

JORGE ANDRÉS LABRA PEÑA, CARLOS MARIO VANEGAS ORTEGA

DESARROLLO DEL RAZONAMIENTO GEOMÉTRICO
DE ESTUDIANTES DE ENSEÑANZA MEDIA CUANDO ABORDAN
EL CONCEPTO DE HOMOTECIA

DEVELOPMENT OF GEOMETRIC THOUGHT IN HIGH SCHOOL STUDENTS,
WHEN THEY LEARN THE CONCEPT OF HOMOTHECY

RESUMEN

El objetivo de este estudio es caracterizar el desarrollo de los niveles de razonamiento geométrico de estudiantes chilenos de primer año de enseñanza media, cuando abordan el concepto de homotecia a partir de una secuencia de actividades basada en el modelo de Van Hiele. Se utilizó una metodología cualitativa con un diseño no experimental, para describir cómo varía el concepto de homotecia, y con ello, los niveles de razonamiento geométrico. Se utilizó un pre-test y un post-test para robustecer las comprensiones cualitativas. Los resultados muestran que las actividades propuestas lograron que los estudiantes desarrollaran de forma completa el Nivel 0 y, avanzaran hacia los primeros grados de adquisición del Nivel 1. Este logro se ve potenciado gracias a los recursos manipulativos y virtuales utilizados, el trabajo colaborativo entre los estudiantes y a la secuenciación de las actividades trabajadas.

PALABRAS CLAVE:

- *Didáctica de la geometría*
- *Razonamiento geométrico*
- *Modelo de Van Hiele*

ABSTRACT

The aim of this study is to characterize the development of levels of geometric thought in twelfth-grade Chilean students, when they learn the concept of homothecy through a didactic sequence based on Van Hiele model. A qualitative methodology with a non-experimental design was used in this study for describing how the concept of homothecy transforms, and thus the geometric thought. A pretest-posttest design was used to evaluate the acquisition of the Van Hiele levels to strengthen the analysis of the qualitative data. The main results show a complete acquisition of Level 0 for most students. In addition, the proposed activities allowed the development of Level 0, and enabled the development of the first levels of acquisition of Level 1. This achievement is enhanced thanks to the manipulative and virtual resources used, the collaborative work among students and the sequencing of activities worked.

KEY WORDS:

- *Teaching of geometry*
- *Geometric thought*
- *Van Hiele model*



RESUMO

O objetivo deste estudo é caracterizar o desenvolvimento dos níveis de raciocínio geométrico de alunos chilenos do ensino médio, quando abordam o conceito de homotecia a partir de uma sequência de atividades baseada no modelo de Van Hiele. Foi utilizada uma metodologia qualitativa, com desenho não experimental, para descrever como o conceito de homotecia varia e, com ele, os níveis de raciocínio geométrico. Um pré-teste e um pós-teste foram utilizados para fortalecer os entendimentos qualitativos. Os resultados mostram que as atividades propostas conseguiram desenvolver totalmente o Nível 0, por grande parte dos alunos, e se encaminharam para os primeiros níveis de aquisição do Nível 1. Essa conquista é aprimorada graças aos recursos manipulativos e virtuais usados, os trabalho colaborativo entre os alunos e o seqüenciamento das atividades trabalhadas.

PALAVRAS CHAVE:

- *Ensino de geometria*
- *Raciocínio geométrico*
- *Modelo de Van Hiele*

RÉSUMÉ

L'objectif de cette étude est de caractériser le développement des niveaux de raisonnement géométrique des lycéens chiliens, lorsqu'ils abordent le concept d'homotécia à partir d'une séquence d'activités basées sur le modèle de Van Hiele. Pour cela, une méthodologie qualitative au design non expérimental a été utilisée pour décrire comment le concept d'homotécia varie, et avec lui, les niveaux de raisonnement géométrique. Un pré-test et un post-test ont été utilisés pour renforcer les compréhensions qualitatives. Les résultats montrent que les activités proposées ont réussi à développer pleinement le niveau 0, par une grande partie des étudiants, et se sont dirigées vers les premiers niveaux d'acquisition du niveau 1. Cette réalisation est renforcée grâce aux ressources manipulatives et virtuelles utilisées, la le travail collaboratif entre les étudiants et le séquencement des activités travaillées.

MOTS CLÉS:

- *Enseignement de la géométrie*
- *Pensée géométrique*
- *Modèle de Van Hiele*

1. INTRODUCCIÓN

Dentro de la Matemática, la Geometría tiene un importante rol formador del individuo, tanto en lo académico como en lo cultural, pues se aplica en diversos contextos, desarrolla el razonamiento lógico y contribuye al desarrollo de habilidades como visualizar, pensar críticamente, intuir, resolver problemas, conjeturar, razonar deductivamente y argumentar de forma lógica (Gamboa y

Ballestero, 2010). Sin embargo, la mayoría de los docentes relaciona la Geometría con aspectos métricos o simplemente limitan sus clases a definir figuras o relaciones geométricas con dibujos (García y López, 2008; Yi, Flores y Wang, 2020).

El enfoque tradicional con el que se orienta la enseñanza de la Geometría, tiene como consecuencia que los estudiantes tengan dificultades en la comprensión de conceptos y procesos geométricos (Aires, Campos y Poças, 2015; Ramírez-Uclés, Flores Martínez y Ramírez-Uclés, 2018), y más delicado aún, bajos niveles en el desarrollo de procesos de razonamiento geométrico, perdiendo así oportunidades para mejorar capacidades esenciales como la visualización, la elaboración, análisis y comprensión de representaciones, la exploración, la modelización, la argumentación y la demostración (Aravena y Caamaño, 2013; Figueiras, Molero, Salvador y Zuasti, 2000; Saorin Villa, Torregrosa Gironés y Quesada Vilella, 2019).

Los bajos niveles en el desarrollo de procesos de razonamiento geométrico se podrían explicar, en gran medida, porque se ha privilegiado la memorización de fórmulas, definiciones, teoremas y propiedades apoyadas en construcciones mecánicas y descontextualizadas. Esto tiene como consecuencia, que los estudiantes perciban la Geometría como una disciplina compleja y poco relacionada con la realidad (Gamboa y Ballestero, 2010; Ramírez-Uclés et al., 2018; Vargas y Gamboa, 2013).

A nivel internacional, es reconocido que, una manera de favorecer el desarrollo del razonamiento geométrico es mediante el diseño, implementación y evaluación de secuencias didácticas basada en el modelo de Van Hiele (Abreu y Barot, 2017; Aires et al., 2015; Aravena y Gutiérrez, 2016; Baiduri, Ismail y Sulfiyah, 2020; Gamboa y Ballestero, 2010; Iglesias y Ortiz, 2015; Proenza y Leyva, 2008; Pujawan, Suryawan y Prabawati, 2020; Rodríguez et al., 2013; Vargas y Gamboa, 2013), que contemplen diversos recursos para el aprendizaje matemático, así como el contexto y las experiencias previas de los estudiantes (Yi, Flores y Wang, 2020).

Según Antonini y Martignone (2011), una forma de promover el razonamiento geométrico de los estudiantes, es mediante la utilización de herramientas geométricas, como el pantógrafo, pues se destaca por sus bondades en la enseñanza de la demostración matemática, debido a que su implementación promueve en los estudiantes la formulación de conjeturas y de argumentaciones, cuando se trabajan transformaciones geométricas como la homotecia.

Por otra parte, Galleguillos y Candia (2011) encontraron que el uso de recursos tecnológicos como el procesador geométrico GeoGebra, tienen un carácter constructivista que permite a los estudiantes explorar, conjeturar, verificar propiedades geométricas, entre otros atributos que, sumados a un trabajo colaborativo entre estudiantes y a un rol de facilitador por parte del docente, generarían como resultado una mayor comprensión de los conceptos y, en consecuencia, un mayor desarrollo del razonamiento geométrico de los estudiantes. Por tanto, los antecedentes muestran que el uso de recursos manipulativos y digitales,

en el estudio de las transformaciones geométricas, posibilitan a los estudiantes trabajar procesos de visualización, exploración, argumentación y demostración, que resultan fundamentales en el desarrollo su razonamiento geométrico.

En Chile, este panorama internacional no es muy distinto, pues una de las áreas de la matemática que ha presentado mayores dificultades en las últimas décadas es la Geometría, y esto se debe a que en los establecimientos educacionales se trabaja escasamente, por lo cual, es urgente mejorar la preparación de los profesores chilenos en los conocimientos geométricos y su enseñanza (Aravena y Gutiérrez, 2016). Este hecho se ve reflejado en los resultados que obtienen los estudiantes en evaluaciones nacionales e internacionales, donde se evidencian serias dificultades en la comprensión de los problemas y en los procesos argumentativos-deductivos relacionados con nociones geométricas (Aravena y Caamaño, 2013; Organisation for Economic Co-operation and Development [OECD], 2019).

A pesar de las reformas que se han impulsado en Chile desde fines del siglo pasado, en cuanto a la formación inicial y continua de los profesores en Geometría, estas dificultades persisten (Aravena y Caamaño, 2013). En una investigación que buscaba relacionar y caracterizar las prácticas de enseñanza de la geometría en el aula escolar, se encontró que los profesores demuestran gran habilidad en operatoria, cuando se trata sobre resolución de problemas clásicos. Sin embargo, presentan un débil dominio y articulación de conceptos geométricos y deficiencias en la resolución de situaciones que involucran distintos contenidos geométricos. Además, sus procesos de enseñanza están enfocados mayormente en la transferencia de operatorias y procedimientos que los estudiantes debían replicar, por lo cual, hay escasa promoción del razonamiento geométrico (Rodríguez, Carreño y Muñoz, 2013). Estos antecedentes revelan la crisis existente en Chile en torno a la enseñanza de la Geometría, poniendo en tensión al profesorado de matemática para que reflexione y trabaje, en la búsqueda de soluciones que favorezcan el desarrollo del razonamiento geométrico de los estudiantes.

Dentro de las investigaciones sobre transformaciones geométricas, los procesos de enseñanza y aprendizaje del concepto de homotecia, han sido escasamente reportados, focalizando su uso en áreas del conocimiento distintos al educativo (González y Arias, 2017), lo que refuerza la necesidad de investigar los efectos que tiene el diseño de secuencias didácticas para la enseñanza del concepto de homotecia, basadas en recursos manipulativos y virtuales, sobre el desarrollo del razonamiento geométrico de estudiantes de enseñanza media.

A partir de lo anterior, surge la necesidad de realizar contribuciones a la enseñanza de la Geometría, en particular, a la enseñanza del concepto de homotecia. Para ello, en esta investigación se busca caracterizar el desarrollo de los niveles de razonamiento geométrico de estudiantes chilenos de primer año de enseñanza media, cuando abordan el concepto de homotecia a partir de una secuencia de actividades basada en el modelo de Van Hiele.

2. MARCO CONCEPTUAL

Con base en Proenza y Leyva (2008), en este estudio se define el razonamiento geométrico como un proceso complejo que supone explorar conscientemente el espacio, comparando los elementos observados, estableciendo relaciones entre esos elementos y expresando de forma verbal y escrita las acciones realizadas y las propiedades que se obtienen a partir de la observación. Así, como consecuencia de todas esas acciones, se lograría la adquisición de los conocimientos, la deducción de propiedades, la habilidad de construir modelos y la elaboración de conclusiones que permitan formular leyes generales y resolver problemas.

Para Samper, Leguizamón y Camargo (2001), existen diferentes aspectos del razonamiento geométrico, destacando en particular el razonamiento visual, que va más allá del ejercicio visual, pues implica aprender a mirar las figuras matemáticamente, lo que supone lograr establecer relaciones entre conceptos o información geométrica conocida, argumentar acerca de relaciones o propiedades geométricas, comprender los elementos que conforman una teoría geométrica, comprender los conceptos o procedimientos geométricos y comunicar los resultados obtenidos a partir de las indagaciones en geometría.

Por tanto, la visualización juega un rol fundamental en el razonamiento geométrico (Baiduri et al., 2020; Gutiérrez, 2013; Marmolejo y González Astudillo, 2015), por lo que es importante lograr un cambio en el paradigma de la enseñanza de la geometría y buscar nuevas estrategias que apunten a la visualización y el razonamiento visual (Samper et al., 2001; Saorin Villa et al., 2019), seguidos de procesos de sistematización y generalización a lo largo del estudio de los contenidos geométricos (Proenza y Leyva, 2008), que se obtienen promoviendo estrategias argumentativas durante su enseñanza (Samper et al., 2001).

Dada la complejidad del proceso de desarrollo del razonamiento geométrico, Van Hiele (1986) propone un modelo teórico compuesto de niveles de maduración que se alcanzan de manera gradual (Gutiérrez, 2013; Pujawan et al., 2020), que en la actualidad ha demostrado ser una de las teorías más efectivas en lo que respecta a la enseñanza de la geometría y en la evaluación del aprendizaje comprensivo de los estudiantes (Iglesias y Ortiz, 2015; Vargas y Gamboa, 2013; Venegas, 2015; Yi, Flores y Wang, 2020). Evidencia de esto, es la variedad de investigaciones que han utilizado esta teoría para medir, evaluar o describir la evolución de los niveles de razonamiento de los estudiantes y caracterizar el grado de adquisición de dichos niveles (Aravena y Gutiérrez, 2016; Aires et al., 2015).

El modelo plantea que el aprendizaje de la geometría transita por cinco niveles consecutivos (Van Hiele, 1986): la visualización, el análisis, la clasificación, la deducción formal y el rigor. Sin embargo, dadas las características

de los estudiantes, en algunos contextos escolares el quinto nivel se ha estimado como inalcanzable, incluso se han reportado investigaciones que demuestran que estudiantes no universitarios, a lo sumo, alcanzan los tres primeros niveles (Fouz, 2005; Pujawan et al., 2020). En este sentido, el trabajo de Fouz (2005) permite establecer un conjunto de características del desempeño de los estudiantes que se relacionan con los niveles de razonamiento de Van Hiele (Tabla I).

TABLA I
Características de desempeño asociadas a los niveles de razonamiento de los estudiantes (Fouz, 2005)

<i>Nivel</i>	<i>Característica</i>
0	A) Los objetos se perciben en su totalidad como una unidad, sin diferenciar sus atributos y componentes.
	B) Se describen por su apariencia física mediante descripciones meramente visuales y asemejándolas a elementos familiares del entorno. No hay lenguaje geométrico básico para llamar a las figuras por su nombre correcto.
1	C) Se perciben las componentes y propiedades (condiciones necesarias) de los objetos y figuras. Esto lo obtienen tanto de la observación como de la experimentación.
	D) De una manera informal pueden describir las figuras por sus propiedades, pero no de relacionar unas propiedades con otras, o unas figuras con otras. No pueden elaborar definiciones.
2	E) Se describen las figuras de manera formal, es decir, se señalan las condiciones necesarias y suficientes que deben cumplir. Esto es importante pues conlleva entender el significado de las definiciones dentro de la geometría y los requisitos que siempre se requieren.
3	F) Se realizan deducciones y demostraciones lógicas y formales, por lo que se comprende la naturaleza axiomática de la matemática.
4	G) Se logra comprender la existencia de distintos sistemas axiomáticos, y con ello, analizar distintas geometrías.

El modelo de Van Hiele se compone de dos partes: una parte descriptiva, donde se explica cómo razonan los estudiantes, definiendo *niveles de razonamiento*; y otra parte prescriptiva, en donde se dan directrices a los profesores sobre cómo ayudar a los estudiantes a alcanzar un mayor nivel de razonamiento, a través de la definición de *fases de aprendizaje* (Jaime y Gutiérrez, 1990). En la Figura 1 proponemos una síntesis de la relación entre componentes y características del modelo (Aravena y Gutiérrez, 2016; Fouz, 2005; Vargas y Gamboa, 2013).

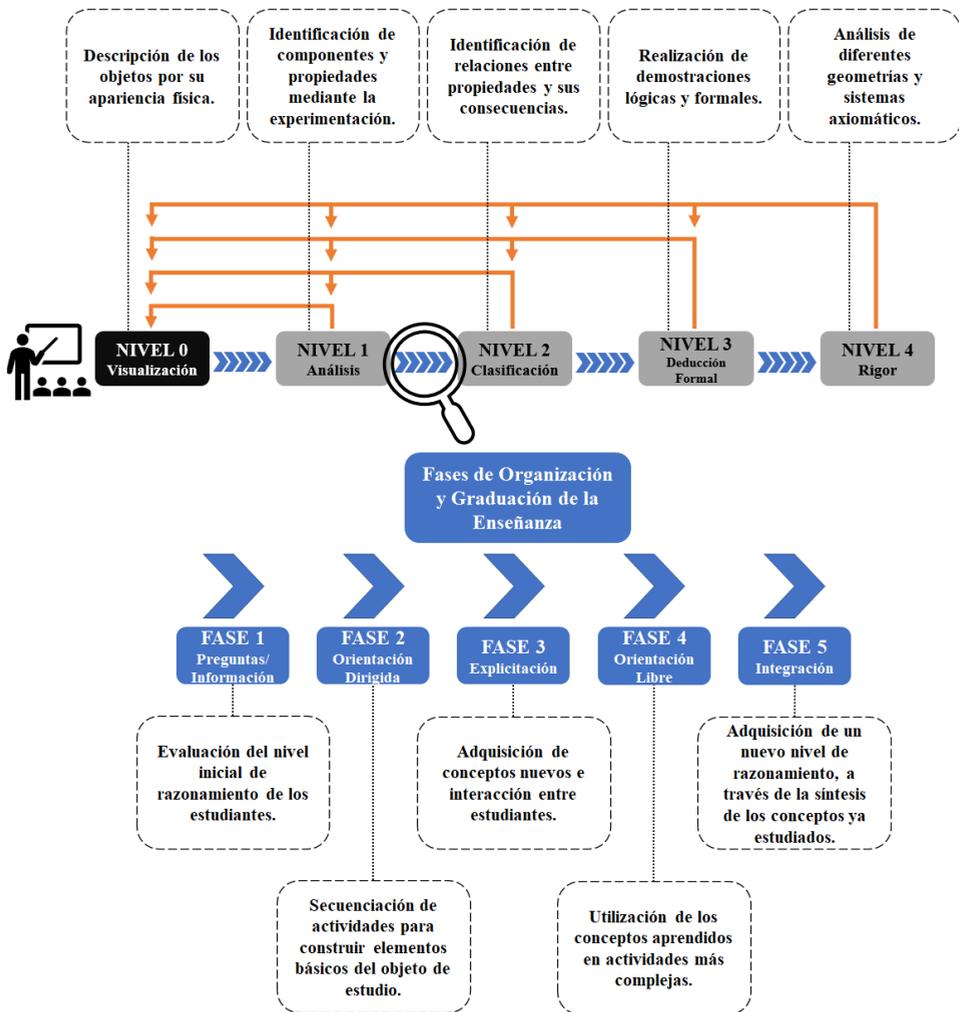


Figura 1. Relación entre los componentes del Modelo del Van Hiele.

Fuente: elaboración propia

En primer lugar, se pueden observar los cinco niveles de razonamiento por los que deben transitar los estudiantes al enfrentar un nuevo aprendizaje geométrico. Se destaca el Nivel 0, pues es donde se construyen las bases para avanzar hacia los niveles superiores. Esta idea alude, implícitamente, a la primera característica del modelo, denominada *localidad*, es decir, un estudiante puede razonar desde distintos niveles (un nivel para un concepto y otro nivel para otro concepto), por lo que, el nivel inicial dependerá de las áreas de la geometría que esté trabajando y de sus experiencias previas.

Las flechas azules representan las cinco fases de aprendizaje por las que transitan los estudiantes para alcanzar el siguiente nivel de razonamiento. Esta relación deja entrever otras tres características del modelo. Una de ellas es la *secuencialidad* de los niveles, es decir, solo se puede pasar al siguiente nivel de razonamiento, si se ha logrado un grado de adquisición completa del nivel anterior. La siguiente característica corresponde a la *continuidad* entre un nivel y otro, esto es, que la progresión entre los niveles se hace de forma continua y pausada, mediante pequeños avances que permiten llegar al logro del nivel. Otra característica es la *especificidad del lenguaje* que existe en cada nivel de razonamiento, es decir, el desarrollo del razonamiento no solo se relaciona con la habilidad de resolver problemas, sino que el vocabulario matemático o la forma en que se expresan ideas es determinante en cada nivel, por lo que debe formar parte de la transposición didáctica, la adecuación del vocabulario matemático, considerando el nivel inicial de los estudiantes y el nivel que se quiere trabajar.

Las flechas anaranjadas muestran la relación entre un nivel y los anteriores a este, lo cual hace alusión a la *recursividad* entre los niveles, esto significa, que el logro de un nivel de razonamiento siempre dependerá de la asimilación de las estrategias del nivel anterior. Esta idea sugiere que, en los procesos de razonamiento, se deben aprovechar las estrategias adquiridas en los niveles anteriores para mejorarlas y robustecerlas, o para descubrir nuevas formas de aproximarse al objeto de estudio.

3. METODOLOGÍA

La investigación se desarrolló desde una perspectiva mixta (Denzin y Lincoln, 2005; Sandín Esteban, 2003; Yilmaz, 2013), pues se centra en análisis cuantitativos y cualitativos para caracterizar los niveles de razonamiento geométrico de los estudiantes chilenos de primer año medio, cuando abordan el concepto de homotecia. La forma de lograr ese objetivo es a través de la descripción del desarrollo de los niveles de razonamiento geométrico, cuando los estudiantes abordan el concepto de homotecia. Para ello, se realiza un análisis del contenido (Menéndez y Rodríguez, 2012; Santander, 2011; Tójar Hurtado, 2006) de las respuestas dadas por los estudiantes en cuatro sesiones de clase y dos test de razonamiento geométrico. Cada uno de los instrumentos fueron validados a través de juicio de expertos (Erazo-Jiménez, 2011).

Se realizó un muestreo intencionado (Menéndez y Rodríguez, 2012; Bravin y Pievi, 2008) que permitió llevar a cabo el estudio con 33 estudiantes de primer año medio del sistema educativo chileno (12-13 años), pertenecientes a la Región

Metropolitana de Santiago de Chile. Se consideraron los siguientes criterios de selección: voluntariedad y disposición del niño y de los padres para participar de la investigación, cursar una asignatura de geometría (adicional a la asignatura de matemática) y haber obtenido resultados favorables en los aprendizajes de polígonos, cuadriláteros y triángulos.

El diseño de esta investigación es no experimental y longitudinal panel (Flick, 2014), debido a que se trabajó con los mismos estudiantes durante todo el proceso. Como muestra la Figura 2, el estudio se estructuró en tres fases que fueron implementadas por los investigadores: Evaluación Inicial, Intervención y Evaluación Final. Las fases de Evaluación Inicial y Final consisten en dos test que se analizaron cuantitativamente de acuerdo con Corberán et al. (1994), pues pretendían medir el grado de adquisición de los diferentes niveles de razonamiento geométrico, antes y después de la aplicación de la unidad didáctica para la enseñanza del concepto de homotecia. Para la cuantificación de los grados de adquisición de los niveles de razonamiento geométrico, en el pre y post test se utilizaron técnicas cuantitativas de recolección de datos, de tal manera que la estadística descriptiva permita hacer más robustas las comprensiones cualitativas (Hart, Smith, Swars y Smith, 2009).

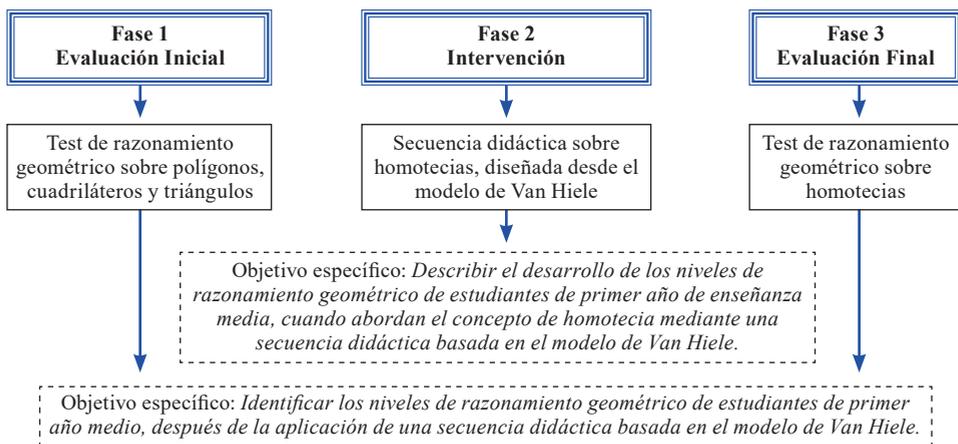


Figura 2. Fases del diseño de la investigación

Por otro lado, en la Fase de Intervención se aplicó la secuencia didáctica en torno al concepto de homotecia, construida a partir de los lineamientos dados en el modelo de Van Hiele. Como muestra la Tabla II, la secuencia didáctica consta de cuatro sesiones de 90 minutos cada una, en donde se trabajó con una guía de apoyo basada en el modelo de Van Hiele, junto con otros recursos manipulativos. Cabe destacar que los estudiantes trabajan en grupos de forma colaborativa.

TABLA II
Síntesis de la estructura de la secuencia didáctica

<i>Sesión</i>	<i>Descripción</i>	<i>Nivel de Razonamiento Esperado</i>	<i>Resultado Esperado</i>	<i>Tipos de Preguntas de las Guías de Trabajo</i>
1	En esta primera sesión, se introduce el concepto de homotecia, en particular, las homotecias directas. Para esto, los estudiantes visualizan y analizan el funcionamiento del pantógrafo, para construir una primera definición de Homotecia.	Nivel 0	Los estudiantes definen homotecia como una <i>transformación geométrica</i> que genera una <i>figura semejante a una dada</i> , tal que su <i>posición se aleja (o acerca) a un punto fijo</i> , dependiendo de un <i>factor de ampliación (o reducción)</i> .	¿Qué tienen en común las figuras que se construyen con el pantógrafo? ¿Qué ocurre con la posición de las figuras obtenidas con ampliaciones (o reducciones) cada vez más grandes (o pequeñas)? ¿En qué posición debe anclarse el pantógrafo para ampliar (o reducir) una figura en un área determinada?
2	En esta sesión, se presenta otro tipo de homotecia: las homotecias inversas. Para esto se trabaja con la cámara oscura. El objetivo era que, con base en las nuevas características que identificaban, elaboraran una nueva definición de homotecia que incluyera también las características observadas en el funcionamiento del pantógrafo.	Nivel 0	Los estudiantes definen homotecia como una <i>transformación geométrica</i> que genera una <i>figura semejante a una dada</i> , pudiendo incluso estar <i>invertidas</i> . La <i>posición de esta figura se aleja (o acerca) a un punto fijo</i> , dependiendo de un <i>factor de ampliación (o reducción)</i> .	¿Cómo son las sombras de los objetos que se proyectan en la cámara oscura? ¿Qué ocurre con las sombras de distintos objetos al acercarlos (o alejarlos) de la cámara oscura? ¿A qué distancia de la cámara oscura se debe ubicar un objeto, para que la altura de su proyección sea una medida determinada (por ejemplo, el doble de la original)?

3	En esta sesión, se pretende que reconozcan los elementos que componen una homotecia, a partir de lo trabajado con el pantógrafo y la cámara oscura, para lograr una definición del concepto que fuera matemáticamente más rigurosa.	Nivel 1	Los estudiantes definen homotecia como una transformación geométrica que genera una <i>figura semejante a una dada</i> , tal que, a partir de un punto fijo, llamado <i>centro de homotecia</i> , multiplica las distancias hasta sus vértices por un mismo factor, llamado <i>factor de homotecia</i> .	<p>¿Qué ocurre al unir los vértices homólogos de las diferentes ampliaciones y reducciones generadas con el pantógrafo?</p> <p>Considerando una figura y su homotética obtenida con el pantógrafo, ¿qué relación existe entre las distancias que tienen los puntos homotéticos y los originales hasta el punto de anclaje del pantógrafo?</p> <p>¿Cómo sería el diagrama que representa el funcionamiento de la cámara oscura, al poner un objeto a una determinada distancia de esta?</p> <p>¿Qué tienen en común el funcionamiento del pantógrafo y la cámara oscura?</p> <p>¿Qué diferencias existen en el funcionamiento del pantógrafo y la cámara oscura?</p>
4	En esta última sesión, los estudiantes ya han trabajado implícitamente con los tipos	Nivel 2	Los estudiantes definen homotecia como una transformación geométrica que genera una <i>figura</i>	¿Con qué valores de la razón de homotecia, se obtiene una figura homotética más grande (o más

de homotecias, prescindiendo de las propiedades particulares de cada una, por lo que en esta sesión se crean las condiciones para hacerlas explícitas mediante la utilización de GeoGebra, para clasificar los tipos de homotecia y elaboraran una última definición del concepto que incluyera la mayor cantidad de propiedades.

semejante a una dada, tal que, a partir de un punto fijo llamado *centro de homotecia*, multiplica las distancias hasta sus vértices, por un mismo factor, llamado *factor de homotecia*.

Además, sus *segmentos homólogos siempre son paralelos*.

Existen homotecias directas e inversas.

Las *homotecias directas* son aquellas cuya *razón de homotecia es positiva*. Este tipo de homotecia conserva la orientación de la figura original, ampliándola cuando la razón es mayor a 1 y reduciéndola cuando la razón es mayor a 0 y menor a 1.

Las *homotecias inversas* son aquellas cuya *razón de homotecia es negativa*. Este tipo de homotecia invierte la orientación de la figura original, ampliándola cuando la razón es menor a -1 y reduciéndola cuando la razón es menor a 0 y mayor a -1.

pequeña) que la original?
¿Con qué valores de la razón de homotecia, se obtiene una figura homotética del mismo tamaño que la original?

¿Con qué valores de la razón de homotecia, se obtiene una figura homotética con la misma orientación (o distinta orientación) que la original?

¿Qué relación existe entre los lados de la figura homotética y los lados de la figura original?

¿Qué tipo de homotecia se puede construir con el pantógrafo?
¿Por qué?

¿Qué tipo de homotecia se modela con la cámara oscura? ¿Por qué?

Para el análisis de esta fase, se consideraron las definiciones de homotecia que los estudiantes construyeron en cada guía trabajada en la secuencia didáctica. Para organizar estos datos cualitativos, se utilizó una matriz en donde se fragmentó cada respuesta de los estudiantes en unidades de significado más pequeñas (Menéndez y Rodríguez, 2012; Santander, 2011; Tójar Hurtado, 2006). En la Tabla III se muestra el análisis de la definición de homotecia de un grupo de estudiantes, construida en la segunda guía de la secuencia didáctica.

TABLA III
Ejemplo del análisis del concepto de homotecia de un grupo de estudiantes

<i>Respuesta Textual</i>	<i>Unidad de Análisis</i>	<i>Significado</i>	<i>Característica del Nivel de Razonamiento</i>	<i>Nivel de Razonamiento Alcanzado</i>
<i>Es el cambio de tamaño de figuras según su distancia. Al acercarse se achican y al alejarse se agrandan. La figura nueva es semejante a la original.</i>	Es el cambio de tamaño de figuras	Describe apariencia física.	B	Nivel Transición 0-1
	según su distancia	Reconoce un componente de la homotecia, a partir de lo experimentado.	C	
	al acercarse se achican y al alejarse se agrandan	Describe apariencia física	B	
	la figura nueva es semejante a la original	Identifica la semejanza como condición necesaria.	C	

A cada unidad de análisis se le asignó un significado, y a este último, se le asoció una de las características propuestas por Fouz (2005) asociada a los niveles de razonamiento de Van Hiele (Tabla I). Cuando una definición apunta a características de un mismo nivel de razonamiento, entonces el nivel de razonamiento alcanzado será ese mismo. En caso de que la definición apunte a características de dos niveles de razonamiento consecutivos, entonces el nivel de razonamiento alcanzado se establecerá como un *Nivel de Transición* de los niveles involucrados. En el ejemplo de la Tabla II, los estudiantes construyeron una definición que respondía a características tanto del Nivel 0 como del Nivel 1, por lo tanto, su nivel de razonamiento alcanzado se definió como Nivel de Transición 0-1.

4. ANÁLISIS DE RESULTADOS

En esta primera parte del análisis de los resultados se busca *describir el desarrollo de los niveles de razonamiento geométrico de estudiantes chilenos de primer año de enseñanza media, cuando abordan el concepto de homotecia mediante una secuencia didáctica basada en el modelo de Van Hiele*. Para ello se consideraron las definiciones de homotecia que construyeron los estudiantes en cada una de las sesiones de la secuencia didáctica, para luego dividir cada respuesta en unidades de significado más simples (Menéndez y Rodríguez, 2012; Santander, 2011), con el objetivo de caracterizarlas de acuerdo con alguno de los descriptores de cada nivel de razonamiento geométrico (Fouz, 2005). Así, las definiciones que respondían a las características de un único nivel de razonamiento se clasificaron en tal nivel, y en aquellos casos que se evidenciaban características de dos niveles distintos, se clasificaron en un nivel de transición entre los niveles involucrados.

La primera sesión de trabajo se enfocó en introducir el concepto de homotecia mediante el uso del pantógrafo. Para ello, los estudiantes realizaron distintas construcciones, que permitieran reflexionar en torno a su funcionamiento. Por tanto, esta actividad estaba dirigida a concretar el Nivel 0 de Visualización.

El 67% de las definiciones construidas por los estudiantes, luego de esta experimentación, se situaron en el Nivel 0 pues se centraban en aspectos visuales, es decir, descripciones físicas generales, que tendían a no diferenciar componentes propios de la homotecia. Un ejemplo de ello ocurrió cuando un grupo planteó que homotecia es “*agrandar o achicar el dibujo*”. Por otro lado, el 33% restante apuntó más allá de los aspectos únicamente visuales pues, además identificaron alguna propiedad importante de la homotecia, como se puede apreciar en la Figura 3.

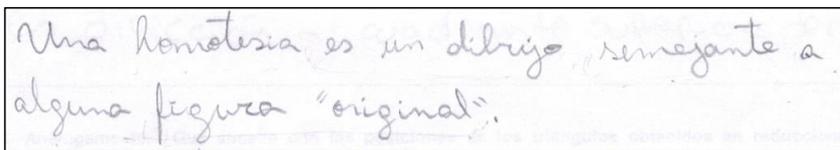


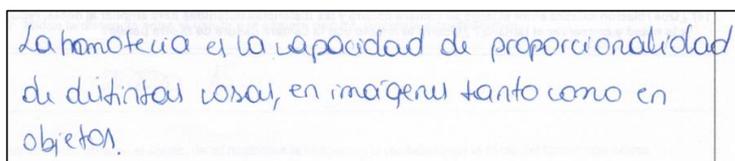
Figura 3. Ejemplo de respuesta de Nivel de Transición 0-1 en la Guía N°1

Este caso es interesante porque el grupo de estudiantes define el concepto de homotecia como “*un dibujo*”, lo cual representa un aspecto físico (Nivel 0), pero luego agregan “*semejante a alguna figura original*”, y esto evidencia dos aspectos importantes: el primero es la relación de semejanza y el segundo es que identifican la necesidad de disponer de una figura previa sobre la cual se aplica la homotecia. Estos últimos elementos ponen de manifiesto características propias del siguiente nivel de razonamiento, el Nivel 1 de Análisis, en donde

los estudiantes perciben propiedades o condiciones necesarias del concepto, ya sea mediante la observación o la experimentación. Por lo tanto, este 33% de estudiantes cuyas respuestas se enmarcaban en el Nivel 0, pero que además cumplían con características del Nivel 1, se clasificaron en el Nivel de Transición 0-1. A partir de lo anterior, se puede concluir que el trabajo con el pantógrafo posibilitó que una parte de los estudiantes lograra percibir el concepto de semejanza como condición necesaria en una homotecia.

La segunda sesión tenía como propósito continuar desarrollando el Nivel 0, a través de otro recurso: la cámara oscura, que es un instrumento óptico que permite obtener una imagen plana proyectada a partir de una imagen real. Este nuevo recurso permitió tener otra perspectiva del concepto de homotecia, pues adiciona elementos propios de una homotecia inversa, a diferencia del pantógrafo que construye únicamente homotecias directas.

El concepto de homotecia construido posterior al trabajo con la cámara oscura, correspondió al Nivel 0 en solo el 11% de los casos. Ejemplo de ello, se aprecia en la Figura 4.

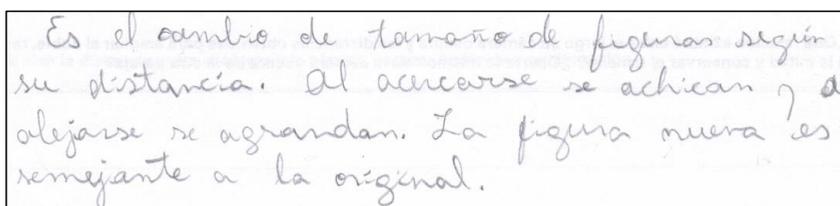


La homotecia es la capacidad de proporcionalidad de distintas cosas, en imágenes tanto como en objetos.

Figura 4. Ejemplo de respuesta de Nivel 0 en la Guía N°2

En este caso, la definición menciona la “*capacidad de proporcionalidad de distintas cosas*”, que hace referencia a que las figuras obtenidas en una homotecia son siempre semejantes, sin embargo, al no existir un lenguaje geométrico adecuado para referirse a este hecho, dicha respuesta corresponde al Nivel 0 de razonamiento.

El 78% de las definiciones se encontraron en el Nivel de Transición 0-1, como la que se observa en la Figura 5.

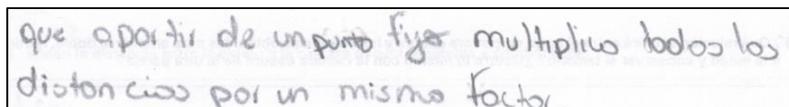


Es el cambio de tamaño de figuras según su distancia. Al acercarse se achican y al alejarse se agrandan. La figura nueva es semejante a la original.

Figura 5. Ejemplo de respuesta de Nivel de Transición 0-1 en la Guía N°2

Esta respuesta, inicialmente solo hace referencia al tamaño de las figuras homotéticas, siendo un aspecto puramente visual de Nivel 0, sin embargo, más adelante añaden elementos de Nivel 1 (“*según su distancia*”), haciendo alusión a la distancia entre cada vértice de una figura y el centro de homotecia, lo cual resulta ser un componente importante en una homotecia, completando con que “*al acercarse se achican y al alejarse se agrandan*”. Para terminar, plantean que “*la nueva figura es semejante a la original*”, lo cual corresponde a la identificación de una condición necesaria de una homotecia. Por lo anterior, estos tipos de respuestas quedan clasificadas en el Nivel de Transición 0-1.

Por último, el 11% restante de estudiantes logró identificar componentes más significativos desde el punto de vista matemático; sin embargo, no logran elaborar una definición matemáticamente coherente, quedando clasificados en el Nivel 1. La Figura 6 muestra un ejemplo de ello.



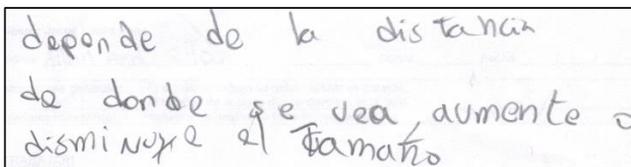
que a partir de un punto fijo multiplico todos los distancias por un mismo factor.

Figura 6. Ejemplo de respuesta de Nivel 1 en la Guía N°2

Como se puede observar, este grupo de estudiantes logra percibir la existencia de un punto fijo, que sería el centro de homotecia, incluso de manera incompleta, identifican que en una homotecia se “*multiplica todas las distancias por un mismo factor*”, entendiéndose que las distancias que existen entre cada vértice de una figura y el centro de homotecia se ponderan por un mismo factor, es decir, por la razón de homotecia.

En la tercera sesión se retomó lo trabajado con el pantógrafo y la cámara oscura, con el objetivo de identificar y formalizar los elementos comunes de ambas experiencias, y con ello, lograr una definición más completa y formal del concepto de homotecia. Por tanto, esta parte de la secuencia tenía como propósito alcanzar el Nivel 1.

El 20% de las definiciones de homotecia contenían características del Nivel 0. Ejemplo de ello, es la que se presenta en la Figura 7.



depende de la distancia de donde se vea aumente o disminuya el tamaño

Figura 7. Ejemplo de respuesta de Nivel 0 en la Guía N°3

En esta definición de homotecia se aprecian elementos relacionados con la percepción visual, en donde se alude solamente a un cambio de tamaño, dependiendo del punto de vista del observador, lo que no es suficiente para alcanzar el nivel esperado.

En cuanto al Nivel de 1, éste fue alcanzado por el 80% de los estudiantes, construyendo definiciones como la de la Figura 8.

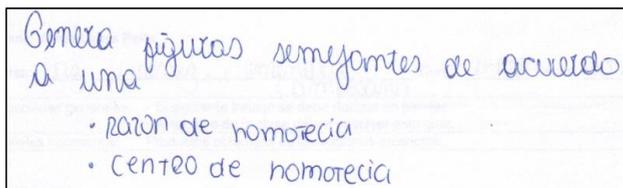


Figura 8. Ejemplo de respuesta de Nivel 1 en la Guía N°3

Se puede apreciar que aparecen conceptos fundamentales como: “*figuras semejantes*”, “*razón de homotecia*” y “*centro de homotecia*”. Sin embargo, lo enunciado no tiene la estructura de una definición, motivo por el cual, queda clasificada en tal nivel.

En la última sesión de la secuencia didáctica, se utilizó como recurso digital la aplicación GeoGebra, con el fin de generalizar algunas propiedades de la homotecia, y poner en evidencia, la existencia de diferentes tipos de homotecia: directas e inversas; es decir, se trata de establecer condiciones necesarias y suficientes para cada uno de estos tipos de homotecia, lo que es coherente si se tenía como propósito que los estudiantes alcanzaran el Nivel 2 de razonamiento geométrico (Fouz, 2005; Van Hiele, 1986).

Posterior a este trabajo, el 23% de las definiciones continuaron en el Nivel 0, como se puede ver en la Figura 9.

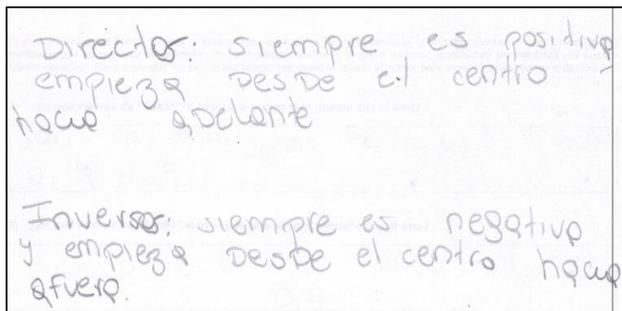


Figura 9. Ejemplo de respuesta de Nivel 0 en la Guía N°4

Si bien se clasifican los dos tipos de homotecia, predominan aspectos visuales como “*empieza desde el centro hacia adelante*” o “*empieza desde el centro hacia afuera*”, sin enunciar alguna propiedad geométrica relevante. Esto puede significar que este grupo de estudiantes no logró completar con éxito las tareas que involucraron el uso del pantógrafo y la cámara oscura, pues fue en esas actividades en donde debieron haber adquirido un vocabulario básico sobre los conceptos claves relacionados con la homotecia, junto con la visualización de sus propiedades.

Solo el 8% de las definiciones quedó en el Nivel de Transición 0-1, como se puede observar en la Figura 10.

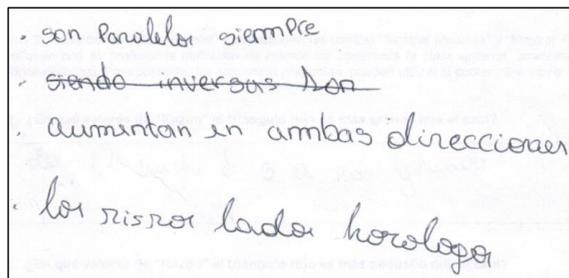


Figura 10. Ejemplo de respuesta de Nivel de Transición 0-1 en la Guía N°4

A pesar de no hacer una distinción entre los dos tipos de homotecia y de explicitar elementos visuales (Nivel 0), que no aportan a la construcción del concepto, sí se logra identificar una propiedad geométrica importante a partir de la manipulación de la aplicación (Nivel 1): “*son paralelos siempre*”, haciendo referencia al paralelismo de los lados homólogos de las figuras homotéticas. Este cruce entre dos niveles de razonamiento justifica su clasificación en el Nivel de Transición 0-1.

El 31% de las definiciones alcanzó el Nivel 1, como se puede ver en la Figura 11.

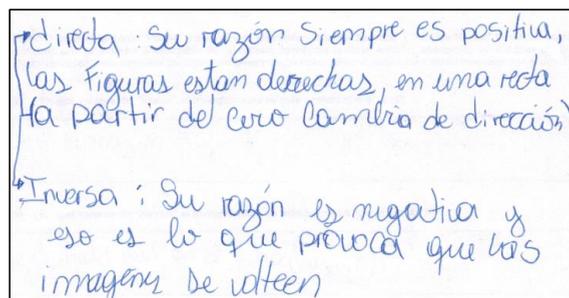


Figura 11. Ejemplo de respuesta de Nivel 1 en la Guía N°4

La respuesta anterior queda clasificada en el Nivel 1 porque se logra realizar una clasificación de la homotecia directa e inversa, a través de componentes derivados de la observación, pero utilizando un lenguaje informal. Esto se aprecia claramente cuando se dice que en la homotecia directa “*las figuras están derechas*” y en la homotecia inversa “*las imágenes se voltean*”. Esto pudo haber ocurrido porque no lograron identificar las características propias de cada tipo de homotecia, las cuales se analizaron en el uso del pantógrafo, la cámara oscura y la manipulación del GeoGebra, por lo que solo se centraron en la relación entre la razón de homotecia y la disposición de la figura en el plano.

El 8% de las respuestas transita entre los niveles 1 y 2 (Nivel de Transición 1-2). Ejemplo de ello se puede observar en la Figura 12.

Homotecia directa	homotecia inversa
- Los valores de la razón son positivos	- Los valores de la razón son negativos
- Tiene la misma Orientación (0,24)	- Tiene la misma Orientación (-0,1-)
- Sus lados homólogos son paralelos	- Siguen siendo Paralelos sus lados homólogos
- A mayor legaña del triángulo original, mayor es el tamaño de sus lados	- A mayor legaña del triángulo original, menor es el número de la razón
- Se ve más fácil en un pantógrafo	- Se ve más fácil en la cámara oscura

Figura 12. Ejemplo de respuesta de Nivel de Transición 1-2 en la Guía N°4

En este caso, existe una clasificación de los tipos de homotecia, donde se muestran características comunes, que serían condiciones necesarias, como que “*sus lados homólogos son paralelos*”, y otras condiciones que son suficientes para cada tipo de homotecia, como por ejemplo, que “*los valores de la razón son positivos*”, en el caso de la homotecia directa, y “*los valores de la razón son negativos*”, en el caso de la homotecia inversa. Hasta este punto todo apunta a una adquisición del Nivel 2, sin embargo, en los últimos dos puntos de cada columna se hace alusión a aspectos obtenidos a partir de la manipulación de todos los recursos utilizados en la secuencia, empleando para ello, un lenguaje más informal, que correspondería a características del Nivel 1. Por esta combinación de características de ambos niveles de razonamiento, se clasifica en el Nivel de Transición 1-2.

Finalmente, el 31% de las respuestas logró identificar las condiciones necesarias y suficientes de cada tipo de homotecia, como se muestra en la Figura 13.

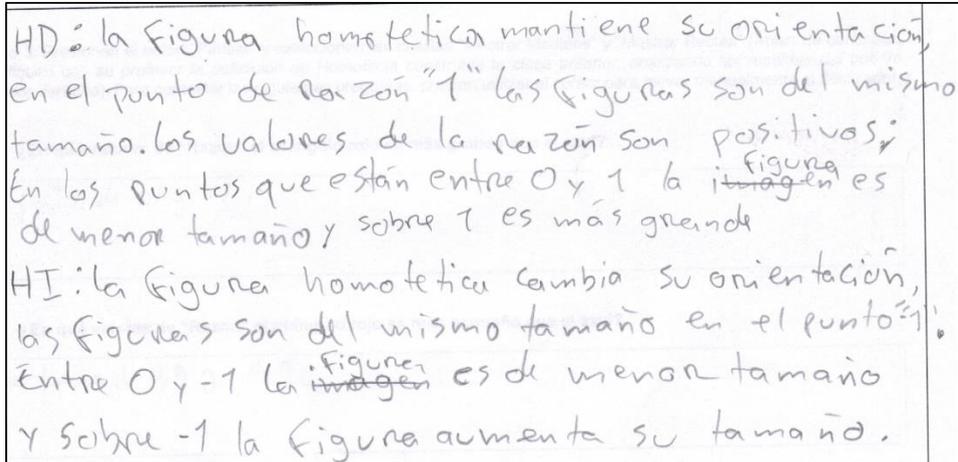


Figura 13. Ejemplo de respuesta de Nivel 2 en la Guía N°4

En la respuesta anterior se puede ver claramente la clasificación de cada tipo de homotecia, pues se describe lo que ocurre con la orientación y el tamaño de una figura, de acuerdo con los distintos valores que puede tomar la razón de homotecia, lo que en conjunto constituyen condiciones suficientes para identificar cada tipo de transformación. Además, en la descripción de cada tipo de homotecia, se aprecia la utilización de lenguaje matemático, donde se reconocen conceptos claves como “figura homotética”, “razón” y “orientación”, respondiendo así al nivel esperado en esta última parte de la secuencia.

A partir del Gráfico 1, se puede inferir que las dos primeras actividades de la secuencia didáctica, enfocadas en el Nivel 0, no solo permitieron a los estudiantes explorar y construir el concepto de homotecia a través de la visualización, sino que también resultó ser una oportunidad para identificar propiedades geométricas importantes que apuntan al nivel siguiente, como la relación de semejanza entre las figuras homotéticas y la disposición de éstas de acuerdo con su tamaño.

Gracias a la manipulación del pantógrafo, la cámara oscura, el procesador geométrico GeoGebra y las preguntas orientadoras de cada guía de trabajo, se logró promover el razonamiento y la construcción de un concepto de homotecia que evolucionó sostenidamente a lo largo de la secuencia, logrando obtener casi un 70% de estudiantes entre los niveles 1 y 2.

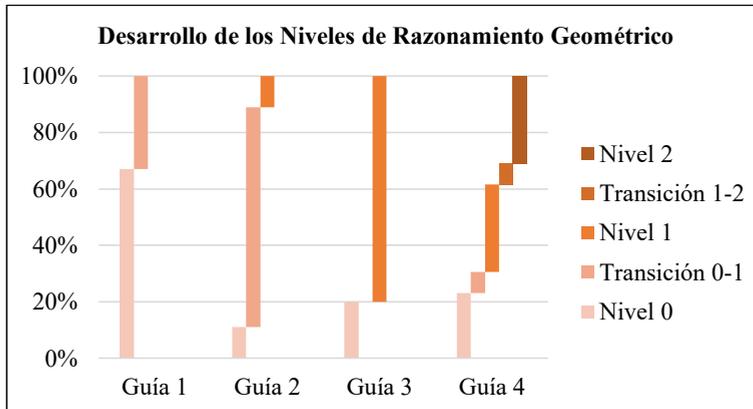


Gráfico 1. Desarrollo de los niveles de razonamiento geométrico en la secuencia didáctica

En la segunda parte del análisis de los resultados se busca *identificar los niveles de razonamiento geométrico de estudiantes de primer año medio, después de la aplicación de una secuencia didáctica basada en el modelo de Van Hiele*. La Tabla IV muestra, a modo de resumen, los grados de adquisición de cada nivel de razonamiento, tanto del pre-test como del post-test, con el objetivo de establecer algunas inferencias respecto el impacto de la secuencia didáctica en el desarrollo de los niveles de razonamiento de los estudiantes de la muestra.

TABLA IV
Resumen de los grados de adquisición de los niveles de razonamiento en el pre-test y post-test

Grados de Adquisición	Nivel 0		Nivel 1		Nivel 2	
	Pre-test	Post-test	Pre-test	Post-test	Pre-test	Post-test
Nula	13%	0%	22%	15%	53%	65%
Baja	25%	10%	34%	60%	25%	20%
Intermedia	0%	30%	25%	5%	16%	10%
Alta	16%	20%	19%	15%	3%	5%
Completa	47%	40%	0%	5%	3%	0%

A simple vista, no parecieran existir diferencias significativas en la adquisición alta y completa. Además, en ninguna de estas pruebas se logran resultados sobresalientes en los niveles 1 y 2. Sin embargo, el modelo de Van Hiele (1986) no permite realizar comparaciones simples entre el pre-test y

el post-test, dado que el objeto geométrico sobre el que se mide el razonamiento es diferente en cada test (polígonos, cuadriláteros y triángulos en el pre-test, y homotecias en el post-test); por tanto, es necesario hacer el análisis sobre los grados de adquisición al interior de cada nivel (Aravena y Gutiérrez, 2016; Fouz, 2005; Vargas y Gamboa, 2013).

A continuación, el Gráfico 2 presenta los grados de adquisición del pre-test y post-test, respecto al Nivel 0.

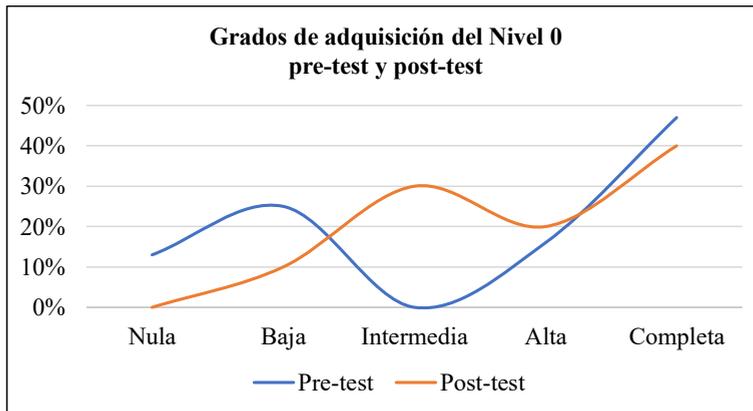


Gráfico 2. Grados de adquisición del Nivel 0 en el pre-test y post-test

El gráfico anterior evidencia que, las adquisiciones nula y baja presentan mayores porcentajes en el pre-test, lo que es positivo en cuanto al impacto de la secuencia didáctica, puesto que los porcentajes de las adquisiciones intermedia y alta son ampliamente mejores en el post-test, y esto es favorable en términos del desarrollo del razonamiento porque el avance entre niveles se realiza de forma gradual, lo cual implica que estos estudiantes tendrían mayores probabilidades de alcanzar grados de adquisición superiores; en contraposición de la gran concentración de estudiantes que obtienen nula o baja adquisición en el pre-test, que tendrían menos probabilidades de alcanzar una adquisición completa del Nivel 0. Esto se explicaría por la propiedad de *continuidad* del razonamiento geométrico (Vargas y Gamboa, 2013). Respecto a la adquisición completa del Nivel 0, la diferencia es levemente mejor en el pre-test, puesto que, polígonos, cuadriláteros y triángulos son conceptos geométricos con los que están familiarizados desde la educación parvularia.

A continuación, el Gráfico 3 muestra los grados de adquisición obtenidos en el Nivel 1.

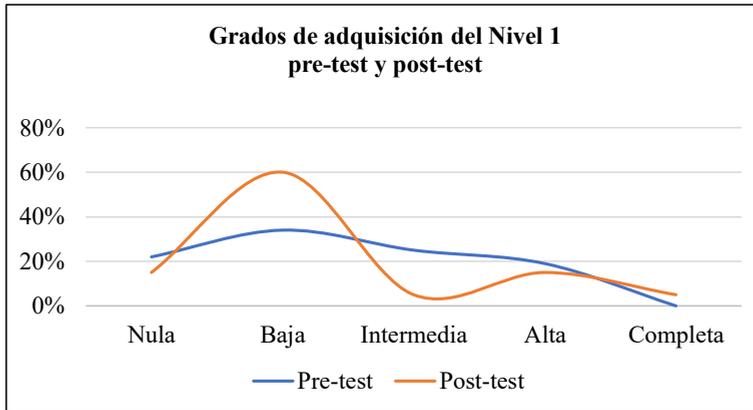


Gráfico 3. Grados de adquisición del Nivel 1 en el pre-test y post-test

En este gráfico se evidencian mejores resultados en el pre-test, por el hecho de ser más homogéneos sus resultados, en contraposición de los grados de adquisición del post-test, donde existe una mayor dispersión, esto es, un gran porcentaje de estudiantes en nula y baja adquisición y una cantidad considerablemente menor de estudiantes en los grados superiores, lo que implica la necesidad de movilizar a una mayor cantidad de estudiantes para lograr alcanzar tales grados. Respecto al éxito de la secuencia didáctica en este nivel, se podría decir que faltaron actividades que potenciaran el análisis conjunto del funcionamiento del pantógrafo y la cámara oscura.

Por último, se presenta el Gráfico 4 en donde se pueden observar los grados de adquisición obtenidos en el Nivel 2.

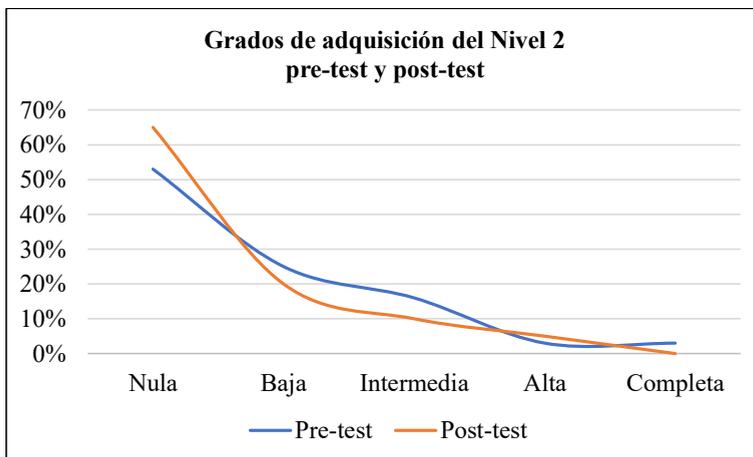


Gráfico 4. Grados de adquisición del Nivel 2 en el pre-test y post-test

En este caso los resultados son igualmente deficientes en ambos test, es decir, ni en el estudio de polígonos, cuadriláteros y triángulos, ni en el estudio del concepto de homotecia, se lograron resultados satisfactorios en la adquisición alta y completa del Nivel 2. Por el contrario, se logran elevados porcentajes en las adquisiciones nula y baja en ambas pruebas.

Respecto a la secuencia didáctica, al no existir una satisfactoria transición entre el Nivel 0 y Nivel 1, alcanzar el Nivel 2 se convierte en un objetivo difícilmente alcanzable, esto debido a la *secuencialidad* de los niveles de razonamiento (Vargas y Gamboa, 2013).

En resumen, de acuerdo con el análisis de las definiciones de homotecia que construyeron los estudiantes, en la secuencia didáctica se obtuvo un alto porcentaje con razonamiento geométrico entre los Niveles 1 y 2. Sin embargo, este logro se ve menoscabado por los resultados del post-test, en donde estos porcentajes disminuyen considerablemente con respecto a los grados de adquisición de esos niveles. Las causas de estos resultados pueden deberse a la falta de actividades de *orientación libre*, en donde los estudiantes deben aplicar lo aprendido en cada fase, con el objetivo de lograr un mejor razonamiento y lenguaje geométrico (Jaime y Gutiérrez, 1990).

5. CONCLUSIONES

Los resultados del pre-test mostraron que los estudiantes tenían altas probabilidades de enfrentar con éxito el Nivel 0 en otras experiencias de aprendizajes sobre geometría, pues en la mayoría de los estudiantes su razonamiento geométrico alcanza una adquisición alta y completa. En cuanto al Nivel 1, los resultados dan cuenta de una iniciación de este nivel y solo la mitad de ellos logra una adquisición intermedia y alta. Por último, en el Nivel 2, la mayoría de los estudiantes logra una nula o baja adquisición del nivel, lo que predecía bajas probabilidades de lograr adquisición completa de este nivel (Vargas y Gamboa, 2013), al menos en el corto plazo.

Durante el desarrollo de las actividades de la secuencia didáctica, se logró caracterizar las definiciones de homotecia que construyeron los estudiantes de forma colaborativa. El análisis de estas respuestas permitió reconocer el rol de las actividades dirigidas al Nivel 0 de Visualización, que no solo se limitaron al desarrollo de tal nivel, sino que se destacaron por posibilitar el desarrollo de habilidades correspondientes al Nivel 1 de Análisis, gracias a las actividades con el pantógrafo y la cámara oscura, permitiendo a los estudiantes, a través de la experimentación, identificar propiedades de la homotecia. Por lo tanto, coherente con lo que plantea la literatura (Pujawan et al., 2020; Jaime y Gutiérrez, 1990), las fases de *orientación dirigida* y *explicitación* fueron un factor clave en todas las actividades de la secuencia didáctica.

Los resultados del post-test lograron ratificar el rol de las actividades de visualización, pues movilizaron a la gran mayoría de estudiantes hacia grados de adquisición altos, respecto al Nivel 0, e iniciales, en el Nivel 1, situación que ocurrió en menor grado en el pre-test. Por tanto, las actividades de la secuencia didáctica permitieron, a la mayoría de los estudiantes, avanzar hacia la adquisición completa del Nivel 0 de razonamiento geométrico y, en consecuencia, apropiarse de los primeros grados de adquisición del nivel 1.

En cuanto al nivel 2, el post-test no evidencia los mismos avances logrados durante la aplicación de la secuencia didáctica, y esto se puede explicar por las siguientes dos razones: i) dado que en el post-test no se lograron altos o completos grados de adquisición del Nivel 1, la característica de *secuencialidad* de los niveles de razonamiento (Vargas y Gamboa, 2013) plantea que es natural no obtener buenos resultados en el Nivel 2; ii) hay mejores resultados en la fase 2 de la investigación porque allí se analizan razonamientos geométricos tanto individuales como grupales, es decir, el trabajo colaborativo permitió a los estudiantes dar cuenta de mejores grados de apropiación tanto del Nivel 1 como del Nivel 2.

En consecuencia, se puede decir que la visualización tuvo un rol predominante en el proceso (Baiduri et al., 2020; Gutiérrez, 2013), junto con la utilización de distintos recursos manipulativos, que ayudaron a iniciar el razonamiento visual, pues los estudiantes, además de observar lo que hacían estos instrumentos, lograron establecer propiedades que en un inicio estaban implícitas (Antonini y Martignone, 2011; Samper et al., 2001). En coherencia con Yi, Flores y Wang (2020), las decisiones del profesorado son fundamentales a la hora de diseñar experiencias de aprendizaje, debido a que son ellos quienes debe secuenciar las actividades, de tal modo que los estudiantes logren construir los conceptos y reconocer las propiedades. Generar interacción entre ellos les permite (contra) argumentar sus ideas y sistematizar los conocimientos.

A partir de los resultados, se puede afirmar que el desarrollo de los niveles de razonamiento geométrico se realiza de forma gradual en el tiempo, por lo que los profesores deben generar procesos de enseñanza que permitan mejorar los grados de adquisición de cada nivel, para asegurar mejores resultados en el siguiente. Por ejemplo, la secuencia didáctica diseñada para este estudio, favoreció el desarrollo del Nivel 0, por lo que sería necesario implementar más actividades que permitan a los estudiantes lograr desarrollar sus grados de adquisición en los Niveles 1 y 2. Además, se debe tener en cuenta que cuando se alcanza cierto nivel de razonamiento en una determinada área de la Geometría, este no se transfiere a otras nociones geométricas, aunque entrega una idea de qué tan probable es alcanzar ese mismo nivel en otras áreas, siempre y cuando se acompañe con un proceso de enseñanza coherente y contextualizado para tal fin.

Los resultado y proyecciones de este estudio deben leerse a la luz de sus limitaciones. En primer lugar, al ser un estudio aplicado a una muestra acotada de un contexto particular, sus resultados no pueden ser generalizados, pero se abren posibilidades para generar nuevas propuestas que permitan desarrollar el razonamiento geométrico de otros conceptos matemáticos, que sean extensibles a otros niveles de la enseñanza media. En segundo lugar, la secuencia didáctica propuesta en este estudio estuvo acotada a cuatro sesiones, lo cual supone una oportunidad de generar nuevas secuencias de aprendizaje en esta línea, cuya duración sea mayor, y así permitir al estudiantado alcanzar y apropiarse de los Niveles 1 y 2, y quizás transitar a los primeros grados del Nivel 3.

Para finalizar, este trabajo se constituye en una invitación a los docentes de matemática para considerar el modelo de Van Hiele como un marco teórico útil para diseñar y organizar la enseñanza de la Geometría (Yi, Flores y Wang, 2020), pues promueve en los estudiantes la visualización, la exploración, la formulación de conjeturas y la argumentación, procesos que resultan ser fundamentales para desarrollar su razonamiento geométrico.

RECONOCIMIENTOS

A la Universidad de Santiago de Chile, proyecto USA 1756, por el apoyo y financiamiento de la investigación.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Abreu, J. y Barot, M. (2017). *Desarrollo del pensamiento geométrico*. Recuperado de <http://arquimedes.matem.unam.mx/jlabreu/DesarrolloDelPensamientoMatematico.pdf>.
- Aires, A. P., Campos, H. y Poças, R. (2015). Raciocínio geométrico versus definição de conceitos: a definição de quadrado com alunos de 6.º ano de escolaridade. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 18(2), 151-176. <http://dx.doi.org/10.12802/relime.13.1821>.
- Antonini, S. y Martignone, F. (2011). *Pantographs for geometrical transformations: An explorative study on argumentation*. Recuperado de <https://www.semanticscholar.org/paper/PANTOGRAPHS-FOR-GEOMETRICAL-TRANSFORMATIONS%3A-AN-ON-Antonini/cb503f8c46e150e28151e767743f4b7f993ea90f>.
- Aravena, M. y Caamaño, C. (2013). Niveles de razonamiento geométrico en estudiantes de establecimientos municipalizados de la región del Maule. Talca, Chile. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 139-178. <https://dx.doi.org/10.12802/relime.13.1621>.
- Aravena, M. y Gutiérrez, A. (2016). Estudio de los niveles de razonamiento de Van Hiele en alumnos de centros de enseñanza vulnerables de educación media en Chile. *Enseñanza de las ciencias*, 107-128. <https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.1664>.

- Baiduri, B., Ismail, A. D. y Sulfiyah, R. (2020). Understanding The Concept Of Visualization Phase Student In Geometry Learning. *International Journal of Scientific & Technology Research*, 9(2), 2353-2359. Recuperado de <http://www.ijstr.org/final-print/feb2020/Understanding-The-Concept-Of-Visualization-Phase-Student-In-Geometry-Learning.pdf>.
- Bravin, C. y Pievi, N. (2008). *Documento metodológico orientador para la investigación educativa*. Argentina: OEI.
- Corberán, R., Gutiérrez, A., Huerta, M., Jaime, A., Margarit, J., Peñas, A. y Ruiz, E. (1994). *Diseño y evaluación de una propuesta curricular de aprendizaje de la geometría en enseñanza secundaria basada en el modelo de razonamiento de Van Hiele*. Madrid: Centro de Publicaciones del Ministerio de Educación y Ciencia.
- Denzin, N. y Lincoln, Y. (2005). *The Sage handbook of qualitative research, Third Edition*. Thousand Oaks: Sage.
- Erazo Jiménez, M. S. (2011). Rigor científico en las prácticas de investigación cualitativa. *Ciencia, docencia y tecnología*(42), 107-136. Recuperado de <https://www.redalyc.org/pdf/145/14518444004.pdf>.
- Figueiras, L., Molero, M., Salvador, A. y Zuasti, N. (2000). Una propuesta metodológica para la enseñanza de la Geometría a través de los fractales. *SUMA*, 45-54. Recuperado de <https://revistasuma.es/IMG/pdf/35/045-054.pdf>.
- Flick, U. (2014). *La gestión de la calidad en investigación cualitativa*. Madrid, España: Morata.
- Fouz, F. (2005). Modelo de Van Hiele para la didáctica de la Geometría. En Ibáñez y Macho, Ciclo de Conferencias *Un paseo por la Geometría 2004-2005*, (pp. 67-82). Universidad del País Vasco, España.
- Galleguillos, J. y Candia, L. (2011). Uso de herramientas interactivas en el aprendizaje de homotecias. *XIII Conferencia Interamericana de Educación Matemática (CIAEM)*. Recife.
- Gamboa, R. y Ballester, E. (2010). La enseñanza y aprendizaje de la geometría en secundaria, la perspectiva de los estudiantes. *Revista Electrónica Educare*, 14(2), 125-142. Recuperado de <https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=5414933>.
- García, S. y López, O. (2008). *La enseñanza de la Geometría* (Primera ed.). México D.F.: Intituto Nacional para la Evauación de la Educación.
- González, Y. y Arias, I. (2017). *Análisis didáctico del concepto de homotecia para su enseñanza y aprendizaje en octavo año de la Educación General Básica en Costa Rica* (Tesis no publicada). Universidad Nacional, Heredia, Costa Rica.
- Gutiérrez, S. (2013). El pensamiento geométrico en los estudiantes de primer grado de secundaria. *Visión Educativa IUNAES*, 7(15), 83-91. Recuperado de <https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=4713493>.
- Hart, L., Smith, S., Swars, S. y Smith, M. (2009). An examination of research methods in mathematics education (1995-2005). *Journal of Mixed Methods Research*, 3(1), 26-41. <https://doi.org/10.1177%2F1558689808325771>.
- Iglesias, M. y Ortiz, J. (2015). *Investigaciones en educación matemática. Aportes desde una unidad de investigación*. Recuperado de <http://riuc.bc.uc.edu.ve/bitstream/123456789/2749/4/ISBN-9789802336036.pdf>.
- Jaime, A. y Gutiérrez, A. (1990). Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la geometría: El modelo de Van Hiele. En S. Llinares, y M. Sanchez, *Teoría y práctica en educación matemática* (pp. 295-384). Sevilla: Alfar. Recuperado de <https://www.uv.es/Angel.Gutierrez/archivos1/textospdf/JaiGut90.pdf>.
- Marmolejo, G. A. y González Astudillo, M. T. (2015). Control visual en la construcción del área de superficies planas en los textos escolares. Una metodología de análisis. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 18(3), 301-328. <http://dx.doi.org/10.12802/relime.13.1831>.
- Menéndez, M. A. y Rodríguez, I. S. (2012). *Metodología de la investigación social: técnicas innovadoras y sus aplicaciones*. Síntesis.

- Organisation for Economic Co-operation and Development [OECD]. (2019). *Chile - Country Note - PISA 2018 Results*. Recuperado de https://www.oecd.org/pisa/publications/PISA2018_CN_CHL.pdf.
- Proenza, Y. y Leyva, L. (2008). Aprendizaje desarrollador en la matemática: estimulación del pensamiento geométrico en escolares primarios. *Revista Iberoamericana De Educación*, 48(1), 1-7. Recuperado de <https://ricoei.org/RIE/article/view/2249>.
- Pujawan, I. G. N., Suryawan, I. P. P. y Prabawati, D. A. A. (2020). The Effect of Van Hiele Learning Model on Students' Spatial Abilities. *International Journal of Instruction*, 13(3), 12-33. Recuperado de http://www.e-iji.net/dosyalar/iji_2020_3_32.pdf.
- Ramírez-Uclés, R., Flores Martínez, P. y Ramírez-Uclés, I. (2018). Análisis de los errores en tareas geométricas de argumentación visual por estudiantes con talento matemático. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 21(1), 29-56. <https://doi.org/10.12802/relime.18.2112>.
- Rodríguez, B., Carreño, X. y Muñoz, V. (2013). ¿Cuánto saben de matemática los docentes que la enseñan y cómo se relaciona ese saber con sus prácticas de enseñanza?. Recuperado de <https://centroestudios.mineduc.cl/wp-content/uploads/sites/100/2017/07/Informe-Final-F611150-PUC-Beatriz-Rodr%C3%ADguez.pdf>.
- Samper, C., Leguizamón, C. y Camargo, L. (2001). Razonamiento en Geometría. *Revista EMA*, 6(2), 141-158. Recuperado de <http://funes.uniandes.edu.co/1126/>.
- Sandín Esteban, M. P. (2003). *Investigación cualitativa en educación: Fundamentos y tradiciones*. Madrid: McGraw-Hill.
- Santander, P. (2011). Por qué y cómo hacer Análisis de Discurso. *Cinta de moebio*, (41), 207-224. <http://dx.doi.org/10.4067/S0717-554X2011000200006>.
- Saorin Villa, A., Torregrosa Gironés, G. y Quesada Vilella, H. (2019). Razonamiento configuracional y organización discursiva en procesos de prueba en contexto geométrico. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 22(2), 213-244. <https://doi.org/10.12802/relime.19.2224>.
- Tójar Hurtado, J. C. (2006). *Investigación cualitativa: Comprender y actuar*. Madrid: La Muralla.
- Van Hiele, P. M. (1986). *Structure and Insight. A Theory of Mathematics Education*. London: Academic Press Inc.
- Vargas, G. y Gamboa, R. (2013). El modelo de Van Hiele y la enseñanza de la geometría. *UNICIENCIA*, 27(1), 74-94. Recuperado de <https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=4945319>.
- Venegas, M. (2015). *Niveles de razonamiento geométrico de Van Hiele al resolver problemas geométricos: un estudio con alumnos de 13 a 16 años en Cantabria* (Tesis no publicada). Universidad de Cantabria, Cantabria, España.
- Yi, M., Flores, R. y Wang, J. (2020). Examining the influence of van Hiele theory-based instructional activities on elementary preservice teachers' geometry knowledge for teaching 2-D shapes. *Teaching and Teacher Education*, 91, 103038. <https://doi.org/10.1016/j.tate.2020.103038>.
- Yilmaz, K. (2013). Comparison of Quantitative and Qualitative Research Traditions: epistemological, theoretical, and methodological differences. *European Journal of Education*, 48(2), 311-325.

Autores

Jorge Andrés Labra Peña. Universidad de Santiago de Chile, Chile.
0000-0001-8819-4142 jorge.labra@usach.cl

Carlos Mario Vanegas Ortega. Universidad de Santiago de Chile, Chile.
0000-0002-5364-0664 cmariov@gmail.com