

MARÍA HERLINDA CONSUELO MARTÍNEZ DE LA MORA,
ÚLISES XOLOCOTZIN ELIGIO, RICARDO QUINTERO ZAZUETA

LAS RELACIONES ENTRE ENTIDADES COMPONENTES DEL VALOR POSICIONAL Y SU DIDÁCTICA

THE RELATIONSHIPS BETWEEN COMPONENT ENTITIES OF PLACE VALUE AND ITS DIDACTIC

RESUMEN

Se presenta una parte de una investigación referente al valor de posición y su didáctica. En tal investigación se diseñó un estudio para explorar el potencial de un enfoque de relaciones de la estructura del valor de posición. Esta se hizo mediante la aplicación de un curso, el cual posibilita que el estudiante atienda a las relaciones entre componentes de la estructura del valor posicional. La aplicación didáctica se hizo en dos grupos de 3° de primaria. En uno de ellos se usó la ubicación de las unidades de cada orden de magnitud en el espacio dispuesto en la hoja de trabajo, con campos adyacentes. Y en el otro se utilizó la representación de las unidades en el ábaco. El propósito consiste en presentar efectos del curso didáctico respecto a las relaciones que atienden los estudiantes correspondientes a cada orden de magnitud. Ello necesario para que los alumnos evoquen y comprendan dichas relaciones.

PALABRAS CLAVE:

- *Relaciones*
- *Estructura*
- *Valor de posición*
- *Polinomio*

ABSTRACT

A part of an investigation regarding the position value and its didactics is presented. A study was designed to explore the didactic potential of a relation-structure approach to positional value. The research was made by means of the application of a course. This enabled the student to attend the relations between components of positional value structure. The didactic application was made in two groups of 3rd. of elementary school. In one of them the location of the units of each order of magnitude in the space arranged in the work sheet with adjacent fields was used. In the other group the representation of the units in the abacus was used. The research purpose is to present effects of the didactic course respect. To the meaning that the students give to the relations attended to each order of magnitude. This is necessary for students to evoke and understand these relationships.

KEY WORDS:

- *Relation*
- *Structure*
- *Positional value*
- *Polynomial*



RESUMO

Uma parte de uma investigação sobre o valor da posição e sua didática é apresentada. Nessa pesquisa, um estudo foi projetado para explorar o potencial de uma abordagem de relacionamento e estrutura de valor de posição. Isso foi feito através da aplicação de um curso. Que permite ao aluno atender às relações entre os componentes da estrutura do valor do local. A aplicação didática foi feita em dois grupos do terceiro grau da escola primária. Em um deles, a localização das unidades de cada ordem de magnitude foi utilizada no espaço fornecido na folha de trabalho, com campos adjacentes. E no outro, a representação das unidades no ábaco foi utilizada. O objetivo é apresentar os efeitos do respeito ao curso didático, na imortância que os alunos dão para as relações ligadas a cada ordem de magnitude. Isso é necessário para que os alunos evoquem e compreendam essas relações.

PALAVRAS CHAVE:

- *Relações*
- *Estrutura*
- *Valor de posição*
- *Polinômio*

RÉSUMÉ

Une partie de l'enquête sur la valeur de position et ses didactiques est présentée. Dans cette recherche, une étude a été conçue pour explorer le potentiel d'une approche relationnelle de la structure de valeur de position. Celle s'est faite par l'application d'un cours. Ce qui permet à l'étudiant d'assister aux relations entre les composants de la structure de la valeur de position. L'application didactique a été faite dans deux groupes de CE2. Dans l'un d'eux, l'emplacement des unités de chaque ordre de grandeur était utilisé dans l'espace prévu à cet effet dans la feuille de travail, avec les champs adjacents. Et dans l'autre, la représentation des unités dans l'abaque était utilisée. Le but est de présenter les effets du cours didactique en ce qui concerne les relations auxquelles les étudiants font face en fonction de chaque ordre de grandeur. Cela est nécessaire pour que les étudiants évoquent et comprennent ces relations.

MOTS CLÉS:

- *Relations*
- *Structure*
- *Valeur de position*
- *Polynôme*

1. INTRODUCCIÓN

Una primera aportación de esta investigación consiste en explorar el potencial de un enfoque centrado en las relaciones y estructura, para la enseñanza y comprensión del valor de posición. Esto implica una perspectiva distinta de los enfoques actuales para la enseñanza del valor de posición, ya que generalmente se ha pasado por alto este sentido relacional y se centran; en las agrupaciones, en los

tamaños de la magnitud longitudinal o en los tipos de unidades respecto al valor posicional (ej., unidades, decenas, centenas, etc.), también llamado valor relativo del número de acuerdo a la posición.

Este trabajo propone que para comprender la estructura numérica implicada en el valor de posición, el estudiante necesita prepararse enfocándose en las relaciones entre entidades que conforman dicha estructura. Ello motivó un estudio en el que se comparó el desarrollo de tareas didácticas utilizando la técnica de adiciones sucesivas en dos grupos. En un grupo se empleó una hoja de trabajo con campos internos adyacentes, usando colecciones de palitos atados con ligas para presentar de manera no simbólica los coeficientes de los distintos órdenes de magnitud. En otro grupo se realizaron tareas análogas utilizando un ábaco. Con ello se efectuó la investigación exploratoria y cualitativa.

Actualmente, el discurso de la educación matemática, para la enseñanza y el aprendizaje de este tema, oscila entre el Constructivismo (aunado a la solución de problemas) y la Lógica de conjuntos. En ellos no se atiende a las relaciones de la estructura del valor posicional, durante la enseñanza de este tópico. Se plantea entonces la necesidad de trascenderlos enfocándose en las relaciones de la estructura general del polinomio, $z = a_n \times 10^n + a_{n-1} \times 10^{n-1} + \dots + a_1 \times 10^1 + a_0 \times 10^0$, esto implica que se atienda a la base, el coeficiente y el exponente de cada orden de magnitud, durante el curso didáctico del valor de posición. Con esta perspectiva, concierne a este artículo la pregunta de investigación ¿Cuáles aciertos, errores y dificultades muestran los estudiantes durante el curso del aprendizaje del valor de posición cuyo fundamento está en las relaciones entre entidades de esta estructura?

Todo lo cual motivó la presente aproximación al valor de posición que exhibe los componentes de esta estructura. El hecho de poder ostentar ante los ojos de los alumnos cada componente y mostrar como corresponde relacionarlos, tanto para generar las unidades, como para representarlas con la notación desarrollada es fundamental para que los alumnos puedan otorgar sentido a la “llevada” (esto es, el paso de un orden de magnitud a otro) que se utiliza en los algoritmos aritméticos. A partir de dicha pregunta se plantea una propuesta didáctica.

2. MARCO DE REFERENCIA

La investigación que se reporta incluye la presentación de una propuesta teórica que replantea aspectos básicos para la comprensión del valor de posición, es una de

las aportaciones de este trabajo. Esta propuesta se denomina Curso de relaciones de la estructura del valor de posición CREVP y se enfoca en las relaciones entre las entidades componentes de la estructura del valor posicional. Cabe enfatizar que se incluye un marco de referencia en vez de una teoría por que de aquí se desprende poder elaborar una teoría a partir de la investigación aquí mostrada. Se parte de dos referentes fundamentales: la estructura general del polinomio y la técnica de adiciones sucesivas.

El enfoque aquí planteado prioriza la enseñanza de la estructura del valor posicional a través de las entidades y relaciones que la conforman. Tal enfoque enfatiza uno de los aspectos centrales de la enseñanza de las matemáticas. Esto consiste en lograr la comprensión de la construcción de patrones, como lo expresa Nickerson (2011): “En el corazón de las Matemáticas está la búsqueda de la regularidad, de la estructura, de los patrones” (p.3). Ubicar a los alumnos en esta perspectiva, les permitirá a los estudiantes situarse en una mejor posición para el aprendizaje subsecuente de la disciplina matemática. Pues, con ello se hace posible que los alumnos puedan generar patrones numéricos, al centrarse en las relaciones implicadas en la estructura general del polinomio, mediante la aplicación de la técnica de adiciones sucesivas. Cabe añadir, que es ampliamente conocido que con el valor posicional se puede representaar cualquier entero positivo. Sin embargo, lo que no es así, es que con el polinomio al que hemos hecho referencia, se pueden visibilizar las relaciones allí implicadas, que le dan estructura. Precisamente, para poder visibilizar estos componentes de la estructura del valor posicional se requiere hacer añadidos sucesivos, de allí la técnica denominada así, que se utiliza aquí.

En la actualidad, el sistema decimal se enfatiza durante la educación básica. A diferencia de ello, en el enfoque de relaciones de la estructura general de un polinomio se necesita utilizar distintas bases. Pues el hecho de utilizar solamente una base (la base diez) impide que el estudiante distinga las relaciones entre los componentes del valor posicional, dado que el alumno se fija únicamente en los factores de diez.

2.1. Relaciones entre los componentes del polinomio, el orden de magnitud; exponente, coeficiente y base

Cuando se tiene una cantidad, la representación algebraica de ello reside en un polinomio. Por lo cual, la teorización propone sustentar la enseñanza del valor de posición en las relaciones implicadas en la estructura general del polinomio ya que una expresión numérica anotada con cifras indo-arábicas corresponde a un

caso particular de dicha estructura. Es decir, mediante los signos indo-arábigos se puede presentar cualquier entero positivo.

Para ello, se necesita hacer explícitos los componentes de cada término del polinomio. Esto se presenta en base diez. $z = a_n \times 10^n + a_{n-1} \times 10^{n-1} + \dots + a_1 \times 10^1 + a_0 \times 10^0$. Estos componentes son; la base elevada al exponente, multiplicados por coeficientes que son menores que la base, correspondientes a distintos órdenes de magnitud y la suma de los términos da el valor del entero positivo.

Cabe mencionar que en esta investigación se utilizan los números anotados con cifras indo-arábigas con la base explícita mediante un subíndice, por ejemplo para el número ochocientos setenta y tres: $87310, 800 + 70 + 3 = 8 \times 100 + 7 \times 10 + 3 \times 1$. En esta notación, el ocho, el siete y el tres son coeficientes, correspondientes a los primeros tres órdenes de magnitud. En el ejemplo se indica tanto el coeficiente como la base diez elevada al exponente relativo a cada orden de magnitud.

Para que el alumno entienda las relaciones de la estructura del valor posicional se requiere atender a los componentes del valor de cada orden de magnitud; exponente, coeficiente, y base. En ello consiste el sentido que se considera aquí, pues la falta de atención a alguno de estos componentes y sus relaciones repercute en una valoración equívoca del valor de posición. A continuación se describe cada una de dichas relaciones.

2.1.1. *Relación entre coeficiente y orden de magnitud*

El coeficiente determina una cantidad específica de unidades en cualquier orden de magnitud. Así, las colecciones ubicadas en un determinado orden de magnitud corresponden a la cantidad de unidades indicada por el coeficiente, por ejemplo: en el número 217, el coeficiente del orden de magnitud cero indica una unidad, el coeficiente del 1er orden de magnitud indica 2 unidades.

<i>Base 7</i>	<i>1er orden de magnitud</i>	<i>Orden de magnitud 0</i>
21 ₇	2	1

2.1.2. *Relación entre coeficiente y base*

La determinación del coeficiente en cualquier orden de magnitud atiende a la restricción base menos uno. Es decir, puede haber tantas unidades en cada orden de magnitud como designe la base menos uno. En el ejemplo 217 los coeficientes

allí registrados se ciñen a la regla, esto es, las cifras 2 y 1 son menores a la base especificada. Tal restricción fue planteada en el taller “Reconstruyendo el número” (García, 2006; García, 2009) como la regla de un juego en la cual si el alumno no atiende a esta regla “la fábrica de números explota”. La restricción también la refirieron otros autores (Slovin, 2010-2011; Andrade y Valdemoros, 2015). Se requiere cumplir con tal regla para generar la unidad del siguiente orden de magnitud. En el curso didáctico, ello se atiende durante las producciones no simbólicas, después se necesita atender al valor de esta relación durante la notación desarrollada y la producción simbólica.

Veamos el ejemplo 217, la base se expresa mediante el subíndice. Con esta base se pueden continuar añadiendo unidades en el orden de magnitud 0 y en el 1er orden de magnitud, hasta llegar a seis unidades en cada uno de los campos adyacentes (porque la base es siete). Sin embargo, la misma notación numérica en base tres, es decir, 21_3 , implica que con solo una unidad más que se añada al 1er orden de magnitud, se requerirá formar la unidad del siguiente orden de magnitud.

<i>Base 7 y 3</i>	<i>1er orden de magnitud</i>	<i>Orden de magnitud 0</i>
21_7	2	1
21_3	2	1

2.1.3. *Relación entre orden de magnitud (exponente) y base*

Esta relación indica el tamaño y la estructura de la unidad de cada orden de magnitud, lo cual implica la relación entre la unidad, determinada por la base, correspondiente a cada orden de magnitud y su ubicación precisa en el campo interno adyacente.

Una vez que el alumno tiene cierto dominio de las relaciones entre órdenes de magnitud, que incluye el exponente, la base y el coeficiente. El estudiante podrá distinguir lo siguiente: una misma notación numérica, pero en diferente base implica diferentes valores numéricos, por ejemplo: 2345, es diferente a 2349. También estará en posibilidad de poder establecer valoraciones correspondientes a equivalencias entre diferentes bases, por ejemplo: $107 = 213$. Se plantea la necesidad de que los alumnos se ejerciten en este tipo de equivalencias ya que el logro de este dominio les permitirá entender a profundidad las propiedades numéricas de orden (reflexiva, simétrica y transitiva) y del cardinal (asociativa, conmutativa y distributiva).

<i>Notación numérica</i>	<i>1er orden de magnitud</i>	<i>2do orden de magnitud</i>	<i>Orden de magnitud 0</i>
21_{10}		2	1
210_3	2	1	0

En el ejemplo se muestra un valor numérico que se expresa en esta notación: 2110 , y su equivalente en base 3. Así, se observan las unidades determinadas por la base correspondientes a cada orden de magnitud y su ubicación precisa en el campo interno adyacente.

3. MÉTODO

Participaron 59 alumnos de tercer grado de una Escuela Primaria ubicada en la ciudad de México, al comienzo del curso escolar. La edad promedio fue de aproximadamente 8 años, siendo 29 niñas y 30 niños. Con respecto a la enseñanza del sistema decimal, es pertinente mencionar que los alumnos de los dos grupos en sus respectivas clases habían hecho tareas numéricas de notación desarrollada. La escuela está inscrita en el sistema de educación pública, por lo cual era de esperarse que sus conocimientos acerca del valor de posición se apegaran a lo especificado en el currículo oficial. Al inicio del curso escolar los niños tienen como antecedente el haber trabajado con números de tres cifras.

El estudio consistió en una aplicación didáctica durante diez sesiones de aproximadamente una hora y media de duración. Esta investigación es empírica y exploratoria, para ello se hizo un análisis cualitativo de las producciones no simbólicas, notación desarrollada y producciones simbólicas de los alumnos, a través de triangular información de los datos recabados, mediante un cuestionario inicial y uno final y las producciones de los estudiantes durante la aplicación didáctica. Con ello se hace posible observar las relaciones que el estudiante genera a través de sus producciones. Los alumnos exhiben tales relaciones con la notación desarrollada solicitada por el docente y a través de las producciones no simbólicas. Aunado a ello, la comparación entre los dos grupos con materiales distintos permite mostrar que la técnica de adiciones sucesivas con los palitos, ligas y la hoja de trabajo exhibe las unidades y estructura de cada orden de magnitud, de una forma que con el ábaco no se ostenta, ya que únicamente se observa la bolita desplazada, no su contenido.

3.1. *Propuesta didáctica basada en las relaciones de la estructura del valor posicional*

La propuesta didáctica del CREVP se divide en tres actividades para propiciar que los alumnos logren atender a los componentes del valor posicional y después a las relaciones pertinentes. La primera de ellas consiste en solicitar al estudiante producciones no simbólicas con materiales manipulables, en un grupo utilizan palitos que colocan los alumnos en un tablero con columnas, en el otro grupo utilizan el ábaco, en este emplean el desplazamiento de las bolitas.



Figura 1. Empleo del ábacó con la técnica de adiciones sucesivas, con error. Número a formar 2114

Esta actividad está basada en una técnica que se presenta como un juego numérico en el taller “Reconstruyendo el número” (García, 2006; García, 2009; García, V. R. y Cardoso, S. G., 2011). Se muestra en la Figura 2.

Una técnica similar ha sido usada por Pengelly, (1991, citado en A. Broadbent. 2004), también como juego didáctico, él la denomina adiciones continuas y utiliza únicamente la base diez y el tablero con columnas con los nombres anotados en la parte superior de cada columna para indicar unidades, decenas y centenas. Este tablero ha sido utilizado en muchas investigaciones sobre el valor de posición: Baroody (1990), Fuson (1990), Vergnaud (2003), por mencionar algunas.



Figura 2. Materiales empleados en el taller “Reconstruyendo el número”

A diferencia de la técnica de adiciones continuas usada por Pengelly (1991, citado en A. Broadbent. 2004), García (2006; García, 2009; García, V. R. y Cardoso, S. G., 2011), en su taller “Reconstruyendo el número” utiliza el tablero con columnas sin los nombres aludidos para las unidades, decenas y centenas. Incluye diferentes bases numéricas, y anota en el pizarrón el número a formar por los alumnos con los materiales manipulables. Este número se anota con cifras indo arábicas y la base explícita como subíndice, por ejemplo: 1213_1 .

La comparación entre los dos grupos que usan distintos materiales con la misma técnica de adiciones sucesivas, es para mostrar como los alumnos que usan el material de palitos, ligas y la hoja de trabajo con columnas (tablero), pueden observar directamente, y por lo tanto están en posibilidad de discernir, las relaciones implicadas en los distintos ordenes de magnitud, mientras que los del grupo que utilizó el ábaco no pueden ver dicha estructura, lo que observa el estudiante es una bolita desplazada en cada barra. Para mostrar este desempeño, el curso que aquí se propone se desarrolla con las actividades siguientes.

3.1.1. *Producción no simbólica*

En este trabajo, a la técnica empleada en el taller “Reconstruyendo el número” con las características especificadas anteriormente, la denominamos técnica de adiciones sucesivas, pues este término describe mejor los añadidos que se hacen sucesivamente. Aunado a que el referente conceptual es distinto, ya que aquí usamos esta técnica vinculada a las relaciones y estructura que contiene el valor de posición. El nombre que damos a la técnica importa y mucho, porque es a partir de la aplicación de la técnica de adiciones sucesivas que se posibilita distinguir los componentes y mostrar como relacionarlos, y a partir de ello observar directamente como las unidades se generan. Específicamente porque son añadidos sucesivos los que se realizan. No son continuos como lo anota Pengelly, (1991, citado en A. Broadbent. 2004). También se distingue del planteamiento de García (2006; García, 2009; García, V. R. y Cardoso, S. G., 2011), respecto a la descripción que presentan concerniente a esta técnica. Las autoras se refieren a su técnica como la parte fundamental del Taller Reconstruyendo el número, y lo explican a partir de planteamientos de Gérard Vergnaud, (2000) destacan que es a través de la abstracción reflexionante: que se establecen dos tipos de relaciones: una es el orden y la otra la inclusión jerárquica.

En la presente investigación el foco está colocado en las distintas relaciones entre entidades que conforman el valor de posición. La técnica con las características mencionadas permite atender a dichas relaciones. Esto es lo que

propicia que los alumnos distinguían las diferentes unidades correspondientes a los diferentes órdenes de magnitud.

A los alumnos se les da primero la instrucción de fijarse en un número escrito en el pizarrón, con cifras indo arábicas, y la base señalada con un subíndice, por ejemplo 1213_1 . Este número cada estudiante lo formará con sus respectivos materiales. Como docente indico a los alumnos que tomen una tarjeta. Para ello, los alumnos colocan previamente un mazo de tarjetas boca abajo en su mesa de trabajo, estas tarjetas tienen anotada una cifra indo arábica (en sesiones posteriores se usan dados). El número que aparece allí es la cantidad de palitos a tomar para añadir a su hoja de trabajo (tablero), en el caso del grupo con el ábaco son las bolitas que desplazan, según los coeficientes de cada orden de magnitud, concernientes a cada barra. Este desplazamiento corresponde a los añadidos sucesivos. Se detalla a continuación ejemplificando con el grupo que usa palitos. Con el número indicado en la tarjeta, se pide a los alumnos que añadan ese número de palitos en la columna de la derecha. Los alumnos añadieron palitos en la columna señalada hasta reunir tantas unidades como indicaba la base.

Una vez que reunieron tantos palitos como indicaba la base en esa columna. Se les dio la instrucción - Ata con la liga chica, el número de palitos indicado por la base y coloca, la unidad así formada, en la columna siguiente a la izquierda -. Esto es, la unidad del siguiente orden de magnitud. El mismo proceder para el siguiente orden de magnitud, para ello se utilizó la siguiente columna, y la liga grande. Asimismo se atendió a la restricción, en cada columna puede haber tantas unidades como indica la base menos uno. La instrucción fue - No puedes dejar más palitos de los que dice la base - De igual forma se mencionó que no podían dejar tantos palitos como indicaba la base. (En el transcurso también respecto a las unidades de 1er y 2do orden). Esta se señaló en el campo adyacente correspondiente. Se continúa así, se toman tarjetas para seguir añadiendo unidades hasta formar el número solicitado en el pizarrón. Para ilustrar la sucesión seguida se muestra el siguiente ejemplo, en la Tabla 1, (en el cual los palitos se representan con las pequeñas rayas verticales, las ligas chicas con el trazo que cruza estas rayas y las ligas grandes se representan con el subrayado que indica que todas esas rayas forman una unidad), el número a formar es 1013, se toma el ejemplo en curso, cuando el alumno ya ha añadido 213.

Esta actividad tiene como propósito que el estudiante se fije en que no haya más o igual unidades que las indicadas por la base en cada orden de magnitud. En ello reside atender a la restricción, base menos uno, $b-1$. Aquí se pueden presentar dos casos. El primero consiste en que al añadir más palitos se rebase la cantidad especificada por la base en un orden de magnitud, en cuyo caso se indica que es

necesario formar la unidad del siguiente orden de magnitud, esto es, atar con la liga tres unidades, y colocar esta nueva unidad en el siguiente campo adyacente de la hoja de trabajo, al respecto el ejemplo 1003. El otro caso es que obtenga un número mayor a la base al sacar una tarjeta o con el dado, entonces se muestra que es el momento de formar la unidad que corresponde al siguiente orden de magnitud, (o las unidades que se requiera dependiendo del número que se saque en las tarjetas o con los dados). Se espera también que el alumno reconozca la estructura de la unidad de cada orden de magnitud y se dé cuenta de la cantidad requerida por el coeficiente para cada orden de magnitud en el campo adyacente correspondiente.

En síntesis esta tarea inicia con dos instrucciones. Una consiste en añadir la cantidad suficiente para formar el número anotado en el pizarrón, con la orientación necesaria para formar las unidades de los distintos órdenes de magnitud. La otra corresponde a mantener la restricción base menos uno, para las unidades contenidas en cada orden de magnitud. Cabe resaltar que cada una de las unidades de los diferentes órdenes de magnitud se obtiene al añadir sucesivamente los palitos, el alumno añadirá tantos como lo especifique cada uno de los coeficientes. Posteriormente la misma tarea se efectúa con un sentido de ejercitación. Hay necesidad de enfatizar que durante estas ejercitaciones aparecen errores correspondientes a las relaciones evocadas por los alumnos.

3.1.2. *Notación desarrollada*

Después de la producción no simbólica se solicita a los estudiantes el registro en notación indo-arábiga de los valores relativos a cada uno de los órdenes de magnitud. Esta actividad implica que cada alumno registre en las tarjetas con notación indo-arábiga los valores de cada una de las cifras que componen un número, para ello se requiere atender a los componentes exhibidos, por ejemplo:

$$1235 = 1 \times 52 + 2 \times 51 + 3 \times 50$$

$$1235 = 1 \times (5 \times 5) + 2 \times 5 + 3 \times 1$$

$$1235 = 1 \times 25 + 2 \times 5 + 3 \times 1$$

$$1235 = 25 + 10 + 3$$

Cabe mencionar que la notación del exponente no se emplea ya que el exponente se atiende mediante la aplicación de la técnica de adiciones sucesivas, por ello la notación que se espera efectúen los alumnos corresponde en el ejemplo a la que se muestra en la última expresión, cuyo uso indica implícitamente el exponente.

TABLA I
Ejemplo de producción no simbólica

<i>Base 3</i>	<i>2do orden de magnitud</i>	<i>1er orden de magnitud</i>	<i>Orden de magnitud 0</i>
Se tiene el número 21_3		 Dos unidades de 1er orden	 Una unidad en el orden cero
Si se añaden 2_3 unidades al número registrado en las columnas de la derecha			 Más dos unidades de orden cero
El número resultante es	 Una unidad de 2do orden	Cero unidades de 1er orden	Cero unidades de orden cero
Con cifras indoarábigas el número resultante es 100_3	1	0	0_3

El propósito de esta actividad consiste en exponer las relaciones entre componentes de la estructura del valor de posición, comprendidas por los estudiantes. Cuando los alumnos emplean las cifras indoarábigas en la notación desarrollada, se está presentando las relaciones que ellos van entendiendo, esto es un proceso muy lento, y visibiliza los errores al relacionar los componentes de la estructura del valor posicional. Estas relaciones el alumno las comprende paulatinamente porque el mismo las genera, a partir de atender a los componentes de dicha estructura. A esta actividad se le denomina notación desarrollada. Cabe, resaltar que este proceso es muy lento para algunos alumnos, los errores que se muestran en los resultados dan cuenta de las dificultades que enfrentan los estudiantes. El CREVP permite visibilizar y atender estas dificultades durante el curso.

3.1.3. Producción simbólica

Para alcanzar un suficiente dominio de producción simbólica, implica que el alumno con antelación, de sentido al número anotado en el pizarrón y lo

reproduzca con el material manipulativo, y también que una numerosidad expuesta con material manipulativo la pueda describir anotando con cifras indoarábicas, lo que aquí denominamos notación desarrollada, para que finalmente la producción simbólica tenga sentido. La síntesis de ello aparece en la producción simbólica, los alumnos pueden dar sentido a un número del tipo 1245 y operar con él.

Esta actividad se desarrolla básicamente con tres tareas. La primera consiste en solicitar a los niños formar con los materiales un número al que le añaden o sustraen un monto que como docente les pido. El número resultante corresponde al que registran en sus tarjetas.

Para la siguiente tarea se requiere partir de un número anotado en el pizarrón. Esta vez se solicita a los alumnos formen el valor mediante producción no simbólica en tres bases diferentes y después se les pide que registren en sus tarjetas los números correspondientes a esas bases con notación indo-arábica. Por ejemplo: 1547 en base 3, 6, 8.

La tercera tarea consiste en solicitar a los alumnos hacer equivalencias numéricas entre bases, con cifras indo-arábicas. Por ejemplo: $1235 = 537$. Respecto a la producción simbólica se efectúa en las últimas sesiones, pues se requiere una preparación preliminar antes de llegar a este punto. El propósito de estas tareas reside en que los estudiantes evoquen las relaciones pertinentes entre las entidades componentes del valor posicional.

Es necesario mencionar que con respecto a esta actividad, se alcanzó a aplicar únicamente la 1er tarea. El desarrollo del curso fue insuficiente para que los alumnos lograran resolver las siguientes tareas, pues aún no tenían el suficiente dominio entre la estructura del valor posicional y su relación con los signos indo-arábicos como para enfrentarse a las tareas de producción simbólica en diferentes bases y las equivalencias entre bases.

Con la producción no simbólica y la notación desarrollada que los alumnos realizan, se observa qué componentes del valor posicional atienden y como los relacionan. Con respecto a la producción simbólica, los estudiantes requieren evocar las entidades componentes y relacionarlas como corresponde para el valor indicado por las cifras de los diferentes órdenes de magnitud, para operar con ellas. Cabe reiterar que, se propusieron estas tres tareas respecto a la producción simbólica, pero el tiempo que se destinó en este curso fue claramente limitado para lograr que los estudiantes desarrollaran estos grados de comprensión que permitiesen hacer equivalencias entre diferentes bases. Como se muestra a continuación en los resultados. Motivo por el cual esta producción simbólica se desarrollará en una investigación y artículo posterior.

4. RESULTADOS

En el cuestionario inicial se observó que alrededor de dos terceras partes de los dos grupos de estudiantes podían resolver adiciones de dos y tres dígitos sin inconveniente, ello aparentemente implicaría que dominan el sentido del valor de posición, pues para dar solución a esta tarea ello se requiere. Sin embargo al parecer estas soluciones correctas se muestran como una aplicación mecánica de las reglas para operar los algoritmos, pues en el transcurso didáctico se exhiben diferentes dificultades y errores de los estudiantes al operar con las entidades y relaciones de la estructura del valor posicional.

A diferencia de esos aprendizajes mecánicos, en el CREVP los alumnos logran, mediante la ejercitación, observar y entender pulatinamente de donde y como surge cada una de las unidades de cada orden de magnitud, al atender a las relaciones pertinentes entre entidades y además distinguir la estructura de cada una de dichas unidades, tanto en la producción no simbólica como en la notación desarrollada. Esto ocurre en el grupo que utilizó los palitos, ligas y la hoja de trabajo.

Cabe resaltar que esta investigación tuvo una duración de tres semanas para su aplicación, en esas tres semanas los logros se observan en los siguientes resultados, así como las dificultades que registraron los alumnos se muestran en las taxonomías de errores.

Se reportan aquí tres ítems respecto al cuestionario final, ilustrativos de los desempeños logrados por los estudiantes después del curso. Respecto al grupo que usó la hoja de trabajo, palitos y ligas. Grupo formado por 30 alumnos.

- Forma con los materiales el número 1023. Fueron 19 alumnos los que respondieron correctamente.
- Añade 5 a 1324. Fueron 14 los alumnos que respondieron como corresponde, 2034, incorrectas 6, no contestó 3, sin tarjeta 7.

Cabe mencionar algunos errores que se presentaron;

- un niño anotó 2035, es decir, en la notación marcó otra base,
- un alumno anotó 2034. La notación no corresponde, pues no se diferencia la base del número.

Sustraer 8 a 1104. las respuestas correctas fueron dadas por una tercera parte del grupo, anotaron 304, cuya respuesta fue la que corresponde.

Los siguientes tres casos atañen a notación inadecuada;

- un niño anotó 34,
- Estos alumnos anotaron 3 (al parecer olvidaron registrar el cero),
- fueron dos estudiantes que escribieron 304.

Grupo B, empleó el ábaco.

Dado que en este grupo la solicitud de formar un número con el ábaco puede arrojar datos insuficientes porque la naturaleza del material permite atender únicamente a los coeficientes y aparentemente estar bien. En el ejemplo expuesto en la Figural, se observa que el número de bolitas desplazadas en cada una de las barras corresponde al número solicitado, sin embargo, se atiende allí únicamente al coeficiente, ya que la suma de los números de las tarjetas expuestas no corresponde a 2114.

Se solicitó a los alumnos de este grupo operar adiciones. Se reportan aquí los ítems:

- Añade 5 a 1324. Los alumnos que respondieron correctamente fueron 12, incorrecto 5, no contestó 9.
- Sustraer 8 a 1104, las respuestas correctas fueron dadas por 4 alumnos, incorrectos 17, no contestó 4.

A continuación se presentan dos taxonomías de errores que presentan los alumnos al efectuar producciones no simbólicas y la notación desarrollada respectivamente.

En la Tabla II se refieren 3 categorías correspondientes a la taxonomía de errores de las producciones no simbólicas en el grupo A, que trabajó con el espacio dispuesto en la hoja de trabajo con campos internos adyacentes. En lo que concierne al grupo B que trabajó con el ábaco, no se incluyen tablas de la producción no simbólica, dado que las características del propio material didáctico muestran sólo como unidad las bolitas de cada barra.

Durante la producción no simbólica los alumnos presentan errores que conciernen a las siguientes categorías: (El número correspondiente a cada una de estas categorías C, aparece en la Tabla II en la primera columna, las siguientes columnas conciernen a errores respecto a cada orden de magnitud).

- 1) omisión de entidades; esto específicamente a la omisión del valor del coeficiente (c).
- 2) las relaciones entre entidades; particularmente respecto a la aplicación de relaciones inapropiadas entre base (b) y coeficiente (c).
- 3) estructura de la unidad de cada orden de magnitud.

Al inicio de la producción no simbólica los alumnos requieren prestar atención a aspectos de procedimiento que les permitirá generar las relaciones pertinentes. Durante el procedimiento los alumnos paulatinamente distinguen cual es la base y el coeficiente, en que campo adyacente corresponde colocar las unidades, también requieren atender a que las unidades que están en cada orden de magnitud correspondan a la estructura según el exponente. Esto es una

preparación necesaria para que los niños puedan atender posteriormente a las relaciones entre las entidades del valor posicional. El procedimiento con material manipulativo involucra que el estudiante comience a generar lentamente las relaciones entre entidades del valor posicional. Es decir, el procedimiento permite que los niños atiendan a cada componente, en la medida que los discierne, durante tal procedimiento comienzan a generar ellos mismos las relaciones que corresponden a esta estructura.

TABLA II
Taxonomía de errores de las producciones no simbólicas. Grupo A

<i>c</i>	<i>2do orden de magnitud</i>	<i>1er orden de magnitud</i>	<i>Orden de magnitud 0</i>
1	Colocan una unidad sin considerar las unidades que solicita el coeficiente	No atienden al coeficiente. Colocan sólo una unidad	No atienden al coeficiente, al formar otros órdenes de magnitud
2	Hacen la unidad multiplicando la base por el número marcado en el coeficiente del 1er orden No atienden a la relación base coeficiente. Forman la unidad con agrupaciones de diferente tamaño. Cuando en este orden se requiere $c(bxb)$	Forman la unidad compuesta por coeficiente por coeficiente. Esta unidad se compone de coeficiente por base. Dejan más unidades o igual que la base, en el campo correspondiente al 1er de magnitud	Dejan más palitos o igual que la base, así no se atiende a la restricción, $b-1$
3	Forman la unidad multiplicativa (sin ligas chicas), contiene el equivalente aditivo correspondiente. Duplican el valor de la base para formar la unidad. Así, no consideran el exponente. No forman la unidad cuyo valor relativo consiste en (bxb) . En este caso los alumnos, dejan sueltas las unidades que reunieron del 1er orden. Colocan una unidad aditiva Colocan una unidad multiplicativa cxb	Colocan la unidad cuyo valor relativo corresponde al 2do orden de magnitud o palitos sueltos	Colocan una unidad multiplicativa

Aunado a ello, que el alumno haga el registro correspondiente con notación desarrollada de los valores relativos implicados en las cifras de cada orden de magnitud, obliga al alumno a atender a todas las relaciones y entidades presentes en el valor posicional. Con respecto a ello, se presenta en la Tabla III, Cuatro categorías de errores respecto a la taxonomía de notación desarrollada, estas corresponden a que los alumnos:

- 1) sustituyen u omiten de entidades.
- 2) establecen relaciones no apropiadas entre el coeficiente (c) y la base (b).
- 3) estructuran la unidad: aditiva, multiplicativa, $c \times b$; multiplicativa iterada, $c (b \times b)$; sin correspondencia con el orden de magnitud.
- 4) con respecto a la estructura del valor posicional, insuficiente o equivocada respecto a los 3 primeros órdenes de magnitud.

5. CONCLUSIONES

Se devela en el transcurso de la aplicación didáctica, durante la producción no simbólica y notación desarrollada, que el alumno se fija sólo en algunas entidades y relaciones del valor de posición y otras las deja sin atender. Durante el curso, los alumnos logran emplear la unidad multiplicativa. Sin embargo, la unidad de 2do orden de magnitud está aún sujeta a algunos olvidos o relaciones inconvenientes. Es pertinente destacar que muchos alumnos todavía no generan, por lo tanto, no pueden observar la unidad del segundo orden, es decir, unidades multiplicativas iteradas $1 (b \times b)$. Dadas las relaciones allí implicadas, esto reside en el solo hecho de multiplicar la base por sí misma (pues el exponente es dos) y después por el coeficiente del 2do orden de magnitud. Lo cual plantea una mayor dificultad al estudiante.

Un aspecto didáctico relevante es que durante la enseñanza se puede ostentar cada uno de los componentes del valor posicional y mostrar como se vincula con los otros componentes, Así el docente o los pares pueden aludir a cada uno de ellos durante el curso, y mostrar por ejemplo: que el número contenido en las ligas corresponde a la base.

En lo concerniente al grupo ábaco, a los alumnos les resulta muy complicado aprehender la estructura básica completa del valor posicional respecto al referente numérico a formar. El empleo de este material provoca que esta estructura se le escape al estudiante. Influye, que la estructura de las unidades de cada orden no son evidentes. Tampoco la relación entre órdenes de magnitud y base, requerimiento para dar significado a esta estructura. Como ejemplo se puede observar la figura 1, allí los alumnos formaron el número solicitado, 2114, en sus ábacos, pero hay

inconsistencia entre la suma de las tarjetas y el número representado en el ábaco. Por los resultados se considera que el empleo del ábaco con fines de enseñanza funciona para otros aspectos, podría seguirse después de que el alumno consiga cierto dominio del valor relativo a cada orden de magnitud.

El uso de la notación desarrollada, para anotar valores de los distintos órdenes de magnitud, obliga al estudiante a centrarse en los aspectos relacionales de las entidades y ya no tanto en los procedimentales (sobre todo implicados en el inicio de las producciones no simbólicas). Como se mencionó con antelación durante el procedimiento en la producción no simbólica, el alumno está atento a distinguir cual es la base, cual es el coeficiente, que estructura tiene cada unidad, en dónde la coloca, etc. Durante la notación desarrollada el alumno necesita atender a estas entidades y a las relaciones pertinentes para adjudicar valores. A diferencia del inicio de la producción no simbólica en donde el alumno atiende a componentes, durante la notación desarrollada estos componentes no solo los observa en el material concreto, necesita evocar a que entidad corresponden y determinar las relaciones pertinentes.

Aquí es importante hacer una distinción entre los componentes del valor posicional y las entidades que lo conforman, esta distinción atiende a diferentes momentos del aprendizaje del valor posicional. El primero corresponde a los procedimientos durante la producción no simbólica, y el otro momento cuando el propio estudiante al operar con las cifras indoarabígas evoca las entidades. El primer momento es respecto a los procedimientos, el alumno atiende a los componentes cuando recién inicia con las producciones no simbólicas, a partir de un referente expuesto con cifras indoarabígas que con el material manipulativo, se presenta ante los ojos de los alumnos como una numerosidad en la cual puede observar los distintos componentes. Estos corresponden a los coeficientes de cada orden de magnitud y a la base.

El segundo momento sucede cuando el alumno evoca las relaciones entre esas entidades; coeficientes de cada orden de magnitud y la base, para registrar con notación desarrollada, o simplemente registrar un número con su base explícita u opera algún algoritmo con las cifras indoarabígas. Hemos denominado entidades a la evocación que hace el estudiante de dichos componentes y sus relaciones. Cabe señalar que el sentido relacional atañe también a las producciones no simbólicas del estudiante cuando corresponden a la evocación de las relaciones requeridas por esta estructura, si bien este tránsito entre lo procedural y lo relacional es paulatino.

También es pertinente aclarar que durante las producciones simbólicas y notación desarrollada hay un contenido procedimental, sin embargo, estos procedimientos incluyen la evocación de entidades y sus relaciones que el alumno generó a partir de las producciones no simbólicas. En las producciones no simbólicas es central seguir un procedimiento, fijarse en cada componente. Cabe añadir que para emplear y valorar estructuras aritméticas con sentido es imprescindible reconocer como se generan las distintas unidades de los diferentes

órdenes de magnitud. Y las relaciones que están implicadas en dicha estructura. Así mismo cabe destacar que actualmente durante la enseñanza del valor posicional, se omite este sentido relacional y estructural del valor de posición, se enseña una síntesis, o más bien dicho se enseña parcialmente esta estructura, lo que provoca muchos problemas con el aprendizaje de la aritmética.

La investigación permitió presentar un planteamiento didáctico, para que el alumno tenga posibilidades de atender a las relaciones entre entidades de la estructura del valor posicional. También permitió, conjeturar cómo emerge la estructura del valor posicional para su comprensión, misma que el alumno necesita generar, de allí la necesidad de habilitar cierta comprensión mediante las ejercitaciones constantes, que permitan a los alumnos discernir las entidades, y generar las relaciones pertinentes para dar significado al valor posicional. Sobre todo, porque precisamente lo que se omite durante la enseñanza del valor de posición cotidianamente en las escuelas son las relaciones implicadas en esta estructura. Los errores que se muestran en las taxonomías, permiten identificar que es lo que hay que atender cuando se está enseñando el valor de posición, respecto a las producciones no simbólicas y la notación desarrollada.

Por lo anterior, el planteamiento didáctico aquí expuesto: La ejercitación en producción no simbólica, notación desarrollada y producción simbólica que efectúan los estudiantes. Específicamente, la producción no simbólica que emplea la técnica de adiciones sucesivas con el soporte material, que usa campos internos adyacentes en la hoja de trabajo, en relación con palitos y ligas, concierne a una estrategia de enseñanza que propicia una posibilidad sólida para la comprensión del valor posicional basado en las relaciones de su estructura.

Cabe mencionar que el tiempo requerido para un cabal dominio del valor posicional es aún una incógnita. Se necesita considerar aspectos intermedios, desde que el alumno logra anotar como corresponde la notación desarrollada hasta el momento en que pueda operar con distintas bases para hacer equivalencias entre ellas. Lo cual, es importante porque implica un dominio de las propiedades del orden y el cardinal. Por ello se destaca que es un curso de largo aliento, se requiere más tiempo para lograr que los alumnos operen las cifras indoarabícas con distintas bases, esto es imprescindible porque, por un lado contribuye de forma nodal a la comprensión y formación de un pensamiento flexible con entidades matemáticas y por otro requiere preguntarse que se comprende por cardinal.

RECONOCIMIENTOS

Se agradecen las aportaciones dadas por el Consejo Nacional para la Ciencia y Tecnología, CONACYT, mi madre y mi hermana para la consecución y logro de esta investigación.

TABLA III
Taxonomía de errores respecto a la notación desarrollada. Grupo A y B

	<i>Orden de magnitud 0</i>		<i>1er Orden de magnitud</i>		<i>2d Orden de magnitud</i>	
	<i>Grupo A</i>	<i>Grupo B</i>	<i>Grupo A</i>	<i>Grupo B</i>	<i>Grupo A</i>	<i>Grupo B</i>
1	<p>134_5 Anotan el valor de la base en vez de anotar el correspondiente al coeficiente. $25+15+5 = 35$ Respuesta esperada: $25+15+4 = 34$</p>	<p>43_5 Confunden el valor del coeficiente con el de la base. 43 base 5 $20+5$ Respuesta esperada: $20+3 = 23$</p>	<p>162_{10} La notación sin considerar el coeficiente. $100+10+2 = 102$ Respuesta esperada: $100+60+2 = 162$</p>		<p>211_4 No consideran el coeficiente. $16+4+1 = 21$ Respuesta esperada: $32+4+1 = 37$</p>	<p>212_4 No atienden al coeficiente. 1 10 100 Respuesta esperada: $32+4+2 = 38$</p>
2	<p>43_5 Reiteran el coeficiente tantas veces como dice el coeficiente. $4+4+4+4+4+3+3+3 = 29$ Respuesta esperada: $20+3 = 23$</p>	<p>111_2 Otorgan el valor relativo, dado por la adición reiterada de 2 y tratamiento aditivo. $2+4+6$ $1+1+1 = 3$ Respuesta esperada: $4+2+1 = 7$</p>	<p>43_5 Presentan un valor que se basa en bxb y no en bxc. $25+3 = 28$ Respuesta esperada: $20+3 = 7$ $(4 \times 5) = 20$</p>	<p>111_2 Presentan un valor que no corresponde a cxb. $2+3+6 = 11$ Respuesta esperada: $4+2+1 = 7$</p>	<p>124_5 Duplican el valor de la base para el valor del 2do orden de m. Anotan 16. Respuesta esperada: $64+16+4 = 84$</p>	<p>312_4 Para asignar el valor de la unidad del segundo orden, duplican el valor de la base. $3+1+2$ 8 4 1 Respuesta esperada: $48+4+2 = 54$</p>

3	<p>43_5 El valor lo designa como unidad de 1er orden. $20+15 = 35$ Respuesta esperada: $20+3 = 23$</p>	<p>365_{10} Dan un valor de unidad de 1er orden de m. a todos los órdenes de magnitud. $3+6+5$ 30 60 50 Respuesta esperada: $300+60+5 = 365$</p>	<p>43_5 Otorgan un valor de unidad aditiva. $4+3 = 7$ 30 60 50 Respuesta esperada: $20+3 = 23$</p>	<p>110_2 Valor aditivo unitario en todos los órdenes de magnitud. $1+1+0 = 2$ Respuesta esperada: $4+2+0 = 6$</p>	<p>123_5 Una agrupación compuesta por $1x6+1x10+2x5$ Respuesta esperada: $25+10+3 = 38$ Dado que $1(5x5)+2x5+1x3 = 38$</p>	<p>111_3 El valor consiste en la suma reiterada de 3 111 369 Respuesta esperada: $9+3+1 = 13$</p>
4	<p>43_9 Suma basada en la adición de coeficientes, es decir, tantas veces se añade la base como el número resultante de la suma unitaria de los coeficientes. $9+9+9+9+9+9+9 = 63$ Respuesta esperada: $36+3 = 39$ $4x9+3x1 = 39$</p>	<p>211_4 Los valores de cada orden no corresponden. $1+1+2$ 16 16 4 Respuesta esperada: $32+4+1 = 37$ $2x16+1x4+1x1 = 37$</p>	<p>211_4 Se reitera la cifra, tantas veces como órdenes de magnitud dispone. La cifra reiterada consiste en la indicada por la base. 444 Respuesta esperada: $32+4+1 = 37$ Otro caso, 365_{10} "365" $+10$ $\frac{375}{365}$ Respuesta esperada: $300+60+5 = 365$</p>	<p>211_4 Anotaron los números sucesivos que añadieron ninguno de los cuales corresponde al valor. Respuesta esperada: $32+4+1 = 37$</p>	<p>134_5 El sentido de la estructura del valor de posición no se recupera en esta expresión. $5+5+5+5+5 = 34$ Respuesta esperada: $25+15+4 = 44$</p>	<p>212_4 Replican el número escrito en el pizarrón. Respuesta esperada: $32+4+2 = 38$ Otro caso, 111_2 El valor corresponde a la suma reiterada de dos. $2+4+6$ $1+1+1 = 3$ Respuesta esperada: $4+2+1 = 7$</p>

DECLARACIÓN DE AUTORÍA

Herlinda Consuelo Martínez de la Mora realizó el proceso de investigación, así como la escritura de este documento. Ulises Xolocotzin Eligio y Ricardo Quintero Zazueta supervisaron el desarrollo completo de la investigación y revisión de su reporte final.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Andrade, S. y Valdemoros, M. (2015). Understanding of Place Value Explored Through Numerical Comparison. Proceedings of the Thirty-Seventh Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, EUA. Retrieved from: <http://msu.edu/~brakonil/PMENA-2015-PROCEEDINGS-2015-11-04.pdf>
- Baroody, A. J. (1990). How and When Should Place-Value Concepts and Skill Be Taught? *Journal for Research in Mathematics Education*. 21(4), 281-286.
- Broadbent, A. (2004). Understanding Place Value. A case study of the base ten game. *Australian Primary Mathematics Classroom*, 9(4), 45-46.
- Fuson, K.C. (july, 1990). Issues in Place-Value and Multidigit Addition and Subtraction. Learning and Teaching. *Journal for Research in Mathematics Education*. 21(4), 273-280.
- García, V. (2006). *La construcción del número en el niño de primaria. Aplicación de un taller de Matemáticas*. (Tesis de maestría no publicada), Universidad de las Américas, A.C. México, D.F.
- García, V. (2009). *1º Nivel del Taller de Matemáticas "Redescubriendo el número"*, (Comunicación interna no publicada). México, D.F.
- García, V. R. y Cardoso, S. G. (2011). La reconstrucción del número en el niño de primaria. XIII Conferencia Interamericana de Educación Matemática. XIII CIAEM-IACME, Brasil. Recuperado de: https://xiii.ciaem-redumate.org/index.php/xiii_ciaem/xiii_ciaem/paper/viewFile/721/170
- Nickerson, Raymond S. (2011). *Mathematical Reasoning. Patterns, Problems, Conjectures, and Proofs*. New York, EUA, Londres, Inglaterra: Taylor & Francis.
- Slovin, H. (2010-2011). Revelations from counting: a window to conceptual understanding. *Investigations in Mathematics Learning. Official Journal of the Research Council on Mathematics Learning*. (3)2, 35-51.
- Vergnaud G. (2003). *El niño, las matemáticas y la realidad. Problemas de la enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria*. (L. O. Segura, Trans.). D.F., México: Trillas.

Autores

Herlinda Consuelo Martínez de la Mora. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, (Cinvestav), México. 0000-0002-3982-2242 hel17r@yahoo.com.mx

Ulises Xolocotzin Eligio. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, (Cinvestav), México. 0000-0002-9896-2093 ulises.xolocotzin@cinvestav.mx

Ricardo Quintero Zazueta. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, (Cinvestav), México. 0000-0002-2887-7256 quintero@cinvestav.mx