esta etapa se analizan 20 planes de estudio y 3 programas de AyGA que nos permiten identificar 17 praxeologías que se sintetizan en la tabla III.

TABLA III
Praxeologías para la etapa E1

Praxeologías	
P1: Determinantes	P10: Aritmética
P2: Ecuaciones algebraicas	P11: Análisis Combinatorio
P3: Ecuaciones exponenciales y logarítmicas	P12: Geometría elemental
P4: Fracciones continuas	P13: Cosmografía
P5: Números complejos	P14: Cuádricas
P6: Trigonometría rectilínea	P15: Sistemas de coordenadas
P7: Trigonometría esférica	P16: Geometría analítica del plano y espacio
P8: Sistemas de ecuaciones lineales (SEL)	P17: Cónicas
P9: Teoría general de ecuaciones	

Las praxeologías relativas a la resolución de ecuaciones (P2, P3 y P9) responden a una concepción del álgebra propia del renacimiento y que durante los siglos XVIII y XIX seguían presentes, aunque con menos influencia: el álgebra es la *ciencia* de resolver ecuaciones (Katz y Barton, 2007) y en general la matemática, la ciencia de encontrar cantidades desconocidas a partir de otras conocidas (Euler, 1802).

La praxeología P4 (fracciones continuas) se introdujo dentro de los saberes de AL y GA porque aún no se había cambiado completamente el antiguo modelo que separaba a la Matemática en Aritmética, Álgebra, Coordinatoria, Geometría, etc. Como consecuencia de esto, el estudio de los números racionales e irracionales es considerado una cuestión privativa del álgebra. Los saberes involucrados en esta praxeología buscan un método para aproximar números irracionales de manera *óptima*. Sin embargo, estos saberes no responden a lo que se entiende por AL y GA, sino que son propios del análisis algebraico elemental (Español González et al., 2010).

Antes de referir a la P5 (números complejos) tomamos la cita de Padilla y Arcos (1753) para contextualizar las características del modelo "escolar" dominante de las escuelas militares sobre la Matemática:

> La cantidad, objeto de la Matemática, puede considerarse entera, o dividida en partes. De la primera trata la Geometría, y de la segunda la Aritmética: de suerte, que toda la Matemática no es otra cosa, que Aritmética, y Geometría…. La cantidad asimismo puede considerarse contraída en particular a alguna cosa, o abstraída por el entendimiento de toda materia: por lo que las Ciencias Matemáticas unas son puras, o abstractas, y otras mixtas. (Padilla y Arcos, 1753, p. 17).

Esta idea de que la matemática se ocupa de la cantidad y por lo tanto estudiar conjuntos numéricos es estudiar matemática, es lo que justifica que la praxeología números complejos (P5) inicialmente haya formado parte de los programas de AL y GA. Efectivamente, el estudio comenzaba con el conjunto de números naturales, y continuaba con los números enteros, los racionales, los reales y finalmente los números complejos. Cada conjunto numérico precedía al anterior porque permitía una operación que con el conjunto de números que se contaba hasta ese momento no era posible: el conjunto de números enteros permitió la resta de números cuando el sustraendo fuera mayor que el minuendo; el conjunto de números racionales permitió el cociente de números aun cuando el divisor fuese mayor que el dividendo, el conjunto de números reales permitió la radicación y logaritmación de números racionales positivos y el de números complejos la radicación y logaritmación para cualquier número real (con excepción del 0 para la logaritmación). Con la misma concepción de la matemática, se justifican la praxeología aritmética (P10) y geometría elemental (P12).

 BY-NC

Las praxeologías relativas a trigonometría y cosmografía (P6, P7 y P13) se justifican también a partir del estudio de la Geometría, y dentro de ésta el estudio de la proporción. La trigonometría plana y esférica como aplicación de la teoría de las proporciones (y las razones trigonométricas como constantes de proporcionalidad de esas proporciones) y no como el estudio de funciones trigonométricas. La cosmografía (P13) se consideraba una aplicación práctica de los saberes de trigonometría, de tradición en las academias militares; y la inclusión de P13 implica la de P6 y P7 a partir de las cuales se justifican términos teóricos de gran parte de P13.

La praxeología determinantes (P1) responde a lo estudiado inicialmente por Cramer (1704-1752) para dar respuesta al problema de encontrar una curva algebraica de grado n que pase por $\frac{1}{2}n^2+\frac{3}{2}n$ puntos dados. Este problema conduce a la resolución de un sistema de n ecuaciones lineales con n incógnitas, que aquí se refleja en la praxeología P8 (aunque en ésta, se estudian sistemas lineales más generales de tamaño $m\times n$). Complementa a esta praxeología el trabajo de Euler (1750) quien teoriza acerca de que no todos los sistemas de ecuaciones lineales tienen solución o que, si tienen, ésta sea única. La idea de independencia lineal que Euler desarrolla es el inicio de lo que conocemos como AL (Dorier, 1995). El estudio que se hace durante esta etapa de los determinantes es bastante exhaustivo: además de las propiedades que resultan de diferentes transformaciones sobre un determinante o los teoremas de desarrollo por filas o columnas, se estudian determinantes recíprocos, de Vandermonde, simétricos, hemisimétricos, ortosimétricos y continuantes. También se incluye el estudio del teorema de Hadamard relativo a una cota superior para un determinante y una introducción a determinantes en varias dimensiones.

La praxeología SEL (P8) corresponde a un estudio *elemental* de estos sistemas, que incluyen problemas de aplicación de ingeniería, pero no hay un estudio completo sobre sistemas no cuadrados, cantidad de soluciones, o sobre la compatibilidad en general. Los sistemas de coordenadas, la geometría analítica lineal, el estudio de las cónicas y superficies (P14, P15, P16 y P17) corresponden al *área* GA, pero con base en solución algebraica, es decir a través de ecuaciones que representen lugares geométricos. Esta es la idea de Descartes del álgebra como instrumento para *automatizar* o *mecanizar* la resolución de problemas geométricos (Boyer, 1944; Kline, 2012). Respecto de los sistemas de coordenadas, además de las coordenadas cartesianas ortogonales, se incluye el estudio de sistemas polares, cilíndricos, esféricos, parabólicos, hiperbólicos, homogéneas, entre otros.

La figura 3 corresponde a una red praxeológica de la etapa E1. En esta red se trata de establecer cuáles son las relaciones que desde los planes y programas se proponen para la organización de las praxeologías para el estudio de AyGA.

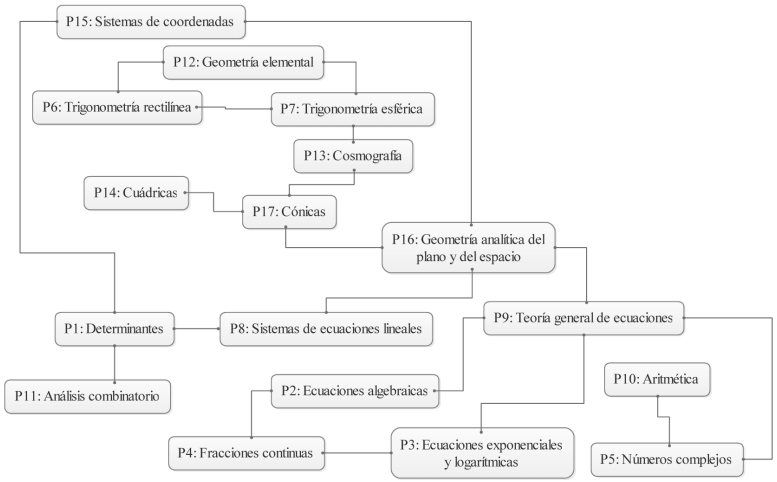

Figura 3. Red praxeológica de la etapa E1

4.2. *Etapa 2: 1921-1976*

En esta etapa se analizan 41 documentos oficiales que corresponden al periodo 1921-1976. Se identifican cambios en las praxeologías incluidas en los planes de estudio respecto de la etapa E1. En la tabla IV se muestran estos cambios:

TABLA IV
Evolución de las praxeologías durante la etapa E2

Praxeologías que desaparecieron	*Praxeologías que se mantuvieron*	*Praxeologías que se incorporaron*
(P4) Fracciones continuas (P6) Trigonometría rectilínea (P7) Trigonometría esférica (P9) Teoría general de ecuaciones (P10) Aritmética (P12) Geometría elemental (P13) Cosmografía	(P1) Determinantes (P2) Ecuaciones algebraicas (P3) Ecuaciones exponenciales y logarítmicas (P5) Números complejos (P8) Sistemas de ecuaciones lineales (P11) Análisis Combinatorio (P14) Cuádricas (P15) Sistemas de coordenadas (P16) Geometría analítica del plano y espacio (P17) Cónicas	(P18) Polinomios (P19) Álgebra Vectorial (P20) Transformaciones lineales (P21) Aproximación Numérica (P22) El número Real (P23) Matrices (P24) Resolución numérica de ecuaciones (P25) Series numéricas (P26) Interpolación (P27) Nomografía

 BY-NC

Durante esta etapa las praxeologías relativas a trigonometría, cosmografía, aritmética y geometría elemental (P6, P7, P10, P12 y P13) desaparecen de los planes de estudio (con excepción de la trigonometría en la carrera de Agrimensura). En el caso de aritmética y geometría elemental (P10 y P12), éstas fueron relegadas a la escuela primaria y media. En estas dos praxeologías es donde resulta claro cómo el nivel *sociedad* operó sobre el nivel *escuela*: la proliferación de escuelas primarias y medias a partir del establecimiento de la instrucción primaria obligatoria, gratuita y gradual (ley 1420) y la ley de subvenciones para escuelas (ley 463), juntamente con el denominado *normalismo sarmientino* (Fiorucci, 2014) modificó el perfil del ingresante a las facultades de ingeniería. En la tabla V podemos comparar las condiciones de ingreso para estudiar ingeniería en 1810 y las de 110 años después en la Universidad Nacional del Litoral.

TABLA V
Comparación condiciones de ingreso

"1° Todo individuo concurrente a la Academia deberá antes ser examinado por los jefes de su cuerpo, de su regular destreza y perfección en escribir. *2° Como la conducta y buen manejo de los hombres es proporcionado a su educación y sentimientos, deberán todos los alumnos obtener de sus jefes un informe de honradez, aplicación, celo, aptitud y demás apreciables circunstancias que deben distinguir a un militar; [...]"* (Plan de la escuela de Matemáticas, Boletín Oficial, n° 115, 10 de agosto de 1810)	*"Podrán inscribirse en el primer año de este Ciclo los que hayan aprobado las materias [...] de la Escuela Industrial anexa a esta Facultad, o las de los seis años de las demás Escuelas Industriales de la Nación, los Contramaestres de la Escuela Industrial [...], los que, tengan diplomas de Técnicos, de Maestros Mayores de Obras, o de Maestros de Trabajo Manual, expedidos por esta Facultad; de Profesor Normal en Ciencias[...]; de Contador Público Nacional, o de Bachiller Nacional."* (Plan de Estudios, Universidad Nacional del Litoral, 1920, p.6)

La praxeología fracciones continuas (P4) finalmente deja de estudiarse en las facultades de Ingeniería. Una razón para esto es que las cuestiones relativas al análisis algebraico pasaron a estudiarse en la materia "Análisis Matemático". Por otra parte, la aparición de las calculadoras electrónicas desde la década de 1960 (Massare, 2014) también fueron un motivo que contribuyó a la desaparición de esta praxeología en las facultades de ingeniería de Argentina. Además, las calculadoras fueron agentes modificadores de las praxeologías relativas a ecuaciones (P2, P3 y P9) en cuanto a las técnicas y tareas. Surge así la praxeología resolución numérica de ecuaciones (P24) que se ocupa de ecuaciones tanto algebraicas como trascendentes a través de métodos numéricos. La utilización de calculadoras electrónicas permitió utilizar diferentes técnicas y teoremas

para resolver de manera aproximada ecuaciones. Métodos como el método de Newton-Raphson, formulado inicialmente por Newton en 1665 a partir de unos trabajos de Vietè y reformulado por Raphson en 1690 y por Simpson en 1740, son ahora aplicables desde el punto de vista práctico gracias a los dispositivos electrónicos. Del mismo modo ocurre con el método desarrollado en 1837 por Gräffe para encontrar raíces de polinomios, e independientemente por Dandelin en 1826 y Lobachevsky en 1834. Observamos en la Figura 4, que a pesar de que se están aplicando teoremas de más de 150 años de antigüedad para calcular raíces, no es sino hasta la difusión de calculadoras que estos métodos pueden ser utilizados por estudiantes de ingeniería en sus cursos de grado.

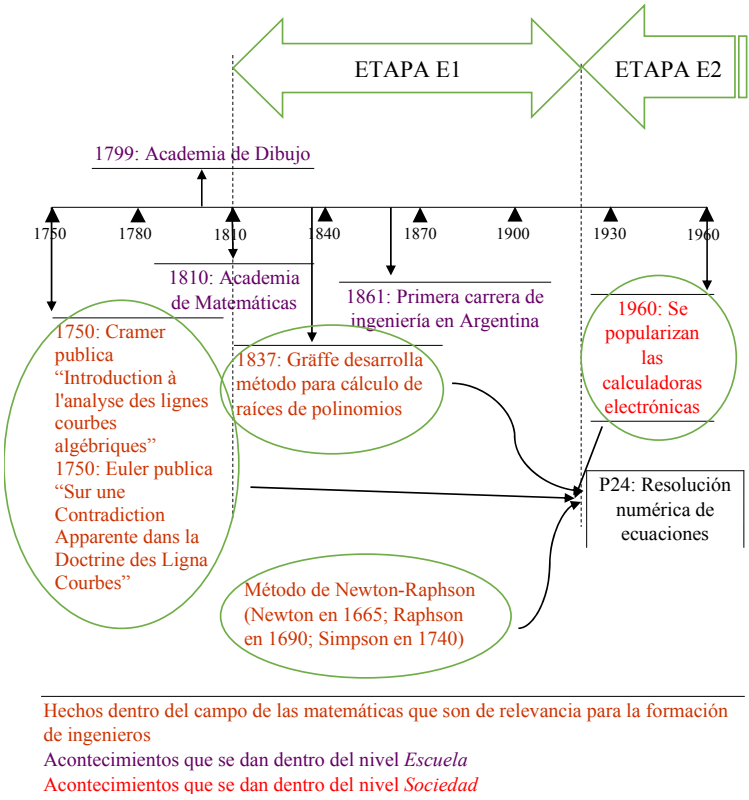

Figura 4. Línea histórica de configuración de la praxeología P24

Con el desarrollo y popularización de las calculadoras, se incorporan al estudio de las ecuaciones dos praxeologías: P27 y P25. La nomografía (P27) por una parte aporta técnicas y tareas de resolución de ecuaciones parametrizadas a partir de interpolar gráficamente en el nomograma; asimismo, P26 profundiza el estudio

 BY-NC

de la interpolación, mientras que las series numéricas (P25) dan herramientas para la aproximación numérica. Por otra parte, durante la primera etapa de E2, la interpolación provee de la justificación para las técnicas y tareas correspondientes al cálculo de logaritmos y razones trigonométricas. Complementa a este grupo de praxeologías un adecuado estudio del error numérico producido por los métodos empleados en la resolución numérica de ecuaciones, que corresponde a P21 y cuya justificación teórica queda clara a partir P22 (números reales), que se estudian, siguiendo la concepción de la matemática como una estructura de cuerpo.

La praxeología P18 polinomios, que incluye la resolución de ecuaciones algebraicas para los teoremas relativos a la factorización de polinomios, también subyace a la idea del estudio de un anillo. Esta idea de la estructura algebraica subyacente al estudio de entes matemáticos será dominante durante esta etapa E2 y se explica porque ahora la matemática está pensada en términos de estructuras (Zalamea, 2011). El surgimiento en 1935 del grupo Bourbaki, sostenía que

> Ahora puede quedar claro qué debe entenderse, en general, por estructura matemática. El carácter común de los diferentes conceptos designados por este nombre genérico es que pueden aplicarse a conjuntos de elementos cuya naturaleza no se ha especificado; para definir una estructura, se toman como dadas una o varias relaciones, en las que entran estos elementos (...); luego se postula que la relación o relaciones dadas, satisfacen ciertas condiciones (que se enuncian explícitamente y que son los axiomas de la estructura considerada). Establecer la teoría axiomática de una estructura dada, equivale a deducir las consecuencias lógicas de los axiomas de la estructura, excluyendo cualquier otra hipótesis sobre los elementos considerados (en particular, cualquier hipótesis sobre su propia naturaleza). (Bourbaki, 1950, p. 225-226)

Esta manera de *pensar* la matemática da lugar a una justificación complementaria para la praxeología P22 (números reales). En la etapa anterior justificamos la introducción de los números complejos (P5) a partir de las sucesivas ampliaciones del concepto de número, en esta etapa la justificación del estudio de números reales y complejos cambia por la del estudio de la estructura algebraica de cuerpo y de este modo, estas praxeologías se estudian a partir de los axiomas que caracterizan la estructura algebraica.

El estudio de las estructuras también explica la razón de las praxeologías P19 y P23, álgebra vectorial y matrices, respectivamente. En ambos casos se presentan los vectores o las matrices y la definición de dos operaciones: la adición y el producto por escalar. De hecho, se introduce el término "escalar" que es propio de los elementos que conforman el cuerpo en el estudio de los espacios vectoriales y son el germen de lo que más adelante se incluye como una praxeología con este nombre. Vinculado al estudio al estudio de lo matricial también se incorpora P20, es decir, las transformaciones lineales; pero esta praxeología permite estudiar temas

geométricos a partir de transformaciones algebraicas: transformaciones rígidas del plano (rotaciones, traslaciones, homotecias), cambio de coordenadas, entre otras.

La praxeología P1 (determinantes), en esta etapa se reduce al estudio de algunos determinantes particulares (Vandermonde, triangulares, etc.). Los determinantes se estudian como una característica numérica asociada a una matriz. Asimismo, el rango de una matriz se define a partir del cálculo de determinantes particulares. Los SEL (P8) ya se estudian en términos generales: aparecen las preguntas acerca de la compatibilidad con independencia del tamaño de los sistemas o si son cuadrados. El teorema de Rouché–Frobenius se enuncia en términos de rangos y determinantes asociados a matrices particulares. Respecto de P17 (secciones cónicas), el estudio se restringe y dejan de estudiarse las curvas clásicas (a excepción de la circunferencia, la elipse, la hipérbola y la parábola). Respecto del análisis combinatorio, geometría analítica del plano y del espacio, superficies y sistemas de coordenadas (P11, P14, P15, P16) no tienen modificaciones sustanciales respecto de la etapa E1.

La Figura 5 sintetiza la red praxeológica de la etapa E2. Con verde se indican las praxeologías y las nuevas relaciones que se establecen en esta etapa. Con rojo se indican las que se pierden.

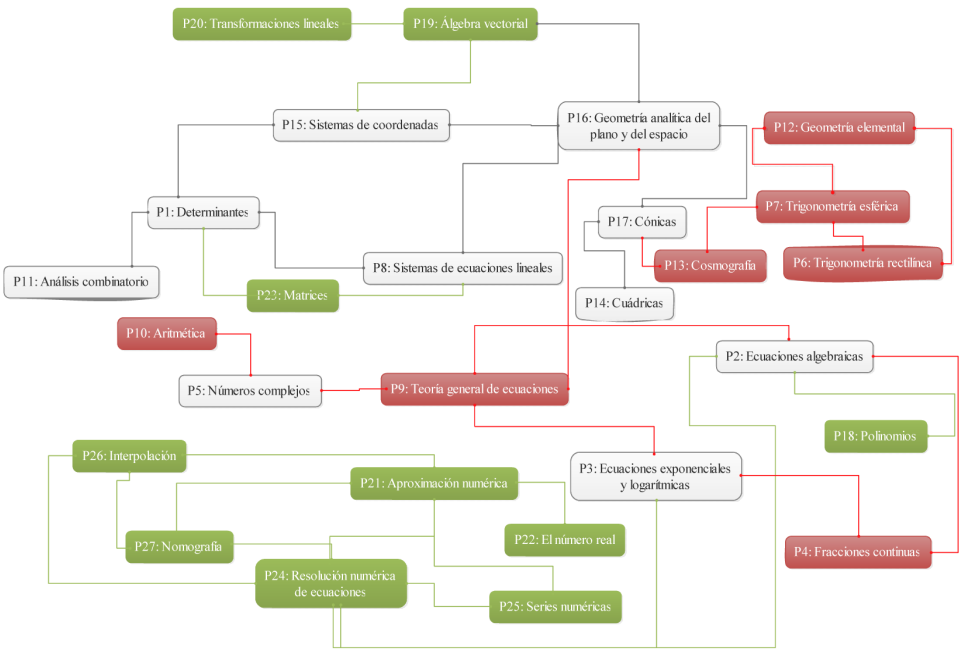

Figura 5. Red praxeológica de la etapa E2

CC BY-NC

4.3. *Etapa E3: Periodo de desindustrialización nacional (1977-2002)*

En esta etapa se analizan 134 documentos oficiales, que corresponden a 123 planes y 11 programas de estudio. La resolución 68/94 de Consejo Superior de la Universidad Tecnológica Nacional (UTN) modifica y homogeniza los saberes a estudiar de AL y GA para todas las especialidades. Dentro de sus considerandos se menciona establecer *"una adecuada formación básica, entendiendo como tal a la formación científica en el estudio de las problemáticas que dan origen a las carreras de ingeniería"* (CS 68/94). Además,

> … los nuevos diseños curriculares de la Universidad Tecnológica están dirigidos hacia una fuerte formación básica para la preparación del ingeniero, es muy importante reconocer y resaltar la parte común a todas las ingenierías y utilizarla no solo para mejorar la eficiencia del proceso de aprendizaje-enseñanza, sino también como un medio de integración a nivel universidad de las disciplinas con la que cada ingeniero deberá interactuar en su vida profesional. (CS 68/94, Anexo I, pág. 1)

El párrafo citado explica la importancia de homogeneizar los planes de estudio de las diferentes ingenierías, y en lo sucesivo, se proyecta que las praxeologías matemáticas incluidas prácticamente no van a sufrir modificaciones. Por otra parte, los saberes que la UTN propone en sus planes de estudio coinciden con los de las otras universidades nacionales para este periodo: en Álgebra ya todas las facultades incorporaron el estudio de los espacios vectoriales, las transformaciones lineales y diagonalizaciones, además de matrices, determinantes y SEL y dejó de formar parte el estudio de nomogramas. La resolución de ecuaciones fue migrando hacia un estudio desde el análisis y cálculo numérico en otros espacios curriculares. En GA se adopta definitivamente un enfoque vectorial para su estudio y las curvas clásicas y algebraicas dejan de estudiarse (excepto cónicas y superficies de segundo orden que permanecen en los planes de estudio). Resumimos lo anterior en la tabla VI.

La influencia del grupo Bourbaki y la "matemática moderna" justifican la introducción de la praxeología P28 (teoría de conjuntos). Incluso en los cursos propedéuticos o de ingreso a las facultades de ingeniería se enseñaba la teoría elemental de conjuntos. En concordancia con esto también comienzan a estudiarse estructuras algebraicas (P30): grupos, anillos, cuerpos, entre otros. Los espacios vectoriales (P31) sirven tanto como ejemplo de estructura algebraica como para el estudio de las transformaciones lineales que se incorporan en la etapa anterior. Estas praxeologías aportan mayor generalización y nivel de abstracción a los conceptos matemáticos introducidos para estudiar, pero también se alejan de las aplicaciones inmediatas que el estudio del álgebra pueda aportar a los ingenieros. Durante el inicio de la etapa E3, el estudio de las estructuras algebraicas (P30) se justificó a partir de considerar el estudio de los espacios vectoriales como una estructura algebraica *generalizadora* o *abarcadora* de estructuras más simples. Sin embargo,

ese enfoque netamente algebraico no es el que se adoptó mayoritariamente en ingeniería, sino que se prefirió un enfoque geométrico-algebraico como se discute en Sabatinelli y Llanos (2022). Como indicadores señalaremos que los espacios vectoriales que se estudian en AyGA son reales, con excepción de algunos casos en que el cuerpo es el de los números complejos; pero casi no hay referencia a espacios vectoriales sobre un cuerpo fuera de estos ni se estudia la estructura del cuerpo para diferenciarla por ejemplo de una estructura de módulo.

TABLA VI
Síntesis de las praxeologías en la etapa E3

Praxeologías que permanecen	*Praxeologías que desaparecen*	*Praxeologías que se incorporan*
(P1) Determinantes (P5) Números complejos (P8) Sistemas de ecuaciones lineales (P11) Análisis Combinatorio (P14) Cuádricas (P15) Sistemas de coordenadas (P16) Geometría analítica del plano y espacio (P17) Cónicas (P18) Polinomios (P19) Álgebra Vectorial (P20) Transformaciones lineales (P23) Matrices	(P2) Ecuaciones algebraicas (P3) Ecuaciones exponenciales y logarítmicas (P21) Aproximación Numérica (P22) El número Real (P24) Resolución numérica de ecuaciones (P25) Series numéricas (P26) Interpolación (P27) Nomografía	(P28) Teoría de conjuntos (P29) Autovalores y autovectores (P30) Estructuras Algebraicas (P31) Espacios Vectoriales

Durante esta etapa dejan de estudiarse las praxeologías relativas a la resolución de ecuaciones, tales como: P2 ecuaciones algebraicas, P3 ecuaciones exponenciales y logarítmicas, P21 aproximación numérica, El número real (P22), resolución numérica de ecuaciones (P24), series numéricas (P25), interpolación (P26) y nomografía (P27). En el caso de P21, P24 y P26 pasan a formar parte de nuevos espacios curriculares dedicados a los métodos y análisis numéricos que se harán cargo de la resolución numérica de ecuaciones (sobre todo a partir de la creciente influencia de las calculadoras científicas y posteriormente de las computadoras) entre otros nuevos tópicos de interés, y no vinculado al álgebra como ocurría en las etapas anteriores.

Las praxeologías determinantes, números complejos, SEL, análisis combinatorio, cuádricas, geometría analítica del plano y espacio y cónicas (P1, P5, P8, P11, P14, P16 y P17 respectivamente) permanecen en esta etapa. En cuanto a sistemas de coordenadas, (P15), el estudio de los sistemas coordenados corresponde a: cartesianos ortogonales, polares, cilíndricos y esféricos.

 BY-NC

Entre las praxeologías que se incorporan, por ejemplo, P29 autovalores y autovectores, aporta una nueva justificación al estudio de polinomios (P18) ya que son requeridos en el cálculo de autovalores y, por otra parte, permite una mayor interacción entre el grupo P29 ↔ P20 ↔ P23, es decir entre autovalores y autovectores, transformaciones lineales y matrices. Además, esta praxeología permite estudiar nuevas propiedades de las transformaciones lineales y algunas aplicaciones a la física y la mecánica. Respecto de matrices (P23), en esta etapa se amplía el estudio de estas incorporando los espacios fundamentales asociados (espacio de columnas, de renglones, nulo).

Destacamos aquí la interacción *escuela* ↔ *disciplina* a partir de la resolución CS 68/94 de la UTN que unifica las praxeologías matemáticas del ciclo común de la formación de los ingenieros. Además, la *disciplina* influye sobre el *área* ya que en este periodo las praxeologías se perfilaron más hacia la resolución de problemas lineales: la teoría de espacios vectoriales y las transformaciones lineales por una parte se aúnan con el estudio vectorial de la geometría lineal del plano y del espacio. Las cónicas y las cuádricas parecen estar de alguna manera descolgadas de esta vinculación entre AL y GA, cosa que cambiará en la etapa que sigue.

La Figura 6 sintetiza la red praxeológica de la etapa E3. Con verde se indican las praxeologías y las relaciones que se agregan y con rojo las que se pierden en esta etapa.

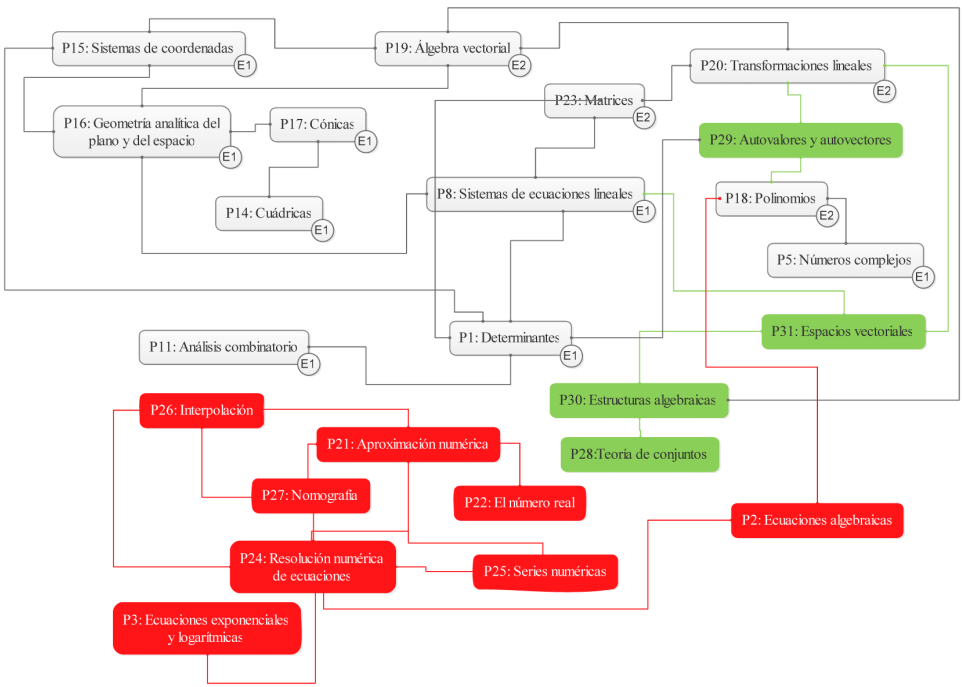

Figura 6. Red praxeológica de la etapa E3

4.4. *Etapa E4: Periodo actual*

En esta etapa se analizan 430 documentos: 320 planes y 110 programas de estudio. En esta etapa ya hay un ciclo básico común de formación de ingenieros, regulada por el CONFEDI y/o la CONEAU para las universidades del país. Las praxeologías que se proponen para AyGA en esta etapa se sintetizan en la tabla VII.

TABLA VII
Síntesis de las praxeologías en la etapa E4

Praxeologías que se mantuvieron	*Praxeologías que desaparecieron*	*Praxeologías que se incorporaron*
(P1) Determinantes (P5) Números complejos (P8) Sistemas de ecuaciones lineales (P14) Cuádricas (P15) Sistemas de coordenadas (P16) Geometría analítica del plano y espacio (P17) Cónicas (P18) Polinomios (P19) Álgebra Vectorial (P20) Transformaciones lineales (P23) Matrices (P29) Autovalores y autovectores (P31) Espacios Vectoriales	(P11) Análisis Combinatorio (P28) Teoría de conjuntos (P30) Estructuras Algebraicas	(P32) Formas bilineales y cuadráticas

Las formas bilineales y cuadráticas (P32) se incorpora como un complemento de las praxeologías cónicas y superficies (P14 y P17) que permite un estudio geométrico - algebraico de las curvas y las superficies. De esta forma, las praxeologías P14 y P17 que antes fueron relativas al área GA únicamente, ahora tienen ya un correlato con el AL. Lo mismo ocurrió en la etapa E3 con el álgebra vectorial, las transformaciones lineales y los espacios vectoriales (P19, P20 y P31, respectivamente). Por otra parte, P32 vincula otras praxeologías de los programas: transformaciones lineales (P20), matrices (P23), autovalores y autovectores (P29) y espacios vectoriales (P31); además de P14 y P17 como hemos mencionado.

En cuanto a los determinantes (P1), éstos quedan relegados a ser una característica numérica de una matriz cuadrada y solo se estudian propiedades relacionadas con la inversibilidad de una matriz o con el cálculo de autovalores de matrices y transformaciones lineales. La resolución de los SEL (P8) se enfoca en el escalonamiento de matrices, se reformula el teorema de Rouché–Frobenius en términos de pivotes y variables libres. De esta forma los determinantes (P1) pierden relevancia en el cálculo del rango de una matriz.

 CC BY-NC

El estudio de los números complejos (P5) vuelve a asociarse al estudio de las ecuaciones polinómicas por ser estas raíces de polinomios característicos; es decir, P5 se estudia porque resuelve completamente el problema de determinar autovalores para matrices con entradas complejas. Por otra parte, la teoría de conjuntos (P28) dejó de formar parte de AyGA para estudiarse en los cursos de Probabilidad y Estadística para ingeniería. La visión estructuralista de la matemática pierde fuerza durante esta etapa. Las consecuencias de esto en los programas de AyGA es que P30 (estructuras algebraicas) pasó a estudiarse casi exclusivamente en el espacio curricular "Matemática Discreta" que corresponde a la carrera de Ingeniería en Sistemas. Por otra parte, la praxeología relativa a combinatoria (P11) en algunos casos pasó a estudiarse en "Probabilidad y Estadística", mientras que en otros en "Matemática Discreta".

El estudio de las cuádricas (P14), se redujo al de la ecuación reducida de la superficie cuádrica en coordenadas cartesianas y la descripción de las curvas que resultan por la intersección con planos paralelos a los planos coordenados. La praxeología autovalores y autovectores (P29), favorece el estudio matricial de las ecuaciones cuádricas. Las secciones cónicas (P17), reducido a hipérbola, elipse, parábola y circunferencia sí tiene registros más difundidos de estudiarse no solo como lugar geométrico, sino que la ecuación completa de segundo grado se estudia matricialmente con ayuda de autovalores y autovectores para rototraslaciones.

El resto de las praxeologías, sistemas de coordenadas (P15), geometría analítica del plano y espacio (P16), polinomios (P18), álgebra vectorial (P19), transformaciones lineales (P20), matrices (P23) y espacios vectoriales (P31), no presentan modificaciones sustantivas respecto de la etapa anterior.

Respecto de las 14 praxeologías que se mantuvieron en la etapa E4, podemos decir que la consolidación de los saberes a estudiar en AL y GA en el ciclo básico para ingenierías parece haber alcanzado un consenso no solamente dentro de Argentina, sino a nivel regional. Esta codeterminación desde el nivel *sociedad* ↔ *escuela* opera de la siguiente manera: los países que conforman el MERCOSUR[1] acordaron una serie de estándares en las carreras universitarias (ARCUSUR[2]) para validar títulos universitarios a nivel regional. Se establecen regulaciones fuertes desde la *noósfera*, adaptando los planes de estudio a estos estándares, que incluyen desde áreas del ciclo básico y superior y la carga horaria mínima, hasta los contenidos mínimos comunes (las praxeologías) a considerar en los programas de las materias.

La Figura 7 sintetiza la red praxeológica de la etapa E4. Con verde se indican las nuevas praxeologías y las relaciones que se establecen en esta etapa, y con rojo las que se pierden.

[1] Mercado Común del Sur (MERCOSUR): https://www.mercosur.int/

[2] ARCUSUR: https://www.arcusur.org

(cc) BY-NC

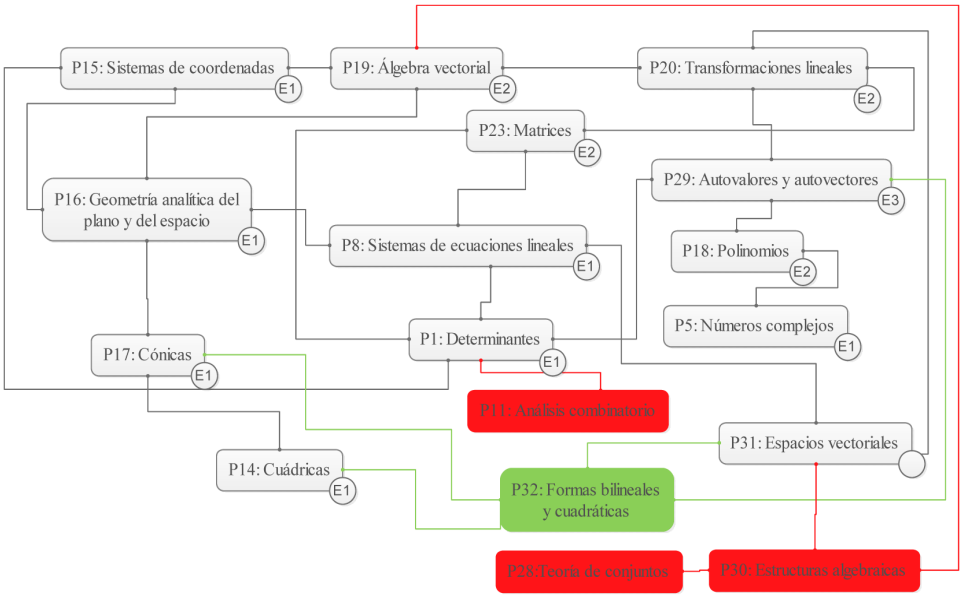

Figura 7. Red praxeológica de la etapa E4

5. Discusión

En una investigación previa, hemos identificado las características de las carreras de ingeniería en Argentina, desde su creación por 1810 y los principales cambios, con base en 504 planes de estudio utilizando la escala de los niveles de codeterminación didáctica (Sabatinelli y Llanos, 2024). En este trabajo, ingresamos en un análisis que es más específico de los niveles inferiores de dicha escala, dado que el análisis aquí se circunscribe a la descripción de las praxeologías que forman parte de 125 programas de estudio de las asignaturas de AyGA. La generación del esquema de redes praxeológicas ha permitido describir las praxeologías en las cuatro etapas de la investigación, a la vez que se puede analizar la evolución de estas, distinguiendo las praxeologías que permanecen entre las etapas, las que dejan de estudiarse y las que se incorporan entre una etapa y la siguiente. Daremos ahora una discusión para justificar los cambios descriptos a través de la escala de niveles de codeterminación didáctica. Inicialmente sintetizamos en la tabla VIII las principales características desde los niveles *sociedad* hasta *área* en las cuatro etapas, indicando con (+) lo que se agrega respecto de la etapa anterior.

 BY-NC

TABLA VIII
Características de algunos niveles de la escala por etapa

	Etapa E1		*Etapa E2*	*Etapa E3*	*Etapa E4*
Sociedad	S_1: Sociedad colonial (dependencia española).	S_2: Sociedad Argentina independiente.	S_3: Cambio de modelo de agroexportador a sustitución de importaciones.	S_4: Modelo neoliberal.	S_5: Desarrollo industrial en el país: la formación de ingenieros paso a ser política de estado.
Escuela	E_1: Academias militares, de Náutica y de Dibujo.	E_2: Universidades Nacionales argentinas.	E_3: Universidad obrera (posteriormente UTN).	E_2 y E_3.	E_2 y E_3, con más de 30 facultades de ingeniería cada una.
Pedagogía	Temas de formación básica (matemática, física y mecánica) y temas de formación militar.	División entre un "ciclo básico" (matemática, física y química) y un "ciclo profesional" o "de especialización" según la carrera. Los contenidos mínimos para el ciclo básico no coinciden entre las universidades.			Establecimiento del Ciclo básico común y superior. Unificación de los planes de estudio y propuesta de contenidos mínimos.
	Acreditación de las materias: examen final único. Se admite la posibilidad de rendir como "libre"				Se admite examen "libre" / No se admite examen "libre"
					Se incorpora la tesina de grado como trabajo final
	Turno matutino		Turno matutino y nocturno (adaptado al trabajador de la universidad obrera)	Turno matutino, vespertino y nocturno	
Disciplina	D_1: Matemática elemental. Resolución de *problemas concretos* utilizando aritmética o geometría	D_2: Impacto del desarrollo del álgebra: mayor nivel de abstracción y generalización.		D_3: Entrada a los espacios vectoriales. Vinculación AL y GA	D_5: (+) Transformaciones lineales y bilineales.
		Matemática vinculada a la física. Interés por abordar *problemas propios de la ingeniería.*			
Área	Aritmética, Geometría (euclideana), Aritmética superior (álgebra)	Geometría analítica, Álgebra, Cálculo infinitesimal	(+) Métodos numéricos	(+) Matemática Discreta	

En la tabla se sintetizan los cambios de los niveles superiores de la escala, que, junto con los desarrollos propios de la Matemática, determinan los *temas* de AyGA. Hemos analizado en el trabajo la permanencia o no de las praxeologías incluidas en dichos programas en el tiempo, y bajo qué forma.

Como hemos analizado, sólo algunas praxeologías (*tema* en la escala) estuvieron presentes desde la etapa E1 y permanecen, aunque con modificaciones, y otras se agregaron en las etapas sucesivas, como se mencionó en la tabla anterior. Describimos los cambios en las praxeologías que actualmente corresponde estudiar, y cómo éstas fueron incorporadas en cada etapa:

- Los determinantes (P1) con un lugar preponderante en la primera etapa (E1) quedaron relegados en importancia debido a que computacionalmente es más eficiente el cálculo de rangos a partir del escalonamiento de matrices; de ahí que los determinantes permanecen, pero como una característica numérica asociada a una matriz cuadrada y para el cálculo de autovalores y autovectores.
- Los cambios en los números complejos (P5), están vinculados con las reformas introducidas por las "matemáticas modernas". Antes y después de dicha reforma (E1 y E4), P5 se limitó a la ampliación del campo numérico, mientras que en la E2 se propicia un enfoque conjuntista, por tal motivo P5 adopta estructura de cuerpo.
- Las modificaciones en los SEL (P8) identificadas, no son relativas tanto a los métodos de resolución sino a la vinculación e interpretación que éstos pudieran tener con los espacios vectoriales (P31). En muchos casos dentro del AL resulta de mayor importancia las preguntas acerca de la compatibilidad o la existencia de soluciones no triviales de ciertos SEL que la obtención del conjunto solución en sí.
- Las cuádricas y las cónicas (P14 y P17) tuvieron un aspecto geométrico permanente, pero no fue hasta la incorporación de las formas bilineales y cuadráticas (P32) durante la etapa E4 que tuvieron un correlato algebraico. Los sistemas de coordenadas también tuvieron una justificación algebraica a partir de la incorporación de las transformaciones lineales y matrices (P20 y P23). Idéntico caso ocurre con la geometría analítica del plano y del espacio (P16) y la incorporación de los espacios vectoriales (P31).

Las demás praxeologías que actualmente conforman E4 complementaron (mayoritariamente desde el punto de vista algebraico) a las que tuvieron un origen geométrico. A saber:

 BY-NC

- El Álgebra vectorial (P19) complementa a la Geometría analítica del plano y del espacio (P16) pero también sirve como agente vinculador con el estudio de los espacios vectoriales (P31).
- Las transformaciones lineales y las matrices (P20 y P23) generalizan desde el álgebra a los sistemas de coordenadas.
- El estudio de los autovalores y autovectores (P29) complementa lo anterior y da lugar a los polinomios (P18), ya no desde un punto de vista de la estructura de anillos, sino desde la búsqueda de las raíces de ciertas ecuaciones polinómicas.

Como mencionamos, otras praxeologías ya no están presentes en E4, es decir, en alguna etapa formaron parte de AyGA pero identificamos que algunas migraron a otras materias y otras dejaron de estudiarse en las facultades de ingeniería.

Entre las que migraron, se encuentran:

- las praxeologías relativas a la resolución de ecuaciones: algebraicas (P2), exponenciales y logarítmicas (P3) y resolución numérica de ecuaciones (P24). Estas praxeologías "migraron" a materias de métodos numéricos y esto se explica porque inicialmente el álgebra consistía en la resolución de ecuaciones, y además en E3 el uso de la calculadora se masificó y en consecuencia las técnicas numéricas predominaron por sobre las algebraicas.
- las praxeologías que estudiaban números y sus aproximaciones, ya sea para la resolución de ecuaciones, para el tratamiento de cantidades aproximadas y la propagación de errores: fracciones continuas (P4), aproximación numérica (P21), el número real (P22) y series numéricas (P25) "migran" a diferentes áreas. Entre ellas, aproximación numérica (P21) e interpolación (P26) pasan a métodos numéricos; el número real (P22) y series numéricas (P25) a Cálculo o Análisis Matemático; análisis combinatorio (P11), teoría de conjuntos (P28) y estructuras algebraicas (P30) a Matemática Discreta.

Entre praxeologías que se eliminaron de los programas de AyGA identificamos que:

- algunas fueron absorbidas por la escuela media: trigonometría rectilínea (P6), trigonometría esférica (P7) aritmética (P10), geometría elemental (P12) y cosmografía (P13), producto de la proliferación de la enseñanza media en Argentina, desde mediados de 1860; y, en consecuencia, la transformación en el perfil del ingresante a la facultad de ingeniería.

- la incorporación de la calculadora y otros medios electrónicos de cálculo volvió obsoleto al estudio nomográfico (P27).
- la teoría general de ecuaciones (P9) pierde sentido con la concepción del álgebra vinculada al estudio de estructuras (E2). Si bien P9 es un tema del álgebra, no lo es para AyGA en el ciclo básico de los ingenieros.

Como hemos enfatizado, los cambios en el nivel disciplina están vinculados con las transformaciones de los niveles superiores de la escala: *sociedad, escuela* y *pedagogía*. En particular en la etapa E4, identificamos un ciclo básico común que está definido por agentes de la noósfera como el CONFEDI, y que luego está ratificado por la misma noósfera a través de organismos de control y certificación (CONEAU, ARCUSUR). Por otra parte, existe otro agente dentro de la noósfera que también afecta a los niveles de *pedagogía*, *disciplina*, *área* y *sector*; se trata de las corrientes filosóficas que perfilan las formas de *pensar* la matemática en la comunidad productora del saber en un determinado momento. El caso paradigmático (aunque en esta investigación identificamos otros además de este) es el de la llamada *matemática moderna* (Smithies, 1963; Font, 2003). Todos estos condicionantes operan en niveles en donde el profesor prácticamente no tiene injerencia. Consideramos, sin embargo, que al profesor le concierne la propuesta de un estudio conjunto de estas praxeologías y no tratarlas como "islas" dentro de AyGA como ocurre. Además, le corresponde evaluar la importancia de la utilidad de lo que se propone en nombre de un estudio con sentido para lo que sería la práctica profesional de un ingeniero.

6. Conclusiones

La red praxeológica propia de cada etapa expuesta en esta investigación da cuenta de que la permanencia, modificación, eliminación o incorporación de ciertas praxeologías en los programas de las materias de AyGA se explica por necesidades de orden superior, que afectan a la matemática a enseñar; y por supuesto por los cambios que se han dado al interior de la matemática. La *escala de los niveles de codeterminación didáctica*, se constituye como una herramienta idónea para poder identificar estos cambios que afectan a la *disciplina* (matemática), al *área* (AL y GA) y a los *temas*, es decir las praxeologías incluidas en los programas.

Del análisis relativo a las praxeologías de cada etapa, destacamos que, en los programas de estudio, no se identificaron praxeologías aisladas; es decir, la propuesta es estudiarlas juntas, cosa que habitualmente no ocurre. Los planes y

 BY-NC

programas de estudio y la red praxeológica que de ellos hemos reconstruido nos permite dar cuenta de que los saberes propuestos para estudiar en AyGA no deben ser escindidos o tratados separadamente. Por tal motivo, nos proponemos conocer también la vinculación entre AL y GA propuesta en los libros de texto que es otra de las referencias privilegiadas del profesor, y concluir en consecuencia, si la escisión es responsabilidad de éste, o está en el libro.

Declaración de contribución y autoría

Pablo Agustín, Sabatinelli: Investigación, Análisis de datos, Redacción en borrador original, Revisión y Edición.

Viviana Carolina, Llanos: Investigación, Marco Teórico, Análisis formal, Supervisión, Revisión y Edición.

Referencias

Bourbaki, N. (1950). The Architecture of Mathematics. *The American Mathematical Monthly*, *57*(4), 221-232. https://doi.org/10.2307/2305937

Bosch, M., y Gascón, J. (2014). Introduction to the Anthropological Theory of the Didactic (ATD). En A. Bikner-Ahsbahs y S. Prediger (Eds.), *Networking of Theories as a Research Practice in Mathematics Education. Advances in Mathematics Education* (p. 67-83). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-05389-9_5

Boyer, C. B. (1944). Analytic geometry: The discovery of Fermat and Descartes. *The Mathematics Teacher*, *37*(3), 99-105. https://doi.org/10.5951/MT.37.3.0099

Carlson, D, Johnson, C. R., Lay, D. C. y Porter, A. D. (1993). The Linear Algebra Curriculum Study Group recommendations for the first course in linear algebra. *The College Mathematics Journal*, *24*(1), 41-46. https://doi.org/10.1080/07468342.1993.11973504

Chevallard, Y. (1985). *La transposition didactique: du savoir savant au savoir enseigné*. Grenoble: La Pensée sauvage.

Chevallard, Y. (1999). El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *19*(2), 221-266.

Chevallard, Y. (2001). Aspectos problemáticos de la formación docente. En *XVI Jornadas de Seminario Interuniversitario de Investigación en Didáctica de las Matemáticas*. Universidad de Zaragoza. http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=15

Chevallard, Y. (2013). Enseñar Matemáticas en la Sociedad de Mañana: Alegato a Favor de un Contraparadigma Emergente. *Journal of Research in Mathematics Education, 2*(2), 161-182. https://doi.org/10.4471/redimat.2013.26

Chevallard, Y. (2019). Introducing the anthropological theory of the didactic: An attempt at a principled approach. *Hiroshima journal of mathematics education*, *12*, 71-114. https://doi.org/10.24529/hjme.1205

Cristal, Y. (2020). *150 años de ingeniería argentina.* Consejo Federal de Decanos de Ingeniería de la República Argentina.

Dorier, J-L. (1995). A general outline of the genesis of vector space theory. *Historia Mathematica*, *22*(3), 227-261. https://doi.org/10.1006/hmat.1995.1024

Euler, L. (1750). Sur une contradiction apparente dans la doctrine des lignes courbes. *Memoires de l'Academie des Sciences de Berlin, 4*, 219-223.

Euler, L. (1802). *Vollständige Anleitungzur Algebra: Von den verschiedenen Rechnungsarten, Verhältnissen und Proportionen* (Vol. 2). Kaiserlichen Akademieder Wissenschaften.

Fiorucci, F. (2014). Maestros para el sistema de educación pública. La fundación de escuelas normales en Argentina (1890-1930). *Revista Mexicana de Historia de la Educación*, *2*(3), 25-46. https://doi.org/10.29351/rmhe.v2i3.34

Font, V. (2003). Matemáticas y cosas. Una mirada desde la Educación Matemática. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana*, *10*(2), 249-279.

Español González, L., Martínez García, M., Álvarez Polo, Y. y Vela, C. (2010). Julio Rey Pastor y el análisis algebraico: de los apuntes de 1914-16 a tres libros de texto (1917-1925). *Zubía*, *28*, 139-166.

Katz, V, y Barton, B. (2007). Stages in the history of algebra with implications for teaching. *Educational Studies in Mathematics, 66*(2), 185-201. https://www.jstor.org/stable/27822699

Kline, M. (2012). *El pensamiento matemático. De la antigüedad hasta nuestros días.* Alianza Editorial.

Massare, B. (2014). De los neumáticos a los chips: el rol de la I+D en el desarrollo de calculadoras y computadoras en la División Electrónica de FATE (1969-1982). En *Memorias del III Simposio de Historia de la Informática de América Latina y el Caribe (SHIALC)* (p. 78-91). Universidad de la República, Universidad Católica del Uruguay, Universidad ORT Uruguay, Universidad de Montevideo y Universidad de la Empresa. https://clei.org/site/wp-content/uploads/2022/11/proceedingsSHIALC2014.pdf

Otero, M. R. (2021). *La formación de profesores: recursos para la enseñanza por indagación y el cuestionamiento*. Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires. http://hdl.handle.net/11336/163090

Padilla y Arcos, P. (1753). *Curso militar de mathematicas, sobre las partes de estas ciencias, pertenecientes al Arte de la guerra, para el uso de la Real Academia establecida en el Quartel de Guardias de Corps*. Antonio Marin. http://hdl.handle.net/2117/173258

Plan de Estudios de 1920 [Ministerio de Justicia e Instrucción Pública]. Se establece el plan de estudios para las carreras de la de la Facultad de Ciencias Matemáticas Físico-Químicas y Naturales aplicadas a la industria y Escuela Industrial anexa de la Universidad Nacional del Litoral. 22 de julio de 1920.

Resolución 68 de 1994 [Consejo Superior de la Universidad Tecnológica Nacional]. Se establece la parte homogénea del diseño curricular de las carreras de la Universidad Tecnológica Nacional. 22 de febrero de 1994.

Resolución 115 de 1810 [Propuesto por el Director y aprobado por la Junta]. Plan de la Escuela de Matemáticas. 10 de agosto de 1810.

 BY-NC

Sabatinelli, P., Llanos, V. C. y Otero, M. R. (2021). Álgebra Lineal y Geometría Analítica en carreras de Ingeniería: reporte de investigaciones. *Ikastorratza, e-Revista de didáctica*, *26*, 21-51. https://doi.org/10.37261/26_alea/2

Sabatinelli, P. y Llanos, V. C. (2022). La escisión de la geometría analítica y el álgebra lineal en la enseñanza universitaria: ¿problema epistemológico o didáctico? *Revista Internacional de Pesquisa em Didática das Ciências e Matemática*, *3*, e022002-e022002. https://periodicoscientificos.itp.ifsp.edu.br/index.php/revin/article/view/638

Sabatinelli, P., y Llanos, V. C. (2024). Álgebra Lineal y Geometría Analítica en la formación de ingenieros en Argentina desde 1810 a la actualidad: análisis macrodidáctico. *Revista Educación Matemática*, *36*(1), 121-156. https://doi.org/10.24844/EM3601.05

Smithies, F. (1963). What Is Modern Mathematics? *The Mathematical Gazette*, *47*(362), 278-298. https://doi.org/10.2307/3614069

Stewart, S., Axler, S., Beezer, R., Boman, E., Catral, M., Harel, G., McDonald, J., Strong, D., y Wawro, M. (2022). The Linear Algebra Curriculum Study Group (LACSG 2.0) Recommendations, *Notices of American Mathematical Society, 69*(5), 813-819. https://dx.doi.org/10.1090/noti2479

Zalamea, F. (2011). Grandes corrientes de la matemática en el siglo XX. III. La matemática de las estructuras 1940-1970. *Boletín de Matemáticas, 18*(2), 143-156. https://revistas.unal.edu.co/index.php/bolma/article/view/40837

Autores

Pablo Agustin Sabatinelli. Núcleo de Investigación en Educación en Ciencia y Tecnología (NIECyT). Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires (UNICEN), Tandil, Argentina. Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura. Universidad Nacional de Rosario, Rosario, Argentina. pablosabatinelli@gmail.com

https://orcid.org/0000-0001-9686-3780

Viviana Carolina Llanos. Núcleo de Investigación en Educación en Ciencia y Tecnología (NIECyT). Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires (UNICEN), Tandil, Argentina. Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET), Argentina. vcllanos@niecyt.exa.unicen.edu.ar

https://orcid.org/0000-0003-0433-2654

(cc) BY-NC