



Artículo

<https://doi.org/10.12802/relime.2026.29.e678>

A construção de uma prova visual em trigonometria – o modelo RBC+C e o GeoGebra

The Construction of a visual proof in trigonometry – the RBC+C Model and GeoGebra

Corália Pimenta

Centro de Investigação e Inovação em Educação, Universidade Politécnica de Coimbra,
Portugal  

Manuel Joaquim Saraiva

Universidade da Beira Interior, Portugal  

Resumo

Neste estudo analisa-se o modo como duas alunas do 1.º ano de um Curso Técnico Superior Profissional constroem uma prova visual da identidade trigonométrica do seno da soma de dois ângulos. Adotam-se os modelos AiC e RBC+C, recorrendo ao GeoGebra. Desenvolve-se um estudo qualitativo interpretativo com duas alunas, no contexto de uma aula de Matemática. Os dados empíricos incluem produções escritas e orais das alunas, diálogos entre elas e o professor e registos escritos do professor. Analisam-se as ações epistémicas mobilizadas, suportadas por subcategorias construídas para o estudo, de acordo com o conteúdo matemático e a prova visual requerida. Os resultados evidenciam que as ações R, B e C evoluíram de forma articulada, conduzindo à emergência da ação C. A ação R impulsionou o processo de abstração, enquanto a articulação entre R e B constituiu o eixo central da construção. O GeoGebra potenciou, como suporte, a construção da prova visual.

Palavras-chave:

- *Abstração em contexto*
- *Ações epistémicas*
- *Prova visual*
- *Identidade trigonométrica*
- *GeoGebra*

Cómo citar:

Pimenta, C., & Saraiva, M. J. (2026). A construção de uma prova visual em trigonometria – o modelo RBC+C e o GeoGebra. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 29, e678. <https://doi.org/10.12802/relime.2026.29.e678>



Abstract

This study analyses how two first-year students enrolled in a Higher Professional Technical Course construct a visual proof of the trigonometric identity for the sine of the sum of two angles. The AiC and RBC+C models are adopted, using GeoGebra. A qualitative interpretative study was conducted with two students in the context of a Mathematics lesson. The empirical data include the students' written and oral productions, dialogues between the students and the teacher, and the teacher's written records. The epistemic actions mobilised were analysed, supported by subcategories developed for the study in accordance with the mathematical content and the required visual proof. The results show that the R, B and C actions evolved in an integrated manner, leading to the emergence of action C. Action R fostered the abstraction process, while the articulation between R and B constituted the central axis of the construction. GeoGebra supported the construction of the visual proof.

Keywords

- *Abstraction in context*
- *Epistemic actions*
- *Visual proof*
- *Trigonometric identity*
- *GeoGebra*

Resumen

En este estudio se analiza el modo en que dos alumnas de primer curso de un Curso Técnico Superior Profesional construyen una demostración visual de la identidad trigonométrica del seno de la suma de dos ángulos. Se adoptan los modelos AiC y RBC+C, recurriendo a GeoGebra. Se desarrolla un estudio cualitativo de carácter interpretativo con dos alumnas, en el contexto de una clase de Matemáticas. Los datos empíricos incluyen producciones escritas y orales de las alumnas, diálogos entre ellas y el profesor y registros escritos del profesor. Se analizan las acciones epistémicas movilizadas, sustentadas en subcategorías construidas para el estudio. Los resultados muestran que las acciones R, B y C evolucionaron de forma articulada, conduciendo a la emergencia de la acción C. La acción R impulsó el proceso de abstracción, mientras la articulación entre R y B constituyó el eje central. GeoGebra potenció, como apoyo, la construcción de la demostración visual.

Palabras clave

- *Abstracción en Contexto*
- *Acciones epistémicas*
- *Prueba visual*
- *Identidad trigonométrica*
- *GeoGebra*

Résumé

Cette étude analyse la manière dont deux étudiantes de première année d'un Cours Technique Supérieur Professionnel construisent une démonstration visuelle de l'identité trigonométrique du sinus de la somme de deux angles. Les modèles AiC et RBC+C sont adoptés à l'aide de GeoGebra. Une étude qualitative à visée interprétative est menée auprès de deux étudiantes, dans le contexte d'un cours de mathématiques. Les données empiriques comprennent les productions écrites et orales des étudiantes, les dialogues entre les étudiantes et l'enseignant, ainsi que les notes écrites de celui-ci. Les actions épistémiques mobilisées sont analysées à partir de sous-catégories élaborées pour cette étude. Les résultats montrent que les actions R, B et C ont évolué de manière articulée, conduisant à l'émergence de l'action C. L'action R a favorisé le processus d'abstraction, tandis que l'articulation entre R et B a constitué l'axe central de la construction. GeoGebra a soutenu la construction de la démonstration visuelle.

Most Clés

- *Abstraction en context*
- *Actions épistémiques*
- *Preuve visuelle*
- *Identité trigonomeétrique*
- *GeoGebra*



1. Introdução

Compreender como um aluno constrói novos conhecimentos trigonométricos e desenvolve o processo de abstração durante a realização de uma tarefa matemática ajuda o professor a identificar dificuldades cuja superação pode contribuir para a promoção da sua aprendizagem. Neste estudo, a abstração é entendida como uma atividade de reorganização vertical de construções anteriormente concebidas e de atribuição de novos significados matemáticos pelos próprios alunos, conduzindo-os, assim, à formulação de uma nova construção (Dreyfus et al., 2015; Hershkowitz et al., 2001). Procurou-se compreender a evolução do processo de abstração através da análise das relações estabelecidas entre as ações epistémicas do modelo RBC+C (Dreyfus & Kidron, 2006; Dreyfus et al., 2015) – sustentado na perspetiva da abstração em contexto (AiC) (Dreyfus et al., 2001) – e as subcategorias de análise definidas no âmbito desta investigação. As ações epistémicas correspondem a processos mentais que se desenvolvem durante a abstração e que explicam o aparecimento de uma nova construção mais elaborada e complexa (Pimenta, 2016). Enquanto a perspetiva AiC fornece o enquadramento teórico para compreender o processo de abstração, o modelo RBC+C permite analisar empiricamente as ações epistémicas que sustentam a construção de novo conhecimento matemático.

Recorreu-se ao software de geometria dinâmica GeoGebra, como uma mais-valia para o processo de construção do conhecimento matemático. Este programa alia a geometria, a álgebra e os gráficos numa só ferramenta, podendo-se, com ele, desenhar formas geométricas e gráficos de funções, permitindo explorar a matemática de forma visual e dinâmica (da Silva Santiago & Santana, 2024; Valori et al., 2024). Desafiaram-se os alunos a construir uma prova visual sobre a identidade trigonométrica do seno da soma de dois ângulos, potenciando o uso do GeoGebra. Pretendia-se que fossem utilizadas imagens geométricas, eventualmente auxiliadas por palavras, de modo a tornarem evidente, através da observação visual, o conceito abstrato do seno da soma de dois ângulos.

O estudo incidiu sobre um par de alunas do 1.º ano de um Curso Técnico Superior Profissional em Redes e Sistemas Informáticos de um Instituto Superior de Engenharia em Portugal, no contexto de uma aula de Matemática lecionada pelo primeiro autor deste artigo, com o objetivo de promover a construção de uma prova visual da identidade trigonométrica do seno da soma de dois ângulos. Analisaram-se as relações estabelecidas pelas duas alunas na identificação, leitura e interpretação das medidas de ângulos, das razões trigonométricas no triângulo retângulo, dos lados relativos a um ângulo agudo da identidade trigonométrica em estudo.



Neste artigo sintetizam-se as principais características da teoria AiC, do modelo RBC+C e da sua relação com o processo de abstração em contexto. Apresentam-se, igualmente, alguns aspetos relevantes da prova visual realizada pelas duas alunas. Por fim, analisa-se a resolução da tarefa, procurando-se compreender as relações estabelecidas entre ações epistémicas do modelo RBC+C e as respetivas subcategorias definidas para este estudo.

Neste âmbito, procurar-se-á responder às seguintes questões: que ações epistémicas do modelo RBC+C podem ser observadas na construção do novo conhecimento trigonométrico, quando as duas alunas identificam e estabelecem relações entre os ângulos e os lados dos triângulos que constroem e modelam, com recurso ao GeoGebra? Como se relacionam entre si? E como é que podem ser enquadradas no contexto de uma prova visual em trigonometria?

2. Quadro teórico

2.1. A abstração na construção do novo conhecimento matemático e o processo de ascensão do abstrato ao concreto

No presente estudo, procurámos compreender como se verifica o processo de abstração durante a construção do novo conhecimento, à semelhança do que foi explorado por Hershkowitz e Dreyfus (2001), que desenvolveram o modelo AiC para explicar esse processo. Este modelo teórico relaciona a abstração com a influência do contexto na aprendizagem e descreve-a em três fases: (1) necessidade, quando o aluno precisa de construir novos conhecimentos para resolver determinado problema; (2) emergência, quando uma nova construção, mais elaborada e complexa, resulta da reorganização vertical e integração de construções previamente desenvolvidas; e (3) consolidação, sempre que as construções são reutilizadas em novos problemas. O contexto contempla aspetos como a natureza da tarefa proposta aos alunos, a sua apresentação e resolução, bem como os artefactos utilizados. Este modelo fundamenta-se na perspetiva de Davydov (1990), segundo a qual, quando os alunos iniciam a exploração de um novo conteúdo, tendem a identificar uma relação geral, por vezes reconhecida em conteúdos previamente lecionados, a partir da qual constroem uma abstração substantiva. De acordo com esta perspetiva, o conhecimento não é apresentado como um produto final, mas é construído progressivamente a partir de um conceito geral e abstrato, pelo que a apreensão do conhecimento teórico-científico parece transitar do abstrato para o concreto. Nesse sentido, a abstração surge durante a análise, enquanto os alunos trabalham com os objetos e procuram compreender o aspeto geral do problema colocado. Esta fase inicial



caracteriza-se pela observação de semelhanças e diferenças e pela identificação das relações essenciais à compreensão e à concretização do conhecimento. O concreto, por sua vez, corresponde à fase final – síntese – que resulta da análise e da representação do objeto, dando origem a uma forma mais consistente e estruturada do processo de abstração.

Quanto ao objeto, o seu estudo visa estabelecer conexões internas que permitam a construção do concreto, conduzindo o pensamento teórico no sentido da generalização matemática. À medida que aprofundam o conhecimento sobre o objeto, compreendendo como a relação geral identificada se manifesta em situações particulares, os alunos transitam no processo de abstração para a generalização das relações identificadas. Nesta perspectiva, o concreto resulta de uma abstração inicial desenvolvida durante a análise das propriedades e relações dos objetos. Davydov (1990) utilizou a expressão ascensão do abstrato ao concreto para transmitir a ideia de que a construção de novo conhecimento decorre da transição do concreto empírico para o concreto pensado – ou seja, o real com atribuições de significado – resultante do processo de abstração. Neste processo, o aluno incorpora ações mentais, capacidades e procedimentos lógicos que, interligados, possibilitam a produção de novos conhecimentos. O trabalho com os objetos torna-se, assim, progressivamente mais estruturado e coerente, até ascender ao concreto, sendo que o raciocínio desenvolvido permite uma compreensão mais profunda dos objetos em estudo. Importa sublinhar que, ao utilizar a expressão ascensão do abstrato ao concreto, Davydov (1990) pretende evidenciar que o pensamento se move no plano abstrato (Pimenta, 2016).

Segundo Hershkowitz et al. (2001), durante o processo de abstração desenvolvem-se ações epistémicas essenciais que clarificam a fase de emergência desse processo, dando origem ao modelo epistemológico RBC, cujas ações epistémicas – *Recognizing*, *Building-with* e *Constructing* – serão representadas, respetivamente, pelas iniciais R, B e C. A estas, os autores acrescentaram ainda uma quarta componente correspondente à terceira fase do processo de abstração: a *Consolidation* (Co), resultando no modelo RBC+C.

Para aqueles autores, as ações epistémicas são mobilizadas pelos alunos durante a construção do novo conhecimento, permitindo identificar como introduzem, comparam e relacionam conhecimentos previamente adquiridos, bem como constroem novos significados matemáticos. Por serem observáveis, desempenham um papel central no desenvolvimento do processo de abstração, uma vez que o modo como se articulam entre si e o encadeamento que estabelecem são elementos fundamentais da reorganização vertical do conhecimento, através da integração de construções anteriores para a conceção



de novas. Assume-se que as ações epistémicas contribuem para tornar o raciocínio mental mais simples, rápido e confiável, em consonância com os resultados obtidos por Kirsh e Maglio (1994).

No modelo RBC+C, *Recognizing* refere-se à percepção, por parte do aluno, da necessidade de adquirir conhecimentos que lhe permitam resolver novas situações, ocorrendo quando reconhece uma construção específica como relevante. *Building-with* diz respeito à necessidade de alcançar um objetivo, sendo esta ação caracterizada pela seleção de estratégias, pela justificação e apresentação de soluções. Envolve a integração e combinação de construções previamente reconhecidas, utilizadas para atingir determinado objetivo, bem como a aplicação de procedimentos matemáticos previamente identificados. *Constructing*, por sua vez, é a ação epistémica central do processo de abstração e consiste na combinação e reorganização de construções por meio da matematização vertical, com o intuito de produzir uma nova construção, que se expressa pela primeira vez através da verbalização ou da ação.

Para aprofundar a compreensão sobre o desenvolvimento das ações epistémicas no modelo RBC+C, Dreyfus et al. (2015) clarificam o significado e a distinção entre *Building-with* e *Constructing*, salientando que a primeira diz respeito ao processo de construção e a segunda ao resultado desse processo. Relativamente a *Constructing*, os autores destacam que a nova construção não precisa ser definitiva, podendo ser frágil e dependente do contexto. Já *Consolidation* surge apenas após *Constructing*, de forma autónoma, reforçando e estabilizando a nova construção. Os estudos indicam ainda que *Constructing* depende do desenvolvimento prévio de *Recognizing* e que esta, em conjunto com *Building-with*, contribui para o seu surgimento. No entanto, *Constructing* não é uma simples soma das duas ações anteriores, mas resulta de uma reorganização vertical do conhecimento. Dreyfus e Kidron (2006) também destacam a dificuldade, por vezes sentida, em identificar o momento exato em que ocorre uma determinada construção, devido à ocorrência simultânea de construções paralelas. Por esse motivo, os autores sugerem o desenvolvimento de estudos que permitam identificar as relações entre as diferentes ações epistémicas do modelo, reforçando a pertinência da presente investigação.

Os autores do presente artigo reconhecem que a definição de subcategorias para as ações epistémicas, à semelhança do que foi proposto por Dreyfus e Kidron (2006), Dreyfus et al. (2015) e Pimenta e Saraiva (2019), pode contribuir para uma compreensão mais aprofundada das relações entre R, B, C e Co. Na investigação de Pimenta e Saraiva (2019), a análise baseada nessas subcategorias revelou-se essencial para clarificar o início do



processo de abstração, as inter-relações entre as diferentes ações epistêmicas e o seu contributo para a construção de novos significados matemáticos.

Nesse sentido, a presente investigação definiu igualmente subcategorias específicas para cada ação (ver Metodologia), visando compreender como os alunos constroem a prova visual em trigonometria.

2.2. Provas visuais em Matemática

Segundo Saraiva (1992), Freudenthal (1973) argumenta que a onnipresença da linguagem geométrica na matemática da época não só se devia à tradição histórica, mas também à capacidade de orientar a investigação. Para este autor, mesmo em domínios aparentemente desconectados da geometria, é a intuição geométrica que sugere o que é importante, interessante e acessível, precavendo contra o desvio no emaranhado imenso dos problemas, das ideias e dos métodos. A intuição geométrica não se reduz à visão geométrica do espaço físico, mas envolve uma interação entre o formalismo matemático e as intuições primárias, as quais Freudenthal designa como ingênuas, baseadas na experiência espacial. Quando um matemático recorre a imagens e esquemas que evocam estruturas espaciais, é a intuição geométrica que está em ação, acompanhando o processo matemático criativo. Por sua vez, Hadamard (1945) também defende que os matemáticos, ao exercerem a sua criatividade profissional, utilizam frequentemente imagens, muitas das quais de natureza geométrica. Para este autor, os matemáticos tendem a evitar palavras ou símbolos algébricos durante o processo de reflexão, preferindo recorrer a imagens mentais. Menciona ainda uma carta escrita por Einstein, na qual este afirmou que palavras e linguagem, seja escrita ou oral, pareciam não desempenhar um papel significativo no seu processo de pensamento. Para Einstein, os construtores psicológicos, que são os elementos do pensamento, são certos sinais ou figuras, mais ou menos claros para ele, que podem ser reproduzidos e combinados em liberdade.

Podemos, assim, afirmar que existem indícios de que os matemáticos confiam muito no raciocínio visual durante o seu trabalho, embora raramente explicitem como chegam aos seus resultados, ocultando frequentemente as visualizações e os argumentos em que se baseiam. Para Dreyfus (1991), os motivos dessa prática dever-se-ão ao facto de: (1) As imagens poderem não ter surgido com suficiente clareza para que os matemáticos as possam descrever com palavras ou representações, como acontece com as figuras mais ou menos claras mencionadas por Einstein na carta a Hadamard; ou (2) os diagramas poderem ser considerados inaceitáveis dentro da publicação matemática tradicionalmente padronizada.



Mason (1991) afirma que a valorização matemática das imagens e dos diagramas passará pela ideia de que cada vez mais os factos e conhecimentos matemáticos estarão baseados numa intuição profundamente desenvolvida a partir do uso de programas computacionais, onde todo um vasto conjunto de conhecimento matemático sofisticado terá como suporte o rato – a mão – o olho – o ecrã do monitor. Cada vez mais, o software permite que o utilizador manipule objetos no ecrã, envolvendo ideias matemáticas como objetos geométricos (gráficos e curvas), ícones referentes a objetos matemáticos como grupos, transformações e fórmulas que, até então, só poderiam ser utilizadas através da matemática formal. O software computacional torna, assim, possível uma representação visual da matemática, permitindo, por uma ação visual direta e pela observação de mudanças, o acesso aos objetos e relações matemáticas. Este ambiente computacional possibilita, ainda, a investigação das causas que levam a mudanças nas relações matemáticas, com a ação a ser implementada de forma dinâmica, significando que:

As ações podem repetir-se em liberdade, com ou sem mudança de parâmetros e podem ser desenhadas conclusões com base no *feedback* dado pelo programa computacional. São estas possibilidades que dão o poder ao computador para a aprendizagem do raciocínio visual em matemática (Dreyfus, 1991, p. 45).

As palavras de Mason e Dreyfus terão sido uma antevisão do futuro? Hoje faz sentido apelar para a valorização das representações visuais e do raciocínio visual, atribuindo-lhes um estatuto comparável ao de outras representações e raciocínios matemáticos. O raciocínio visual continua a ser utilizado e explicitado pelos matemáticos, com o computador a assumir-se como uma ferramenta valiosa, quer para a realização de cálculos complexos como para a visualização de conceitos abstratos e o teste de conjecturas. A colaboração entre matemáticos e a inteligência artificial (IA) tem levado a novas descobertas, como no caso da colaboração de matemáticos da Universidade de Oxford, da Universidade de Sydney e da DeepMind, que usaram a machine learning para sugerir e provar novos teoremas. Além disso, o uso do computador no processo demonstrativo também pode promover uma dinâmica no iniciar e reiniciar, ou seja, no trabalho de conjecturar, avançar e testar. Ele tem possibilitado a compreensão e a formulação de novos problemas e conjecturas, principalmente em casos com grande quantidade de cálculo. Davies et al. (2021) sublinham que a prática matemática envolve a descoberta de padrões e a formulação de conjecturas, um processo no qual os computadores têm vindo a desempenhar um papel crucial desde a década de 1960. Estes autores sugerem que a colaboração entre matemáticos e inteligência artificial (IA) pode levar a resultados surpreendentes, aproveitando os pontos fortes de ambas as áreas. Para eles, a intuição



matemática desempenha um papel essencial na descoberta, sendo a combinação de formalismo rigoroso com uma boa intuição o caminho para resolver problemas matemáticos complexos.

Nos dias de hoje, tudo indica que na comunidade dos matemáticos as representações visuais e o raciocínio visual já assumiram o estatuto a que tinham direito, deixando de ser o parente pobre do raciocínio matemático. Porém, esta assunção ainda não leva ao reconhecimento do potencial das representações visuais nas provas matemáticas, com o argumento, entre outros, de que um diagrama pode conduzir ao erro.

Para Hanna (2000, p.91), a questão chave que se coloca é “Se, e em que extensão, as representações visuais podem ser usadas não só como evidência para uma afirmação matemática, mas, também, para a sua justificação”. Para esta autora, os diagramas e outras ajudas visuais têm sido usados ao longo do tempo para facilitar a compreensão matemática. Têm sido vistos como acompanhamentos heurísticos para uma prova matemática, podendo inspirar o teorema a ser provado, sendo uma componente legítima de um argumento matemático. O matemático Richard Palais (1999) afirma que a visualização através de computadores gráficos permite transformar dados, alterar imagens e manipular objetos, examinar características de objetos que eram inacessíveis sem computadores – onde a visualização pode mostrar diretamente o caminho para uma prova rigorosa.

Stylianides et al. (2024) referem que, nos últimos anos, a investigação em educação matemática tem evoluído para uma abordagem holística das interações de ensino e aprendizagem, considerando não apenas os alunos e os professores, mas também o conteúdo matemático e as relações que se estabelecem entre estes elementos. Neste contexto, a investigação sobre a prova matemática assume um papel de destaque, incidindo em diferentes dimensões, como as normas e os critérios de demonstração (Dimmel & Herst, 2020), o desenvolvimento de novos quadros teóricos e abordagens metodológicas (Tabach et al., 2020) e os aspetos linguísticos e discursivos da demonstração e da prova matemática (Kontorovich, 2021). Estes autores identificam, ainda, como uma das linhas promissoras para investigação futura o estudo do papel da tecnologia no ambiente de aprendizagem, reconhecendo o seu potencial para transformar as práticas de ensino e de aprendizagem da demonstração e da prova matemática.

Borwein e Jörgenson (1997) salientam as diferenças entre os modos lógico e visual de apresentação das provas matemáticas. Tradicionalmente, as demonstrações são formuladas como sequências de inferências sentenciais. Já a prova visual recorre a



representações gráficas estáticas que, embora possam conter a mesma informação, não explicitam o encadeamento lógico, cabendo ao observador identificar elementos relevantes e a ordem em que as dependências deverão ser consideradas. Por este motivo, estes autores consideram que as provas visuais bem-sucedidas são poucas e tendem a ser limitadas no seu alcance e generalidade. Reconhecem, contudo, a existência de várias provas visuais convincentes, como as publicadas no livro “Proofs Without Words” (Nelsen, 1993) e propõem três condições necessárias — embora não suficientes — para que uma prova visual seja considerada válida: i) Fiabilidade (os meios subjacentes para chegar à prova matemática são fiáveis e o resultado não é variável em cada inspeção); ii) Consistência (os meios e os fins da prova são consistentes com outros conhecidos); iii) Repetibilidade (a prova pode ser confirmada ou demonstrada a terceiros). Estes autores atribuem ao raciocínio visual um maior papel na matemática, acreditando que algumas representações visuais podem constituir provas matemáticas.

Numa perspetiva pedagógica, Saraiva (1992) defende que, para a demonstração fazer sentido para os alunos, estes devem reconhecê-la como um instrumento fiável para validar uma proposição e compreender a sua necessidade para justificar a generalidade dos resultados matemáticos. Este autor acrescenta que a elaboração de demonstrações deve ser acompanhada da sua análise crítica, promovendo uma atitude de questionamento e reflexão sobre os objetos matemáticos e o próprio processo de validação.

Neste estudo, reconhecemos na prova visual uma estratégia pedagógica relevante para a promoção do processo de abstração, sobretudo quando apoiada por ferramentas digitais, como o GeoGebra, que tornam esse processo mais acessível e significativo para os alunos. Sustentados por esta perspetiva, defendemos que a exploração de representações visuais, tais como figuras, símbolos e linguagem matemática, favorece o desenvolvimento do raciocínio dedutivo (Yang, 2012), o que permite a construção dinâmica de conjecturas e a análise de propriedades e relações geométricas (Amado & Pinto, 2015; Lopes, 2013). Conscientes de que a prova visual não substitui a demonstração formal, adotamos a perspetiva de Borwein e Jörgenson (1997), já referida, que estabelece três condições necessárias para a sua validade: fiabilidade, consistência e repetibilidade. Com base neste enquadramento teórico, assumimos a prova visual como uma abordagem pedagógica válida e significativa na construção de novo conhecimento matemático.

2.3. A identidade trigonométrica do seno da soma de dois ângulos e o GeoGebra

A trigonometria assume um papel relevante no currículo de matemática, não apenas pela sua aplicabilidade transversal a diversos domínios científicos e tecnológicos, tais como a



física, a engenharia, a arquitetura e a informática, mas também pela sua relevância na consolidação de competências cognitivas, como o raciocínio lógico-dedutivo, a representação e interpretação de objetos geométricos no plano e no espaço, e a modelação matemática de fenómenos periódicos e relações métricas. A sua origem remonta às civilizações da Antiguidade, nomeadamente à egípcia e à babilónica, onde já se observava uma preocupação com o estudo dos triângulos, sobretudo em contextos relacionados com a astronomia, a navegação e a agrimensura. O próprio termo “trigonometria”, de raiz grega, significa “medição de triângulos”, evidenciando a natureza geométrica que sustenta historicamente esta área da matemática. Ao longo dos séculos, matemáticos gregos, indianos, árabes e europeus contribuíram para a formalização progressiva dos conceitos trigonométricos, desde a construção de tabelas de cordas até à definição moderna das funções trigonométricas, numa tentativa contínua de compreender as relações entre ângulos e medidas. Esta evolução traduziu-se num alargamento progressivo das aplicações da trigonometria, afirmando-se como ferramenta indispensável ao avanço do conhecimento científico (Van Brummelen, 2009).

No contexto educativo, o ensino da trigonometria inicia-se habitualmente com a exploração das razões no triângulo retângulo (seno, cosseno e tangente), evoluindo para o estudo do círculo trigonométrico, das funções periódicas e das identidades fundamentais. Esta progressão permite aos alunos não apenas aplicar os conhecimentos adquiridos em situações práticas, mas também desenvolver competências cognitivas de elevado grau de abstração. Neste enquadramento, é pertinente recordar a definição clássica proposta por Gonçalves (1937), para quem a trigonometria é um ramo da matemática que trata das relações métricas entre os lados e os ângulos de um triângulo e consiste em deduzir das medidas dos elementos dados de um triângulo as medidas dos seus restantes elementos. Este autor distingue ainda dois métodos para alcançar tal objetivo: o geométrico, baseado na construção efetiva do triângulo, e o trigonométrico, que visa o cálculo das grandezas desconhecidas por via analítica.

Complementando esta perspetiva, Pinheiro e Carneiro (2023) sublinham a relevância de integrar abordagens históricas no ensino da trigonometria, defendendo que a contextualização histórica contribui para uma melhor compreensão conceptual dos conteúdos e promove uma aprendizagem mais significativa e crítica desta área da matemática.

As relações estabelecidas por Hiparco e posteriormente desenvolvidas por Ptolomeu constituíram um marco importante na evolução da trigonometria e estiveram na base das atuais identidades trigonométricas (Toomer, 1998).



Entre estas, destaca-se a identidade do seno da soma de dois ângulos, $\sin(a + b) = \sin(a) \times \cos(b) + \cos(a) \times \sin(b)$, que será objeto de análise no presente estudo. A exploração desta identidade exige a mobilização de conhecimentos trigonométricos e de diversas propriedades geométricas fundamentais, aqui designados por *elementos de conhecimento*, tais como i) ângulos e lados de um triângulo, ii) cateto oposto e adjacente a um ângulo, iii) catetos e hipotenusa de um triângulo retângulo, e iv) razões trigonométricas no triângulo retângulo, nomeadamente a relação entre as razões trigonométricas de ângulos complementares, para além da própria identidade trigonométrica em estudo.

Na prática, a validação desta igualdade requer, muitas vezes, a articulação entre métodos analíticos e geométricos. Neste contexto, o acesso a ambientes de geometria dinâmica, como o GeoGebra, constitui uma mais-valia para o processo de construção do conhecimento matemático. O GeoGebra integra geometria, álgebra e representação gráfica numa única ferramenta, permitindo construir, manipular e relacionar objetos matemáticos de forma visual e dinâmica. A possibilidade de alterar construções, preservando as suas propriedades, favorece a exploração de relações matemáticas e a formulação de conjecturas em diferentes situações.

No estudo da trigonometria, diversos autores destacam as potencialidades do GeoGebra ao nível da construção, dinamismo, investigação, visualização e argumentação (Lopes, 2011). A possibilidade de movimentar os objetos no ecrã através do "arrastar" permite explorar diferentes configurações da mesma construção, favorecendo a identificação de regularidades, a formulação de conjecturas e o desenvolvimento da argumentação matemática. Além disso, o GeoGebra melhora a visualização e a compreensão dos conceitos e das suas variações (da Silva Santiago & Santana, 2024), valoriza a linguagem gráfica e as atividades de modelação, exploração e investigação (Peters et al., 2023), promove a articulação entre teoria e prática na resolução de tarefas (Azevedo & Alves, 2019) e favorece uma aprendizagem exploratória e visual, facilitando a construção conceptual e a compreensão dos conceitos geométricos envolvidos (da Silva Santiago & Santana, 2024; Valori et al., 2024). Neste estudo, assume-se que a exploração da identidade trigonométrica do seno da soma de dois ângulos, apoiada pelo GeoGebra, cria condições favoráveis à visualização, promovendo o processo de abstração e a construção de novo conhecimento matemático.

3. Opções e procedimentos metodológicos

Adotou-se uma metodologia de natureza qualitativa, sustentada no paradigma interpretativo (Bogdan & Biklen, 1994), com o objetivo de analisar detalhadamente as ações



epistémicas do modelo RBC+C observadas durante o processo de abstração das duas alunas do estudo. Procurou-se, desta forma, compreender como elas construíram o novo conhecimento matemático. Esta abordagem permitiu analisar o fenómeno no seu contexto natural, privilegiando a compreensão dos processos, das interações e dos significados atribuídos pelos participantes às suas ações.

O presente artigo decorre de um estudo desenvolvido em contexto de sala de aula, envolvendo 25 alunos do 1.º ano de um Curso Técnico Superior Profissional em Redes e Sistemas Informáticos de um Instituto Superior de Engenharia, organizados em pequenos grupos – 11 pares e um grupo com 3 alunos. A primeira autora do artigo desempenha, simultaneamente, o papel de docente da unidade curricular e o de investigadora. Esta dupla função permitiu acompanhar todo o processo de construção do conhecimento matemático.

O estudo assume a natureza de um estudo de caso, por procurar compreender em profundidade um fenómeno específico no seu contexto real de ocorrência, privilegiando a análise detalhada dos processos de construção do conhecimento matemático, em detrimento da generalização estatística dos resultados (Yin, 2003).

O desafio pedagógico proposto integrou-se no tópico de Trigonometria da unidade curricular de Matemática, com o objetivo de conduzir os alunos à justificação da identidade trigonométrica do seno da soma de dois ângulos. Para tal, recorreu-se à construção e visualização de triângulos através do software GeoGebra. A tarefa foi concebida para compreender como emergiram e se relacionaram as ações epistémicas do modelo RBC+C, bem como as subcategorias de análise definidas neste estudo, analisando o impacto dessas relações na construção do novo conhecimento matemático.

A tarefa foi introduzida e trabalhada em contexto de sala de aula, após a leção do tópico de Trigonometria, e enquadrou-se na modalidade de trabalho final da disciplina. A sua realização decorreu ao longo de 3 aulas de 90 minutos.

No início da primeira aula, o enunciado da tarefa foi disponibilizado pela professora/investigadora em formato impresso e digital, tendo também sido projetado e lido na aula, com o intuito de promover o envolvimento dos alunos na resolução da tarefa, incentivando-os à reflexão, questionamento e exploração. O ambiente de trabalho promovido durante a resolução privilegiou a colaboração entre pares e entre os alunos e a professora/investigadora, de modo a facilitar a progressão na tarefa e a construção de aprendizagens matemáticas significativas. A professora, para além de fornecer esclarecimentos à turma, oralmente e por escrito, foi, essencialmente, uma questionadora.



Para analisar pormenorizadamente como foram construídos e aplicados os novos conhecimentos e que relação existia entre as diferentes ações epistémicas do modelo RBC+C, optou-se por realizar uma análise aprofundada de um único par de alunas (aqui identificadas por Eva e Sara). A seleção do caso teve por base a riqueza e a completude dos dados produzidos por estas duas alunas durante a resolução da tarefa, nomeadamente nas produções das imagens, dos registos escritos, na explicitação dos raciocínios matemáticos e nas interações observadas ao longo do processo de construção da prova visual. Estes aspetos permitiram reconstruir detalhadamente o processo de abstração em estudo. Esta opção metodológica é coerente com a natureza qualitativa e interpretativa da investigação e com a sua configuração como estudo de caso, privilegiando a compreensão aprofundada do fenómeno em estudo (Yin, 2003).

A conceção da tarefa foi orientada por princípios pedagógicos e pelo interesse em compreender como se desenrolou o processo de abstração, tendo em conta os conhecimentos prévios dos alunos, as suas características individuais e os objetivos de aprendizagem da unidade curricular. Para motivar e promover a compreensão dos alunos, através da visualização e modelação, e incentivar a persistência na construção da prova visual, optou-se pela utilização do software GeoGebra como ferramenta de exploração. Pretendia-se que os alunos alcançassem uma prova da identidade trigonométrica do seno da soma de dois ângulos, através da análise de relações entre ângulos e lados.

A recolha de dados recorreu a múltiplas fontes de evidência, permitindo triangular a informação e reforçar a consistência da interpretação realizada (Yin, 2003). As aulas organizaram-se em três momentos distintos: i) apresentação, na primeira aula, da proposta pela professora à turma; ii) resolução da tarefa pelos pares de alunos e entrega da respetiva solução e iii) apresentação e discussão coletiva das resoluções conduzida pela professora. A recolha de dados incluiu registos escritos, quer das duas alunas (RA) – as suas resoluções, com algumas das dúvidas e erros cometidos –, quer da professora (RP), no seu diário de bordo – os diálogos observados entre as duas alunas e entre elas e a professora, bem como as suas reflexões registadas durante e após a realização das aulas.

Foram definidas as categorias e as subcategorias de análise, orientadas pelo tema matemático da Trigonometria, pelo enquadramento teórico adotado, AiC e RBC+C, e pelas questões de investigação (ver os descritores, coluna 3 da Tabela 1). As categorias principais correspondem às ações epistémicas definidas no modelo RBC+C (Dreyfus & Kidron, 2006; Dreyfus et al., 2015): *Recognizing*, *Building-with*, *Constructing* e *Consolidation*. As subcategorias foram ajustadas à atividade matemática desenvolvida pelas duas alunas e à prova visual requerida.



Os dados obtidos foram codificados com os códigos das categorias (R, B, C, Co) e das subcategorias de análise adequadas (I, PR, RT, Rg, M, SI, ER, AC, Ro, PV – ver Tabela 1). Foram, também, identificados os registos dos alunos por RA e os da professora por RP.

A Tabela 1 apresenta as categorias e subcategorias de análise definidas para o presente estudo, bem como os respetivos descritores.

Tabela 1

Categorias e subcategorias de análise e respetivos descritores (autores)

Ações epistémicas RBC+C categorias de análise	Subcategorias de análise	Descritores
Recognizing (R)	Interpretação (I)	Compreende a informação apresentada na tarefa, as orientações partilhadas por colegas ou pela professora, bem como os resultados obtidos através da modelação no GeoGebra ou das suas próprias resoluções.
	Pré-requisitos (PR)	Identifica conceitos, propriedades, relações, fórmulas e procedimentos trabalhados em contextos de aprendizagem anteriores.
	Relações trigonométricas (RT)	Identifica relações trigonométricas aprendidas num contexto de aprendizagem anterior que são relevantes para apresentarem soluções, estabelecerem conexões, justificar procedimentos e/ou generalizarem resultados.
	Regularidades (Rg)	Identifica semelhanças que permitem antecipar relações, formular hipóteses, tomar decisões ou adotar procedimentos de resolução relevantes para o desenvolvimento do processo de construção.
Building-with (B)	Modelação (M)	Constrói e manipula triângulos no GeoGebra de forma adequada, representando relações entre lados, ângulos e outros elementos, de acordo com os dados e objetivos propostos.
	Soluções intermédias (SI)	Apresenta soluções intermédias surgidas da modelação/ resolução de partes da tarefa, as quais podem ser relevantes para a construção do novo conhecimento matemático.



Constructing (C)	Estratégias (ER)	Adota ações ou procedimentos que revelam tentativas conscientes para avançar no processo de construção e que, ainda que não conduzam à solução final, favorecem raciocínios, soluções intermédias e decisões relevantes para a construção.
	Aplicação de Construções (AC)	Integra e combina construções previamente adquiridas para alcançar determinado objetivo no processo de resolução. Quando essas construções evidenciam aprofundamento do conhecimento poder-se-á estar na presença da <i>Consolidação</i> (Co).
	Reorganização (Ro)	(Re)organizam dados, soluções, ideias e construções prévias para conceberem a nova construção e atingirem o objetivo da tarefa.
	Prova Visual (PV)	Justificação visual da igualdade da identidade do seno, fundamentada na validade dos critérios de fiabilidade, consistência e repetibilidade (Borwein & Jörgenson, 1997).
Consolidation (Co)	Processo que ocorre quando os alunos aplicam uma construção recente que pode manifestar-se durante a resolução das tarefas.	

4. A tarefa: prova visual da identidade trigonométrica do seno da soma de dois ângulos

A tarefa proposta teve como principal objetivo incentivar os alunos à construção de uma prova visual da identidade trigonométrica do seno da soma de dois ângulos. Em contraste com abordagens utilizadas no seu percurso de aprendizagem, centradas em questões diretas e na aplicação de fórmulas a casos particulares, optou-se por uma introdução mais aberta e reflexiva. Esta abordagem procurou desafiar os alunos a envolverem-se de forma mais ativa, exigindo deles não apenas a aplicação de procedimentos conhecidos, mas o reconhecimento e a mobilização das fórmulas em questão, bem como a interpretação do propósito da tarefa (ver Figura 1).

Para iniciar a resolução da tarefa, os alunos são convidados a interpretar o enunciado matemático, que recorre à linguagem simbólica e a conceitos previamente abordados no seu percurso de aprendizagem. Espera-se que identifiquem triângulos, ângulos e lados para a construção que servirá de base à prova visual solicitada. Para além destes



conhecimentos, é necessário mobilizar competências relacionadas com a utilização do GeoGebra (ver Figura 2).

Figura 1

Introdução da tarefa proposta aos alunos

Prova visual em trigonometria: as fórmulas não aparecem de um dia para o outro!

A Matemática é muitas vezes vista como um conjunto de fórmulas e ainda que não seja só isso, também o é! Mas de onde vêm essas fórmulas?

Como é evidente, as fórmulas não surgiram ao acaso, nem de um dia para o outro. Elas são o resultado do trabalho experimental, da colocação de diferentes hipóteses, da reflexão e de avanços e recuos. Certo é que algumas sustentam e solidificam a construção do nosso conhecimento, pelo que devemos procurar compreender a sua essência e não deixar de as questionar!

As tecnologias têm um potencial ímpar no que trata a representar e modelar objetos e situações que representam a realidade. Por esse motivo, nesta tarefa sugerimos a utilização da ferramenta de geometria dinâmica GeoGebra, para explicar a relação estabelecida entre diferentes elementos (amplitudes e comprimentos) da fórmula do seno da soma de dois ângulos.



Figura 2

Indicação de suporte à iniciação da tarefa (1.ª parte)

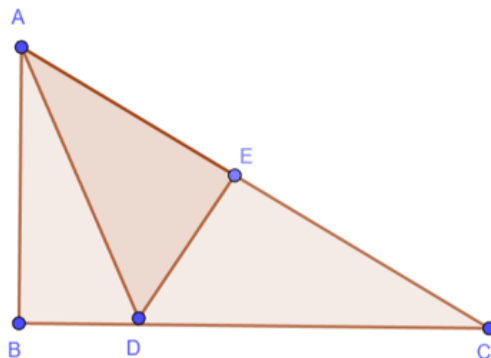
Identidade trigonométrica do seno da soma de dois ângulos

Construa, tal como sugerido na figura seguinte, os triângulos [ABC] e [AED], retângulos em B e E, respetivamente. Designe o ângulo ACB por α e o ângulo DAE por β .

Escreva, em função de α e de β , o ângulo ADB.

Determine os comprimentos de [AE], [ED], [EC] e [AB] em função de α , β e $a = \overline{AD}$.

Deduz a fórmula do seno da soma de dois ângulos.



5. Resultados

Nas subsecções que se seguem procuraremos evidenciar como se desenvolveu a construção da prova visual da identidade trigonométrica, analisando-se o processo de abstração e, em particular, o desenvolvimento das categorias e subcategorias de análise.

A introdução da tarefa junto da turma permitiu identificar a ausência de experiências prévias significativas por parte dos alunos na elaboração de justificações matemáticas, bem como em dinâmicas de trabalho exploratório e colaborativo em contexto de sala de aula. Apenas um número muito reduzido de alunos referiu ter tido contacto anterior com o *software* GeoGebra, e, mesmo nesses casos, a utilização restringiu-se, na maioria das vezes, à visualização de construções previamente elaboradas e partilhadas. Esta limitação poderá ter condicionado a forma como a proposta foi inicialmente recebida. Verificou-se alguma desmotivação e insegurança por parte de vários alunos, nomeadamente Eva e Sara, que expressaram não se sentirem devidamente preparados do ponto de vista dos conhecimentos matemáticos, para responder ao desafio proposto. Esta situação foi ultrapassada ao longo do desenvolvimento da tarefa.

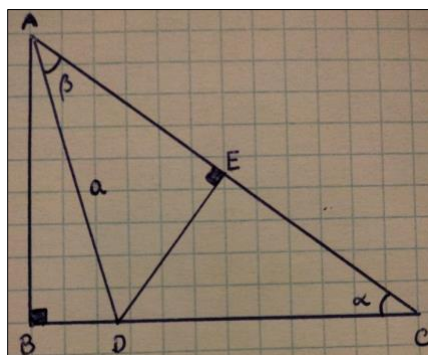
5.1. Abstração: uma prática que favorece a ação *Recognizing*

Ao acompanhar o início da resolução da tarefa pelas duas alunas (Eva e Sara), a professora constatou que o processo de abstração se iniciou durante a leitura e análise do enunciado, momento em que as alunas procuraram compreender o desafio proposto, tal como consta no seguinte registo:

Quando constatarem que seria necessário provar a igualdade do seno da soma de dois ângulos, as alunas procuraram essas relações nos respetivos cadernos diários. A partir desse registo, iniciaram a exploração da fórmula do seno, iniciando a representação dos dados enunciados no seu caderno diário (RP).

Após uma leitura mais pormenorizada do enunciado, as alunas iniciaram o esboço do triângulo sugerido na tarefa (ver Figura 3), recorrendo ao caderno diário de uma delas.



Figura 3*Representação dos dados enunciados (RA) (Sara e Eva)*

Foi através desta representação que se tornou possível evidenciar que estavam a *interpretar* o enunciado e a mobilizar os *Pré-requisitos* (PR) necessários à resolução da tarefa. Assinalaram corretamente as amplitudes dos ângulos dos triângulos, identificando o significado da expressão “retângulo em B e E”, o que revela uma *Interpretação* (I) correta e a mobilização de *Pré-requisitos* (PR). Eva e Sara compreenderam que se pretendia justificar a igualdade estabelecida pela identidade do seno. Tal ação evidenciou a mobilização de conhecimentos prévios, entendidos como *Pré-requisitos* (PR) essenciais à interpretação adequada da tarefa. As subcategorias *Interpretação* (I) e *Pré-requisitos* (PR) evidenciaram uma relação estreita, que marcou o desenvolvimento da ação R e o início do processo de construção. Verificou-se que, por um lado, sem a presença de *Pré-requisitos* (PR), a *interpretação* da tarefa teria sido comprometida; por outro, o mero domínio desses conhecimentos, sem a capacidade de os relacionar com o desafio proposto, seria insuficiente.

Depois de dialogarem entre si sobre aspetos da construção esboçada, as alunas passaram, por incentivo da professora, à construção do mesmo no GeoGebra.

Professora: Vejo, pelo vosso esboço, que optaram por não utilizar o GeoGebra. Sabem que podem utilizar?

Sara: Sim, mas é-nos mais fácil pensar através do nosso esboço... e também estamos a usar os nossos apontamentos para tirar ideias. Mas depois já vamos usar...

Eva: Também não estamos muito habituadas ao GeoGebra, mas a minha professora do secundário utilizava na aula e parecia intuitivo.

Professora: Então vamos lá experimentar...interessa que vejam o vosso triângulo em movimento.



Após este momento de interação, a professora registou o desempenho de Eva e Sara:

As alunas reproduziram a sua construção no GeoGebra e, apesar de terem pouca experiência na utilização do software, rapidamente se aperceberam como usar as ferramentas disponíveis (RP).

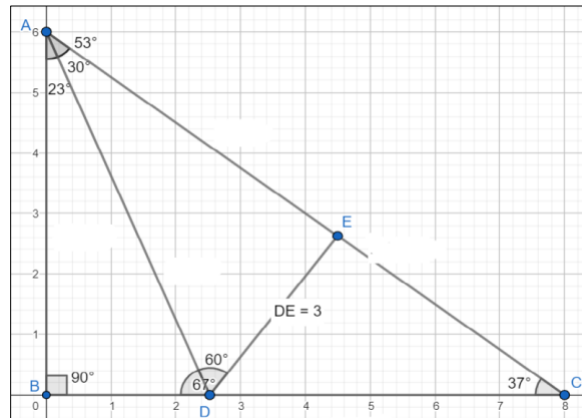
5.2. Modelação no GeoGebra: contributos para a ação Building-with

O processo de construção dos triângulos no GeoGebra foi caracterizado por tentativas e tomadas de decisão, para garantir que os triângulos [ABC] e [AED] fossem retângulos. Inicialmente, as alunas centraram-se na construção do triângulo [ABC], retângulo em B, decidindo, após algumas tentativas frustradas, utilizar o referencial cartesiano para conseguirem manter a perpendicularidade dos catetos [AB] e [BC]. Para tal, optaram por posicionar o ponto A no semieixo positivo das ordenadas, o ponto B na origem do referencial e o ponto C no semieixo positivo das abcissas (ver Figura 4). A professora registou o seguinte:

As alunas procuraram construir o triângulo retângulo sem o apoio do referencial, através da função polígono com 3 lados, mas tal não lhes garantia o ângulo reto em B. Experimentaram ainda traçar uma reta perpendicular a [AB], mas desistiram, optando por fazer uso do referencial cartesiano (RP).

Figura 4

Representação dos triângulos [ABC] e [ADE] (Sara e Eva)



Esta nova construção do triângulo [ABC] foi concretizada através da mobilização de ferramentas do GeoGebra, refletindo, simultaneamente, a *Interpretação (I)* do enunciado que orientara a representação inicial em papel. No entanto, neste novo ambiente, as alunas não se limitaram à simples reprodução do triângulo nem à representação dos dados

fornecidos; foi também necessário compreender como *modelar* (M) o triângulo através do GeoGebra, respeitando as condições estabelecidas no enunciado. Para isso, manipularam os objetos no ecrã, construindo uma representação visual que lhes permitiu pensar matematicamente (Mason, 1991; Lopes, 2011). Esse processo incluiu a verificação de condições geométricas, como a soma das amplitudes dos ângulos internos do triângulo, através da medição de cada um dos ângulos internos (ver figura 4).

Este momento evidencia que a *Interpretação* (I) do enunciado, a experiência adquirida com a construção em papel e a mobilização de conhecimentos prévios (PR) – nomeadamente a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo – foram fundamentais para que as alunas pudessem *modelar* (M) corretamente o triângulo e dar início ao processo de construção no ambiente digital. O processo de abstração resultou da articulação entre a leitura do enunciado (I), a mobilização de conhecimentos previamente adquiridos (PR) e alguma intuição geométrica (Freudenthal, 1973) que orientou as primeiras decisões das alunas.

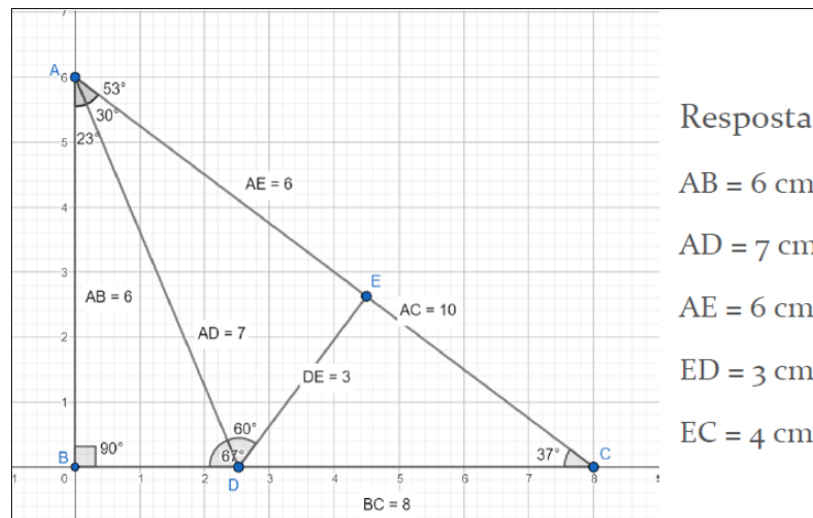
Eva e Sara avançaram para a construção do triângulo [ADE], retângulo em E. Após várias tentativas sem sucesso, recorreram à funcionalidade “reta perpendicular”, do GeoGebra, através da qual obtiveram dois pontos de interseção, respetivamente com os lados [AC] e [BC] (ver figura 4).

Tal como na construção do triângulo [ABC], este processo envolveu a mobilização de conhecimentos matemáticos prévios (PR), que orientaram a seleção de funcionalidades digitais adequadas (M). As alunas realizaram ainda algumas “medições” dos ângulos envolvidos, verificando se o triângulo construído respeitava a condição de ser retângulo, assegurando assim a coerência com os dados do enunciado.

A manipulação do triângulo (M) permitiu-lhes confirmar que este satisfazia as condições estabelecidas no enunciado. Estes resultados, embora ainda distantes da construção pretendida, permitiram dar continuidade ao processo de construção, através da mobilização de conhecimentos e da obtenção de *soluções intermédias* (amplitudes), o que revela a presença da ação epistémica *Building-with* (ver Figura 4).

Na etapa seguinte, as alunas visualizaram novamente o triângulo, agora como um todo, e determinaram, com o auxílio do GeoGebra, o comprimento dos segmentos de reta (B), começando pelo segmento [DE] (ver Figura 5).



Figura 5*Os resultados do triângulo [ABC] (Sara e Eva)*

Este momento levou-nos a supor que, para as alunas, a prova visual das igualdades trigonométricas estaria relacionada com a concretização dos valores visualizados no triângulo construído. Surgiu, então, a dúvida: estariam as alunas a desenvolver a sua compreensão do problema ou a confundir a verificação de casos particulares com a prova da igualdade trigonométrica?

Professora: Então, o que têm em mente? Vejo que o vosso triângulo já tem muita informação... amplitudes... medidas. Qual é a vossa ideia?

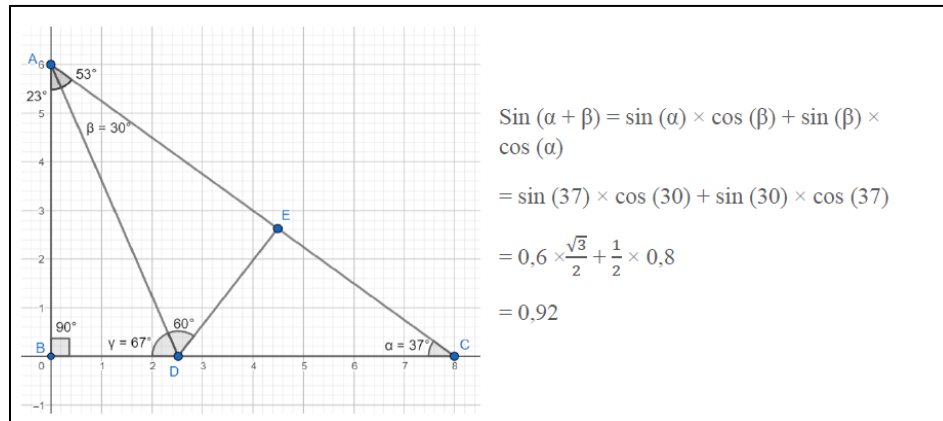
Sara: Estamos a confirmar se estes valores estão corretos.

Eva: Já fizemos para o seno e confirma-se.

Do diálogo estabelecido infere-se que as alunas estavam, na verdade, a verificar a igualdade pretendida através dos casos particulares que obtinham a partir da modelação do triângulo (ver Figura 6).



Verificação da igualdade para os ângulos selecionados (Sara e Eva)



conceitos envolvidos e maior resiliência para alcançarem a prova pretendida. Salienta-se que, embora as alunas não tenham expressado o valor de $\sin(\alpha + \beta)$, essa verificação foi realizada e observada na sala de aula.

À medida que encontravam valores diferentes para os ângulos alfa e beta, as alunas verificavam com a calculadora se as igualdades da soma do seno se verificavam. Sugeriu que utilizassem as ferramentas do GeoGebra para não terem tanto trabalho, mas optaram por continuar o mesmo procedimento, por considerarem que esse seria mais simples (RP).

Nesta fase, o trabalho desenvolvido pelas alunas evidencia as potencialidades do GeoGebra, por conferir dinamismo, visualização e possibilidades de argumentação ao processo de construção (Lopes, 2011), facilitando a compreensão dos elementos trigonométricos envolvidos (da Silva Santiago & Santana, 2024; Valori et al., 2024).

5.3. Recuos e avanços no processo de construção

Após a verificação da igualdade do seno da soma para ângulos com diferentes amplitudes, o diálogo com a professora prosseguiu, desta vez centrado no significado que as alunas estavam a atribuíam à prova matemática.

Professora: Compreendo o vosso esforço para verificar a igualdade, mas será que ela se verifica para quaisquer amplitudes?

Eva: Verificámos vários casos e obtivemos sempre valores aproximados...

Sara: ... mas não podemos ter certezas, pois não?

Professora: É verdade. Vão ter que pensar nas relações que estudaram quando trabalhámos a trigonometria... talvez aí encontrem um caminho.

A utilização do GeoGebra passou, a partir deste ponto, a assumir um papel de suporte às construções retomadas no papel, com base no triângulo [ABC] esboçado (figura 3). Contudo, nesta nova fase, aparentemente de recuo no processo de construção, as alunas focaram-se exclusivamente no triângulo [ADE], que representaram numa figura à parte (figura 7). A partir desta, Eva e Sara foram capazes de estabelecer relações entre ângulos e lados – *Relações trigonométricas (RT)* –, aplicando conhecimentos previamente adquiridos (PR) no âmbito do estudo da trigonometria, o que lhes permitiu alcançar *Soluções intermédias (SI)*, agora formuladas de forma generalizada.

Eva: Como é muita informação, podemos trabalhar só com o triângulo AED.



Sara: Concordo. [desenhou o triângulo AED, identificando a perpendicularidade em E e a medida do comprimento de [AD]]. Podemos usar o SOHCAHTOA [menomónica: seno=cateto oposto/hipotenusa; cosseno=cateto adjacente/hipotenusa; tangente=cateto oposto/cateto adjacente].

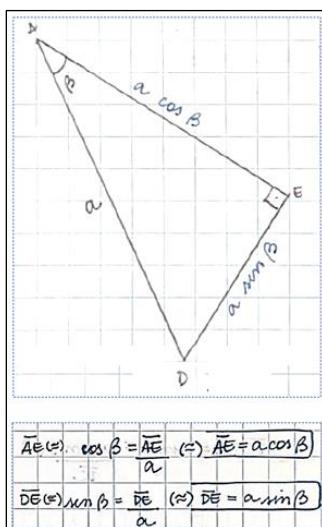
Eva: Usa o cosseno para encontrares AE. [A Sara aplicava as relações trigonométricas para obter os comprimentos de [AE] e [DE], sob observação e aprovação da Eva].

Sara: Temos já valores para todos os ângulos.

Foi com base no trabalho desenvolvido sobre o triângulo [ADE] que iniciaram a exploração de relações que sustentaram a continuidade da construção e que favoreceram o aparecimento de expressões generalizadas (SI) para os comprimentos dos lados [AE] e [DE], associados, respetivamente, a $\cos\beta$ e a $\sin\beta$ (ver Figura 7), o que evidencia um avanço no processo de construção.

Figura 7

Decomposição e generalização para [ADE] (Sara e Eva)



Neste processo de generalização, a ação epistémica *Building-with* (B) foi-se desenvolvendo progressivamente através da identificação de relações entre ângulos e lados (RT) e da obtenção de alguns resultados (SI) que, apesar de distantes da prova visual pretendida, permitiram a continuidade do processo de construção. Destaca-se ainda o facto de as alunas terem adotado, de forma intuitiva, a estratégia de construir o triângulo [ADE] separadamente do triângulo [ABC]. Essa abordagem parece ter favorecido a continuidade

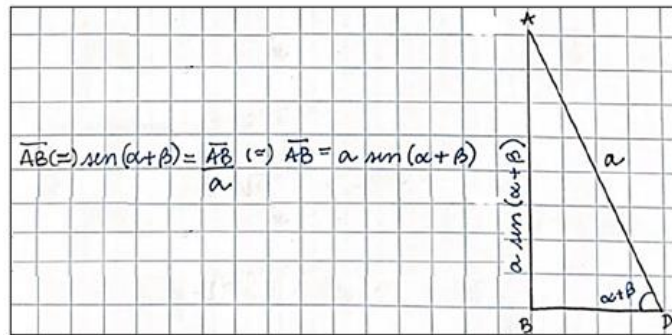
do processo de construção, evidenciando uma interligação entre as subcategorias de análise ER e SI, o que contribuiu para o avanço na resolução da tarefa. Por sua vez, este desenvolvimento também se revelou indissociável da mobilização de *Pré-requisitos* (PR), que integram a ação epistémica *Recognizing* (R).

5.4. Construindo pontes: implicações para a prova visual

Após a análise do triângulo [ADE] e a determinação das expressões generalizadas para os comprimentos dos lados [AE] e [DE], as alunas avançaram para a exploração do triângulo [ABD] contruido com o GeoGebra, reproduzindo-o no papel. Com base no conhecimento prévio de que [ABD] (ver Figura 8) era um triângulo retângulo em B e que o lado [AD] possuía comprimento a , tentaram estabelecer uma relação entre os ângulos envolvidos. No entanto, não conseguiram identificar, neste momento, uma correspondência clara entre α e β , o que as conduziu a um impasse.

Figura 8

Decomposição e generalização em [ABE] (Sara e Eva)



Professora: Vejo que estão com dificuldades! Não conseguem estabelecer uma relação desses ângulos com as amplitude α e β ?

Sara: Não sabemos como começar...

Professora: Porque não utilizam a vossa representação no GeoGebra?

[...] retomaram a exploração do triângulo no GeoGebra, analisaram a variação das amplitudes para os vários triângulos modelados e descobriram, a partir desses casos, que o ângulo $\angle ADB = \alpha + \beta$. A partir dessa conclusão, voltaram ao triângulo que esboçaram nos seus apontamentos (papel) (RP).

O processo de construção, agora centrado no triângulo [ABD] (ver Figura 8), favoreceu a identificação de *Relações trigonométricas* (RT), a partir da *Modelação* (M) do triângulo [ABC]

no GeoGebra. Esta exploração permitiu às alunas conjecturar a igualdade $\sphericalangle ADB = \alpha + \beta$, um resultado essencial para o desenvolvimento da construção. Com base nesta conclusão, o processo de abstração foi retomado no triângulo representado em papel, a partir do qual as alunas estabeleceram novas *Relações trigonométricas* (RT), que lhes permitiram deduzir que $\overline{AB} = a \sin(\alpha + \beta)$ (ver figura 8), ou seja, uma nova *solução intermédia* (SI), como se pode constatar no diálogo seguinte:

Eva: Neste podes usar o seno de alfa mais beta [referiu enquanto Sara desenhava o triângulo [ABD].

Sara: o seno é o cateto oposto sobre a hipotenusa e aí conseguimos obter mais este lado [referiu enquanto escrevia as relações com o olhar atento de Eva].

Eva: Faz agora para o cosseno...cateto adjacente sobre hipotenusa.

Sara: Sim, assim também ficamos com o comprimento de BD [referiu enquanto estabelecia a relação trigonométrica].

Nesta fase de construção, a *Modelação* (M) no GeoGebra revelou-se essencial para a identificação e formulação de *Relações trigonométricas* (RT), que, por sua vez, permitiram alcançar *Soluções intermédias* (SI) relevantes. A emergência destas subcategorias de análise contribuiu para a manifestação da ação epistémica *Building-with* (B) e para o avanço do processo de construção. O uso do ambiente tecnológico e da exploração visual foi essencial para gerar conjecturas (Lopes, 2011; da Silva Santiago & Santana, 2024) e avançar na construção, permitindo percursos que, de outro modo, poderiam ter sido ignorados.

Nesta fase de construção, as alunas compreenderam que para escrever $\overline{AB}$ (ver Figura 8) podiam repetir, generalizando, o mesmo procedimento utilizado no cálculo de $\overline{AE}$ e $\overline{DE}$ (ver Figura 7), o que conferiu maior confiança e dinamismo ao processo de construção. Interpreta-se este reconhecimento como expressão da subcategoria de análise *Regularidades* (Rg), na medida em que as alunas identificaram uma situação semelhante e mobilizaram um procedimento de resolução que compreenderam ser eficaz (Lopes, 2011). Observou-se, assim, uma articulação entre esta subcategoria Rg e a subcategoria *Aplicação de Construções* (AC), associada à ação epistémica *Building-with* (B). Esta articulação entre as ações epistémicas R e B revelou-se determinante nesta fase do processo de construção, permitindo a obtenção de novas *Soluções intermédias* (SI). As alunas deram continuidade à metodologia adotada, prosseguindo para a análise e obtenção das medidas dos comprimentos em falta.



Sara: Podemos utilizar neste triângulo a mesma ideia [referia-se ao triângulo CDE que acabara de desenhar no papel].

Eva: Já temos DE... a vezes seno de beta...podes escrever. Podemos calcular este lado [apontou para EC]... temos o oposto...

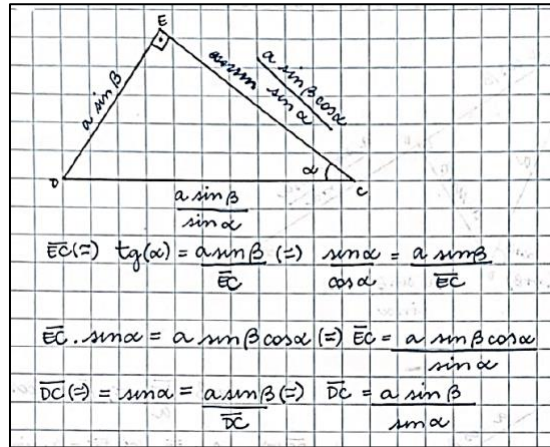
Sara: usamos a tangente [começou a escrever]...

Eva: repara que a fórmula não tem a tangente... é melhor substitires por seno a dividir pelo cosseno... [Sara concordou e foi seguindo as orientações, chegando à igualdade presente na figura 9]

Sara: falta-nos este lado e penso que podemos usar o seno...

Figura 9

Decomposição e generalização em [CDE] (Sara e Eva)



A identificação de *Regularidades (Rg)* (Lopes, 2011), aliada à *Aplicação de Construções (AC)*, possibilitou às alunas estabelecer uma melhor articulação entre o raciocínio lógico e matemático na resolução da tarefa (Azevedo e Alves, 2019) e, consequentemente, estabelecer novas *Relações trigonométricas (RT)* e *alcançar Soluções intermédias (SI)*, como a determinação dos comprimentos dos lados [DE], [CE] e [CD] (ver Figura 9). Este processo evidenciou a articulação entre diferentes subcategorias de análise, contribuindo para o progresso contínuo da construção.

O desenvolvimento gradual do processo de abstração permitiu generalizar e formular novas *Soluções intermédias (SI)* progressivamente mais complexas e estruturadas, aproximando as alunas do objetivo final da tarefa. Esta evolução revela uma crescente articulação entre as ações epistémicas *Recognizing (R)* e *Building-with (B)*, favorecendo a continuidade da construção.

Concluídas as diversas etapas de resolução, as alunas entraram numa nova fase do processo de construção, tal como se pode verificar no seguinte diálogo:

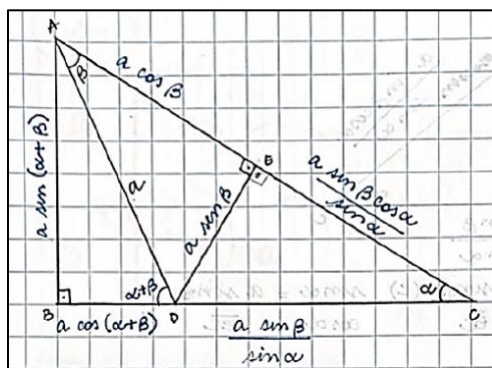
Sara: Não estou certa de como podemos utilizar estes cálculos para obter o seno da soma...

Eva: Já temos informação para completar o triângulo [ABC]... podemos...

Sara: Se construirmos o triângulo, talvez consigamos estabelecer uma nova relação?! [a aluna começou a desenhar no papel o triângulo [ABC] e a representar os resultados obtidos anteriormente] (ver Figura 10).

Figura 10

(Re)organização de resultados (Sara e Eva)



A visualização, que até então havia sido utilizada como suporte para a interpretação, compreensão e identificação de relações em triângulos analisados individualmente (Lopes, 2011; da Silva Santiago e Santana, 2024; Valori et al., 2024), passou a ser mobilizada com o propósito de estabelecer relações entre os valores de $\sin(\alpha + \beta)$, $\sin(\alpha)$, $\sin(\beta)$, $\cos(\alpha)$ e $\cos(\beta)$, tal como evidenciado no diálogo estabelecido entre as alunas:

Sara: Queremos mostrar que o $\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha) \cos(\beta) + \cos(\alpha) \sin(\beta)$ [refiriu enquanto representava essa igualdade na folha de resolução].

Eva: Se reparares, temos $\sin(\alpha + \beta)$...é o cateto oposto de α ...

Sara: Podemos utilizar o $\sin(\alpha)$... vai ser o cateto oposto AB sobre a hipotenusa AC...[referiu enquanto representava a informação] (ver Figura 11).



Figura 11*Construção da 1ª igualdade trigonométrica (Sara e Eva)*

$\sin \alpha =$	$\frac{a \sin (\alpha + \beta)}{a \sin \alpha \cos \beta + a \sin \beta \cos \alpha}$
	$\sin \alpha$

Contudo, surgiram dúvidas quanto à forma como poderiam simplificar a igualdade (ver Figura 12) que representava uma relação trigonométrica corretamente identificada, o que gerou um impasse e exigiu a intervenção da professora.

Sara: Professora, pode ver se escrevemos certo o valor do seno de alfa? Estamos a usar o triângulo [ABC].

Professora: Sim, está correta. Mas a simplificação da expressão não me parece certa.

[a professora rodeia o erro cometido, que envolvia uma fração do tipo $\frac{a}{\frac{b}{c}}$]

Professora: Vejam este exemplo $\frac{2}{\frac{3}{4}}$. Como simplificam?

[...] Depois de discutirem o exemplo com a professora, as alunas perceberam o erro cometido na própria expressão, corrigiram e continuaram a resolução, chegando a uma simplificação correta (RP).

Figura 12*Simplificação da 1ª igualdade trigonométrica (Sara e Eva)*

$\sin \alpha =$	$\frac{a \sin (\alpha + \beta) \sin \alpha}{a \sin \alpha \cos \beta + a \sin \beta \cos \alpha}$

Com esta igualdade, as alunas obtiveram uma nova *solução intermédia* (SI) que as aproximou ainda mais da construção pretendida. Ao longo deste processo, foram reconhecendo *relações* (RT), tanto por meio da modelação no GeoGebra como através de representações no papel. Mobilizaram *conhecimentos* (PR), esclareceram dúvidas, corrigiram erros e encontraram várias soluções (SI), que foram justificando (J) ao longo do processo de construção e que estão representadas nas várias figuras e diálogos apresentados ao longo deste texto. Foram ainda combinando as várias soluções intermédias que permitiram que se aproximassem progressivamente da construção final. Ao longo deste processo, a *Interpretação* (I), a mobilização de conhecimentos anteriores (PR), com destaque para as *Relações trigonométricas* (RT), bem como a identificação de



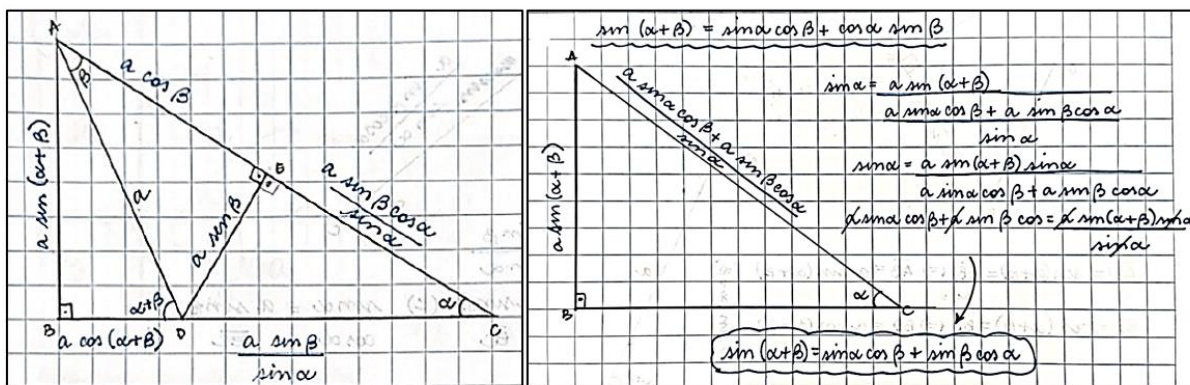
Regularidades (Rg) resultantes da *Modelação* (M) dos triângulos e de *Soluções intermédias* (SI) obtidas, favoreceram a adoção de *estratégias de resolução* (ER) e o surgimento de novas soluções intermédias (AC) que se mostraram eficazes na construção da *prova visual*. Estas relações entre subcategorias de análise mostram, à semelhança de estudos anteriores (Pimenta e Saraiva, 2019), a importância da associação recíproca estabelecida entre as ações R e B para o desenvolvimento da nova construção (C). Realça-se, em particular, a inter-relação entre as subcategorias *Modelação* (M) e *Soluções intermédias* (SI) da categoria B, uma vez que a *Modelação* (M) dos triângulos no GeoGebra conduziu as alunas até *Soluções intermédias* (SI) e estas desencadearam novos momentos de exploração dos triângulos (M). Por sua vez, a aplicação de *Estratégias* (ER), a *identificação de Regularidades* (Rg) e a *Aplicação de Construções* (AC) concebidas durante este processo não só contribuíram para o seu desenvolvimento, como também lhe conferiram maior dinamismo, evitando que fosse comprometido.

5.5. Prova visual: construção do novo conhecimento matemático

Ultrapassadas as dificuldades iniciais, as alunas retomaram a construção, optando por desenhar um novo triângulo no papel que incorporava apenas a informação considerada essencial – as *Soluções intermédias* (SI) alcançadas nas etapas anteriores (ver Figura 13).

Figura 13

Construção da identidade do seno da soma de dois ângulos (Sara e Eva)



Nesta nova etapa, as alunas procuraram combinar, de forma coerente e estruturada, as diversas soluções intermédias previamente obtidas, através da modelação dos triângulos construídos no GeoGebra e em papel. Essas soluções resultaram da aplicação fundamentada de conceitos e procedimentos matemáticos, aliados a uma componente de intuição matemática, que as levou a adotar *estratégias de resolução* (ER) eficazes. Tais

estratégias permitiram generalizar, para além das amplitudes dos ângulos já trabalhadas, os comprimentos dos lados dos triângulos, com base em raciocínios lógicos e no uso adequado da simbologia matemática.

Os procedimentos adotados evidenciam a fiabilidade da construção, na medida em que os resultados obtidos se revelaram consistentes em diferentes momentos da resolução. Esta construção revela ainda consistência, por estar em consonância com os conhecimentos adquiridos previamente pelas alunas e com os princípios matemáticos subjacentes. A repetibilidade do processo foi observável em algumas etapas da construção, associadas à obtenção de *Soluções intermédias* (SI), uma vez que a identificação de regularidades permitiu reutilizar procedimentos utilizados em construções anteriores, que por sua vez conduziram a novas *Soluções intermédias* (SI), alimentando o progresso contínuo da construção. Algumas das relações trigonométricas que exemplificam estes critérios de fiabilidade, consistência e repetibilidade e que contribuíram para a construção da prova visual são, entre outras: $\overline{DE} = a \sin \beta$; $\overline{AE} = a \cos(\beta)$ e $\overline{DC} = \frac{a \sin \beta}{\sin \alpha}$.

A construção resulta da capacidade das alunas para *reorganizar verticalmente* as diferentes *soluções intermédias* — como quem compõe um puzzle, juntando partes para formar um todo coerente, tal como se pode constatar através do seguinte diálogo:

Eva: Troca o seno para denominadores, vai dar para simplificar [apontou para a expressão escrita pela Sara] ... agora já podes “cortar” o seno... [a Sara executou a indicação da Eva e ficaram em silêncio a refletir sobre a igualdade representada].

Sara: Ainda temos o a, não sei se podemos simplificar...

Eva: Sim [interrompendo], podemos sim, também podes “cortar” e já fica a solução...só está ao contrário, mas está bem.

[A Sara concluiu o processo, reescrevendo e destacando a igualdade pretendida (RP)].

O diálogo estabelecido pelas alunas permite compreender como elas reorganizaram as diferentes soluções intermédias para obter a prova visual (figura 13).

6. Conclusões

Nesta investigação optou-se por recorrer ao modelo RBC+C para compreender como se desenvolve o processo de abstração na construção de uma prova visual em trigonometria. Analisou-se o desenvolvimento das diferentes ações epistémicas, com o auxílio das subcategorias construídas para esta investigação, as relações existentes entre elas, os seus



contributos para a nova construção e as implicações que tiveram para a prova visual. Após descrever o processo que conduziu à demonstração da prova visual (figura 13), concluímos, fazendo referências aos aspetos centrais desta construção.

6.1. *Recognizing* como ponto de partida do processo de abstração

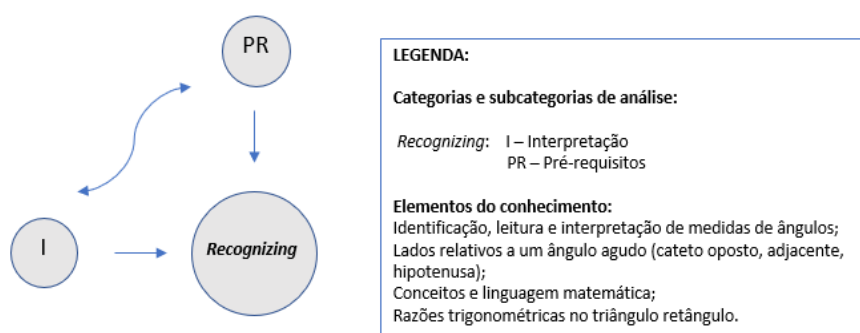
A análise desenvolvida na secção anterior revela que *Recognizing* (R) emergiu da forma como as alunas *interpretaram* (I) o enunciado da tarefa – conceitos e linguagem matemática –, bem como da necessidade de mobilizar conhecimentos prévios (PR) para iniciar a construção do desafio, tais como as razões trigonométricas

$$\sin \theta = \frac{\text{cateto oposto ao ângulo } \theta}{\text{hipotenusa}}; \cos \theta = \frac{\text{cateto adjacente ao ângulo } \theta}{\text{hipotenusa}} \text{ e } \operatorname{tg} \theta = \frac{\text{cateto oposto ao ângulo } \theta}{\text{cateto adjacente ao ângulo } \theta}.$$

A manifestação destas subcategorias possibilitou o processo de construção, corroborando as conclusões de Pimenta e Saraiva (2019). As alunas confrontaram-se com uma situação nova e procuraram identificar relações gerais a partir de aprendizagens anteriores, construindo com base nelas formas abstratas de pensamento, tal como referido por Davydov (1990). Assim, *Recognizing* (R) atuou como o motor inicial do processo de abstração. A articulação entre estas subcategorias – *Interpretação* (I) e *Pré-requisitos* (PR) – encontra-se representada na Figura 14, evidenciando o seu papel estruturante no desencadear de *Recognizing* (R).

Figura 14

Início do processo de construção (Recognizing)



6.2. *Recognizing e Building-with*: inter-relações que dão fiabilidade, consistência e repetibilidade ao processo de abstração

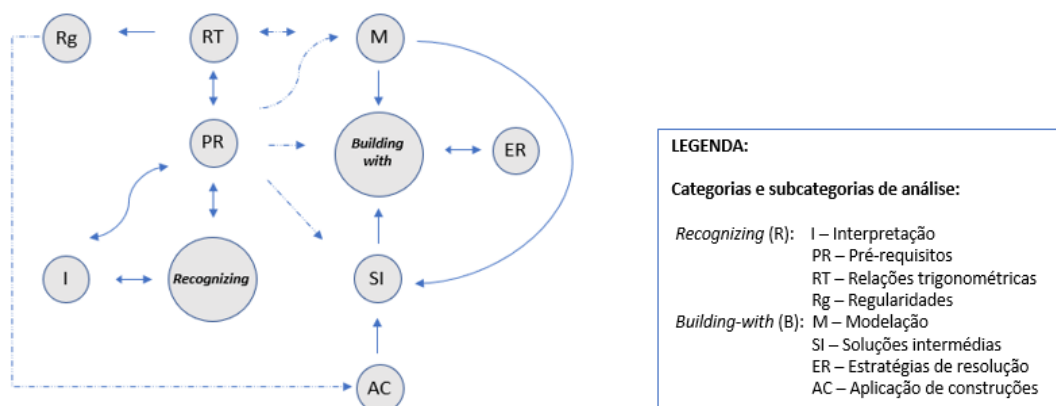
Verificou-se que a compreensão que as alunas estavam a construir a partir do enunciado da tarefa, correspondente ao desenvolvimento de *Recognizing* (R), permitiu-lhes *modelar* (M) com o GeoGebra os triângulos, o que, por sua vez, conduziu à identificação de relações trigonométricas. Constatou-se, assim, que as subcategorias de análise *Interpretação* (I), *Relações trigonométricas* (RT) e *Pré-requisitos* (PR), pertencentes à categoria *Recognizing* (R), e a subcategoria *Modelação* (M) da categoria *Building-with* (B) combinaram-se e favoreceram, no início do processo de abstração, o desenvolvimento da construção.

Concordante com as conclusões de Pimenta e Saraiva (2019), a ação *Building-with* (B) volta a manifestar-se no início do processo de abstração, desafiando a ideia de uma sequência rígida e unilateral entre ações *Recognizing* (R) e *Building-with* (B). Porém, no processo em estudo, evidenciou-se como a relação entre as quatro subcategorias de análise referidas (I, RT, PR e M) foi decisiva para o aparecimento de *Soluções intermédias* (SI), promovendo o desenvolvimento da ação *Building-with* (B) e, conseqüentemente, a progressão do processo de construção.

A Figura 15 ilustra estas relações: as setas tracejadas representam ligações entre subcategorias de ações epistémicas distintas, enquanto as setas contínuas indicam ligações internas, ou seja, entre subcategorias pertencentes à mesma ação epistémica.

Figura 15

Desenvolvimento do processo de construção (R e B)



A observação de *Regularidades* (Rg) – subcategoria da categoria de análise *Recognizing* (R) – surgiu no desenvolvimento da ação epistémica *Building-with* (B). No entanto, no presente

estudo, essas incidiram sobretudo sobre dados e relações trigonométricas que possibilitaram a aplicação de procedimentos previamente utilizados, correspondentes à subcategoria *Aplicação de Construções* (AC) anteriormente concebidas, evidenciando uma *consolidação* (Co) de construções adquiridas durante o próprio processo de resolução. Essas construções originaram a primeira igualdade que aproximou as alunas da prova visual: $\sin \alpha = \frac{a \sin (\alpha + \beta)}{a \sin \alpha \cos \beta + a \sin \beta \cos \alpha} \cdot \sin \alpha$.

A aplicação destas construções não só conferiu maior dinamismo e envolvimento na tarefa, como também favoreceu o surgimento de novas *Soluções intermédias* (SI), promovendo o desenvolvimento da ação *B* e aproximando as alunas do processo de construção pretendido. Paralelamente, contribuiu para que essas soluções adquirissem *fiabilidade*, *consistência* e até um certo grau de *repetibilidade* (Borwein & Jörgenson, 1997), refletindo a solidez do raciocínio subjacente à prova visual em construção.

Verificou-se que a adoção de *estratégias de resolução* (ER), orientadas por uma certa intuição matemática, emergente da relação estabelecida entre as subcategorias *Modelação* (M) e as *Relações trigonométricas* (RT) observadas nos triângulos analisados, permitiu às alunas simplificar a complexidade do problema, reduzindo o número de dados em análise e focando-se nos elementos mais relevantes. Esta abordagem facilitou a conceção de *Soluções intermédias* (SI) e permitiu ultrapassar a dificuldade associada à realização de uma prova trigonométrica com recurso a procedimentos e linguagem matemática rigorosa. Assim, a subcategoria de análise *estratégias de resolução* (ER) foi relevante para o desenvolvimento da ação epistémica *Building-with* (B), ao promover avanços significativos na construção da solução e no próprio processo de abstração.

Realçamos também que a utilização do GeoGebra contribuiu para desenvolver a compreensão do desafio e para ajudar as alunas a identificar as relações estabelecidas entre ângulos e lados, tornando a verificação da igualdade acessível. A visualização e exploração dos triângulos construídos serviu de base à intuição, ao desenvolvimento do raciocínio, à tomada de decisões e à construção de soluções intermédias que, reorganizadas, conduziram as alunas até à construção. Constituiu um elemento mediador do raciocínio que, aliado à mediação entre as alunas e delas com a professora, fortaleceu a confiança e a resiliência, características que também são essenciais à aprendizagem da matemática.

Para além de favorecer a compreensão das relações trigonométricas, o GeoGebra revelou-se um mediador do processo de abstração, permitindo às alunas alternar entre a exploração dinâmica e a formulação de conjecturas no ambiente digital e a reorganização,



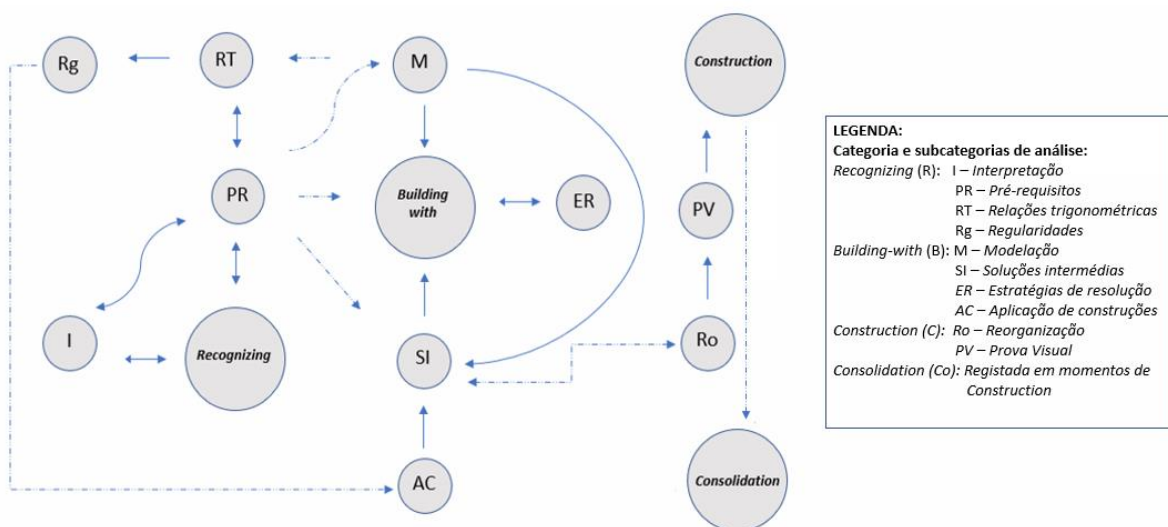
sistematização e generalização das relações trigonométricas no papel. Esta articulação potenciou a visualização, a modelação e a reorganização progressiva do conhecimento matemático (Mason, 1991; Lopes, 2011; da Silva Santiago & Santana, 2024; Valori et al., 2024), contribuindo igualmente para que a insegurança inicial das alunas na utilização do GeoGebra fosse progressivamente ultrapassada.

6.3. *Recognizing e Building-with* no desenvolvimento de *Construction*: uma prova visual fundamentada em pressupostos matemáticos

Constatada a importância da relação estabelecida entre as ações epistémicas *Recognizing* (R) e *Building-with* (B) para o desenvolvimento do processo de construção, importa agora compreender de que forma essa ligação conduziu as alunas à elaboração da prova visual pretendida (Figura 16).

Figura 16

Construção da prova visual trigonométrica (C)



Como evidenciado ao longo da análise (Secção 5), a articulação entre as ações *Recognizing* e *Building-with* revelou-se determinante para a obtenção de *Soluções intermédias* (SI). Apesar da sua validade matemática e relevância individual, essas soluções, por si só, não permitiam alcançar a prova pretendida. Foi quando as alunas iniciaram o processo de articulação dessas soluções parciais que o processo de abstração se aprofundou e a construção começou a ganhar consistência, aproximando-se da identidade trigonométrica do seno da soma de dois ângulos (prova visual pretendida).

Neste momento emergiram dificuldades, sobretudo na aplicação de procedimentos algébricos, e não na compreensão dos conteúdos trigonométricos envolvidos. A intervenção da professora foi, por isso, importante para facilitar a superação deste impasse e assegurar que o processo de construção não fosse comprometido.

Ultrapassada essa fase, a *Reorganização* (Ro) vertical das soluções decorreu de forma coerente, apoiada em raciocínios matemáticos corretos e no uso adequado da linguagem simbólica, culminando na construção da identidade trigonométrica do seno da soma de dois ângulos, expressa através da subcategoria de análise *Prova Visual* (PV). Assim, tornou-se evidente a ligação entre as subcategorias de análise *Recognizing* (R) e *Building-with* (B), cuja integração foi essencial à construção das *Soluções intermédias* (SI), que, por sua vez, *reorganizadas* (Ro), impulsionaram a manifestação da ação *Construction* (C) e, com ela, a conclusão da prova visual.

É importante sublinhar que o percurso observado não seguiu uma sequência linear e compartimentada entre as ações epistémicas R, B e C. Pelo contrário, os dados mostram que *Recognizing* (R) e *Building-with* (B) se desenvolveram de forma interdependente e articulada, evoluindo em conjunto ao longo do processo de resolução. Apenas numa fase posterior se verificou a transição para a ação *Construction* (C), na qual se formalizou a reorganização dessas soluções e a construção final. Esta etapa evidencia, por um lado a *Consolidation* (Co) de *construções intermédias* (SI) observadas ao longo do processo de resolução da tarefa e, por outro, a importância da capacidade das alunas para combinar e reorganizar eficazmente as soluções parciais, valorizando-as tanto na sua individualidade como na sua integração. A ausência desse processo comprometeria, eventualmente, a consistência e a coerência da construção final. A mediação da professora revelou-se igualmente importante, pois permitiu o progresso das alunas e promoveu o desenvolvimento do novo conhecimento matemático. Este aspeto merece destaque no âmbito da prática docente, evidenciando como intervenções oportunas e significativas podem favorecer a construção do conhecimento matemático por parte dos alunos.

A prova visual construída pelas alunas não resultou da simples observação da figura nem da verificação de casos particulares. Emergiu da reorganização progressiva de soluções intermédias, construída através da articulação entre a exploração visual, a modelação no GeoGebra e a formalização das relações trigonométricas no papel. Neste processo, a visualização assumiu um papel relevante na construção do conhecimento, favorecendo a formulação de conjecturas, a identificação de regularidades e a fundamentação matemática da identidade trigonométrica em estudo, em consonância com Hanna (2000), Borwein e Jörgenson (1997) e Yang (2012).



Verificou-se que a prova realizada pelas alunas é fiável – conduz aos mesmos resultados quando realizada repetidamente, inclusive por pessoas diferentes –, é consistente – por respeitar as regras da geometria euclidiana e da trigonometria – e apresenta repetibilidade, produzindo resultados consistentes quando repetida em condições idênticas, satisfazendo, assim, as três condições necessárias propostas por Borwein e Jörgenson (1997). Por sua vez, como a prova assenta em dois ângulos α e β genéricos, identificando-se com a prova apresentada por Nelsen (1993), consideramos que a construção apresentada pelas alunas (Figura 13) é, de facto, uma prova visual da fórmula pretendida.

Conclui-se, assim, que o processo de construção da prova visual da identidade do seno da soma de dois ângulos se caracterizou por ser dinâmico, interativo e não linear, exigindo múltiplas interações entre subcategorias das ações *Recognizing* (R) e *Building-with* (B). A articulação eficaz destas subcategorias tornou possível a reorganização estruturada de soluções anteriormente obtidas, evidenciando também a ação *Consolidation* (Co), de acordo com Pimenta e Saraiva (2019), permitindo, por fim, a emergência da nova construção matemática, expressa através da ação epistémica *Construction* (C).

Para além da identificação das ações epistémicas do modelo RBC+C, este estudo evidencia que a construção de uma prova visual do seno da soma de dois ângulos resulta da articulação entre visualização, modelação, argumentação e reorganização matemática, reforçando o papel mediador do GeoGebra e da professora na construção do conhecimento. Porém, embora a análise aprofundada de um par de alunas tenha permitido compreender este processo, não possibilitou estudar o progresso matemático da turma como um todo. Futuras investigações procurarão articular o modelo RBC+C com o da Documentação da Atividade Coletiva (DCA), de modo a analisar os processos individuais de abstração e a dinâmica argumentativa da turma (Tabach et al., 2020).

Declaração de contribuição e autoria

Corália Pimenta: Conceptualização, Metodologia, Investigação, Análise formal, Redação – rascunho original, Redação – revisão e edição. Aplicação da tarefa de investigação.

Manuel Joaquim Saraiva: Conceptualização, Metodologia, Investigação, Análise formal, Redação – rascunho original, Redação – revisão e edição.

Agradecimentos

Os autores expressam o seu agradecimento às alunas que participaram no estudo, pela sua colaboração e participação.



Referencias

- Amado, N., Sanchez, J., & Pinto, J. (2015). A Utilização do Geogebra na demonstração matemática em sala de aula: o estudo da reta de Euler. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 29, 637-657. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v29n52a11>
- Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação: uma introdução à teoria e aos métodos*. Porto Editora.
- Borwein, P., & Jörgenson, L. (1997). *Visible structures in number theory*. CECM – Simon Fraser University. <http://www.cecm.sfu.ca/~loki/Papers/Numbers/node3.html>
- Davydov, V. V. (1990). *Types of generalization in instruction: logical and psychological problems in the structuring of school curricula. Soviet studies in mathematics education* (Vol. 2). National Council of Teachers of Mathematics.
- Davies, A., Veličković, P., Buesing, L., Blackwell, S., Zheng, D., Tomašev, N., Tanburn, R., Battaglia, P., Blundell, C., Juhász, A., Lackenby, M., Williamson, G., Hassabis, D., & Kohli, P. (2021). *Advancing mathematics by guiding human intuition with AI*. *Nature*, 600, 70–74. <https://doi.org/10.1038/s41586-021-04086-x>
- Dreyfus, T., Hershkowitz, R., & Schwarz, B. B. (2015). The nested epistemic actions model for abstraction in context: theory as methodological tool and methodological tool as theory. In A. Bikner-Ahsbahr, C. Knipping, & N. Presmeg (Eds.), *Approaches to qualitative research in mathematics education: examples of methodology and methods* (pp. 185–217). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-017-9181-6_8
- Dreyfus, T., & Kidron, Y. (2006). Interacting parallel constructions: A solitary learner and the bifurcation diagram. *Recherches en didactique des mathématiques*, 26(3), 295-336. <https://revue-rdm.com/2006/interacting-parallel-constructions/>
- Dreyfus, T. (1991). On the status of visual reasoning in mathematics and mathematics education. In F. Furinghetti (Ed.), *Proceedings of the Fifteenth Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 33–48). PME.
- Francis, G. (1996). *Mathematical visualization: standing at the crossroads*. CECM – Simon Fraser University. <http://www.cecm.sfu.ca/projects/PhilVisMath/vis96panel.html>
- Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task*. Reidel.
- Gonçalves, J. V. (1937). *Compêndio de álgebra e trigonometria: para os anos 4.º, 5.º e 6.º do curso dos liceus*. Livraria Cruz.



- Hanna, G. (2000). Proof and its classroom role: a survey. In M. I. Coelho & J. M. Matos (orgs.), *Ensino e aprendizagem da geometria* (pp.75-105). SEM & SPCE.
- Hadamard, J. (1945). *The psychology of invention in the mathematical field*. Princeton University Press.
- Hershkowitz, R., Schwarz, B. B., & Dreyfus, T. (2001). Abstraction in context: epistemic actions. *Journal for Research in Mathematics Education*, 32(2), 195–222. <https://doi.org/10.2307/749673>
- Kirsh, D., & Maglio, P. (1994). On distinguishing epistemic from pragmatic action. *Cognitive Science*, 18(4), 513-549. [https://doi.org/10.1016/0364-0213\(94\)90007-8](https://doi.org/10.1016/0364-0213(94)90007-8)
- Lopes, M. M. (2011). Contribuições do software GeoGebra no ensino e aprendizagem de trigonometria. In *Anais da XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática*. https://xiii.ciaem-redumate.org/index.php/xiii_ciaem/xiii_ciaem/paper/view/2577
- Lopes, M. M. (2013). Sequência didática para o ensino de trigonometria usando o software GeoGebra. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 27 (47), 631-644. <https://doi.org/10.1590/S0103-636X2013000400010>
- Mason, J. (1991). Mathematical problem solving: open, closed and exploratory in the UK. *ZDM*, 23(1), 14-19.
- Nelsen, R. (1993). *Proofs without words – exercises in visual thinking*. The Mathematical Association of America.
- Palais, R. S. (1999). The visualization of mathematics: toward a mathematical exploratorium. *Notices of the AMS*, 46(6), 647-658.
- Peters, M., Santos, C. E. R., Oliveira, E. G., Melo, A. M., & Pröscholdt, G. (2023). *GeoGebra e materiais manipuláveis facilitando a aprendizagem de trigonometria*. *Contribuciones a las Ciencias Sociales*, 16(9), 15681–15697. <https://doi.org/10.55905/revconv.16n.9-114>
- Pimenta, C. (2016). *A construção do conhecimento no desenvolvimento do pensamento algébrico* [Tese de doutoramento, Universidade da Beira Interior]. uBibliorum. <http://hdl.handle.net/10400.6/4196>
- Pimenta, C., & Saraiva, M. (2019). As ações epistémicas na construção do novo conhecimento matemático e no desenvolvimento do pensamento algébrico. *Quadrante*, 28(1), 27–53. <https://doi.org/10.48489/quadrante.22976>



- Pinheiro, L. de J., & Carneiro, F. O. R. (2023). Trigonometria no Ensino Médio: uma proposta de ensino por meio da História da Matemática. *Revista Baiana de Educação Matemática*, 4(01), e202308. <https://doi.org/10.47207/rbem.v4i01.16209>
- Saraiva, M. (1992). O computador na aprendizagem da Geometria: Uma experiência com alunos do 10.º ano de escolaridade. *Quadrante*, 1(1), 123–138. <https://doi.org/10.48489/quadrante.22615>
- da Silva Santiago, P. V., & Santana, J. R. (2024). Proposta para o ensino de Geometria: sólidos no GeoGebra. *Debates em Educação*, 16(38), e15862-e15862. <https://doi.org/10.28998/2175-6600.2024v16n38pe15862>
- Stylianides, G., Stylianides, A., & Moutsios-Rentzos, A. (2024). Proof and proving in school and mathematics education research: a systematic review. *ZDM – Mathematics Education*, 56, 47–59. <https://doi.org/10.1007/s11858-023-01518-y>
- Tabach, M., & Trgalová, J. (2020). Teaching mathematics in the digital era: standards and beyond. In Y. Ben-David Kolikant, D. Martinovic, & M. Milner-Bolotin (Eds.), *STEM teachers and teaching in the digital era* (pp. 245–264). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-29396-3_12
- Toomer, G. J. (Ed.). (1998). *Ptolemy's Almagest*. Princeton University Press.
- Valori, G., Albanese, V., Adamuz-Povedano, N., & Gómez-Torres, E. (2024). Effectiveness of paper folding and GeoGebra on students' geometric thinking and visualization. *International Journal of Education in Mathematics, Science, and Technology*, 12(5), 1395-1414. <https://doi.org/10.46328/ijemst.4477>
- Van Brummelen, G. (2009). *The mathematics of the heavens and the earth: the early history of trigonometry*. Princeton University Press.
- Yang, K. (2012). Structures of cognitive and metacognitive reading strategy use for reading comprehension of geometry proof. *Educational Studies in Mathematics*, 80(3), 307-326. <https://doi.org/10.1007/s10649-011-9350-1>
- Yin, R. K. (2003). *Case study research: design and methods* (3rd ed.). Sage Publications.

