Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa
RELIME
ISSN 1665-2436 | eISSN 2007-6819
Vol. 28, e793
Artículo
https://doi.org/10.12802/relime.2025.28.e793

Comprensión de los intervalos de confianza: Una caracterización de las relaciones entre los elementos de su Esquema cognitivo

Understanding confidence intervals: A characterization of the relationships among the elements of the cognitive Schema

Luzdari, Rangel Ruiz
Universidad Autónoma de Bucaramanga, Colombia
Solange, Roa-Fuentes
Universidad Industrial de Santander, Colombia
Diana, Villabona
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, México

Resumen

En esta investigación se caracterizan relaciones conceptuales necesarias para la comprensión de los intervalos de confianza a través del constructo Esquema propuesto desde la teoría APOE. El estudio se desarrolla a partir de un Análisis Teórico del concepto, complementado con una exploración empírica basada en entrevistas semiestructuradas a profesores de matemáticas en formación que habían cursado estadística al menos un año antes. Este enfoque permitió identificar relaciones que persisten después de la instrucción formal, así como aquellas que no se consolidaron. Los resultados evidencian dificultades en la interpretación del nivel de confianza, en la articulación entre la media muestral y el parámetro poblacional, y en el reconocimiento del papel del tamaño muestral en la precisión del intervalo, lo que sugiere un Esquema limitado. A partir de las relaciones identificadas, se propone la génesis de una Descomposición Genética del Esquema del intervalo de confianza.

Palabras clave:

- *Estadística Inferencial*
- *Intervalos de Confianza*
- *Teoría APOE*
- *Descomposición genética*
- *Esquemas*

Cómo citar:
Rangel Ruiz, L., Roa Fuentes, S. y Villabona, D. (2025). Comprensión de los intervalos de confianza: Una caracterización de las relaciones entre los elementos de su Esquema cognitivo. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *28*, e793. https://doi.org/10.12802/relime.2025.28.e793

Recepción: 20/06/2025 Aceptación: 15/12/2025 Publicación: 19/12/2025

Abstract

This study characterizes conceptual relationships necessary for understanding confidence intervals through the construct of Schema as proposed in APOS theory. The research is developed through a Theoretical Analysis of the concept, complemented by an empirical exploration based on semi-structured interviews with preservice mathematics teachers who had completed a statistics course at least one year prior. This approach made it possible to identify relationships that persist after formal instruction, as well as those that fail to consolidate. The results reveal difficulties in interpreting the confidence level, in articulating the relationship between the sample mean and the population parameter, and in recognizing the role of sample size in the precision of the interval, suggesting a limited Schema. Based on the identified relationships, the genesis of a Genetic Decomposition of the Schema of the confidence interval is proposed.

Keywords

- *Inferential statistics*
- *Confidence intervals*
- *APOS theory*
- *Genetic decomposition*
- *Schemas*

Resumo

Este estudo caracteriza relações conceituais necessárias para a compreensão dos intervalos de confiança por meio do construto Esquema, conforme proposto pela teoria APOE. A pesquisa é desenvolvida a partir de uma análise teórica do conceito, complementada por uma exploração empírica baseada em entrevistas semiestruturadas com professores de matemática em formação que haviam cursado estatística pelo menos um ano antes. Essa abordagem permitiu identificar relações que persistem após a instrução formal, bem como aquelas que não se consolidaram. Os resultados evidenciam dificuldades na interpretação do nível de confiança, na articulação entre a média amostral e o parâmetro populacional e no reconhecimento do papel do tamanho da amostra na precisão do intervalo, o que sugere um Esquema limitado. Com base nas relações identificadas, propõe-se a gênese de uma Decomposição Genética do Esquema do intervalo de confiança.

Palavras-chave

- *Estatística inferencial*
- *Intervalos de confiança*
- *Teoria APOS*
- *Decomposição genética*
- *Esquemas*

Résumé

Cette étude caractérise les relations conceptuelles nécessaires à la compréhension des intervalles de confiance à travers le construit de schème, tel que proposé par la théorie APOE. La recherche est développée à partir d’une analyse théorique du concept, complétée par une exploration empirique fondée sur des entretiens semi-directifs menés auprès de futurs enseignants de mathématiques ayant suivi un cours de statistique au moins un an auparavant. Cette approche a permis d’identifier des relations qui persistent après l’enseignement formel, ainsi que celles qui ne se sont pas consolidées. Les résultats mettent en évidence des difficultés dans l’interprétation du niveau de confiance, dans l’articulation entre la moyenne de l’échantillon et le paramètre de la population, ainsi que dans la reconnaissance du rôle de la taille de l’échantillon dans la précision de l’intervalle, ce qui suggère un schème limité. À partir des relations identifiées, la genèse d’une décomposition génétique du schème de l’intervalle de confiance est proposée.

Most Clés

- *Statistique inférentielle*
- *Intervalles de confiance*
- *Théorie APOS*
- *Décomposition génétique*
- *Schémas*

1. Introducción

La importancia de la estadística en la actividad humana radica en que, a través de sus conceptos, nociones y técnicas, es posible realizar estimaciones sobre fenómenos observables en poblaciones completas a partir del estudio de muestras representativas. La incertidumbre que acompaña el planteamiento de inferencias puede ser cuantificada mediante el concepto de intervalos de confianza. Dado que en nuestra vida cotidiana estamos acostumbrados a pensar en certezas, la comprensión de los intervalos de confianza puede tornarse contraintuitiva para estudiantes e incluso para expertos (Hoekstra et al., 2014; Roland, 2020; Finch & Gordon, 2025). Asimismo, su aprendizaje formal requiere de la construcción de relaciones entre distintos conceptos de la estadística como muestreo, variabilidad, parámetros poblacionales, entre otros (Batanero y López-Martín, 2020); lo que implica una actividad cognitiva compleja.

La toma de decisiones a partir de datos poblacionales se fundamenta en los métodos de inferencia estadística que extienden la información contenida en una muestra hacia toda la población. La inferencia estadística comprende dos grandes técnicas: la estimación de parámetros y las pruebas de hipótesis. La estimación de parámetros poblacionales puede hacerse de manera puntual o mediante el planteamiento de intervalos de confianza (Martín, 2022; Brenes, 2021). Si bien existe una diferencia clara entre los dos tipos de estimación –en el sentido de que las estimaciones puntuales suministran un único valor y los intervalos de confianza un intervalo de posibles valores del parámetro–, una diferencia fundamental radica en que la estimación puntual no incorpora una medida explicita de la incertidumbre asociada al proceso inferencial. En contraste, la estimación por intervalos se sustenta en la probabilidad de que el procedimiento utilizado produzca estimaciones adecuadas (Sánchez-Rodríguez, 2021). Esta probabilidad, expresada a través del nivel de confianza, se encuentra estrechamente relacionada con la variabilidad de la población y con el tamaño muestral, lo que contribuye a que su comprensión resulte conceptualmente exigente (De Hierro et al., 2020; Yáñez y Behar, 2009).

Precisamente, distintas investigaciones han evidenciado que la comprensión del concepto de intervalo de confianza no está libre de dificultades para estudiantes universitarios, ni para profesores, expertos o investigadores. En particular, Behar (2001) realizó un estudio con una muestra de 41 "expertos" —estadísticos profesionales, profesionales no estadísticos y estudiantes de último año de la carrera de estadística— y 297 "no expertos" —estudiantes universitarios de pregrado, en su mayoría alumnos de los "expertos"— a quienes aplicó un cuestionario que le permitió establecer algunas interpretaciones sobre los intervalos de confianza asociadas a la media poblacional, presentes tanto en los estudiantes como en los expertos. Estas interpretaciones fueron:

- Estudiantes y expertos asocian el nivel de confianza con el porcentaje de datos poblacionales que contienen. Por ejemplo, un intervalo con un nivel de confianza del 95%, contiene el 95% de los valores posibles de la población en estudio.
- Los estudiantes hacen una interpretación bayesiana del intervalo de confianza al suponer que el nivel de confianza es la probabilidad de obtener el parámetro dentro del intervalo.
- Estudiantes y expertos no asocian el nivel de confianza con una frecuencia relativa. Es decir, no comprenden que el nivel de confianza hace referencia a que, si se repite el muestreo muchas veces, se espera que un porcentaje de los intervalos —dado precisamente por el nivel de confianza— contenga el parámetro poblacional y que, por lo tanto, existan algunos intervalos que no lo contienen.
- Los estudiantes asumen que aumentar el nivel de confianza, manteniendo los demás datos constantes, conlleva a intervalos menos anchos.
- Estudiantes y expertos, en menor grado, asumen que el ancho del intervalo es directamente proporcional al tamaño de la muestra, es decir, un incremento en el tamaño de la muestra conduce a que el ancho del intervalo aumente.
- Estudiantes y expertos consideran erróneamente que un intervalo de confianza contiene los valores de la media muestral y no los valores plausibles del parámetro que se está estimando —media poblacional—.

Diversas investigaciones siguen reportando este tipo de interpretaciones, lo que señala la importancia de continuar desarrollando estudios que promuevan las construcciones adecuadas y por tanto fomenten la comprensión del concepto de intervalos de confianza (Cumming et al., 2004; Fidler, 2005; Fidler & Cumming, 2005; Olivo y Batanero, 2007; Olivo, 2008; Kalinowski, 2010; Sarmiento y Osma, 2010; Henriques, 2012; Rangel, 2014; López-Martín et al., 2016; Henriques, 2016; Wang, Reich & Horton, 2017; De Hierro et al. 2020; Batanero y López-Martín, 2020; Camargo Forero, 2023; Sánchez, 2024).

Por otro lado, Behar y Yáñez (2009) realizaron un análisis centrado en el nivel de confianza, con la intención de determinar las razones que podrían explicar las interpretaciones identificadas por Behar (2001). Estos autores reportaron que en la construcción de intervalos de confianza para la media poblacional μ, a partir del Teorema Central del Límite, se llega a las siguientes expresiones:

$$P\left(\mu - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} {}^{\sigma}/_{\sqrt{n}} < \bar{X} < \mu + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} {}^{\sigma}/_{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha \ (1)$$

$$P\left(\bar{X} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}}{}^{\sigma}/_{\sqrt{n}} < \mu < \bar{X} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}}{}^{\sigma}/_{\sqrt{n}}\right) = 1 - \alpha \ (2)$$

donde $\bar{X}$ es la media muestral, $Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ es el percentil de la normal estándar asociado al nivel de confianza, ${}^{\sigma}/_{\sqrt{n}}$ es la desviación estándar asociada a la variable aleatoria $\bar{X}$ y α es el error que se está dispuesto a asumir.

Las expresiones (1) y (2) son equivalentes, aunque se puedan interpretar de formas diferentes: la primera es un intervalo centrado en μ y la segunda es un intervalo centrado en $\bar{X}$. La primera puede dar lugar a la interpretación de que el nivel de confianza hace referencia a la probabilidad de que el intervalo contenga a $\bar{X}$ (Behar, 2001; Olivo y Batanero, 2007; Olivo, 2008). La segunda representa la probabilidad de contener el parámetro buscado μ, esto es, el nivel de confianza (Behar, 2001; Bower, 2003). Diferentes autores, para desligarse de las malas interpretaciones y resaltar que el carácter aleatorio de los intervalos está soportado en $\bar{X}$, aconsejan que se use la siguiente expresión:

$$P\left\{\left(\bar{X} - Z_{1-\alpha/_2}{}^{\sigma}/_{\sqrt{n}}, \bar{X} + Z_{1-\alpha/_2}{}^{\sigma}/_{\sqrt{n}}\right) contenga\ a\ \mu\right\} = 1 - \alpha \quad (3).$$

La expresión (3) resalta que el carácter aleatorio del evento al cual se le asigna valor de probabilidad es $\bar{X}$, lo que, en principio, podría ayudar a evitar algunas de las interpretaciones descritas anteriormente.

Una segunda explicación que presentan Yáñez y Behar (2009), se relaciona con el hecho de no asumir la probabilidad que define al nivel de confianza de un intervalo desde el punto de vista frecuencial. Esto se expresa diciendo que: de cada 100 muestras del mismo tamaño, en promedio, el $(1-\alpha)100\%$ de los intervalos que se forman con las medias muestrales de esas muestras, contienen el parámetro μ. La ausencia de esta interpretación frecuencial puede explicar la interpretación bayesiana mencionada por Behar (2001). De todas maneras, y es preciso decirlo, este enfoque bayesiano puede estar reflejando una interpretación subjetiva de la probabilidad. Esto es, una certidumbre respecto a la presencia o no del parámetro dentro del intervalo, de la misma forma como se le concede al boleto de lotería comprado un valor de probabilidad de ganarse el premio (Padilla, 2021; Salcedo, et al., 2011).

Teniendo en cuenta los resultados anteriores, diversas investigaciones (Terán, 2006; Callaert, 2007; Chance & McGaughey, 2014) señalan que además de un proceso de modelización razonado y del abordaje repetido del enfoque frecuencial de la probabilidad, es necesario un trabajo experimental. Este tipo de trabajo consiste en la realización de simulaciones computacionales, ya que estas permiten que los estudiantes capten en forma directa la variabilidad muestral y la distribución del estimador puntual y, por tanto, pueden facilitar la comprensión del efecto producido al variar el nivel de confianza y el tamaño de la muestra.

Desde el punto de vista didáctico, se han desarrollado investigaciones basadas en el diseño de simulaciones físicas y/o computacionales cuyos resultados son prometedores. Estos fortalecen la idea de que la implementación de este tipo de estrategias en el aula puede constituir una herramienta poderosa para favorecer el aprendizaje de los intervalos de confianza y el nivel de confianza (Pfankuch et al., 2012; Reaburn, 2014; Chance & McGaughey, 2014). La simulación brinda oportunidades para que el estudiante perciba la variabilidad como la distribución muestral del estadístico-estimador, basado en la generación simulada de tantas muestras como se quiera; este proceso lo ayuda a superar la limitación práctica de contar con una sola muestra. Esta estrategia, junto con la combinación de representaciones gráficas y múltiples perspectivas del mismo concepto, permite apreciar en forma directa la relación entre tamaño muestral, nivel de confianza y el ancho del intervalo (Finch & Gordon, 2025).

En este contexto, esta investigación busca establecer qué relaciones –adecuadas o no– han permanecido en el tiempo en profesores de matemáticas en formación después de una instrucción formal sobre intervalos de confianza; además, se propone identificar las relaciones entre concepciones previas necesarias para la comprensión de dicho concepto. A partir del reconocimiento de las conexiones entre las concepciones involucradas, se caracterizan las formas de pensamiento que deberían promoverse para favorecer la construcción del Esquema asociado a los intervalos de confianza. Para atender estas cuestiones se adopta como marco teórico y metodológico la teoría APOE —acrónimo de las estructuras Acción, Proceso, Objeto y Esquema—, la cual permite analizar las relaciones entre las estructuras cognitivas implicadas en la comprensión de conceptos y nociones matemáticas. En adelante, las estructuras de la teoría APOE se escribirán con su primera letra en mayúscula.

Esta investigación se desarrolla desde un enfoque cualitativo de carácter exploratorio. Inicialmente, se realiza un análisis teórico del concepto que orienta el diseño de un cuestionario y una entrevista semiestructurada, aplicados a 15 profesores de matemáticas en formación que previamente habían cursado estadística descriptiva e inferencial. A través de estos instrumentos se exploraron las relaciones entre los conceptos que subyacen a la comprensión de los intervalos de confianza. Como resultado, se propone una caracterización de las relaciones identificadas, estableciendo cuáles resultan fundamentales para su comprensión. Finalmente, se plantean futuras líneas de investigación desde la perspectiva de la teoría APOE, así como estrategias didácticas orientadas a promover la evolución conceptual de los estudiantes en torno a este concepto.

2. Teoría APOE

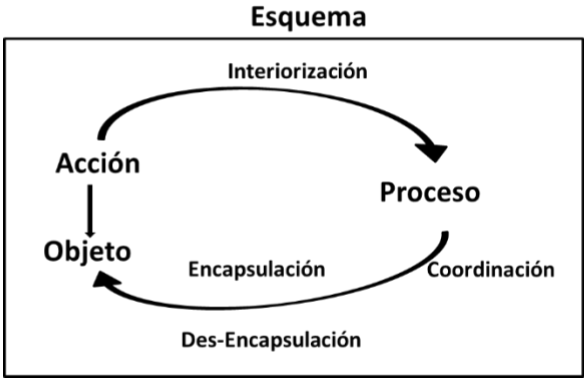
La comprensión de los intervalos de confianza requiere del establecimiento de un gran número de relaciones cognitivas coherentes entre conceptos como población, muestra, parámetro, distribución muestral, entre otros. En este sentido, esta problemática se sitúa en el ámbito cognitivo, ya que involucra la manera en que los individuos construyen, organizan y evolucionan dichas relaciones para dar sentido al concepto.

Para abordar este problema, hemos incorporado a la teoría APOE como marco teórico de investigación, la cual proporciona un paradigma —teórico y metodológico— para analizar la construcción del conocimiento matemático a partir de las estructuras mentales Acción, Proceso, Objeto y Esquema. En particular, esta teoría permite estudiar cómo se establecen y organizan las relaciones entre conceptos, así como caracterizar el desarrollo de un Esquema coherente asociado a los intervalos de confianza. Su uso resulta pertinente ya que posibilita la obtención de elementos para una descripción cognitiva profunda del concepto a través del modelo denominado Descomposición Genética.

La figura 1, señala los principales constructos de la teoría APOE y sus relaciones a través de algunos mecanismos mentales. La construcción de un concepto o noción matemática inicia a partir de la aplicación de una Acción o un conjunto de Acciones sobre Objetos que un individuo ha construido previamente (Arnon et al., 2014).

Figura 1

Construcciones mentales que intervienen en el proceso de comprensión de un concepto matemático.



Nota. Adaptado de Arnon et al. (2014).

Las Acciones son estructuras que obedecen al conjunto de transformaciones que un individuo puede aplicar sobre un Objeto para dar lugar a la construcción de nuevo concepto o noción matemática. Una Acción es una estructura que está condicionada por un estímulo externo, por tanto, el individuo requiere realizarla paso a paso y de manera sucesiva. En muchos casos, las Acciones están asociadas con la aplicación de un algoritmo específico que se relaciona con el contexto del problema que se está abordando. Por ejemplo, en el caso del concepto de media o promedio de un conjunto de datos, una Acción se asocia con la capacidad del individuo para encontrar la media o promedio aplicando la formula $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i)}{n}$ (Mathews & Clark, 2007).

Una Acción se interioriza en un Proceso, cuando el individuo puede reflexionar sobre ella, es decir, puede realizar dicha transformación de manera mental sin tener que actuar externamente sobre los elementos en juego (Arnon et al., 2014). En el caso de la media, Mathews & Clark (2007) proponen que la interiorización se logra, por ejemplo, cuando el individuo acepta que la media es una medida de tendencia central que es sensible a los datos atípicos y que, por ende, se necesita más información para poder describir el conjunto de datos. Esta concepción, en este caso, se distingue por que el individuo se centra en las propiedades y características de la media como un estimador puntual insesgado.

Un Proceso es dinámico y puede ser el resultado de la interiorización de una Acción o de la coordinación de varios Procesos. El mecanismo de coordinación permite que un individuo construya nuevos Procesos a partir de otros. Por ejemplo, la coordinación entre el Proceso

Vol. 28, e793 https://doi.org/10.12802/relime.2025.28.e793

de cálculo de medias muestrales y el Proceso de muestreo permite construir el Proceso de media muestral como variable aleatoria. Así, cada muestra generada por el muestreo implica una media muestral particular y viceversa.

Una vez un individuo logra estructurar un único Proceso, puede encapsularlo en un Objeto. Como muestra la literatura (Roa-Fuentes y Parraguez, 2017; Arnon et al., 2014), el mecanismo de encapsulación es complejo y son pocos los estudiantes que en contextos educativos tradicionales alcanzan esta estructura (Villabona y Roa-Fuentes, 2016). Un Objeto es construido cuando el individuo puede pensar en el Proceso como un todo y aplicar Acciones sobre él. Por ejemplo, en el caso de la media muestral, cuando el individuo calcula la media de las medias, como un mejor estimador de la media poblacional incluyendo sus características y propiedades, es posible afirmar que el individuo ha construido una estructura Objeto de la media muestral. Esto implica caracterizar una nueva medida junto con su error estándar. Para más detalle sobre las estructuras y mecanismos mentales, consultar Arnon et al. (2014).

Una vez que se han construido los Procesos y Objetos, estos pueden relacionarse de diversas maneras. Una de ellas es mediante el mecanismo de des-encapsulación, que surge cuando se requiere retornar al Proceso que dio origen al Objeto, con el fin de coordinarlo con otros Procesos y generar así un nuevo Proceso que, a su vez, pueda ser encapsulado en un nuevo Objeto.

Por otra parte, el Objeto puede ser asimilado por una estructura cognitiva más amplia, como un Esquema, o bien, dar lugar a la construcción de un nuevo Esquema a partir del establecimiento de relaciones —mediante mecanismos mentales— con otras estructuras previamente construidas. La organización e interacción de todas las estructuras y mecanismos mentales relacionados con un concepto o unidad de conocimiento matemático dan lugar a un Esquema, cuya coherencia le permite al individuo determinar su utilidad para resolver un problema matemático particular. Asimismo, un Esquema se caracteriza por su reconstrucción continua y la actividad matemática del sujeto determina su evolución que es posible describir a través de los niveles *Intra*–, *Inter*– y *Trans*– (Trigueros, 2005; Dubinsky, 1991; Arnon et al., 2014).

Las estructuras y los mecanismos mentales relacionados con un concepto o problema matemático se sintetizan en un modelo cognitivo denominado Descomposición Genética (DG). La DG permite describir, inicialmente de manera hipotética, las estructuras y mecanismos mentales que un individuo puede desarrollar para la construcción exitosa de un concepto y/o noción matemática (Arnon et al., 2014). Una DG preliminar se logra a partir de un Análisis Teórico del concepto que se quiere construir o el problema que se quiere resolver.

3. Método de la investigación: Análisis teórico y exploración empírica de las relaciones

La teoría APOE cuenta con un conjunto de acuerdos explícitos que configuran lo que se conoce como el Ciclo Metodológico conformado por tres componentes: i) Análisis teórico, ii) Diseño e implementación de la enseñanza y iii) Recolección y análisis de datos. En esta investigación se reportan los hallazgos de la aplicación de la primera componente: Análisis Teórico. Como se muestra en la Figura 2, en el marco de esta investigación, la componente incluye una exploración empírica —a través de la aplicación de un cuestionario, que en este caso fue adaptado de Olivo (2008), y una entrevista semiestructurada— de las relaciones entre concepciones asociadas a la comprensión de los intervalos de confianza. Esto se apoya en el trabajo realizado por 15 profesores de matemáticas en formación que habían aprobado un curso de estadística descriptiva y un curso de estadística inferencial.

Figura 2

Ciclo de Investigación de este estudio

Análisis teórico
[Incluye exploración empírica de relaciones entre conceptos]

↓

Análisis y caracterización de relaciones

Nota. Realización propia.

El Análisis Teórico de esta investigación se fundamenta en la revisión de libros de texto —generalmente utilizados por los profesores en formación que participan en este estudio— (Moore, 1995; Wild & Seber, 2000; Wackerly et al., 2002), en los hallazgos reportados en investigaciones previas y en la experiencia como docentes e investigadoras de las autoras de este documento. A partir de estos elementos se caracterizan teóricamente algunas relaciones entre concepciones necesarias para la comprensión de los intervalos de confianza. La ausencia de tales relaciones podría explicar las interpretaciones identificadas en las investigaciones que constituyen los antecedentes de este estudio. Asimismo, se plantea una exploración preliminar con el propósito de informar empíricamente las relaciones identificadas teóricamente. Finalmente, se describe la posible actividad cognitiva, en términos de las estructuras y mecanismos mentales propuestos por la teoría APOE, asociados a los conceptos involucrados en la construcción y comprensión de los intervalos de confianza.

La exploración empírica se llevó a cabo mediante la aplicación de un cuestionario de preguntas durante entrevistas semiestructuradas, videograbadas y transcritas. Las preguntas buscan que los participantes expliquen lo que recordaban sobre el concepto y las relaciones que identificaban entre los elementos involucrados en su construcción. Entre ellas se incluyeron preguntas abiertas como: ¿cuál es la necesidad de construir un intervalo de confianza?, ¿qué motiva su construcción?, ¿cómo se interpreta el nivel de confianza de un intervalo de confianza?, ¿qué relación existe entre el nivel de confianza y la amplitud del intervalo? y ¿cómo influye el tamaño muestral en la amplitud del intervalo y en la precisión de la estimación?

Estas entrevistas permitieron identificar relaciones entre distintos conceptos evidenciados en el razonamiento de los profesores en formación, al responder preguntas que involucraban los intervalos de confianza y sus niveles de confianza. Los resultados arrojados por la exploración empírica se utilizaron posteriormente como un medio para informar el análisis preliminar.

A continuación, se presentan de manera sintética las relaciones conceptuales fundamentales para la comprensión de los intervalos de confianza identificadas teórica y empíricamente. Posteriormente, se explica la actividad cognitiva que puede ser desarrollada por los individuos al comprender el concepto de estudio; específicamente, se proponen distintos tipos de relaciones entre las concepciones previas usando los constructos de la Teoría APOE.

3.1. Relaciones entre Conceptos Informadas Teóricamente

Se han identificado en la etapa de Análisis Teórico, seis relaciones fundamentales que permiten explicar las interpretaciones reportadas en las investigaciones previas, específicamente, en Behar (2001); estas son:

RT1. Relación entre intervalo de confianza y parámetro poblacional: El individuo debe reconocer que el intervalo de confianza no describe un porcentaje de datos de la población, sino un conjunto de posibles valores del parámetro poblacional.

RT2a. Relación entre el nivel de confianza y procedimiento de inferencia: El estudiante reconoce que el nivel de confianza no representa la probabilidad de que el parámetro poblacional se encuentre dentro del intervalo obtenido; más bien, constituye una propiedad del procedimiento estadístico utilizado para construir el intervalo.

RT2b. Relación entre nivel de confianza y repetición del muestreo: El individuo interpreta que el nivel de confianza se fundamenta en la idea de que, si el procedimiento de muestreo se repite numerosas veces, una proporción de intervalos igual al nivel de confianza contendrá el parámetro poblacional. Esta interpretación permite comprender el significado frecuencial del nivel de confianza.

RT2a y RT2b no son relaciones equivalentes, sino complementarias. Mientras que RT2a establece que el nivel de confianza es una propiedad del procedimiento inferencial y no del intervalo particular obtenido, RT2b explicita el fundamento de dicha propiedad mediante la idea de repetición del muestreo, que permite interpretar el nivel de confianza desde una perspectiva frecuencial.

RT3. Relación entre el nivel de confianza y la amplitud del intervalo: El individuo reconoce la relación directa entre el nivel de confianza y la amplitud del intervalo: a mayor nivel de confianza, mayor amplitud del intervalo. Esta relación permite comprender el papel del valor crítico de la distribución en el cálculo del error de estimación.

RT4. Relación entre el tamaño muestral y precisión del intervalo: El tamaño de la muestra se relaciona inversamente con el error estándar de la media, de modo que un aumento en el tamaño muestral conduce a intervalos de confianza más estrechos. Esta relación permite comprender cómo el tamaño de la muestra influye en la precisión de la estimación.

RT5. Relación entre media muestral y parámetro poblacional: El estudiante reconoce que el intervalo de confianza se construye a partir de la media muestral, mientras que su interpretación se realiza respecto al parámetro poblacional. En este sentido, la media muestral funciona como estimador puntual del parámetro y constituye el centro del intervalo.

3.2. Relaciones entre Conceptos Informadas Empíricamente

A pesar de que las preguntas planteadas durante el desarrollo de la entrevista eran abiertas, en muchos casos las respuestas de los participantes se centraron en definiciones o procedimientos recordados. Sin embargo, se promovió la reflexión sobre sus propias respuestas, lo que permitió identificar las conexiones que establecen entre los elementos involucrados al explicar el concepto de intervalo de confianza.

Los profesores en formación entrevistados y cuyos razonamientos se reportan en este estudio son identificados mediante los seudónimos María, Sergio y Antonio, con el fin de preservar el anonimato de los participantes. Asimismo, el entrevistador se designa con la letra E.

Después de reflexionar sobre los diferentes conceptos que intervienen en la construcción de un intervalo de confianza, y ante las preguntas: ¿Cuál es la necesidad de construir un intervalo de confianza? y ¿Qué motiva su construcción?, María explica que el intervalo se construye para estimar el valor de la media poblacional a partir de la información proporcionada por una muestra:

> María: [...] Para hacer como una inferencia sobre... eh, yo quiero hacer una estimación de cuál es el promedio de la nota de matemáticas de los alumnos de sexto grado, entonces, para eso es que yo utilizo un intervalo de confianza pero lo que hago es... cojo una muestra aleatoria y eso lo aplico es a esa muestra, entonces sobre esa muestra es que yo hago una inferencia para decir que... para estimar el valor de ese promedio de la población, digamos que en este caso la población serían los estudiantes de sexto grado.

En este caso María, a partir de un ejemplo particular, reconoce que el intervalo de confianza se refiere al parámetro poblacional y no a los datos de la población. Lo que evidencia que ha construido la relación RT1. Por otro lado, en cuanto a la interpretación del nivel de confianza, y su relación con el procedimiento de construcción del intervalo, Sergio plantea que:

> Sergio: Que prácticamente de cada 100, de cada 100 muestras que yo tome, de medias de muestras diferentes que yo tome, aproximadamente 95 van a estar en esa... los intervalos contienen la media poblacional.

Sergio explica la relación RT2a a partir de una interpretación frecuencial del nivel de confianza, al reconocer que este no describe la probabilidad de que el parámetro esté en un intervalo en particular, sino que hace referencia al comportamiento del procedimiento de construcción del intervalo bajo muestreo repetido. En contraste, Antonio considera que el nivel de confianza representa el porcentaje de que el verdadero valor de la media poblacional esté en el intervalo.

> Antonio: [...] sí, porcentaje de confianza. Entonces, bueno, con esos datos que me da el intervalo y hay esa confianza de que el valor verdadero de μ esté en ese intervalo.

> E: ¿Qué es lo que significa el porcentaje de confianza?

Antonio: el porcentaje de que el verdadero valor de la media poblacional esté en ese intervalo.

Antonio realiza una interpretación bayesiana del intervalo de confianza (Behar, 2001; Olivo y Batanero, 2007; Hoekstra et al., 2014), al atribuir la probabilidad al parámetro y no al procedimiento que genera el intervalo, lo que indica que no ha construido la relación RT2a. Por otra parte, Antonio revela un nuevo tipo de interpretación que no ha sido reportada explícitamente en la literatura y que se vincula con una falta de establecimiento de RT2a y RT2b. Antonio concibe el nivel de confianza como un grado de seguridad asociado al resultado obtenido, lo que sugiere que el intervalo es entendido como una garantía de la estimación realizada a partir de la muestra. Esta interpretación se evidencia en el siguiente fragmento:

Antonio: Si no estoy mal es, yo sé que quiero estudiar una población, entonces yo saco una muestra, entonces se quieren estudiar ciertas características de la población a partir de una muestra [...].

E: ¿Qué información le ofrece ese intervalo que usted construye a partir de la muestra?

Antonio: Bueno, primero debo tener en cuenta el porcentaje de confianza del intervalo [...]. Entonces, bueno, con esos datos que me da el intervalo hay confianza de que el valor verdadero de μ esté en el intervalo.

E: ¿Qué significa el porcentaje de confianza?

Antonio: El porcentaje de que el verdadero valor de la media poblacional esté en ese intervalo [...] El porcentaje, o sea, la probabilidad.

Podemos notar que Antonio sugiere que el nivel de confianza se relaciona con la fiabilidad del resultado obtenido a partir de la muestra. De este modo, el significado del nivel de confianza se desplaza desde una propiedad del procedimiento estadístico hacia una característica del resultado producido por una muestra específica.

María, ante la pregunta: ¿a partir de qué se genera un intervalo de confianza? Interpreta el nivel de confianza en términos del muestreo.

E: ¿A partir de que genera usted un intervalo? ¿Qué tiene que tener para construir un intervalo?

María: Eh, pues los datos, muestras.

Cuando se le plantea el escenario hipotético de construir intervalos a partir de 100 muestras con un nivel de confianza del 45% y se le cuestiona sobre la interpretación del nivel de confianza, María responde:

> María: ¡Ah!, que, de esos 100 intervalos, μ va a estar en 45 de ellos.

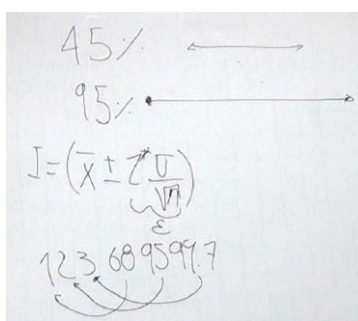
María parece asumir el nivel de confianza como la proporción de intervalos que contienen el parámetro poblacional cuando el procedimiento se repite múltiples veces. Esta interpretación se aproxima a la interpretación frecuencial del nivel de confianza, ampliamente aceptada en la inferencia estadística clásica.

María, además, ofrece evidencias de que ha construido una clara relación entre el nivel de confianza y la amplitud del intervalo.

> E: Un intervalo de confianza del 45% asociado a una muestra específica para la media de una población (μ) es un intervalo más ancho que el intervalo de confianza del 95%.
>
> María: Falso, es más pequeño. [...] Porque... Porque si yo calculara a partir de una muestra un intervalo de 45% de confianza y uno de 95% entonces el de 95% va a ser más grande y eso se ve es por la fórmula con la que se calcula el intervalo de confianza.
>
> E: ¿Cuál fórmula?
>
> María: [*Escribe en el tablero la expresión algebraica que da lugar a la construcción del intervalo de confianza ver Figura 3*] Entonces para calcular el intervalo dependo de esto [*señala Z^**]. Entonces en la medida que el nivel de confianza aumente entonces el intervalo va a ser más grande, o sea, el error va a ser más grande.

Figura 3

Producciones de María durante la entrevista sobre el efecto del nivel de confianza

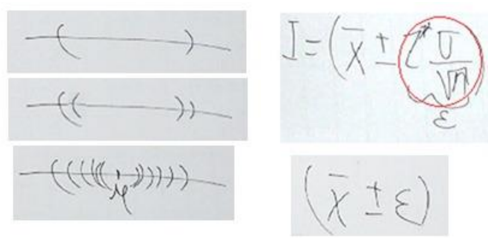


María reconoce que el tamaño del intervalo depende del valor crítico asociado al nivel de confianza y que un mayor nivel de confianza implica intervalos más amplios. Con respecto a la conexión entre el tamaño muestral, el tamaño del intervalo y la precisión de la estimación, María, inicialmente considera una relación equivocada, pero la corrige estableciendo que, al aumentar la muestra, el tamaño del intervalo disminuye mejorando la precisión.

> María: ¡Eh! si aumento...[*Silencio*] Mentiras, mentiras, es más pequeño. Entonces, entre yo más aumenté, pensemos que empecé aquí [*dibujando varios intervalos de confianza ver Figura 4*]. Entonces, entre yo más la aumente [refiriéndose a la muestra], voy a obtener algo así [*señalando el intervalo más estrecho*]. Entonces entre más aumente [*el tamaño muestral*], más cercano y por eso es que va a ser más preciso el valor que estoy estimando. [...] Porque cada vez que se va haciendo más pequeño el error, este error [*señala la expresión que tiene en el tablero*] se va a hacer más pequeño.

Figura 4

Producciones de María durante la entrevista sobre el efecto del tamaño muestral



En su explicación, María además relaciona el aumento en el tamaño de la muestra con la reducción del error asociado a la estimación, lo que conduce a intervalos más estrechos y, por tanto, a una estimación más precisa del parámetro, lo que muestra que establece RT4.

Finalmente, en relación con el vínculo teórico entre la media muestral y el parámetro poblacional (RT5), Antonio describe la finalidad del intervalo de confianza señalando que:

> Antonio: Si no estoy mal es, yo sé que quiero estudiar una población, entonces yo saco una muestra, entonces se quieren estudiar ciertas características de la población a partir de una muestra. Entonces, uno trabaja con intervalos para encontrar más o menos dónde está el verdadero valor que uno quiere conocer a partir de los datos de la muestra.

La explicación que Antonio ofrece muestra que reconoce la naturaleza inferencial del intervalo de confianza. En este sentido, establece que los datos de la muestra permiten aproximarse al verdadero valor de la media poblacional μ.

Además de las relaciones descritas anteriormente, la exploración empírica permitió identificar otras conexiones conceptuales que no han sido reportadas explícitamente en los estudios previos sobre la comprensión de los intervalos de confianza. Estas relaciones (RE1 y RE2) emergen cuando los estudiantes intentan explicar el significado del intervalo de confianza o justificar el efecto de algunos de sus elementos sobre su tamaño y precisión.

RE1. Relación entre error de estimación y la precisión de la estimación del parámetro. A diferencia de la relación RT4, de carácter estructural, esta relación emerge en el discurso del estudiante como una interpretación conceptual del error de estimación como medida de precisión. RE1 se evidenció cuando los estudiantes reconocen que la precisión de la estimación depende del tamaño del error asociado al intervalo. En este sentido, María interpreta que la reducción del error conduce a intervalos más estrechos y, por ende, a estimaciones más precisas del parámetro poblacional.

> María: Porque cada vez que se va haciendo más pequeño el error… este error se va a hacer más pequeño… entonces como este intervalo es un estimador del μ, entonces este valor va a estar más cercano a μ.

María establece una conexión entre la disminución del error de estimación dado por $Z_{1-\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ y una mayor precisión de la estimación del parámetro.

RE2. Relación entre el nivel de confianza y el valor crítico de la distribución. Esta relación se evidenció cuando los estudiantes reconocen que el nivel de confianza influye en el tamaño del intervalo a través del valor crítico de la distribución normal, presente en la expresión algebraica que da lugar al cálculo del intervalo de confianza. Por ejemplo, María señala que:

> María: Para calcular el intervalo dependo de esto [*señala el valor crítico* Z^*]. Entonces, en la medida que el nivel de confianza aumente, el intervalo va a ser más grande.

La explicación de María muestra que puede relacionar el nivel de confianza con uno de los elementos matemáticos que intervienen en su construcción, reconociendo su efecto sobre el tamaño del intervalo a través del valor crítico —Z^*—, de la distribución.

Las relaciones identificadas a partir de la exploración teórica y empírica presentada en las secciones 3.1 y 3.2 constituyen una base fundamental a partir de la cual se plantea la génesis de una Descomposición Genética del Esquema de intervalo de confianza, que se desarrolla en la siguiente sección.

4. La Génesis de una Descomposición Genética sobre el Esquema del Concepto de Intervalos de Confianza

La construcción cognitiva de los intervalos de confianza involucra la comprensión de los conceptos fundamentales descritos en las secciones anteriores, así como su articulación con otros conceptos estadísticos como variable aleatoria, distribución de probabilidad, función de densidad, distribución normal, entre otros. El análisis teórico muestra que la comprensión de estos conceptos y el establecimiento de las relaciones previamente descritas son necesarias para interpretar adecuadamente el procedimiento de construcción de los intervalos. Cuando estas relaciones no se establecen dentro de los Esquemas del individuo, pueden surgir interpretaciones como las documentadas en la revisión de la literatura. Además, se destaca que el conocimiento aislado de estos conceptos no es suficiente, pues su comprensión requiere una articulación coherente mediante relaciones específicas entre las concepciones involucradas y los mecanismos cognitivos asociados.

4.1. Concepciones Previas Necesarias

En esta sección se describen las estructuras previas que, con base en el análisis teórico realizado, se reconocen necesarias para la comprensión del concepto de intervalo de confianza, con base en los aspectos señalados hasta el momento.

Proceso-Objeto de probabilidad desde un enfoque frecuencial: Esta estructura se evidencia cuando un estudiante asocia el valor de probabilidad con las repeticiones de un evento y tiene en cuenta que la frecuencia relativa de los resultados de un experimento aleatorio tiende a estabilizarse alrededor de cierto número; que corresponde precisamente a el valor de su probabilidad. Además, el estudiante debe tener en cuenta que, para que se dé esta convergencia, las diversas repeticiones del experimento deben ser independientes, y que el valor de probabilidad se obtiene como valor límite.

La concepción Proceso de probabilidad es requerida en la interpretación del nivel de confianza de los intervalos de confianza. Por ejemplo, si un individuo asume un nivel de confianza del 95%, debe tener claro que, si toma grupos de 100 muestras del mismo tamaño de una misma población y construye un intervalo de confianza con base en cada una de ellas, en promedio en 95 intervalos de cada grupo se espera que esté el parámetro que se desea estimar y en los restantes 5, no. Esto está vinculado con RT2a y RT2b.

Objeto de población: Esta concepción se caracteriza por la capacidad del individuo de asumir la población como un conjunto de valores que son más o menos posibles de obtener de acuerdo con su distribución de probabilidad. A su vez, abarca la idea de que la distribución tiene asociados un conjunto de parámetros que, aunque son constantes, son imposibles de conocer con exactitud y que es necesario estimarlos. Los parámetros son características particulares de la distribución de la población y, por lo tanto, su estimación implica la realización de una Acción sobre el Objeto asociado a la población. En este caso, consideramos el parámetro dado por la media poblacional (μ). Esta concepción de parámetro está enmarcada dentro de la teoría clásica, ya que en la bayesiana se asume que los parámetros son variables aleatorias.

Proceso de muestra aleatoria: Se caracteriza por la capacidad del individuo para reflexionar sobre la importancia del criterio de selección de la muestra (a partir de un muestreo aleatorio) y sobre cómo de esto depende la confiabilidad de los resultados y su generalización. Además, el individuo debe ser consciente que el tamaño muestral tiene un efecto directamente proporcional a la precisión de la estimación de los parámetros poblacionales, lo que se asocia a RT4.

Proceso-Objeto de variable aleatoria: Cuando el individuo asume que una variable aleatoria permite asignar un valor numérico al resultado de un experimento aleatorio, por ejemplo, el número de caras que se obtienen cuando se lanzan n monedas simultáneamente, se dice que el individuo evidencia una concepción Proceso de variable aleatoria. En el caso que nos ocupa, la media muestral $\bar{X}$ —que es un estadístico o estimador del parámetro μ— es una variable aleatoria, porque a cada muestra del mismo tamaño tomada de la población, le asigna un único valor dado por el promedio de los datos que componen la muestra. Estas concepciones son necesarias para el establecimiento de RT5.

Las relaciones entre las estructuras aquí descritas deben conducir al individuo a determinar que una estimación puntual no permite ningún grado de confianza respecto a la cercanía del valor buscado. En esta dirección, para que la estimación tenga probabilidad de acierto debe incluir todo un conjunto de valores, un intervalo, cuya construcción es precisamente la que se desea realizar.

La variable aleatoria puede percibirse como un Objeto cuando se establece su distribución de probabilidad y cuando el estudiante es consciente de que se le pueden aplicar operaciones aritméticas con otras variables aleatorias o con constantes, sin perder su carácter aleatorio.

Proceso-Objeto de distribución de probabilidad de una variable aleatoria: Un individuo evidencia una concepción Proceso de distribución cuando puede describir la forma en la que se construye la distribución y se calcula la probabilidad de que la variable asuma los valores —ya sean discretos o continuos— de un conjunto dado. Además, cuando reflexiona sobre sus propiedades —simetría, valores atípicos, curtosis, etc.— es posible afirmar que el individuo ha logrado una concepción Objeto del concepto de distribución.

Proceso de Estandarización: Esta concepción le permite al individuo aplicar el proceso de estandarización para convertir una distribución normal cualquiera a una normal estándar, preparándolo para construir los límites de los intervalos de confianza con base en el percentil de la normal estándar asociado al nivel de confianza y representado por $Z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ —también llamado Z^* o valor crítico—. El proceso de estandarización respeta las características y propiedades de las distribuciones normales, uno de los objetivos que persigue la estandarización es facilitar el cálculo de probabilidades al hacer un cambio de escala de la variable aleatoria.

Acción-Proceso del Teorema Central del Límite: Una vez el individuo reconoce que la distribución que sigue la variable aleatoria es normal, puede relacionar el Teorema Central del Límite —TCL—. Precisamente, este teorema indica la forma de obtener una distribución aproximada para la variable aleatoria $\bar{X}$. Más específicamente, la distribución de $\bar{X}$ es aproximadamente normal con media dada por el parámetro μ —que se quiere estimar— y desviación estándar dada por la misma desviación de la población dividida por la raíz cuadrada del tamaño muestral. Algebraicamente toma la forma: $\bar{X} \sim N(\mu, {}^{\sigma}/_{\sqrt{n}})$.

Si bien se podría pensar en una concepción Objeto del TCL en la forma de la expresión anterior, es conveniente que el individuo tenga en cuenta que la distribución normal se obtiene como un Proceso que exige la generación de muchas muestras y, por ende, de muchos valores para $\bar{X}$, idea que puede ayudar a combatir la concepción bayesiana del nivel de confianza, lo que se asocia con RT1, RT2a y RT2b.

Objeto de función de densidad de probabilidad: si bien en el caso de las variables aleatorias discretas es suficiente definir la función de probabilidad asociada a cada valor posible, lo que permite su cálculo y, por ende, construir una concepción Proceso. En el caso continuo, las cosas son diferentes porque los valores posibles no son contables. Para este caso, se opta por definir una función de densidad de probabilidad que permite calcular la

Vol. 28, e793 https://doi.org/10.12802/relime.2025.28.e793

probabilidad de que la variable tome valores en un intervalo dado. El individuo, por tanto, debe comprender que la función de densidad de probabilidad no arroja probabilidades directamente. Las probabilidades, en este caso, tienen sentido al pensarse por medio de intervalos y se calculan como el área bajo la curva que representa a la función de densidad en el intervalo deseado. Siendo X una variable aleatoria continua y su función de densidad, se tiene $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$, donde a y b son números reales. La construcción de este Objeto implica la aplicación de la Acción dada por la integral definida sobre la función de densidad de probabilidad.

4.2. Relaciones entre Concepciones Previas: Camino de Construcción

Dado que uno de los objetivos finales de la enseñanza de los conceptos estadísticos son favorecer su interpretación y su uso en contextos problemáticos, a continuación, se describen posibles conexiones entre las concepciones previas involucradas en la comprensión de los intervalos de confianza y la capacidad de reconocer cuándo este concepto resulta pertinente para la resolución de un problema. Esta articulación de relaciones se vincula con la construcción de un Esquema coherente. En particular, las primeras relaciones se establecen a partir de la necesidad de obtener un estimador puntual de la media poblacional (μ), sobre el cual se realizan Acciones, guiadas por la expresión algebraica, para calcular el intervalo de confianza.

La obtención del estimador puntual se hace necesaria debido a que la media poblacional no se puede establecer con exactitud porque no se conoce la distribución de probabilidad de la población, se deben obtener aproximaciones o estimaciones. Para ello, se aplica la Acción de muestreo sobre el Objeto de población, tomando muestras conformadas por n datos. Las distintas Acciones de muestreo se interiorizan, a partir de una reflexión sobre el tamaño de las muestras, en el Proceso de muestra aleatoria. El Proceso de muestra aleatoria se coordina —a través del operador lógico condicional “⇒”— con el Proceso de obtención de las medias muestrales para construir el Proceso de variable aleatoria $\overline{\mathrm{X}}$ en donde: “una muestra particular ⇒ una única media muestral”. Además, el Proceso de variable aleatoria debe ser visto como una totalidad asociada al estimador puntual; por ende, se encapsula en el Objeto de variable aleatoria, lo que permite establecer que el estadístico puntual $\overline{\mathrm{X}}$, se estructura como estimador del parámetro μ; esto es posible gracias al establecimiento de la relación RT5.

Una vez calculado el estadístico $\overline{\mathrm{X}}$, surge la pregunta: ¿qué tan buena es esta estimación puntual? En este punto, el estudiante debe reconocer que, si la muestra cambia, es muy probable que también cambie el valor del estimador. Un estudiante que posee al menos una concepción Proceso de variable aleatoria puede considerar que cada muestra produce un valor distinto para $\overline{X}$. En consecuencia, resulta necesario analizar este estadístico de manera global, lo que puede lograrse mediante el establecimiento de su distribución de probabilidad.

Para establecer la distribución de Probabilidad de la variable aleatoria, el individuo aplica una Acción (o Proceso, esto está condicionado por su nivel de comprensión) de verificación dada por el Teorema Central del Límite sobre el Objeto de variable aleatoria. Se recomienda que a través de procesos de simulación —Acciones computarizadas— el individuo pueda percibir la forma acampanada de las distribuciones muestrales —es decir del estadístico $\overline{X}$— y, luego de verificar que además de la simetría la distribución cumple con regla del 68-95-99,7 (Moore, 1995) puede conjeturar que $\overline{X}$ sigue una distribución normal con media, precisamente μ, —que hace de $\overline{X}$ un estimador insesgado— y con una desviación estándar que es inversamente proporcional al tamaño muestral, es decir, $\overline{X} \sim N\left(\mu\,, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ (1).

Construcción del intervalo de confianza: si bien se cuenta con una concepción Objeto de variable aleatoria, que le permite al individuo conocer la distribución aproximada del estimador $\overline{X}$ (expresión 1), se hace necesario llevarla a la normal estándar, proceso que se conoce como la estandarización de la variable aleatoria —Acción (o Proceso) de estandarización sobre el Objeto $\overline{X}$—, para poder calcular probabilidades, dando lugar a la expresión (2).

$$\frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} = Z \sim N(0\,,1) \quad (2)$$

El objetivo ahora es construir el intervalo de menor tamaño que con cierta probabilidad $(1-\alpha)$ contenga los valores de la variable aleatoria normal. Este intervalo tiene como límites $-Z_{1-\alpha/2}$ y $Z_{1-\alpha/2}$ ya que Z sigue una distribución normal estándar. El valor $(1-\alpha)$ es el nivel de confianza y está representado en los valores $-Z_{1-\alpha/2}$ y $Z_{1-\alpha/2}$. Luego se tiene que:

$$P\left(-Z_{1-\alpha/2} < Z < Z_{1-\alpha/2}\right) = 1-\alpha \quad (3)$$

De aquí en adelante se debe aplicar un tratamiento algebraico: sustituyendo a Z por su valor en (2), se obtiene:

$$P\left(-Z_{1-\alpha/2} < \frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} < Z_{1-\alpha/2}\right) = 1-\alpha, \quad (4)$$

Al despejar μ se obtiene:

Vol. 28, e793 https://doi.org/10.12802/relime.2025.28.e793

$$P\left(\overline{X} - Z_{1-\alpha/2}\,\sigma/\sqrt{n} < \mu < \overline{X} + Z_{1-\alpha/2}\,\sigma/\sqrt{n}\right) = 1 - \alpha \qquad (5)$$

La expresión (5) define un intervalo centrado en $\overline{X}$ que contiene al parámetro μ con probabilidad $(1-\alpha)$, cuya comprensión se debe al establecimiento de RT1. Este intervalo que, necesariamente, depende del valor de $\overline{X}$, tiene la forma:

$$\overline{X} \pm Z_{1-\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \qquad (6)$$

La probabilidad $1-\alpha$ que es precisamente el nivel de confianza del intervalo. Este valor de probabilidad se asocia con una variable aleatoria y hace referencia a los posibles valores que ella puede asumir, lo que se deriva del establecimiento de RT2a y RT2b. Este valor se interpreta de la siguiente forma: En promedio de cada 100 intervalos construidos con base en 100 muestras y, por ende, en 100 valores $\overline{X}$, $(1-\alpha)*100$ de ellos satisfacen las restricciones dadas en (5), es decir, contienen el parámetro μ.

Ahora bien, la expresión (6) muestra que el intervalo de confianza está centrado en $\overline{X}$ y que su radio —y, por tanto, su precisión— depende del nivel de confianza, de la desviación estándar poblacional y del tamaño muestral. Los dos primeros factores se relacionan de manera directamente proporcional con la amplitud del intervalo, mientras que el tamaño muestral lo hace de forma inversamente proporcional, lo que se deriva del establecimiento de RT3, RT4, RE1 y RE2. En otros términos, la estimación por intervalo incorpora la estimación puntual dada por $\overline{X}$, pero reconoce al mismo tiempo la presencia de un margen de error determinado por estos tres factores, con lo cual se completa la construcción del intervalo de confianza para la media poblacional μ cuando la desviación estándar poblacional es conocida.d

6. Discusión y Conclusiones

Los resultados de la investigación muestran que la comprensión del concepto de intervalo de confianza implica una complejidad conceptual considerable, pues requiere del establecimiento de relaciones entre múltiples conceptos estadísticos y matemáticos. Cuando estas relaciones no se construyen, los individuos tienden a desarrollar interpretaciones que pueden constituir obstáculos al abordar problemas que implican el cálculo y la interpretación de los intervalos de confianza y de sus niveles de confianza asociados.

Desde la perspectiva de la teoría APOE, el aprendizaje de las matemáticas se desarrolla progresivamente mediante la construcción de las estructuras Acción, Proceso y Objeto asociadas a un concepto particular. Sin embargo, cuando la comprensión de un concepto depende de la articulación de diversos conceptos previos, el análisis cognitivo debe centrarse en el Esquema asociado y en sus niveles de desarrollo; es decir, en la organización coherente de Acciones, Procesos, Objetos, sus mecanismos, y otros Esquemas vinculados a los conceptos preliminares. En este sentido, el estudio de los intervalos de confianza resulta especialmente pertinente desde la perspectiva de los Esquemas, dado que su comprensión implica el establecimiento de relaciones entre una diversidad de estructuras cognitivas.

Uno de los principales aportes de este trabajo consiste en interpretar el intervalo de confianza en términos de las relaciones conceptuales que pueden conformar su Esquema cognitivo. El análisis teórico, que incluye el estudio de las interpretaciones planteadas por profesores de matemáticas en la etapa final de su formación, permitió identificar un conjunto de relaciones que articulan los elementos centrales del intervalo de confianza, tanto en su construcción como en su interpretación; entre ellas: la relación entre el nivel de confianza y la repetición del muestreo; entre el tamaño muestral y el error de estimación; y entre el error de estimación y la precisión de la estimación del parámetro.

Este enfoque permite desplazar el debate desde el señalamiento de errores hacia la comprensión de la organización del conocimiento estadístico en torno a este concepto. Lo que sugiere que muchas de las dificultades reportadas en la literatura (Behar, 2001; Olivo, 2008; Behar y Yañez, 2009; Batanero y López-Martín, 2020; entre otros) pueden entenderse como manifestaciones de una falta de establecimiento de relaciones entre los distintos componentes del Esquema. Asimismo, la caracterización teórica y empírica de estas relaciones permitió aportar nuevas evidencias sobre interpretaciones previamente documentadas y reconocer otras no reportadas explícitamente. Esto permite proporcionar elementos fundamentales para el planteamiento de la génesis de una DG del Esquema de intervalo de confianza, así como una base teórica para futuras investigaciones orientadas a comprender y favorecer su aprendizaje.

Consideramos que la génesis propuesta debe ser complementada mediante el análisis de cómo las relaciones entre las concepciones identificadas se constituyen en los tres niveles de desarrollo del Esquema, *Intra*–, *Inter*– y *Trans*–, y a través de los mecanismos de asimilación y acomodación, con el fin de completar el ciclo de investigación propuesto por la teoría APOE. En esta dirección, se propone una línea de investigación que aborde los intervalos de confianza como un Esquema en construcción, explorando cómo evolucionan las relaciones entre sus componentes y qué mecanismos cognitivos favorecen su estructuración. Ello requiere el desarrollo de una DG refinada, sustentada en la observación, análisis y verificación empírica de datos, que permita describir con mayor precisión cómo los estudiantes relacionan los distintos conceptos involucrados en la construcción del intervalo de confianza. De esta manera, no solo sería posible proponer una DG preliminar, sino también avanzar hacia su validación empírica.

Los profesores en formación entrevistados mostraron una marcada dependencia de la fórmula para la construcción del intervalo, evidenciando una comprensión limitada del procedimiento inferencial que lo sustenta. En términos didácticos, los resultados sugieren la conveniencia de diseñar propuestas de enseñanza que favorezcan la construcción progresiva de las relaciones dentro del Esquema del intervalo de confianza. En particular, la enseñanza de este concepto debería promover que los estudiantes articulen los distintos conceptos que intervienen en su construcción, tales como el proceso de muestreo, la variabilidad muestral, el error de estimación, el tamaño de la muestra y el significado del nivel de confianza. Desde esta perspectiva, la comprensión del intervalo de confianza no puede reducirse al uso de fórmulas o procedimientos de cálculo, sino que requiere promover actividades que permitan establecer relaciones entre estos elementos y comprender su papel dentro del proceso de inferencia estadística. En este sentido, la incorporación de herramientas tecnológicas que permitan visualizar el efecto de la variabilidad muestral sobre los intervalos de confianza puede favorecer que los estudiantes comprendan el carácter inferencial de este concepto. De esta manera, la enseñanza de los intervalos de confianza puede orientarse hacia la construcción de un Esquema más articulado, en el que los estudiantes articulen el muestreo, la variabilidad, el error de estimación y el nivel de confianza dentro del proceso de inferencia estadística.

Declaración de contribución y autoría

Luzdari Rangel Ruiz: Conceptualización, Metodología, Análisis formal, Redacción – borrador original, Redacción - revisión y edición.

Solange Roa Fuentes: Conceptualización, Metodología, Análisis formal, Redacción – borrador original, Redacción - revisión y edición.

Diana Villabona: Conceptualización, Metodología, Análisis formal, Redacción – borrador original, Redacción - revisión y edición.

Declaración de uso de Inteligencia Artificial

Se utilizó ChatGPT (OpenAI, GPT-5.3, 2026) con el propósito de apoyar la revisión de redacción académica y referencias, traducción de resúmenes y síntesis para no exceder la extensión solicitada en las normas de publicación en algunos párrafos del manuscrito, particularmente en las secciones de introducción, metodología y discusión. Las autoras revisaron y editaron el contenido generado por la herramienta, y asumen toda la responsabilidad por la versión final enviada a la Relime.

Agradecimientos

Las autoras expresan su agradecimiento a los profesores de matemáticas en formación que participaron voluntariamente en esta investigación. Su disposición para compartir sus reflexiones, razonamientos y experiencias durante el desarrollo de los cuestionarios y entrevistas hizo posible la obtención de la información que sustenta los resultados presentados en este estudio.

Financiamiento

Esta investigación ha sido parcialmente financiada por el proyecto 4247 de Vicerrectoría de Investigación y Extensión de la Universidad Industrial de Santander y el Programa de Movilidad (VIE–UIS).

Referencias

Arnon, I., Dubinsky, E., Cottrill, J., Oktaç, A., Roa-Fuentes, S., Trigueros, M. & Weller, K. (2014). *APOS theory: A framework for research and curriculum development in mathematics education*. Springer.

Batanero, C. y López-Martín, M. del M. (2020). Conocimiento del intervalo de confianza por futuros profesores de Bachillerato. *Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática (JIEEM)*, *13*(4), 363–373. https://doi.org/10.17921/2176-5634.2020v13n4p363-373

Behar, R. (2001). *Aportaciones para la mejora del proceso de enseñanza aprendizaje de la estadística* [Tesis doctoral no publicada]. Universidad Politécnica de Catalunya.

Behar, R. & Yáñez, G. (2009). Experts and students' conceptions regarding confidence intervals. *Heurística*, *16*, 5–12.

Bower, D. (2003). Some misconceptions about confidence intervals. *Six Sigma Forum Magazine*.

Brenes, G. S. (2021). *Comprendiendo la estadística inferencial*. Instituto Tecnológico de Costa Rica.

Callaert, H. (2007). Understanding confidence intervals. En D. Pantazi & G. Philippou (Eds.), *Proceedings of the Fifth Conference of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 692–701).

Camargo Forero, M. (2023). *Estrategia didáctica basada en la resolución de problemas para la enseñanza y aprendizaje de los intervalos de confianza en estudiantes de ciencias económicas*. [Tesis de maestría no publicada]. Universidad Antonio Nariño.

Chance, B. & McGaughey, K. (2014). Impact of a simulation/randomization-based curriculum on student understanding of p-values and confidence intervals. En K. Makar, B. de Sousa & R. Gould (Eds.), *Sustainability in statistics education. Proceedings of the Ninth International Conference on Teaching Statistics*. International Statistical Institute. https://icots.info/icots/9/proceedings/pdfs/ICOTS9_6B1_CHANCE.pdf

Clark, J., Kraunt, G., Mathews, D. & Wimbish, J. (2007). *The "fundamental theorem" of statistics: Classifying student understanding of basic statistical concepts*. http://www1.hollins.edu/faculty/clarkjm/stat2c.pdf

Cumming, G., Williams, J. & Fidler, F. (2004). Replication and researchers' understanding of confidence intervals and standard error bars. *Understanding Statistics*, *3*, 299–311. https://doi.org/10.1207/s15328031us0304_5

De Hierro, A. F. R. L., Batanero, C. y Álvarez-Arroyo, R. (2020). Comprensión del intervalo de confianza: Un estudio comparado con estudiantes universitarios y preuniversitarios. *Revista Paranaense de Educação Matemática*, *9*(19), 52–73. https://doi.org/10.33871/22385800.2020.9.19.52-73

Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. En D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 95–123). Kluwer.

Fidler, F. (2005). *From statistical significance to effect estimation: Statistical reform in psychology, medicine and ecology* [Tesis doctoral no publicada]. University of Melbourne.

Fidler, F., & Cumming, G. (2005). Teaching confidence intervals: Problems and potential solutions. http://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications.php

Finch, S., & Gordon, I. (2025). Teaching of confidence intervals in context. *Australian & New Zealand Journal of Statistics*, *67*, 553–566. https://doi.org/10.1111/anzs.70024

Henriques, A. (2012). Students' difficulties in understanding of confidence intervals. En *Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education*. Seoul.

Henriques, A. (2016). Students' difficulties in understanding confidence intervals. En D. Ben-Zvi y K. Makar (Eds.), *The teaching and learning of statistics* (pp. 129–138). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-23470-0_18

Hoekstra, R., Morey, R. D., Rouder, J. N. y Wagenmakers, E.-J. (2014). Robust misinterpretation of confidence intervals. *Psychonomic Bulletin & Review*, *21*(5), 1157–1164. https://doi.org/10.3758/s13423-013-0572-3

Kalinowski, P. (2010). Identifying misconceptions about confidence intervals. En C. Reading (Ed.), *Data and context in statistics education: Towards an evidence-based society. Proceedings of the Eighth International Conference on Teaching Statistics*. International Statistical Institute.

López-Martín, M., Díaz-Levicoy, D. y Arteaga, P. (2016). Estudio empírico de los problemas sobre intervalos de confianza en las pruebas de acceso a la universidad. En J. Zacarías et al. (Eds.), *Investigación en educación estadística y probabilística 2016* (pp. 81–92). Benemérita Universidad Autónoma de Puebla.

Martín, D. R. (2022). *Estadística inferencial aplicada* (2ª ed.). Universidad del Norte.

Mathews, D. & Clark, J. (2007). Successful students' conceptions of mean, standard deviation, and the central limit theorem. http://www1.hollins.edu/faculty/clarkjm/stats1.pdf

Moore, D. S. (1995). *Estadística aplicada básica*. Antoni Bosch.

Olivo, E. (2008). *Significado de los intervalos de confianza para los estudiantes de ingeniería en México* [Tesis doctoral no publicada]. Universidad de Granada.

Olivo, E. y Batanero, C. (2007). Un estudio exploratorio de dificultades de comprensión del intervalo de confianza. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, *12*(1), 73–81. https://www.revistaunion.org/index.php/UNION/article/view/1226

Padilla, L. R. (2021). Un vistazo a la inferencia bayesiana. *Revista Varianza*, 63–70. https://ojs.umsa.bo/index.php/revistavarianza/article/view/4

Pfannkuch, M., Wild, C. J. & Parsonage, R. (2012). A conceptual pathway to confidence intervals. *ZDM Mathematics Education*, *44*(7), 899–911. https://doi.org/10.1007/s11858-012-0446-6

Rangel, L. (2014). *Estructuras y mecanismos mentales asociados a los intervalos de confianza: Profesores de matemáticas en formación* [Tesis de maestría no publicada]. Universidad Industrial de Santander.

Reaburn, R. (2014). En K. Makar, B. de Sousa y R. Gould (Eds.), *Sustainability in statistics education. Proceedings of the Ninth International Conference on Teaching Statistics*. International Statistical Institute. https://icots.info/icots/9/proceedings/pdfs/ICOTS9_C122_REABURN.pdf

Roa-Fuentes, S. y Parraguez, M. (2017). Estructuras mentales que modelan el aprendizaje de un teorema del álgebra lineal: Un estudio de casos en el contexto universitario. *Formación Universitaria*, *10*(4), 15–32. http://dx.doi.org/10.4067/S0718-50062017000400003

Roland, K. (2020). *Student conceptualization of the interpretation of the confidence interval and the confidence level: Identifying similarities and differences in student concept images of confidence intervals* [Tesis doctoral no publicada]. University of Georgia.

Salcedo, A., Lira, B., González, J. y Yáñez, G. (2011). Interpretación de intervalos de confianza por docentes en formación. En E. Blanco (Comp.), *Investigación educativa: Venezuela en Latinoamérica siglo XXI* (pp. 209–229). Centro de Investigaciones Educativas.

Sánchez Acevedo, N. (2024). Comprensión que muestran futuros profesores de matemática y estadística de los intervalos de confianza sobre la media. *Ensino em Re-Vista*, *31*, e2024-03. https://doi.org/10.14393/ER-v31e2024-03

Sánchez-Rodríguez, M. A. (2021). La significancia estadística y los intervalos de confianza: ¿Qué me indican y cómo puedo interpretarlos? *CyRS*, *3*(1), 74–82.

Sarmiento, C. y Osma, W. (2010). *Comprensión de los intervalos de confianza en estudiantes de educación superior* [Tesis de licenciatura no publicada]. Universidad Industrial de Santander.

Terán, T. (2006). Elements of meaning and its role in the interaction with a computational program. En A. Rossman y B. Chance (Eds.), *Proceedings of the Seventh International Conference on Teaching Statistics*. IASE.

Trigueros, M. (2005). La noción de esquema en la investigación en matemática educativa a nivel superior. *Educación Matemática*, *17*(1), 5–31.

Villabona, D. y Roa-Fuentes, S. (2016). Procesos iterativos infinitos y objetos trascendentes: Un modelo de construcción del infinito matemático desde la teoría APOE. *Educación Matemática*, *28*(2), 119–150. https://doi.org/10.24844/EM2802.05

Wackerly, D. D., Scheaffer, R. L. y Mendenhall, W. (2002). *Estadística matemática con aplicaciones* (6ª ed.). Thomson.

Wang, X., Reich, N. y Horton, N. (2017). Enriching students' conceptual understanding of confidence intervals: An interactive trivia-based classroom activity. *The American Statistician*, *71*(4), 352–358. https://doi.org/10.1080/00031305.2017.1305294

Wild, C. J. & Seber, G. A. F. (2000). *Chance encounters: A first course in data analysis and inference*. Wiley.

Yáñez, G. y Behar, R. (2009). Interpretaciones erradas del nivel de confianza en los intervalos de confianza y algunas explicaciones plausibles. En M. J. González, M. T. González y J. Murillo (Eds.), *Investigación en educación matemática XIII*. SEIEM.