Tânia Cristina Rocha Silva Gusmão, Vicenç Font Moll

ANÁLISIS METACOGNITIVO DE UN AULA DE MATEMÁTICA SOBRE MEDIDA DE SUPERFICIES

Metacognitive analysis of a mathematics class on surface measurement

RESUMEN

Este estudio tiene por objetivo analizar las prácticas que realiza un profesor con sus estudiantes para resolver un problema de medida de superficies en las que intervienen aspectos de carácter metacognitivo. Se diseñó una propuesta didáctica, basada en una metodología de enseñanza por diagnóstico, en la que el profesor propone una tarea para hacer aflorar diferentes significados personales acerca de las magnitudes longitud y superficie, utilizando el tangram de Fletcher. La instrucción fue llevada a cabo en una clase de 26 estudiantes de 14 años que cursaban 2º año de la Educación Secundaria Obligatoria en España. Para el análisis se tomaron, como referente teórico, constructos de metacognición y del Enfoque Ontosemiótico. Entre las conclusiones está que cognición y metacognición pueden ser mejoradas con una instrucción bien planeada y responsablemente ejecutada.

PALABRAS CLAVE:

- *Cognición*
- *Metacognición*
- *Medida de Superficie*
- *Resolución de Problema*
- *Prácticas Docentes*

ABSTRACT

The objective of this study is to analyze the practices that a teacher carries out with his students to solve a surface measurement problem in which aspects of a metacognitive nature intervene. A didactic proposal was designed, based on a diagnostic teaching methodology, in which the teacher proposes a task to bring out different personal meanings about the length and surface magnitudes, using Fletcher's tangram. The instruction was carried out in a class of 26 14-year-old students who were in the 2nd year of Compulsory Secondary Education in Spain. For the analysis, constructs of metacognition and the Ontosemiotic Approach were taken as theoretical reference. Among the conclusions is that cognition and metacognition can be improved with well planned and responsibly executed instruction.

KEY WORDS:

- *Cognition*
- *Metacognition*
- *Surface Measurement*
- *Problem Solving*
- *Teaching Practices*

Gusmão, T. y Font, V. (2022). Análisis metacognitivo de un aula de matemática sobre medida de superficies. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 25*(2), 169-196. https://doi.org/10.12802/relime.22.2522. Recepción: Mayo 11, 2020 / Aceptación: Noviembre 30, 2022

RESUMO

O objetivo deste estudo é analisar as práticas que um professor realiza com seus alunos para resolver um problema de medida de superfície em que intervêm aspectos de natureza metacognitiva. Foi elaborada uma proposta didática, baseada em uma metodologia de ensino por diagnóstico, na qual o professor propõe uma tarefa para trazer à tona diferentes significados pessoais sobre as grandezas de comprimento e superfície, utilizando o tangram de Fletcher. A instrução foi realizada em uma turma de 26 alunos de 14 anos do 2º ano correspondente ao Ensino Fundamental II, na Espanha. Para a análise, tomaram-se como referencial teórico os construtos da metacognição e do Enfoque Ontossemiótico. Entre as conclusões está que a cognição e a metacognição podem ser melhoradas com uma instrução bem planejada e executada com responsabilidade.

PALAVRAS CHAVE:

- *Cognição*
- *Metacognição*
- *Medidas de Superfície*
- *Resolução de Problemas*
- *Práticas de Ensino*

RÉSUMÉ

L’objectif de cette étude est d’analyser les pratiques qu’un enseignant met en œuvre avec ses élèves pour résoudre un problème de mesure de surface dans lequel interviennent des aspects de nature métacognitive. Une proposition didactique a été conçue, basée sur une méthodologie d’enseignement diagnostique, dans laquelle l’enseignant propose une tâche pour faire ressortir différentes significations personnelles sur les grandeurs de longueur et de surface, en utilisant le tangram de Fletcher. L’instruction a été réalisée dans une classe de 26 élèves de 14 ans qui étaient en 2e année de l’enseignement secondaire obligatoire en Espagne. Pour l’analyse, les constructions de la métacognition et l’approche ontosémiotique ont été prises comme référence théorique. Parmi les conclusions, il y a que la cognition et la métacognition peuvent être améliorées avec un enseignement bien planifié et exécuté de manière responsable.

MOTS CLÉS:

- *Cognition*
- *Métacognition*
- *Mesure de Surface*
- *Résolution de Problèmes*
- *Pratiques Pédagogiques*

1. Introducción

A finales del siglo XIX el estudio de la mente y de su funcionamiento se constituyó como una disciplina empírica, destacándose los experimentos de Wundt en 1879 y de William James en 1890. Sin embargo, años más tarde, algunos teóricos (Por ejemplo, Watson, 1930 y Skinner, 1970), desde la perspectiva del behaviorismo, obvian en sus estudios las nociones mentalistas, lo que contribuyó a que éstas fuesen relegadas a un segundo plano. El desarrollo de una nueva psicología mentalista comienza a partir de los años 50 con los trabajos de Newall y Simon observando a personas resolviendo problemas para inferir la estructura mental existente detrás de sus estrategias (Schoenfeld, 1992; Ferreira, 2003). A partir de los años 80 las teorías del comportamiento humano observan que los agentes o procesos internos, por ejemplo, de "conciencia" y "control del pensamiento", pasan a desempeñar un papel importante en el comportamiento humano. Del estudio de tales procesos internos también se ocupa el área conocida como "metacognición" que ha contribuido mucho al desarrollo de los mismos.

En los años 70, el tema empieza a generar interés, en paralelo al declive de las investigaciones sobre QI, y se comienza a pensar en enseñar estrategias metacognitivas a las personas (Ferreira, 2003). En 1980 el término empieza a ganar espacio en los textos académicos y pronto se relacionó con dominios específicos (la lectura, comprensión, atención, interacción social, comunicación etc.). De esta manera, aparece la necesidad de definir la metacognición teórica y operacionalmente (Mayor, Suengas y González, 2003).

En la revisión de la literatura pertinente (Wellman, 1985; Schoenfeld, 1985, 2012; Gonçalves, 1996; González, 1996; Jiménez y Puente, 2014; Díaz *et al.* 2017; Kambita y Hamanenga, 2018 entre otros), observamos que muchos de los estudios que se preocupan por comprender las relaciones entre los procesos cognitivos y metacognitivos se apoyan (y aquí nos incluimos) en las ideas de Flavell (1976, 1979, 1981, 1987). La mayoría de las investigaciones suelen delimitar dos significados diferentes para el término metacognición (todavía estrechamente relacionados): 1) la concibe como un "producto o contenido cognitivo" y 2) la asimila a "procesos u operaciones cognitivas". La metacognición como producto o contenido cognitivo también suele ser referida por *conocimiento declarativo*, *auto-conocimiento* o simplemente *conocimiento sobre la cognición*; se refiere al conocimiento que las personas adquieren en relación con su propio funcionamiento cognitivo y el de los demás, o conocimiento sobre las "personas", las "tareas" y las "estrategias" (Flavell, 1987). La metacognición en la acepción de procesos u operaciones cognitivas suele ser interpretada como *mecanismo autorregulatorio, autorregulación de la conducta, conocimiento procedimental* o simplemente *regulación*. Pero sobre todo esta acepción se refiere a los procesos de supervisión y regulación que ejercemos sobre nuestra propia actividad cognitiva. Un ejemplo de esta última acepción seria favorecer el aprendizaje de un contenido buscando hacer un esquema de tipo mapa conceptual. También es un saber relativo a la cognición. Resumidamente, la metacognición suele ser definida como el conocimiento que uno tiene acerca de los propios procesos y productos cognitivos y, este conocimiento, es acompañado de componentes que poseen la función de planear, organizar, supervisar, regular y evaluar el conocimiento cognitivo (Gusmão, 2009).

También, con base en los estudios de Flavell, se diferencian las estrategias cognitivas de las metacognitivas: las estrategias son cognitivas cuando son empleadas para hacer progresar la actividad cognitiva hacia una meta, y son metacognitivas cuando su función es supervisar ese progreso. Las estrategias metacognitivas "hacen que el sujeto lleve a la conciencia su propio proceso de aprendizaje, teniendo en cuenta sus propias características como aprendiz" (Jiménez y Puente, 2014). Considerado un conocimiento de nivel superior, la metacognición es necesaria para "llegar a ser un aprendiz eficaz" (Jiménez y Puente, 2014).

La metacognición aparece como agenda de investigación en la educación matemática en los años 80 (Desoete y De Craene, 2019) y, actualmente, ocupa un lugar destacado en la investigación en esta área científica, relacionándose por ejemplo con la resolución de problemas (Schoenfeld, 1992, González, 1996; Gusmão, 2006; Díaz, *et al.*, 2017), el rendimiento académico (Kambita y Hamanenga, 2018) y, más reciente, relacionándose con factores externos al estudiante, como los recursos, las metodologías y prácticas docentes (Gusmão, 2006; Venancio, 2020; Balderas; Páez y Martínez, 2020). Por un lado, hay mucha investigación que busca dar respuestas a cómo los estudiantes regulan y controlan sus pensamientos o acciones a la hora de resolver un problema; por otro, aún son escasas las investigaciones que buscan discutir como los factores externos, por ejemplo, recursos, estrategias y metodología utilizadas por el profesor pueden impactar en el desarrollo de la metacognición de los estudiantes. Es en este contexto que este estudio se justifica y se sitúa su objetivo: analizar las prácticas que realiza un profesor con sus estudiantes para resolver un problema de matemáticas de medida de superficies, en un contexto de aula, en las que intervienen aspectos de carácter metacognitivo que las enriquecen.

Según Schoenfeld (1992), los fracasos de estudiantes resolviendo problemas matemáticos pueden ser explicados, en parte, por algún mal funcionamiento en el "control" y en los "sistemas de creencias", toda vez que los requisitos de conocimientos que poseen los estudiantes no son aplicados coherentemente, puesto que no saben cómo monitorear y evaluar sus decisiones. Las investigaciones de Schoenfeld (1985, 1992) como las de Gourgey (2001), constatan al igual que

Flavell, que, aunque los estudiantes tengan recursos para resolver problemas, son incapaces de aplicarlos con éxito si desconocen sus capacidades para regular sus pensamientos, mientras que, por el contrario, un buen control puede llevar al éxito, aunque se tenga pocos recursos cognitivos. Hegedus (1998, p.29), considera la metacognición como “un constructo relevante para comprender mejor las conductas de los estudiantes cuando resuelven problemas”. Gourgey (2001), observa que estudiantes con pobres habilidades metacognitivas no solamente son pasivos sino también dependientes de los demás. La metacognición permite al estudiante regular su pensamiento y aprendizaje (Martínez, 2017; Baten, Praet y Desoete, 2017). Para Schraw (2001), el conocimiento y los procesos de monitoreo pueden aumentarse a través de prácticas de instrucción explícita en clase, de manera que los estudiantes usan las habilidades adquiridas para incrementar la eficacia de sus acciones. “El saber planificar, supervisar y evaluar qué técnicas, cuándo, cómo, por qué y para qué se han de aplicar (estrategias) a unos contenidos determinados con el objeto de aprender, hace que el aprendiz se vuelva estratégico” (Jiménez y Puente, 2014, p.12). De modo general, se espera con el desarrollo de la metacognición enseñar a los estudiantes a planificar, supervisar y evaluar sus acciones, favoreciendo el uso espontáneo y autónomo de dicho conocimiento.

Además de lo dicho, considerando que en la Didáctica de la Matemática, al igual que en otras disciplinas, muchos de los esfuerzos se dirigen a tratar de comprender las relaciones entre cognición y metacognición, y que los procesos de instrucción que llevan a cabo estos dos procesos al mismo tiempo contribuyen a aumentar las habilidades de los estudiantes para resolver problemas, incluso problemas poco familiares (Schoenfeld, 1992); entendemos que, para interpretar con mayor detalle la complejidad de los fenómenos asociados a la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en el contexto de resolución de problemas y, por ende, de la comprensión de las matemáticas, sería necesario considerar, explícitamente, aspectos cognitivos y metacognitivos de manera conjunta. Esto nos ha llevado a buscar marcos teóricos que tratan de explicar los fenómenos inherentes a la realización de una práctica. De ahí la decisión de utilizar el Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática (EOS).

El EOS es un enfoque que viene desarrollándose desde 1994 por Godino y colaboradores (Godino y Batanero, 1994; Godino, 2002; Godino, Batanero y Font, 2006, 2019; Godino *et al.*, 2017; Font, 2005; Gusmão, 2006; Gusmão, Font y Cajaraville, 2009; Gusmão *et al.*, 2014; Gusmão y Font, 2020; Breda, 2020, Breda *et al.*, 2021a, 2021b, Godino, 2022 entre otros). Propone un análisis de la noción de “significado” desde un punto de vista didáctico, dirigido, entre otras cosas, a apoyar los estudios sobre la evaluación de los conocimientos matemáticos.

Para este análisis, el modelo teórico desarrollado se basa en los supuestos pragmáticos del significado de los objetos matemáticos desde una triple perspectiva: institucional, personal y temporal. La disparidad entre significados (sean personales o institucionales) en el EOS es llamada conflicto semiótico, mientras que en el lenguaje normal se hablaría de ambigüedad. Los objetos matemáticos son concebidos como entidades emergentes de sistemas de prácticas (operativas, discursivas y normativas). Se propone como constructo básico para el análisis "los sistemas de prácticas manifestados por un sujeto (o en el seno de una institución) ante una clase de situaciones - problemas" (Godino, 2002, p.242). El EOS ha desarrollado un conjunto de nociones teóricas que permiten el análisis de procesos de enseñanza y aprendizaje de temas específicos de matemáticas (Godino, 2012), nos proporcionan pautas para mirar con detalles las estrategias cognitivas manifestadas en la resolución de problemas, como es el caso de la configuración epistémica, que nos has inspirado y permitido elaborar un constructo paralelo, que hemos denominado *configuración metacognitiva* para servir de soporte para analizar e indagar estrategias metacognitivas (explícitas o implícitas) que utilizan profesores y alumnos en sus prácticas. En el cuadro 1, se resumen los elementos considerados para ambas configuraciones.

Así, para la realización de la práctica, como por ejemplo resolver un problema que le represente un grado de dificultad importante, un resolutor experto pondrá en funcionamiento una configuración epistémica (desde la perspectiva institucional) o cognitiva (desde la perspectiva personal), pero para ello tiene que tomar una serie de decisiones de gestión (metacognitivas) sobre componentes de la configuración epistémica a lo largo del proceso de resolución: coordinación, planificación / organización, supervisión / control, regulación y revisión / evaluación que pueden ser automáticas o declaradas en función del tiempo, instrumentos disponibles etc. Teniendo en cuenta una supuesta familiaridad con los elementos de la configuración epistémica, por parte del resolutor experto, para una tarea en concreto, podemos, de un modo general, decir que tal familiaridad también se extiende a los elementos de la configuración metacognitiva.

[1] "Los conceptos o propiedades son interpretados aquí como propone Wittgenstein, como "reglas gramaticales sobre el uso de símbolos y expresiones" para describir las situaciones y las acciones que realizamos ante dichas situaciones (Baker y Hacker 1985. p.285). Tales reglas cambian según la fenomenología, los juegos de lenguaje, las formas de vida, las instituciones. Otro uso habitual de "conceptos" es como sistema heterogéneo de objetos (situaciones, invariantes operatorios, representaciones), que se puede sustituir con ventaja por la noción de praxeología". (Godino, 2002, p.246)

Cuadro 1
Elementos de las Configuraciones Epistémica y Metacognitiva

Configuración Epistémica	*Configuración Metacognitiva*
Lenguaje (términos, expresiones, notaciones, gráficos): En un texto viene dado en forma escrita o gráfica, pero en el trabajo matemático pueden usarse otros registros (oral, gestual). Mediante el lenguaje (el ordinario y el específico matemático) se describen otros objetos no lingüísticos; *Situaciones* (problemas más o menos abiertos, aplicaciones extramatemáticas o intramatemáticas, ejercicios…): Son las tareas que inducen a la actividad matemática; *Procedimientos:* Son utilizados por el sujeto ante las tareas matemáticas (operaciones, algoritmos, técnicas de cálculo, ...); *Conceptos*[1]: Dados mediante definiciones o descripciones (número, punto, recta, función…); *Proposiciones* (propiedades, teoremas, corolarios, lemas, etc.); *Argumentos* que se usan para validar y explicar las proposiciones (sean deductivas o de otro tipo).	*Gestiones primarias (metacognición primaria):* La metacognición primaria en general va asociada a acciones del resolutor experto manifestadas de forma rápida, dada la supuesta familiaridad que se le supone con los conocimientos necesarios para la resolución de la situación (tarea). Los procesos de supervisión, regulación y evaluación son relativamente semiautomáticos y las acciones metacognitivas que se esperan serán, sobre todo, de *comprensión* y de *organización / planificación*. *Gestiones secundarias (metacognición secundaria):* Cuando no se trata de gestiones rápidas o automáticas debido a la complejidad del problema propuesto, serán necesarios periodos de espera y de nuevos planteamientos. Estos nuevos planteamientos implican gestiones deliberadas de supervisión, regulación y evaluación más reflexivas que las que se dan en la primera. 1) Una acción *supervisiva* es aquella en la que el resolutor, implícita o explícitamente, hace cuestionamientos del tipo “estoy siguiendo correctamente el plan previsto”. Tal supervisión le conduce (y garantiza) a un mayor rendimiento; 2) En una acción *regulativa* se supone cuestionamientos del tipo “si no consigo los objetivos o no cumplo las condiciones impuestas, qué puedo corregir o qué nuevo camino puedo emprender”. Se da cuenta de que se equivocó; 3) En una acción *evaluativa / verificativa* se supone cuestionamientos del tipo “estoy respondiendo correctamente a la tarea” ¿La solución que doy es la que resuelve el problema?”. Hay indicios de la existencia consciente de un proceso de evaluación / verificación final de las acciones emprendidas. *Gestiones para una metacognición ideal:* Lo que caracteriza este tercer nivel metacognitivo es el recurso deliberado de procesos cognitivos de características muy generales (pensamiento metafórico, analógico, particularización, generalización, transferencia, contextualización, descontextualización, cambio de representación, resolución alternativa, una solución original, etc.), los cuales se proponen como nuevas alternativas (mucho más conscientes y reflexivas) a las demandas de supervisión, regulación y evaluación anteriores.

Fuente: elaborado a partir de Godino (2002) y Gusmão (2006)

Aunque hemos puesto los tres niveles de metacognición separados uno del otro, hay que pensarlos como un proceso continuo que se desarrolla en espiral. En muchos casos será suficiente el nivel primario de metacognición (cuando por ejemplo un resolutor experto se enfrenta a un problema que para él es simple).

Sólo aparecerán explícitamente los niveles secundario y terciario descritos anteriormente cuando el resolutor se enfrente a una situación problema cuya complejidad le obligue a ponerla en funcionamiento.

La configuración metacognitiva institucional (de un resolutor ideal), será tomada como referencia para evaluar las configuraciones metacognitivas personales de los estudiantes. Los niveles de metacognición necesarios para la resolución de un problema dependerán de la complejidad del problema y del nivel de conocimientos (cognitivos y metacognitivos) del resolutor.

Apoyado en los marcos aquí descriptos analizaremos un proceso de instrucción realizado por un profesor en el que participan 26 estudiantes de 14 años de la Educación Secundaria Obligatoria en España. El profesor no tenía, al menos explícitamente, intención de fomentar el desarrollo de procesos metacognitivos, aunque la instrucción estuviera bien organizada.

En este contexto, partimos de la premisa de que, incluso sin conocer explicitamente estrategias o indicadores de metacognición, los docentes, por medio de prácticas (operativas y discursivas) bien organizadas, que brindan orientación y medios necesarios para que sus alumnos tengan mejores resultados de aprendizaje (faceta cognitiva), logran la emergencia de procesos autónomos y regulados en sus alumnos y, por lo tanto, logran la emergencia de la metacognición.

La metodología del estudio fue de tipo diagnóstico y el análisis del proceso de instrucción tenía el propósito identificar y discutir aspectos metacognitivos que manifestaran los sujetos, sobre todo el profesor, durante el discurso en clase al resolver una situación-problema de matemáticas.

2. Materiales y métodos

2.1. *Diseño*

El fragmento de la práctica de aula que usamos para el análisis no fue observado y grabado directamente por los autores, pero a partir de un video, lo observamos, lo estudiamos y lo transcribimos para seguidamente analizarlo. El video, que está muy bien grabado, describe un proceso de instrucción que fue realizado por un profesor investigador, doctor del Departamento de Didáctica de las

Ciencias Experimentales y de las Matemáticas de la Universidad de Santiago de Compostela, España, que gentilmente colaboró, explicitando los objetivos e intenciones educativas. La trascripción del video fue acompañada y validada por este profesor que además recordaba con detalle la implementación realizada. Además, el texto final de análisis de esta aula fue aprobado por este profesor.

Así, fue diseñada una propuesta didáctica, basada en una metodología de enseñanza por diagnóstico, en la que el profesor propone una tarea determinada y, sobre ella, formula preguntas a las que los alumnos aportan sus respuestas, que se discuten, argumentan y, en su caso, consensuan. En este proceso interactivo, se demandaban acuerdos o desacuerdos argumentados con respecto a cualquier tesis que formulara en particular un determinado alumno. En el análisis de esta práctica, nos detendremos, en particular, *en identificar y discutir aspectos metacognitivos,* que pueden estar presentes sobre todo en el discurso (y actitudes) del profesor. Consideramos, además, que la mutua interrelación entre profesor-alumno condiciona los discursos y las actitudes de ambos en tanto que sujetos participantes (emisor y receptor) del discurso en clase.

Conviene aclarar que la metodología empleada (por diagnóstico) fue considerada en este trabajo como una opción metodológica para promover la reflexión y la actividad matemática de los estudiantes, descubrir sus posibles lagunas y dificultades y esperar hipotéticamente que surjan evidencias suficientes para analizar los conocimientos cognitivos que se ponen en juego, mediante una práctica organizada. Vale aclarar que fue un proceso de instrucción considerado por el profesor (y por la institución) como formal y, en este momento, el profesor no tenía la intención (al menos conscientemente) de desarrollar capacidades metacognitivas en sus alumnos(as). Por eso, formulamos la premisa, anunciada anteriormente, de que, incluso sin conocer explicitamente los procesos metacognitivos los docentes pueden lograr la emergencia de los mismos.

2.2. *Ambiente y participantes*

El proceso de instrucción fue llevado a cabo en una clase de 26 estudiantes de 14 años que cursaban 2º año de la Educación Secundaria Obligatoria en una institución pública en la ciudad de Santiago de Compostela, España. La instrucción fue desarrollada por un profesor universitario con el consentimiento de la institución y del profesor de matemáticas de la clase y duró aproximadamente 1 hora y 20 minutos. Fueran hechas grabación en vídeo y audio. Se trata de una clase experimental, desarrollada en el contexto de las prácticas escolares de alumnos de Magisterio en el Colegio de Prácticas anexo a la Universidad. Por tanto, el profesor que dirige la experiencia no es el profesor de matemáticas habitual ni, por tanto, el responsable de la clase.

2.3. *Recogida y análisis de dados*

El objetivo central de la práctica del profesor era hacer aflorar diferentes significados personales acerca de las relaciones entre las magnitudes longitud y superficie, utilizando como recurso didáctico el tangram de Fletcher.

El tangram de Fletcher es una especie de puzle compuesto por 7 piezas: 4 triángulos, 2 cuadrados de tamaños diferentes y un paralelogramo. La cantidad de figuras que se pueden formar con este tangram es menor a las que se pueden formar con el tangram tradicional.

Con anterioridad los estudiantes habían recibido instrucción sobre propiedades básicas relacionadas con fórmulas de áreas de triángulos y cuadriláteros y, en particular, habían estudiado el teorema de Pitágoras.

Así que, se realizó, al principio, una práctica con el tangram para observar las piezas, manipularlas y establecer las equivalencias entre ellas. Los alumnos disponían cada uno de un juego de tangram y habían realizado distintas construcciones para observar dichas equivalencias. Tenían varias copias en cartulina del triángulo pequeño (pieza base del tangram) y podían manipular libremente las piezas. Por ejemplo:

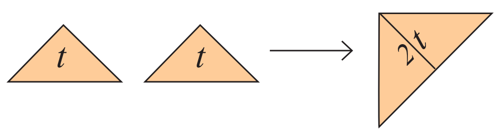

Figura 1. Piezas del tangram de Fletcher

Se realizó juntamente con ellos una construcción que incluye todas las piezas del tangram, observando distintas formas de realizarla, bajo simetrías o giros de las piezas. Transcurridos unos 25 minutos del aula (del video), se les planteó el siguiente problema, que actúa como motor de la situación didáctica:

Cálculo del área del triángulo sombreado

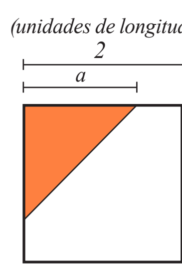

Figura 2. Cuadrado y triángulo sombreado

Si el lado del cuadrado de la figura mide 2 unidades de longitud. ¿Cuánto vale el área del triángulo sombreado?

A continuación, presentamos las acciones operativas y discursivas de los sujetos ante la situación-problema planteada.

3. Descripción y análisis de los datos

3.1. *Las prácticas operativas y discursivas entre profesor y alumnos*

Segmento 1 (*SG1*): Posicionamiento de los estudiantes acerca del valor del área del triángulo:

1. PROFESOR (P): *El lado del cuadrado de la figura mide 2 unidades de longitud. A mí me gustaría saber cuánto vale el área del triángulo sombreado. ¿Tenéis alguna opinión así, a ojo, de lo que puede valer?*

2. ALUMNO 1 (A1): *Unas 5 unidades cuadradas.*

3. A2: *Yo pienso que 3.*

4. A3: *Yo creo que 6.*
[Pausa. Algunos alumnos manipulan el juego del tangram que tienen a su disposición]

5. P: *A ver, a ver ¿cuántos se apuntan a cada una de las 3 respuestas?*
[A mano alzada, 8 estudiantes se adhieren a la respuesta “3”. Los demás no se manifiestan. Algunos siguen manipulando las piezas del tangram y otros dialogan entre sí]

Trayectoria argumentativa

Tesis 1: “unas 5 unidades cuadradas”. A1, Episodio 2 (EP2)
Tesis 2: “3 unidades cuadradas”. A2, EP3
Tesis 3: “6 unidades cuadradas”. A3, EP4.
Argumentos: No hay, salvo las adhesiones a cada tesis: ninguna a las tesis 1 y 3, ocho a la tesis 2.

Se constata, pues, que existen muchas dudas en relación con la validez de sus respuestas, debido a la escasa reflexión metacognitiva inicial en que las han basado.

SG2: Primera regulación de la tarea por parte del profesor, solicitando justificación para las tesis anteriores.

6. P: *A ver.* (refiriéndose a A2), *¿cómo has obtenido tu respuesta?*

7. A2: *Si el lado a* [del triángulo] *vale más de una unidad* [lo que se evidencia en la figura] *y los dos catetos son iguales, entonces he sumado y creo que aproximadamente da 3*: *"1+1+el resto"*.
8. P: *¿Cuántos están de acuerdo con este razonamiento?*
[Levantan la mano 6 alumnos, mostrando su acuerdo con A2]
9. P: *¿Por qué dices "catetos"?*
10. A2: *Son los lados más pequeños.*
11. P: *¿Todos los triángulos tienen catetos?*
12. A2: *Sí.*
13. A4: [corrigiendo a A2]: *No. Sólo los triángulos rectángulos.*
14. P: *¿De acuerdo todos?*
15. VARIOS ALUMNOS, [al unísono] (VA): *Sí.*
16. P: *¿De acuerdo A2*?
17. A2: *Sí*... [dubitativo].
18. P: *Volvamos al problema. ¿Crees que el "resto" de la longitud del lado pequeño (a) es la mitad de 1?*
19. A2: *Sí, aproximadamente.*

Argumento apoyando la tesis 2: "he sumado los catetos y creo que aproximadamente da 3: 1+1+resto". A2, EP7., y seis alumnos que se adhieren a este argumento.
Tesis 4: "Los dos catetos son iguales", A2, EP7.
Tesis 5: "Todos los triángulos tienen catetos". A2, EP12.
Argumentos que invalidan la tesis 5: "No. Sólo los triángulos rectángulos". A4, EP13, y varios alumnos que apoyan este argumento. A2 parece aceptar este argumento, pero sin mucho convencimiento (EP 17).
Tesis 6: "Aproximadamente el 'resto' de la longitud del cateto es ½", A2, EP19.

A2 ha interpretado que la interpelación tiene que ver con la determinación del valor de *a* y, metacognitivamente, decide que la estrategia adecuada para responder al problema es sumar las longitudes de los dos catetos, dando un valor aproximado aceptable, inicialmente, para dicha suma. El profesor intenta averiguar el significado personal, el conocimiento cognitivo, de A2 sobre la noción de "cateto" al que ha hecho referencia, confirmando que el significado de "cateto" para A2, está relacionado con "lado más corto" de un triángulo cualquiera. El profesor detecta que un número significativo de estudiantes o no han entendido cuál es el objetivo de la tarea (calcular el área del triángulo), o muestran conflictos semióticos (Godino, 2002), relacionados con la confusión perímetro / área. Por ello, retoma la pregunta original.

SG3: Segunda regulación y evidencia de la aparición de una estrategia.

20. P: *Bien. Yo había preguntado por el área del triángulo sombreado, no por la suma de los catetos.*
21. VA: *El área vale 2 unidades cuadradas.*
22. A6: *Vale 1 unidad cuadrada.*
23. A7: *Vale 1 y "un poquito".*
[la mayoría de los estudiantes siguen indecisos].
24. P: *A ver, ¿quién se adhiere a cada respuesta?*
[Hay mayoría, ahora, que se adhieren a la respuesta "2 unidades cuadradas"]
25. P: *A7 ¿por qué dices que vale 1 y "un poquito"?*
26. A7: [dibujando la siguiente figura]:

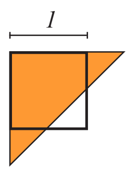

Figura 3. Dibujo del alumno A7

Hay un cuadrado de 1 unidad cuadrada que se puede construir dentro del triángulo, pero sobra algo. Lo que sobra no equivale a las partes del triángulo que quedan fuera del cuadrado.

27. A6: *Yo he pensado lo mismo, pero sí que equivale…* [y por tanto el área vale 1]

Tesis 7: "el área vale 2 unidades cuadradas". VA, EP21.
Argumentos: No hay argumentos, sino adhesiones de la mayoría a la tesis 7.
Tesis 8: "el área vale 1 unidad cuadrada". A6, EP22.
Argumentos a favor de la tesis 8: "se puede construir un cuadrado unidad cuya área equivale a la del triángulo, [con ayuda de representación gráfica]". A6, EP27.
Tesis 9: "el área vale 1 'y un poquito'", A7, EP23.
Argumento a favor de la tesis 9, que rebate la tesis 8: "lo que sobra [parte del cuadrado que sobresale al triángulo], no equivale a las partes del triángulo, que quedan fuera del cuadrado", A7, EP26.

A6 y A7 discuten entre ellas, pero no llegan a un acuerdo. Cada una mantiene su postura. La estrategia de descomposición/recomposición, elegida por estas dos alumnas no había sido, a priori, contemplada por el profesor (según su propia confesión) como una de las posibilidades para resolver la tarea. Se trata de una decisión metacognitiva incipiente en este nivel educativo, pero con un nivel de eficacia no despreciable. Al no disponer de medios "in situ" para recortar y componer trozos del triángulo, la estimación es diferente en A6 y A7 pero, en todo caso, les permite aproximarse de forma efectiva a la solución del problema.

SG4: Supervisión de todo el proceso anterior y nueva regulación de la tarea, con la propuesta de una nueva estrategia que provoca conflictos semióticos en algunos estudiantes.

28. P: *La mayoría afirma, sin embargo, que el área es de 2 unidades cuadradas. ¿Quién se mantiene en esta postura? A ver, A3, tú que has sido uno de los que han afirmado esto ¿cómo lo justificas?*

29. A3: *Porque este triángulo equivale a dos triángulos pequeños del tangram. Si cada uno de ellos es la unidad de área, entonces este triángulo tiene 2 unidades.* [Se vale de una composición realizada al principio de clase IV]:

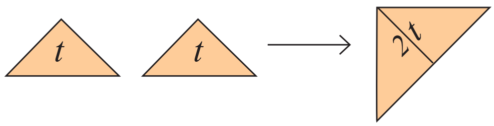

Figura 4. Piezas del tangram de Fletcher

30. P: *¿Alguien sabe una manera de conocer el área de un triángulo sabiendo cuáles son su base y su altura?*

31. VA: *Base por altura. (b x h)*

32. P: *¿Es base por altura?*

33. VA: [Autocorrigiéndose]: *Es base por altura partido por 2.*

34. P: [Escribiendo la fórmula *(b x h)/2* en una transparencia] *¿La mitad de la base por la altura?*
[Varios alumnos se ponen, en ese momento a hacer cálculos].

35. A4: *La base mide 1,3…. (1,3 x 1,3)/2=1,3.*

36. P: [escribiendo esa "igualdad" en la pizarra]: *¿Estáis de acuerdo?*

37. VA: *Sí.*

38. A7 y A8: *No. Eso sería si fuese (1,3+1,3)/2=1,3*

39. P: *¿Cuál de las dos expresiones es correcta?*
[Toda la clase parece adherirse a la expresión (1,3+1,3)/2=1,3, salvo A4 que parece dudar].

40. P: *A4, ¿lo tienes claro?*

41. A4: [Haciendo cálculos]. *Sí, es correcta la segunda. (1,3x1,3)/2=1,69/2=0,845 u^2*
El área vale 0,845 u^2

42. P: [Escribiendo esta expresión en la transparencia]. *¿Quiénes defienden que el área del triángulo vale 0,845 u^2?*
[Se produce el silencio, mientras algunos alumnos siguen haciendo cálculos]

Argumentos a favor de la tesis 7: "Porque este triángulo equivale a dos triángulos pequeños del tangram" A3, EP29.
Tesis 9: "el área del triángulo es base por altura. (b x h)". VA, EP31.
Tesis 10: (que sustituye a la 9): "Es base por altura partido por 2". VA, EP33.
No hay argumentos para justificar (o rebatir) las tesis 9 y 10.
Tesis 11: "La base mide 1,3…. (1,3 x 1,3)/2=1,3". A4, EP35.

Varios alumnos se adhieren a esta tesis.
Argumentos que invalidan la tesis 11: "No. Eso sería si fuese (1,3+1,3)/2=1,3". A7, A8, EP38.
Toda la clase, incluso A4 que contra-ejemplifica, se adhiere a este último argumento.

A3 y los compañeros que opinan como él no tienen en cuenta un dato del problema (el valor del lado del cuadrado). Evidencian dificultades con el significado de "unidad de medida". Puesto que habían trabajado previamente con el triángulo base del tangram como unidad de medida de superficie (no convencional), lo extrapolan a la actual tarea y obvian que al lado del cuadrado (cantidad de longitud), se le ha asignado un valor numérico que indica cuántas unidades de longitud contiene -2-. Además, se trabaja simultáneamente con longitudes y superficies, mientras que, al principio, se hacía sólo con superficies. Han aplicado una "analogía directa", sin considerar que hay una transformación de la misma debida al uso de diferentes magnitudes (longitud y superficie). Sin embargo, de haber considerado que la longitud del cateto del triángulo base del tangram fuese la unidad de longitud, entonces podrían haber llegado a la conclusión de que el cateto del triángulo sombreado (equivalente a la hipotenusa del triángulo base) mide $\sqrt{2}$, lo que les podría haber permitido deducir que el área de este triángulo sería $(\sqrt{2} \times \sqrt{2})/2=1\ u^2$ (solución correcta).

El profesor, a la vista de que ningún estudiante hace referencia a la fórmula usual del área de un triángulo, a pesar de discutir valores para *a*, ("vale más que una unidad" o 1,5 (A2)) y, por tanto, no intentar buscar una fórmula para determinar el área, reconduce la situación introduciendo esta estrategia, en la que se evidencian dudas con la fórmula del área de un triángulo que se salvan al compartirse los conocimientos. Sin embargo, esta *regulación* tiene más que ver con la memorización de una fórmula que con su comprensión efectiva. También emerge, en varios estudiantes, el obstáculo *(bxb)/2=b* por analogía con *(b+b)/2=b*. En el caso de A4, contra - ejemplifica para reconocer su error. La nueva pregunta del profesor (EP 42) produce un bloqueo.

SG5: Nueva regulación del proceso con la propuesta de otra nueva estrategia para deshacer una situación de bloqueo.

43. P: *¿Veis alguna otra forma de calcular el área del triángulo?*
[No hay nuevas respuestas; los estudiantes siguen haciendo cálculos. Luego de un intervalo de aproximadamente 1 minuto el profesor pregunta]:

44. P: *El cuadrado de la figura (original), ¿a cuántos triángulos (como el sombreado) equivale?*
[No hay respuesta. El profesor anima a que manipulen las piezas del tangram, pero no surgen nuevas estrategias. Entonces el profesor compone la siguiente figura 5]:

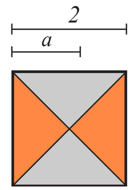

Figura 5. Piezas del tangram formadas por el profesor

45. TODOS LOS ALUMNOS: *¡A cuatro!*
46. P: *A ver. Los que decían que el área del triángulo valía 2, ¿cuál es el área del cuadrado?*
47. VA: *Vale 8 u^2* [4 x 2].
48. P: *¿Alguna otra opinión?*
49. MAYORÍA DE ALUMNOS: *¡Es 4!.*
50. P: (refiriéndose a A9 -uno de los que afirman que vale 4-) *¿En que te basas para decir que vale 4 u^2?*
51. A9: *Por que el área del cuadrado es* lado x lado *y el lado del cuadrado mide 2, entonces su área es 4 u^2.*
52. P: *Entonces ¿cuánto mide el área del triángulo sombreado?*
53. A9: *Mide 1 u^2.*

Tesis 12: "el cuadrado equivale a 4 triángulos". EP45.
Argumentos a favor: por la simple visualización de la figura.
Tesis 13: "el área del cuadrado vale *8 u^2* [4 x 2]". VA, EP47.
Argumentos que invalidan la tesis 13: "¡Es 4!", "por que el área del cuadrado es *lado x lado* y el lado del cuadrado mide 2, entonces su área es 4 u^2". VA, A9, EP49 y 51.
Tesis 14: "el área del triángulo sombreado mide 1 u^2". A9, EP53.

Se constata que los alumnos no han derivado estrategias eficientes de pavimentación de superficies, a partir de su trabajo previo, manipulando las piezas del tangram (en este caso, la más rápida y eficaz). Esta estrategia no ha surgido, en este caso, de las acciones de los estudiantes y ha tenido que ser introducida por el profesor. Probablemente, si se hubiera dado más tiempo, podría haber aparecido, pero las estrategias que eligieron siguieron otro rumbo.

SG6: Supervisión de las distintas acciones emergentes de las diversas estrategias puestas en juego.
54. P: *Entonces, ¿por qué antes A4 había deducido que el área valía 0,845 u^2?*
55. VA: *Porque el lado del triangulo mide más de 1,3.*
56. P: *¿Mucho más?*
57. A2: *1,5.* [haciendo cálculos] *(1,5 x 1,5)/2=2,25/2=1,125. Sobra.*
58. P: *Así que con 1,3 falta y con 1,5 sobra…*
59. VA: *1,4*

60. A2: *1,3 y medio* (tiene dificultades para expresar 1,35)
[El profesor va escribiendo en la transparencia todas las opciones que dan los alumnos y confecciona una lista con ellos].
1,3 → 0,845
1,5 → 1,125
1,4 → 0,98
61. P: *¿Entre qué valores estará comprendida la longitud del cateto?*
62. VA: *Entre 1,4 y 1,5.*
63. P: *Con esta forma de proceder, podríamos, por tanteo, aproximarnos poco a poco al valor de esta longitud, pero quiero que inventemos alguna estrategia nueva que nos permita calcularlo con más exactitud. Como los catetos del triángulo son iguales, entonces la base y la altura ¿Cómo son?*
64. VA: *Iguales.*
65. P: *Bien, entonces b=h y (bxh)/2 ¿cuánto vale?*
66. VA: *El área del triangulo, 1* u^2.
67. P: *Entonces, si la mitad de bxh vale 1, ¿cuánto vale b y cuánto vale h?*
68. A6: *bxh vale 2.*
69. P: *Muy bien A6. ¿Sabeis decirme dos números cuyo producto sea 2?*
70. VA: *b=1, h=2; b=2, h=1.*
El profesor construye una tabla con estos valores.
71. P: *¿Alguna otra posibilidad?*
[Se produce un silencio prolongado]

Argumento que apoya la tesis 14: "el área vale más de 0,845 u^2 porque el lado del triangulo mide más de 1,3". VA, EP55.
Se realizan tanteos para aproximar el valor de un cateto.
Tesis 15: "la longitud del cateto está comprendida entre 1,4 y 1,5". VA, EP62.
Tesis 16: "la base y la altura del triángulo son iguales". VA, EP64.
Tesis 17: "si *bxh vale 2* entonces *b=1, h=2 ó b=2, h=1*". VA, EP70.

En el segmento anterior se constata que los estudiantes han descubierto una estrategia para ir acotando los posibles valores de la longitud del cateto, expresada en números decimales, que les permitiría aproximar cada vez más el valor de *a.* En lugar de proseguir con esta estrategia, el profesor les anima a buscar otra, más eficaz, usando conocimientos de otras técnicas.

Los estudiantes de este nivel todavía presentan resistencias para pensar en más tipos de números que los enteros, a pesar de que acababan de hacerlo en episodios anteriores. La costumbre institucional escolar adquirida de asignar valores enteros a las variables, en una fórmula, se revela como aquí como un obstáculo.

SG7: Nueva regulación que permite la emergencia de un nuevo problema: resolver b^2=2, y supervisión de las acciones de los estudiantes enfrentados a dicho problema.
72. P: *Estos valores ¿se adecúan a nuestro caso?*

73. A6: *No, porque* $b=h$
74. P: *Muy bien, ¿entonces, que otros valores podemos considerar?*
De nuevo silencio.
75. P: *Como* $b=h$*, podemos poner, en lugar de* $b\,x\,h$*,* $b\,x\,b$
76. A2: *2b.*
77. VA: *No, no...* $b\,x\,b=b^2$.
78. A5: *1,42.* [haciendo cálculos] *(1,42x1,42)/2=1,008*
79. P: *¡Qué cerca andamos!. Pero quiero que todavía nos acerquemos más. Pensad en estas igualdade:* $b\,x\,b=2$*, o sea* $b^2=2$*. Si* $b^2=2$ *¿cuánto debe valer b?*
80. A2: *1*
81. P: *¿Cuál es el cuadrado de 1?*
82. A2: *No...no...*[reconoce su error]
Rumores en clase. Intercambio de ideas basadas en resultados de cálculos.
83. VA: *No hay ningún número cuyo cuadrado sea 2.*
84. P: *¿No? A ver. Fijaros en el triángulo:*

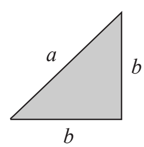

Figura 6. Triángulo dibujado por el profesor

¿Conocéis como medir la longitud de la hipotenusa *a*, conociendo la longitud de los catetos?
[Silencio prolongado].

85. P: *¿No os suena el teorema de Pitágoras?*
[silencio]
86. P: *Bien, os lo recuerdo.* $b^2+b^2=a^2$ *(en nuestro caso* $a=2$*) Volvamos a donde estábamos ¿creéis posible encontrar un número cuyo cuadrado sea 2?*
87. A6: *Raíz cuadrada de 2.*
88. P: *¿Podéis decirme, en el dibujo, a quien representa exactamente ese número?*
89. A5: $\sqrt{2}=1{,}42$
90. A6: *No hay*
91. A10: *Es un número muy largo*
92. A2: *Tiene 7 cifras decimales*
93. A10: *¡Tiene más!*
94. P: *¿Cuántas más?*
95. VA: *Tiene infinitas.*

96. A6: $\sqrt{2}$ *no existe.*
97. P: *¿Cómo que no existe? ¿Y la longitud de este lado* (señalando a uno de los catetos del triángulo) *cuánto vale?*
98. A5: $\sqrt{2}$
99. P: *Entonces ¿existe o no existe* $\sqrt{2}$*?*
[Silencio prolongado, con el que finaliza la clase].

Tesis 18: "$b \times b = 2b$". A2, EP76.
Argumentos que invalidan la tesis 18: "No, no... $b \times b = b^2$". VA, EP77.
Argumentos sobre el valor del cateto: "1,42. (haciendo cálculos) (1,42 x 1,42)/2=1,008". A5, EP78.
Tesis 19: "No hay ningún número cuyo cuadrado sea 2". VA, EP83.
Argumentos que invalidan la tesis 19: "Raíz cuadrada de 2". A6, EP87. (consecuencia de los argumentos del profesor). EP86.
Argumentos que niegan la existencia de la raíz cuadrada de 2: EP90 y 96.
Argumentos que revelan concepciones acerca de la raiz cuadrada de 2: EP91-3 y 95.

De nuevo aparece en A2 un error algebraico típico: "$b \times b = 2b$", que rápidamente es corregido por otros compañeros. En este momento llamamos la atención sobre el papel que desempeñan los compañeros en el proceso metacognitivo, ora examinando ora regulando interactivamente las actividades de los demás.

El profesor va marcando, poco a poco y en todo el proceso instruccional, su papel de conducir a los alumnos a reflexionar sobre las acciones que realizan.

La tesis 19, así como los episodios 90 y 96, ponen de manifiesto el obstáculo epistemológico (Brousseau, 1998) de la existencia de irracionales. Los estudiantes, al no encontrar valores enteros ni decimales que cumplan la condición $b2=2$, niegan su existencia.

Los estudiantes admiten que no recuerdan un teorema (Pitágoras) que había sido estudiado en clase recientemente. Ello refleja que no han dotado de significado a dicho resultado, incluso en contexto similar al estudiado, pero formulado en otros términos "longitud de la hipotenusa, en función de la longitud de los catetos". No entienden la expresión. Se produce, otro conflicto semiótico, una discrepancia entre expresión y contenido (Godino, 2002).

El silencio con que finaliza la clase revela que los estudiantes no parecen haber percibido el sentido de la pregunta de la existencia de raíz cuadrada de 2 como una longitud concreta. Aún no pueden relacionar (en este caso) un irracional con una cantidad de longitud.

3.2. Las estrategias metacognitivas en la práctica docente del profesor

3.2.1. *Decisiones del Profesor*

A pesar de que el profesor declara no haber incluido en sus objetivos, de forma explícita, el desarrollo de conocimientos metacognitivos en sus alumno(a)s, lleva a cabo determinadas acciones, brindando apoyo y orientaciones encaminadas a lograr el objetivo de la tarea (conseguir que los estudiantes pongan en práctica estrategias adecuadas para la resolución del problema), proporcionando condiciones óptimas para emergencia de procesos y estratégias metacognitivas en sus alumnos conforme han mencionado diferentes estudios (Schraw y Gutierrez, 2015; Díaz *et al.* 2017; Balderas *et al*., 2020). Así, las acciones del profesor activan decisiones de gestión (planificación, supervisión / control, regulación, revisión / evaluación) que deben ser consideradas como acciones "a priori", cuando diseña la tarea; "en acto", cuando se trata del momento de la realización de la práctica en clase con sus alumnos; y "a posteriori", cuando se trata de evaluar su propia práctica (auto-evaluación) y la práctica de sus alumno(a)s. Se trata de gestiones en las que se ponen en juego sus conocimientos metacognitivos y podrían ser descriptos de la siguiente forma:

Cuadro 2
Configuración metacognitiva del profesor

Gestiones primarias / preliminares (metacognición a priori)
1) El profesor planificó una tarea abierta que promueve la reflexión y abre la posibilidad de utilizar diversas estrategias de solución.
2) Tuvo conciencia previa de posibles dificultades y conflictos por parte de los alumnos al enfrentar la tarea, derivados de la existencia de una tipología de errores y obstáculos en el trabajo con medidas de longitud y superficie.
3) Hizo una auto*-evaluación previa de la tarea.* Al planificar la tarea y prever las posibles estrategias y dificultades que los alumnos puedan tener con ella, el profesor estará haciendo una auto-evaluación de la misma.
Gestiones secundarias durante la instrucción (metacognición en acto)
Parece haber *supervisado, regulado y evaluado* constantemente sus acciones en función del diálogo consigo mismo y con los alumnos durante el proceso de instrucción.
Gestiones ideales/finales (metacognición a posteriori)
Una vez finalizado el proceso de instrucción, el profesor declaró haber evaluado las estrategias, dificultades, errores y obstáculos surgidos durante la ejecución de la tarea, reflexionando, a su vez, sobre las posibles implicaciones de sus propias acciones sobre este proceso de instrucción.

Gestiones Preliminares

El profesor se ha fijado como meta que los estudiantes reflexionen sobre sus conocimientos previos para resolver una determinada tarea, valiéndose de un material didáctico (como el tangram) que posibilite la emergencia de estrategias alternativas de solución. El profesor es consciente de que los conocimientos previos que supone, a priori, adquiridos por los estudiantes, pueden no corresponderse con los que en realidad poseen. Por ello, uno de los objetivos previstos en la planificación de la tarea fue tratar de hacer visible esta discrepancia hipotética y prever posibles conflictos semióticos, errores y obstáculos. En consecuencia, diseña y planifica esta práctica con varios objetivos:

a) *Planificar una tarea abierta*

El profesor se ha decidido por una tarea de tipo abierta y, en este sentido, puede hacer surgir en los estudiantes la aparición de distintas estrategias tanto cognitivas como metacognitivas. La pregunta inicial *cómo obtener un valor estimativo del área del triángulo a partir del dato del problema* tiene por objeto provocar la reflexión en los estudiantes.

b) *Conciencia previa de posibles dificultades y conflictos:*

El profesor es consciente de los conflictos y obstáculos que existen en relación con la confusión perímetro / área, evidenciada en múltiples investigaciones. Para poder evidenciar este posible conflicto, introduce un distractor: la longitud del cateto del triángulo rectángulo isósceles: *a*, cuya determinación permitiría calcular directamente el área del triángulo. Este distractor puede, a su vez, ser fuente de emergencia de estrategias alternativas para resolver la tarea. Por otra parte, la "colocación" del triángulo dentro del cuadrado intenta que el problema no resulte demasiado sencillo, como en el caso de que la figura de partida fuese:

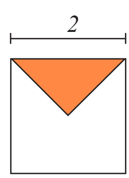

Figura 7. Cuadrado y pieza de triángulo sombreado

(que con seguridad se relacionaría directamente con la cuarta parte del área del cuadrado)

c) *Auto-evaluación previa:*

El profesor considera, a priori, que una posible *estrategia* de los alumnos puede consistir en manipular el triángulo dentro del cuadrado, hasta obtener una figura como la última (para ello disponen del tangram), lo que les conduciría a una respuesta rápida y eficiente. De ser ésta la estrategia elegida, se evidenciaría un aprendizaje de determinación de superficies mediante pavimentado, por repetición de una unidad de medida. Al mismo tiempo, permitiría reconocer que la hipotenusa del triángulo rectángulo tiene la misma medida que el lado del cuadrado.

Otra estrategia posible estaría basada en intentar calcular el valor de a, para, a continuación, aplicar la conocida fórmula del área del triángulo, que ya han manejado en múltiples ocasiones en etapas académicas anteriores. En este caso, dicho cálculo podría conducir a aplicar el teorema de Pitágoras, para obtener el valor de a. Estas dos estrategias formarían parte del constructo "configuración epistémica" elaborado en el Enfoque Ontosemiótico.

Otros tipos de estrategias que podrían surgir durante la realización de la práctica, no fueron previstas "a priori", ya que el profesor consideró que sería el propio desarrollo de la discusión en clase el que las pondría en evidencia.

Gestiones durante la instrucción

Decisiones sobre el desarrollo de la tarea (supervisión, regulación y evaluación)

A *nivel de supervisión* y, de modo general, de control de las estrategias que puedan surgir de los alumnos, el profesor decide focalizar sus acciones en moderar el debate que pueda acontecer en el desarrollo de la tarea, realizando preguntas, aclarando terminología y fomentando nuevas discusiones, intentando que afloren el mayor número de estrategias posibles, tanto si evidencian progresos en la solución de la tarea, como si –y sobre todo- plasman conflictos y dificultades cognitivas.

A *nivel de regulación*, el profesor pretende fomentar la reflexión en sus alumno(a)s, demandando justificaciones de sus estrategias y acciones; sugiere alguna nueva estrategia (en caso de producirse bloqueo generalizado en la consecución de la meta propuesta) para que sea tenida en cuenta y discutida en clase, con el fin de deshacer dicho bloqueo y está atento a la aparición de nuevos problemas, relacionados con la tarea propuesta, para garantizar la regulación (y supervisión) de las nuevas estrategias y acciones que emprendan los estudiantes para resolver estos problemas paralelos.

A nivel de *evaluación*, el profesor, de forma simultánea, evalúa las estrategias empleadas por sus alumno(a)s analizando su pertinencia o detectando los conflictos, errores y obstáculos que impiden o dificultan alcanzar el objetivo de resolver correctamente la tarea, valorando las distintas opciones, las tesis y argumentos presentes en el discurso de los estudiantes, que le permitan controlar los aprendizajes logrados y detectar las carencias cognitivas (y metacognitivas), para proceder en consecuencia.

Estos tres aspectos le permiten, al profesor, determinar la configuración cognitiva desarrollada por el grupo - clase.

Gestiones de Reflexión

Para valorar la consecución de los objetivos propuestos, el profesor reflexiona sobre sus propias acciones durante el proceso de instrucción a la hora de intervenir en el desarrollo de la tarea: formula preguntas, sugiere nuevas estrategias, provoca la discusión de nuevos problemas derivados de las propias respuestas y estrategias usadas por los estudiantes etc.

La trayectoria argumentativa derivada de las prácticas realizadas en clase, que hemos desarrollado anteriormente, permite ejemplificar las diferentes fases de la configuración metacognitiva del profesor que acabamos de exponer.

En todo este contexto, percibimos que al utilizar fundamentalmente las herramientas teórico-metodológicas del campo de la metacognición para comprender las prácticas de profesores y estudiantes en el contexto de nuestras tareas, hemos constatado que, de forma aislada, los constructos de la metacognición no permitían explicar las dificultades y conflictos puestos de manifiesto por los estudiantes en la realización de una práctica para resolver problemas. Tal reflexión nos enfrenta con la problemática de la evaluación de este conocimiento y de problematizar lo que sería de orden cognitivo o metacognitivo.

4. Conclusiones derivadas del proceso de instrucción

El desarrollo de la clase ha mostrado que:

a) El profesor no ha tenido la intención, al menos explícita, de desarrollar conocimientos metacognitivos en sus alumno(a)s. Sin embargo, los comentarios que podemos hacer de esa práctica abarcan un sentido general, toda vez que apreciamos que una clase o una práctica bien planeada y bien intencionada para desarrollar el conocimiento cognitivo de los estudiantes (teniendo en cuenta las competencias deseables y asequibles para un nivel de estudios concreto, así como la competencia que debe tener el profesor en el uso de recursos didácticos basados en la investigación didáctico-matemática y el dominio del contenido de las matemáticas que se están manipulando), hace que, paralelamente, se desarrollen competencias metacognitivas. Podemos reafirmar así las interacciones entre cognición y metacognición, aunque posiblemente con grados de desarrollo distintos (Gusmão, 2006; Gusmão, 2014).

b) Podemos observar que el profesor, al animar a los estudiantes a manipular las piezas del tangram, a fin de que descubran algunas estrategias alternativas, sugiriéndoles que intenten averiguar a cuántos triángulos equivale el cuadrado superpuesto, está estimulando la reflexión metacognitiva de los estudiantes. Pero, en algunos momentos, la iniciativa fracasa, y se produce un bloqueo, por lo que es el propio profesor el que indica expresamente dicha estrategia. Su puesta en práctica, sin embargo, parece no ser interpretada adecuadamente por varios estudiantes, que siguen defendiendo una postura previa: el área del triángulo es de 2 unidades cuadradas (basada en una concepción restrictiva del concepto de unidad de medida: 1 triangulo "grande" = 2 triángulos "pequeños") que extrapolan ahora, ante la evidencia de que el cuadrado equivale a 4 triángulos, afirmando que el área del cuadrado es de 8 unidades (no teniendo en cuenta que su lado mide 2). Otra parte de la clase, basándose más en criterios algorítmicos que en cuestiones de significado, pasan a deducir que el área del cuadrado es de 4 unidades, por lo que el área del triángulo es de 1 unidad.

c) La constatación, por parte del profesor, de que la solución correcta no está consensuada, al existir sobre el papel varias posibles respuestas, hace que la supervisión de los diferentes procesos puestos en juego (fórmula del área con valores aproximados, equivalencia entre 4 triángulos y el cuadrado, triángulo "grande" = 2 triángulos "pequeños, composición / recomposición de A6 y A7), motiva la intervención del profesor para que los estudiantes reflexionen sobre la relación entre las dos primeras estrategias mencionadas, surgiendo así una nueva estrategia relacionada con la búsqueda de valores aproximados más precisos para la longitud de la base (y de la altura). En este punto, cabe destacar que la estrategia tiene cierto éxito, obteniéndose valores aproximados de $\sqrt{2}$ aceptables como 1,42.

d) La reflexión que hacen los estudiantes sobre los propios conocimientos que deben poner en práctica para elaborar un plan para resolver la tarea es, en general, deficiente, si bien debemos resaltar el caso de las alumnas A6 y A7, elaborando una estrategia para dar respuesta al problema, que podemos considerar original, en la medida en que no había sido objeto de discusión previa. El estudiante A3 ha elaborado un discurso que pone de manifiesto sus significados personales de las nociones de cateto, suma de longitudes de catetos y área de un triángulo, que permiten detectar conflictos y errores relacionados con la confusión perímetro / área. Este estudiante y otros compañeros también evidencian conflictos derivados de un significado personal de la noción de "unidad de medida", todavía poco elaborado. Las decisiones iniciales que toman no son reflejo de un discurso justificado, sino que hay que interpretarlas como una emisión de juicios poco reflexivos acerca de la cuestión que se les plantea. No obstante, podemos observar que a pesar de tener un dominio primario (incipiente) de la metacognición, éste no fue suficiente para garantizar el éxito de los estudiantes (el caso específico de A3) en la tarea. El error de A3 no se debe a carencias metacognitivas (aunque elementales) que posee, puesto que supo transferir o usar la estrategia basada en la "analogía" con la tarea anterior (en donde se mostraba la equivalencia entre triángulos "grande" y "pequeño"), pero el hecho de que aplique la analogía en este nuevo contexto no garantizó un aprendizaje contextualizado y, por tanto, no le permite resolver el problema. Así que el error de A3 se debe básicamente a su configuración cognitiva (dificultades con el significado de "unidad de medida", cuando se manipulan cantidades de longitud y superficie). Este caso, en particular, nos sugiere justificar que la metacognición, por sí sola, no permite explicar la realización de una práctica y, por tanto consideramos que se verifica la afirmación de Gusmão (2006) de que *el hecho de que uno tenga adquirido y controle aspectos del* conocimiento metacognitivo *suficiente para afrontar una nueva tarea, no siempre es garantía de éxito, y puede que no consiga resolverla, debido a carencias de conocimientos cognitivos* (p. 294).

e) También queremos remarcar el papel que desempeña la interacción con los compañeros en el desarrollo o incremento de aspectos metacognitivos, bien a través de sus argumentaciones con estilos de razonamiento (aprendizaje) variados, bien haciendo correcciones puntuales a los demás e incluso a través de preguntas dirigidas al profesor.

f) Se evidencian dificultades para usar, en este contexto, la fórmula usual del área de un triángulo, conocidas su base y su altura, como una estrategia posible que tiene que ser sugerida por el profesor. La puesta en práctica de la misma, hace surgir en la clase un interesante debate, alrededor de los valores estimados para la longitud de la base y la altura, manifestándose conflictos derivados del uso inapropiado de la analogía (debido a obstáculos en la configuración cognitiva que poseen), para realizar cálculos aritméticos con fracciones. El uso de la fórmula permite obtener un valor aproximado para el área del triángulo, que no concuerda con decisiones previas tomadas sobre este valor, lo que produce una situación de cierto desconcierto y bloqueo entre los estudiantes, ante la falta de acuerdo sobre lo que debe medir su superficie.

g) Resulta notoria la dificultad para usar el teorema de Pitágoras en un contexto en principio nada extraño, ya que se ve con claridad que se trata de un triángulo rectángulo. La ausencia de referentes cognitivos y/o metacognitivos para establecer conexiones entre contextos próximos se observa aquí con nitidez. Por otra parte, hay que incidir en la dificultad de interpretar los números irracionales como medidas en este nivel educativo, las dificultades que crea la noción de infinito (Cornu, 1991) y las dudas consecuentes para reconocer la existencia de números irracionales.

Este proceso de instrucción nos ha mostrado que aspectos metacognitivos fueron activados y, a pesar de una instrucción responsable que los estimula, dichos aspectos fueron limitados. Pensamos que éstos podrían haber sido mejorados (incluso comprometiendo el avance del contenido) si el profesor fuera consciente de los mismos prestándoles una mayor atención. Así, consideramos, en conformidad con Balderas, Páez y Martínez (2020), la necesidad de estudios centrados en la práctica del profesor y de los estudiantes en la clase de matemáticas, que documenten de qué manera y en qué situaciones se puede promover y mejorar el aprendizaje metacognitivo en los estudiantes. Todo esto nos hace pensar que urge un trabajo más transparente y explícito de estos procesos; de modo que resaltamos la necesidad de investigar el aula y de concienciar al profesorado. En ese sentido se podrían fomentar investigaciones futuras.

La metacognición aún viene ocupando poco espacio en los sistemas educativos. La importancia de trabajar la metacognición abiertamente en clase fue resaltada por muchos investigadores (por ejemplo, Fernandes, 1988; Gusmão, 2006) y aunque la bibliografía que concierne a los procesos de aprendizaje de las matemáticas privilegia la metacognición (Cabral, 1998, entre otros), nos parece que las cosas están en el plano de la investigación, de las propuestas, de las ideas, pero no en el plano de la práctica. El aula aún parece distanciarse de lo que se afirma o sugiere en la teoría. Necesitamos, todavía, una mayor apertura y atención para los procesos metacognitivos en el aprendizaje de las matemáticas.

Finalmente hacemos la siguiente reflexión, considerando que la premisa de este estudio fue en parte confirmada: una instrucción bien planeada, intencionadamente cognitiva y responsablemente ejecutada consigue activar aspectos metacognitivos, aunque de forma limitada. El profesor, dispuesto a reconocer la relevancia educativa de las habilidades metacognitivas ¿no debería remodelar la planificación y ejecución de la instrucción, en aras de una decidida activación y desarrollo de dichas habilidades?

Agradecimientos

Somos imensamente gratos al Profesor Doutor José António Cajaraville Pegito (in-memoria), responsable por dirigir el processo de instrucción mencionado, por su contribución en las discusiones del texto, pero sobretodo por su dedicación y amor à la Educación Matemática.

Este texto es um recorte de la tesis doctoral de la primera autora presentado en el Programa de Didactica de las Ciencias Experimentales y de las Matemáticas de la Universidade de Santiago de Compostela.

Referencias

Baten, E., Praet, M. y Desoete, A. (2017). The relevance and efficacy of metacognition for instructional design in the domain of mathematics. *ZDM - The International Journal on Mathematics Education, 49*(4), 613–623. https://doi.org/10.1007/s11858-017-0851-y

Balderas, M. J. C., Páez, D. A. y Martínez M. G. P. (2020). Discusión teórica sobre las prácticas docentes como mediadoras para potencializar estrategias metacognitivas en la solución de tareas matemáticas. *Educación Matemática*, 32(1), 221-240. http://www.revista-educacion-matematica.org.mx/descargas/vol32/1/10REM32-1.pdf

Breda, A. (2020). Características del análisis didáctico realizado por profesores para justificar la mejora en la enseñanza de las matemáticas. *Bolema*, *34*(66), 69-88. https://doi.org/10.1590/1980-4415v34n66a04

Breda, A., Hummes, V. B., Silva, R. S. y Sánchez, A. (2021a). The Role of the Phase of Teaching and Observation in the Lesson Study Methodology. *Bolema* (Rio Claro), 35(69), 263-288. https://doi.org/10.1590/1980-4415v35n69a13

Breda, A., Seckel, M. J., Farsani, D., Silva, J. F., y Calle, E. (2021b). Teaching and learning of mathematics and criteria for its improvement from the perspective of future teachers: a view from the Ontosemiotic Approach. Mathematics *Teaching Research Journal*, 13(1), 31-51 https://commons.hostos.cuny.edu/mtrj/wp-content/uploads/sites/30/2021/04/v13n1-Teaching-and-learning-of-mathematics-and-criteria.pdf

Brousseau, G. (1998). *La téorie des situations didactiques*. Grenoble: La Pensée Sauvage.

Cornu, B. (1991). Limits. In David Tall (Ed.) *Advanced Mathematical Thinking*. (Dordrecht: Kluwer Academic Publisher), 153-166.

Cornu, B. (1991). Limits. In David Tall (Ed.) *Advanced Mathematical Thinking*. (Dordrecht: Kluwer Academic Publisher), 153-166.

Díaz, A., Pérez, M., González-Pienda, J. y Núñez, J. (2017). Impacto de un entrenamiento en aprendizaje autorregulado estudiantes universitarios. *Perfiles Educativos*, *39*(157), 87–104. https://perfileseducativos.unam.mx/iisue_pe/index.php/perfiles/article/view/58442

Flavell, J. (1976). Metacognitive aspects of problem solving. In L. Resnick (Ed.). *The nature of intelligence*. (Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates).

Flavell, J. (1979). Metacognition and cognitive monitoring: a new area of cognitive-developmental inquirí. *American Psychologist*, 34, 906-911. https://psycnet.apa.org/record/1980-09388-001

Flavell, J. (1981). Monitoring social cognitive enterprises: something else that may develop in the area of social cognition. In Flavell J. y Ross L. (Eds.), *Social cognitive development: frontiers abd possible future*. (New York: Cambridge University Press), 272-287.

Flavell, J. (1987). Speculation about the motive and development of metacognition. In Weinert, F. & Klowe, R. (Eds.). *Metacognition, Motivation and Understanding*. (Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers), 21-29.

Font, V. (2005). Una aproximación ontosemiótica a la didáctica de la derivada. En A. Maz, B. Gómez y M. Torralbo (Eds): *Investigación en Educación Matemática. Noveno Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática*. (Córdoba: Universidad de Córdoba), 109-128. http://funes.uniandes.edu.co/1303/

Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 22, (2/3): 237–284. https://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/04_enfoque_ontosemiotico.pdf

Godino, J. D. (2022). Emergencia, estado actual y perspectivas del enfoque ontosemiótico en educación matemática. *Revista Venezolana de Investigación en Educación Matemática (REVIEM)*, 2(2), 1-24 - e202201. http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/documentos/Godino_Emergencia_EOS_REVIEM_2021.pdf

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2019). The Onto-semiotic Approach: implications for the prescriptive character of didactics. *For the Learning of Mathematics, 39*(1), 37-42. https://www.jstor.org/stable/26742011

Godino, J. D., Giacomone, B., Batanero, C., & Font, V. (2017). Enfoque ontosemiótico de los conocimientos y competencias del profesor de matemáticas. *Bolema,* 31(57), 90-113. https://doi.org/10.1590/1980-4415v31n57a05

Gonçalves, Mª. C. M. (1996). *A influência da Metacognição na aprendizagem: uma intervenção realizada na aula de matemática*. [dissertaçao/dissertação de mestrado, Lisboa, Portugal]: Universidade Católica Portuguesa.
González, F. (1996). Acerca de la Metacognición. *Paradigma, XIV al XVII*, n.1, pp. 109 -135, jun.
Gusmão, T. C. R. S. (2006). *Los procesos metacognitivos en la comprensión de las prácticas de los estudiantes cuando resuelven problemas matemáticos: una perspectiva ontosemiótica*. [tesis/tesis doctoral, Santiago de Compostela, España]: Universidade de Santiago de Compostela. http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/documentos/Tesis_doctoral_Tania_Gusmao.pdf
Gusmão, T. C. (2009). A estreita relação entre os modelos de resolução de problemas e a metacognição: uma questão de circunstancias. *Boletim GEPEM* / 54, 77-92. Rio de Janeiro. https://periodicos.ufrrj.br/index.php/gepem/article/view/318
Gusmão, T. C.; Font, V. y Cajaraville, J. A. (2009). Análises cognitivo e metacognitivo de práticas matemáticas de resolução de problemas: o caso Nerea. Revista *Educação Matemática Pesquisa*, 11(1), 79-116, São Paulo. https://revistas.pucsp.br/emp/article/view/2134
Gusmao, T. C. R. S., Cajaraville, J. A., Font, V. y Godino, J. D. (2014). El Caso Victor: dificultades metacognitivas en la resolución de problema. *Bolema* [online], 28(48), 255-275. Rio Claro, São Paulo. https://www.scielo.br/j/bolema/a/W4CxvyxGxdFnq8zBdH4LxQQ/abstract/?lang=es
Jiménez R. V.; Puente F. A. (2014). Modelo de estrategias metacognitivas. *Revista de Investigación Universitaria*, 3 (1), 11-16. doi.org/10.17162/riu.v3i1.36
Kambita, D. y Hamanenga, J. (2018). The impact of problem solving approach on students' performance in mathematical induction: A case of Mukuba University. *Journal of Education and Practice, 9*(5), 97–105.
Martínez, X. (2017). Pedagogías metacognitivas y la construcción de un foro dialógico. *Innovación Educativa, 17*(74), 8–10.
Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. London, United Kingdom: Academic Press Inc. (London) Ltd.
Schraw G. y Gutierrez A. P. (2015). Metacognitive Strategy Instruction that Highlights the Role of Monitoring and Control Processes. In: Peña-Ayala A. (eds) *Metacognition: Fundaments, Applications, and Trends*. Intelligent Systems Reference Library, vol 76. Springer, Cham. doi:10.1007/978-3-319-11062-2_1
Wellman H. (1985). The origins of metacognition. In Forrest-Pressley, Mackinnon y Waller (Eds). *Metacognition, cognition, and human performance* Vol.1, Theoretical Perspectives. (London: Academia Press, Inc), 1-31.
Venancio, M. A. S. (2020). Metacognição: um estudo exploratório com o game educacional A Fazendinha Matemática aplicado em estudantes do ensino fundamental. [Dissertação, Vitória da Conquista, Brasil]: Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia. http://www2.uesb.br/ppg/ppgen/wp-content/uploads/2021/03/DISSERTA%C3%87%C3%83O-MARCIO-ANTONIO-S.-VENANCIO-1.pdf

Autores

Tânia Cristina Rocha Silva Gusmão. Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia (UESB), Brasil. Bolsista produtividade CNQop-PQ-2. professorataniagusmao@gmail.com

https://orcid.org/0000-0001-6253-0435

Vicenç Font Moll. Departamento de Educação Lingüística, Literaria e Didactica de las Ciencias Experimentales y Matematicas: Universitat de Barcelona. España. vfont@ub.edu

https://orcid.org/0000-0003-1405-0458