EDITORIAL

Notas sobre la publicación
e inserción de posgraduados en
Matemática Educativa
Ricardo Cantoral

ARTÍCULOS

Pensamiento relacional en la escolarización
de la jerarquía de operaciones y
álgebra temprana en primaria
Uriel Escobar Durán, Felipe Tirado Segura

Analysis of the Critical Attitude
of University Social Sciences Students Toward
the Use of Computing Software
Celina Pestano, Concepción González, Mª. Candelaria Gil

Construcción de conocimiento sobre la enseñanza
de la matemática en estudiantes para profesores de
matemática a través de vídeos
Oscar Guerrero

Un experimento de enseñanza en formación continua
estructurado por el modelo MTSK
Miguel Montes, Mª. Isabel Pascual, Nuria Climent

INSTRUCCIONES TÉCNICAS PARA AUTORES

RELIME 24-1

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa

Vol. 24, Núm. 1, marzo 2021

ISSN 1665-2436

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa

RELIME

Vol. 24, Núm. 1, 2021

Clame Comité Latinoamericano de Matemática Educativa

Publicación oficial de investigación del Comité Latinoamericano de Matemática Educativa

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa

Directora Fundadora: ROSA MARÍA FARFÁN
Director Editorial: RICARDO CANTORAL
Editora Asociada: GISELA MONTIEL
Editoras: DANIELA REYES y WENDOLYNE RÍOS

Departamento de Matemática Educativa – Cinvestav
AP 14-740, México 07000, CDMX
M É X I C O

Coordinación técnica: Martha Maldonado Rosales
Revisión de estilo: Rosalba Carrillo Fuentes
Formación y diseño: Emilio Serna Hernández
Portada: «Opus 1» de Oscar Reutersvärd en 1934. Reproducida con permiso de los herederos del artista.

Publicación oficial de investigación del Comité Latinoamericano de Matemática Educativa, Clame A.C. Consejo Directivo: *Presidente:* Olga Lidia Pérez González – Cuba; *Secretario:* Hugo Parra Sandoval – Venezuela; *Tesorera:* Daniela Reyes Gasperini – Argentina; *Vocal Norteamérica:* Rebeca Flores García – México; *Vocal Caribe:* Juan Mazueta Concepción – República Dominicana; *Vocal Centroamérica:* Rodolfo Fallas Soto – Costa Rica*; Vocal Sudamérica:* Marcela Parraguez González – Chile.

Publicación cuatrimestral. Se publica en los meses de marzo, julio y noviembre. Vol. 24, Núm.1, marzo, 2021. Tiraje 1,000 ejemplares. Suscripciones: suscripcion@relime.org. Contribuciones e información: relime@clame.org.mx, http://www.clame.org.mx.

Relime es una revista indizada en:
ISI Web of Knowledge, SSCI – Social Sciences Citation Index y Journal Citation Reports • ERIH – European Reference Index for the Humanities • Conacyt – Índice de Revistas Mexicanas de Investigación Científica y Tecnológica • Scopus – Elsevier Database • ZDM – Zentralblatt für Didaktik der Mathematik • IBZ – International Bibliography of Periodical Literature in the Humanities and Social Sciences • Clase – Citas Latinoamericanas en Ciencias Sociales y Humanidades • Iresie – Índice de Revistas de Educación Superior e Investigación Educativa • Latindex – Sistema Regional de Información en Línea para Revistas Científicas de América Latina, el Caribe, España y Portugal • Redalyc – Red de Revistas Científicas de América Latina y el Caribe, España y Portugal • EBSCO – Information Services • Dialnet • Scielo-México – Scientific Electronic Library Online • Thomson Gale – Gale Iberoamérica.

2021 Impreso en México

Volumen 24 – Número 1 – 2021

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa

Clame Comité Latinoamericano de Matemática Educativa

Publicación oficial del Comité Latinoamericano de Matemática Educativa

2021

Volumen 24 Número 1 Marzo de 2021

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa

EDITORIAL

ARTÍCULOS

REVISTA LATINOAMERICANA DE INVESTIGACIÓN EN MATEMÁTICA EDUCATIVA, RELIME, es la publicación de investigación oficial del Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C. Editada por el Colegio Mexicano de Matemática Educativa, A. C., Av. Instituto Politécnico Nacional, 2508, Col. San Pedro Zacatenco, C.P. 07360, Alcaldía Gustavo A. Madero, CDMX, México. Tel. (55) 57473819, www.relime.org, relime@clame.org.mx. Director responsable: Ricardo Cantoral.

Reservas de Derechos al Uso Exclusivo, No. 04-2016-110914351000-102, con ISSN: 1665-2436, para el formato impreso; y No. 04-2016-110413025500-203, con e-ISSN: 2007-6819, para el formato digital; otorgados por el Instituto Nacional del Derecho de Autor. Derechos Reservados © Colegio Mexicano de Matemática Educativa, A. C. RFC: CMM 040505 IC7. Publicación cuatrimestral. Se publica en los meses de marzo, julio y noviembre, con el financiamiento del Clame. El Volumen 24, Número 1, se terminó de imprimir en marzo de 2021, con un tiraje de 1,000 ejemplares más sobrantes.

Impresa por Editorial Progreso, S. A. de C. V., Sabino No. 275, Col. Sta. María la Ribera, C.P. 06400, Alcaldía Cuauhtémoc, CDMX, México.

EDITORIAL

NOTAS SOBRE LA PUBLICACIÓN E INSERCIÓN DE POSGRADUADOS EN MATEMÁTICA EDUCATIVA

NOTES ABOUT THE PUBLICATION AND INSERTION OF POSTGRADUATES IN EDUCATIONAL MATHEMATICS

RICARDO CANTORAL
Cinvestav-IPN México

En los últimos decenios se constata el crecimiento de los posgrados en Matemática Educativa, tanto de universidades como de institutos académicos de América Latina, Portugal y España. Bajo distintas modalidades y orientaciones teórico – metodológicas, según el ciclo educativo atendido o la tradición de escuela, se ha producido una expansión en la matrícula y en la graduación de maestros y doctores lo que modifica su habitual incersión al ámbito laboral, aun con un claro desequilibrio en la dinámica impuesta entre países y regiones.

Un elemento visible de tal dinámica en tiempos de pandemia, lo constituye la proliferación de congresos, reuniones y conferencias *online*. En los últimos meses se testifica la gran cantidad de charlas, talleres en virtualidad en esta región geográfica y cultural. Esto lleva a la consecuente expansión de la demanda de espacios para la publicación, en tanto que es un instrumento de política púbica para el ámbito educativo, ya sea como requisito de graduación o de inserción al mercado laboral, adicional a su tradicional función de difusión y circulación del conocmiento.

Esto origina una particular tensión en las revistas científicas (medios para la circulación del conocimiento), pues a la vez que son utilizados como instrumentos de evaluación y acreditación de las carreras académicas, sirven para certificar la calidad para la internacionalización de la producción y además son criterios para la estabilidad y promoción laboral. En este sentido, es notoria la fuerte presencia de unos cuantos países e instituciones en la publicaciones.

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (2021) *24* (1): 5 - 8.
DOI: 10.12802/relime.21.2410

Esta gran abanico de dimensiones señaladas, hace de la publicación científica un elemento multifactorial ubicado en planos diversos que determina la estabilidad y consolidación de las propias revistas científicas. Digamos que la tensión político – académica descrita, induce una inquietud entre los tiempos de publicación de las revistas con la graduación en sus respectivos posgrados. En este sentido la *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* – Relime no es la excepción, por lo que ahora enfrenta nuevos desafíos. Si bien se vive por un lado la conocida dificultad del financimiento para la edición, que se agudiza por la incursión creciente de empresas transnacionales al mundo editorial y por los afanes de gratuidad al acceso del conocimiento. Adicionalmente, esta tensión proviene de una política laboral que afecta a la publicación, ya que experimenta un alentamiento de los procesos de arbitraje a causa del volumen de propuestas y los reacomodos a nuevas prácticas que se exigen durante la pandemia.

Por otra parte, en el ámbito de *Relime*, el trabajo de campo de naturaleza experimental y cuantitativa resulta central, pues tarde o temprano las investigaciones influyen los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas de la población. En estas circunstancias ha sido muy complicado para las metodologías usuales, el llevar adelante tales agendas de investigación a los temas de tesis, y conduce al trabajo de "pequeña escala" y a los esfuerzos plenamente teóricos que si bien, enriquecen al campo, exigen periodos más extensos para el estudio, la reflexión y la profundización a fin de una adecuada elaboración conceptual.

Es así como la situación descrita tiene un efecto en temáticas y orientaciones de la investigación para la publicación, que suele desatender asuntos relevantes como las condiciones de producción del conocimiento, por ejemplo atender a la diversidad sociopolítica, de clase, etnia, lengua, género, movilidad o financimiento. Digamos que nos enfrentamos a los efectos reportados en la literatura bibliométrica como "efecto salami" (dosificar la publicación en pequeños cortes de la investigación), "efecto esquema" (ubicar datos en una estructura pre-fabricada para publicación), "efecto manada" (adicionar autores) y así un largo etcétera. Ello presiona a las revistas en sus dinámicas de pubicación, debido a la presión que a su vez experimenta el o la autora en su posgrado o en su labor profesional.

Propondremos enseguida una clasificación con la intención de clarificar el tipo de fuentes y revistas donde publicar, a la vez que sugestiva del momento actual que vive la publicación científica en esta región del mundo, esperamos que sirve también como una guía de revistas. Establecimos como elemento distintivo que fuesen revistas científicas que formaran parte de los tres índices más prestigiados de revistas en nuestro campo: WoS, Scopus y ERIH Plus.

Debemos precisar que ERIH Plus es el único de los tres que nace como iniciativa de instancias académicas, en este caso de las Academias de Ciencias europeas con el fin de visibilizar lingüísticamente sus publicaciones y legitimar, de este modo, las buenas prácticas fuera de las empresas editoriales monoligüísticas donde predomina el inglés. Mientras que los otros dos índices gozan de un gran prestigio en diversas áreas del conocimiento por sus mediciones del índice de impacto, que en orden de importancia mundial tenemos primero al Clarivate – Web of Science Group quien introdujo el factor de impacto, el JCR y en segundo término el Elsevier Scopus Group que utiliza un criterio más diversificado y laxo el SJR.

TABLA I
Listado de revistas que pertenecen a los tres índices señalados

Revista	*ISSN/eISSN*	*Sitio Web*	*WoS*	*Scopus*	*ERIH*
Relime [1]	1665-2436/2007-6819	relime.org	Si	Si	Si
EC [2]	0212-4521/2174-6486	ensciencias.uab.es	Si	Si	Si
ESM [3]	0013-1954/1573-0816	springer.com/journal/10649/	Si	Si	Si
JRME [4]	0021-8251/1945-2306	nctm.org	Si	Si	Si
MTL [5]	1098-6065/1532-7833	tandfonline.com/toc/hmtl20/current	Si	Si	Si
IJSME [6]	1571-0068/1573-1774	springer.com/journal/10763/	Si	Si	Si
JMTE [7]	1386-4416/1573-1820	springer.com/journal/10857/	Si	Si	Si
ZDM [8]	1863-9690/1863-9704	springer.com/journal/11858/	Si	Si	Si
JEBS [9]	1076-9986/1935-1054	jeb.sagepub.com	Si	Si	Si
HM [10]	0315-0860/1090-249X	journals.elsevier.com/historia-mathematica	Si	Si	Si
STEM [11]	–/2196-7822	stemeducationjournal.springeropen.com	Si	Si	Si
AHES [12]	0003-9519/1432-0657	springer.com/journal/407/	Si	Si	Si

Fuentes:
mjl.clarivate.com/home | scopus.com/sources.uri | dbh.nsd.uib.no/publiseringskanaler/erihplus

Entre estas publicaciones el tiempo promedio de recepción, evaluación, corrección, y posterior evaluación, publicación es relativamente grande, entre uno y dos años, en virtud del desequilibrio existente entre el número de posgraduados, la exigencia institucional, las carteras de árbitros y los pocos espacios para la publicación. Sin embargo, es posible advertir que se avecinan cambios en la publicación, como lo son la prepublicación, la publicación continua, la digitalización y los tiempos fijos de recepción y dictaminación, pero ello exige de una mayor densidad en las comunidades de referencia de las publicaciones científicas de nuestro campo de estudio.

[1] Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (CLAME)
[2] Enseñanza de las Ciencias (UAB–UV)
[3] Educational Studies in Mathematics (SPRINGER)
[4] Journal for Research in Mathematics Education (NCTM)
[5] Mathematical Thinking and Learning (ROUTLEDGE JOURNALS, TAYLOR & FRANCIS LTD)
[6] International Journal of Science and Mathematics Education (SPRINGER)
[7] Journal of Mathematics Teacher Education (SPRINGER)
[8] ZDM - Mathematics Education (SPRINGER)
[9] Journal of Educational and Behavioral Statistics (SAGE PUBLICATIONS INC)
[10] Historia Mathematica (ACADEMIC PRESS INC ELSEVIER SCIENCE)
[11] International Journal of STEM Education (SPRINGER)
[12] Archive for History of Exact Sciences (SPRINGER).

Uriel Escobar Durán, Felipe Tirado Segura

PENSAMIENTO RELACIONAL EN LA ESCOLARIZACIÓN DE LA JERARQUÍA DE OPERACIONES Y ÁLGEBRA TEMPRANA EN PRIMARIA

Relational thinking in the schooling of order of operations and early algebra in elementary school

RESUMEN

El objetivo general de este estudio fue promover el pensamiento relacional en el análisis de expresiones numéricas, utilizando la jerarquía de operaciones, en alumnos de tercer grado de primaria. Se diseñó una secuencia psicoeducativa basada en la representación de propiedades numéricas y expresiones de igualdad por equivalencia, con base en actividades fenoménicas (didáctica fenomenológica) y en la aplicación de la jerarquía de operaciones. Treinta alumnos fueron evaluados a través de múltiples indicadores de su desempeño en dominios tanto procedimentales como conceptuales. El 71.43% de los escolares alcanzaron un nivel muy alto o alto de logro en tareas de la aplicación de la jerarquía de operaciones. Los resultados se discuten en términos de la relación entre el pensamiento relacional y las actividades fenoménicas con el nivel de logro de la jerarquía de operaciones.

PALABRAS CLAVE:
- *Pensamiento relacional*
- *Jerarquía de operaciones*
- *Álgebra temprana*
- *Didáctica fenomenológica*

ABSTRACT

The general objective of this study was to promote relational thinking in the analysis of numerical expressions, using the order of operations, in third-grade primary school students. A psychoeducational sequence was designed based on the representation of numerical properties and expressions of equality by equivalence, based on phenomenal activities (didactical phenomenology) and the application of the hierarchy of operations. Thirty students were assessed using multiple performance indicators in the procedural and conceptual fields. 71.43% of the students reached a very high or high level of achievement in tasks of application of the order of operations. The results are discussed in terms of the relationship between relational thinking and phenomenal activities with the level of achievement of the order of operations.

KEY WORDS:
- *Relational thinking*
- *Order of operations*
- *Early algebra*
- *Didactical phenomenology*

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (2021) *24* (1): 9-34.
Recepción: Septiembre 19, 2019 / Aceptación: Marzo 15, 2021. DOI: 10.12802/relime.21.2411

RESUMO

O objetivo geral deste estudo foi promover o pensamento relacional na análise de expressões numéricas, por meio da ordem de operações, em alunos do terceiro ano do ensino fundamental. Uma sequência psicoeducacional foi desenhada com base na representação de propriedades numéricas e expressões de igualdade por equivalência, com base em atividades fenomenais (didática fenomenológica) e na aplicação da ordem de operações. Trinta alunos foram avaliados por meio de múltiplos indicadores de desempenho nos campos processual e conceitual. 71,43% dos alunos alcançaram um nível muito alto ou alto de aproveitamento nas tarefas de aplicação da ordem de operações. Os resultados são discutidos em termos da relação entre o pensamento relacional e as atividades fenomenais com o nível de realização da ordem das operações.

PALAVRAS CHAVE:

- *Pensamento relacional*
- *Ordem de operações*
- *Álgebra inicial*
- *Fenomenologia didática*

RÉSUMÉ

L'objectif général de cette étude était de promouvoir la pensée relationnelle dans l'analyse des expressions numériques, en utilisant l'ordre des opérations, chez les élèves de troisième année du primaire. Une séquence psychoéducative a été conçue à partir de la représentation de propriétés numériques et d'expressions d'égalité par équivalence, basées sur des activités phénoménales (phénoménologie didactique) et l'application de l'ordre des opérations. Trente étudiants ont été évalués à l'aide de plusieurs indicateurs de performance dans les domaines procédural et conceptuel. 71,43% des étudiants ont atteint un niveau de réussite très élevé ou élevé dans les tâches d'application de l'ordre des opérations. Les résultats sont discutés en termes de relation entre la pensée relationnelle et les activités phénoménales avec le niveau de réalisation de l'ordre des opérations.

MOTS CLÉS:

- *Pensée relationnelle*
- *Ordre des opérations*
- *Algèbre précoce*
- *Phénoménologie didactique*

1. Introducción

En el marco de la enseñanza de las matemáticas, a nivel mundial existe una discontinuidad entre la aritmética y el álgebra, lo cual implica una carencia en el entendimiento de las relaciones numéricas. El National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 2000), ha propuesto que la enseñanza del álgebra debería comenzar a partir de los primeros años de educación primaria. Esta propuesta es acompañada de múltiples estudios que han demostrado que la aritmética es inherente al álgebra en su composición estructural (Carraher y Schliemann, 2007).

A pesar de la naturaleza algebraica de las matemáticas, los alumnos de los niveles más básicos de educación no suelen tener oportunidades de hacer relaciones entre la aritmética y el álgebra antes de enfrentarse a una forma algebraica prefabricada (Herskovics y Kieran, 1980; Kieran y Chalou, 1993). Por ejemplo, el uso de símbolos para representar cantidades es un elemento crítico en la transición de la aritmética al álgebra, debido a que, en el aprendizaje del álgebra los alumnos se enfrentan con la necesidad de operar con representaciones simbólicas que no están vinculadas con un resultado numérico (Kieran, 1992).

La idea de enseñar el álgebra desde la primaria, no se refiere a que los alumnos aprendan lo mismo que los alumnos de secundaria o preparatoria, sino que tengan oportunidades, en una edad temprana crítica, para integrar entre sí a la aritmética y al álgebra (Carpenter et al., 2005; Molina, 2006). En otras palabras, se trata de que se adquieran dominios significativos de manera tal, que los alumnos puedan transferir el entendimiento (definido como el dominio de las relaciones conceptuales pertinentes a un tema o una tarea) de relaciones de cantidades a contextos novedosos, así como desarrollar habilidades y hábitos de pensamiento que les permitan resolver problemas matemáticos de un modo significativo.

¿Cómo crear vínculos significativos entre la aritmética y el álgebra? En la historia del aprendizaje en matemáticas comúnmente se prioriza el pensamiento operativo (procedimental) basado en la aplicación de algoritmos en la resolución de problemas. A pesar de que la aplicación de algoritmos es necesaria para resolver problemas matemáticos, resulta insuficiente para entender de manera significativa los aspectos más básicos de la aritmética y su relación con el álgebra. Stephens (2007) brinda un ejemplo de la aplicación del pensamiento operativo en la resolución de igualdades:

$$23 + 15 = 26 + \_\_ \qquad 23 + 15 = 26 + 12$$

La respuesta “12” deriva de la relación entre la cantidad total de la izquierda de la igualdad (38) y la resta con el total de la derecha (26). En términos procedimentales, se compensa la cantidad que falta en el lado derecho de la igualdad de acuerdo con el total del lado izquierdo de la igualdad.

Existe otra manera de resolver el ejemplo anterior, de acuerdo con Stephens y Ribeiro (2012): la diferencia entre el primer número del lado izquierdo de la igualdad y el primero del lado derecho es +3. Por lo tanto, si se resta la misma cantidad, pero con el signo contrario (−3) podremos obtener el resultado correcto.

$$\begin{array}{cc} 23 + 15 = 26 + \_\_ & 23 + 15 = 26 + 12 \\ 23 + 3 = 26 & 15 - 3 = 12 \end{array}$$

Esta estrategia basada en las relaciones numéricas en una igualdad implica, además de un dominio procedimental, un nivel de dominio conceptual. A este tipo de solución se le puede denominar la aplicación del *pensamiento relacional.*

La integración de los conceptos de pensamiento relacional, jerarquía de operaciones (*order of operations* en inglés) y representaciones simbólicas algebraicas, versó sobre una secuencia psicoeducativa (también llamada secuencia didáctica) basada en la manipulación de objetos concretos. En el marco conceptual se explica cómo se vinculan entre sí estos conceptos.

2. Marco conceptual

2.1. *Pensamiento relacional*

El pensamiento relacional es definido por Carpenter et al., (2005) como la acción de atender al conjunto de relaciones numéricas estructurales, que están inmersas en expresiones numéricas. Este concepto implica el uso y la aplicación de propiedades numéricas para transformar expresiones matemáticas, en vez de solamente calcular numéricamente y dar una solución. Por ejemplo, en la siguiente expresión: $38 + 47 = 47 + 38$, ¿cómo se puede comprobar que la igualdad es verdadera? No es necesario calcular dicha igualdad, ya que aplicando la propiedad conmutativa se puede saber que han cambiado de lugar las cantidades de un lado de la ecuación. Este tipo de solución se enfoca en las relaciones de la expresión en lugar de en el cálculo aritmético, como principio estructural de las propiedades numéricas.

Un elemento clave para identificar estas relaciones es la concepción del signo igual. Carpenter et al., (2003) indican que el signo igual debe ser entendido como una relación que provee un balance en las cantidades de ambos lados de una igualdad. De este modo, cuando un estudiante concibe el signo igual como una manera de relacionar cantidades, es más probable que identifiquen una estructura subyacente a esas cantidades y poder implementar estrategias para resolver una expresión numérica (Knuth et al., 2006). El pensamiento relacional es importante en otras subáreas de las matemáticas, ya que muchas ideas matemáticas cruciales incluyen relaciones entre diferentes representaciones de números y operaciones entre ellos (Riadi et al., 2019).

Numerosos estudios han reportado que los estudiantes de primaria son capaces de utilizar el pensamiento relacional para resolver expresiones numéricas, a través de un entendimiento relacional del signo igual (Carpenter et al., 2003; Molina et al., 2006). El pensamiento relacional es una estrategia que puede promover competencias aritméticas y algebraicas, ya que la aritmética contempla no solo un dominio procedimental, sino el entendimiento de propiedades numéricas, siendo un auxiliar en el análisis de relaciones (dejando de lado la necesidad de usar operaciones numéricas), en la síntesis de expresiones, al pensar con base en las propiedades de las operaciones, así como en la manipulación de las expresiones numéricas, lo cual podría desarrollar en los alumnos un aprendizaje significativo de la aritmética, así como la posibilidad de adquirir nociones algebraicas a temprana edad (Molina, 2009). En el aprendizaje del álgebra elemental, su rol puede implicar integrar de un modo más eficiente las propiedades aritméticas (Carraher et al., 2007).

2.2. *Álgebra temprana*

El pensamiento algebraico puede ser definido como una aproximación tanto a situaciones como al desarrollo de modos de pensamiento, que enfatizan los aspectos generales y relacionales del álgebra, con herramientas no necesariamente simbólicas, que pueden ser usadas como soporte cognitivo, para introducir y nutrir el discurso tradicional del álgebra escolarizada, en edades tempranas, principalmente en la educación primaria (Kieran, 1996).

El desarrollo del pensamiento algebraico incluye un enfoque en varios rubros: las relaciones de cantidad; las operaciones y sus inversos; representar y resolver problemas; los números y las literales; así como en el significado del signo igual (Kieran, 2004).

Kaput (2008) propuso que el álgebra y el pensamiento algebraico, están compuestos por tres rubros:

1. El álgebra como estudio de estructuras y sistemas extraídos de cálculos y relaciones, incluidas las que surgen en la aritmética (álgebra como aritmética generalizada), y en el razonamiento cuantitativo.
2. El álgebra como estudio de funciones, relaciones y variación conjunta.
3. El álgebra como la aplicación de un grupo de lenguajes de modelado, tanto dentro como fuera de las matemáticas (p. 11).

La propuesta del autor establece las bases de comparación de diversos enfoques denominados *álgebra temprana*, que tienen el objetivo de integrar los rubros del álgebra y del pensamiento algebraico desde la primaria, en diversas edades y desde entornos tanto experimentales como escolarizados.

Blanton y Kaput (2005), indican que el álgebra temprana tiene como finalidad, la integración del pensamiento algebraico, basándose en la promoción de hábitos de pensamiento y representación, que puedan identificar el ámbito estructural de las matemáticas. De acuerdo con Carraher y Schliemann (2007), el “álgebra temprana” versa sobre el conocimiento algebraico, el pensamiento algebraico, y las representaciones y técnicas de estudiantes a edad temprana, relacionadas con la resolución de problemas que, generalmente, solo estudiantes más avanzados logran resolver utilizando la notación algebraica moderna. En el mismo sentido, Kieran et al., (2017) considera que el énfasis del álgebra temprana se encuentra en identificar y expresar estructuras numéricas.

Las estructuras numéricas se relacionan directamente con las propiedades matemáticas y se desarrollan gracias a la comparación entre problemas, expresiones o igualdades comunes entre sí. Warren y Cooper (2009), indican que la abstracción es facilitada por la comparación de diferentes representaciones y la identificación de puntos comunes que abarcan un modelo mental. En otras palabras, un alumno puede abstraer una estructura numérica, si tiene la oportunidad de relacionar expresiones o problemas matemáticos diferentes entre sí, en términos numéricos, que se transfieren de la misma representación general a diferentes representaciones, dentro de la misma estructura, para poder identificar puntos comunes que abarquen el núcleo del modelo. Por ejemplo, $5 + 2 = 10$, es equivalente a $4 + 6 = 10$ en términos estructurales, corresponden a la misma estructura: parte = todo (Davydov, 1962).

En este estudio, la intención es implementar el pensamiento relacional de un modo significativo, utilizando eventos concretos que hagan evidente esta relación estructural a partir de actividades fenoménicas o manipulativas. Freudenthal (1983) denomina a este tipo de actividades que implican el uso de objetos concretos relacionados con conceptos matemáticos *didáctica fenomenológica.* ¿Cuál sería la relación entre las propiedades numéricas, estructuradas numéricamente, con una didáctica de este tipo?

2.3. *Jerarquía de operaciones*

El entendimiento de ideas o conceptos matemáticos se puede acelerar a través de la representación de sus principios más básicos, en la interacción entre objetos y eventos concretos. La representación, entendida como un modo de interiorizar o entender un evento o fenómeno, ya sea concreto o abstracto, es la base del pensamiento algebraico y de la aplicación de las propiedades numéricas en la jerarquía de operaciones. El pensamiento relacional funge como unión entre estos conceptos, a partir de un modo de pensamiento que guía el entendimiento de relaciones de cantidades.

Así como la NCTM propone que la enseñanza del álgebra pueda comenzar desde la primaria, el Common Core State Standards for Mathematics (CCSSM, 2010) recomienda introducir las propiedades numéricas desde el tercer grado de primaria. Como parte importante de la implementación de las propiedades numéricas, Freudenthal (1974), asegura que la jerarquía de operaciones constituye una parte crucial del álgebra y distingue el lenguaje algebraico del lenguaje de la vida cotidiana. La jerarquía de operaciones implica la realización de expresiones o ecuaciones de un modo estructural, con base en las propiedades numéricas, en vez de únicamente a su posición lineal (de izquierda a derecha).

Gunnarsson et al., (2016), explican que las expresiones matemáticas implican varias convenciones. Una de esas convenciones describe el orden en el cual las operaciones se realizan. Este orden ha sido comúnmente reducido a través de mnemotecnias como PEMDAS (paréntesis, exponentes, multiplicación, división, suma y resta) por sus siglas en inglés. La necesidad de operar con expresiones o igualdades en orden se encuentra, en mayor cantidad, en el álgebra. Este orden no se basa en la típica secuencia de izquierda a derecha para resolver una expresión aritmética, por lo tanto, provoca que los alumnos de secundaria o bachillerato, así como algunos profesores, fallen al momento de interpretar una expresión matemática.

Asimismo, Dupree (2016) indica cuatro malinterpretaciones de la jerarquía de operaciones derivadas del uso de mnemotecnias: la multiplicación se realiza antes de la división, la suma se hace antes de la resta, las operaciones se resuelven de izquierda a derecha, y el paréntesis se resuelve primero. La comprensión del concepto del orden en la jerarquía de operaciones es, de acuerdo con Headlam (2013), un primer paso para adquirir una percepción de la lógica del álgebra, al operar con un problema aritmético. Por ejemplo, resolver la operación $4 + 2 \times 5$ puede resolverse de "izquierda a derecha" o de un modo estructural, $a + bc$. Entender la lógica detrás de esta operación, podría ser un paso hacia la comprensión del significado de una expresión algebraica como $a + bc$ y obtener el resultado correcto, 14.

¿Cómo abordar una regla o convención como la jerarquía de operaciones de un modo significativo? Taff (2017) sugiere que se pueden analizar los componentes de una expresión matemática en sus términos y en sus factores. Los términos son los componentes de una expresión separado por un signo aditivo o negativo. El factor es cuando se multiplica una serie de números. En la figura 1 se observa una representación de este método denominado iTaff:

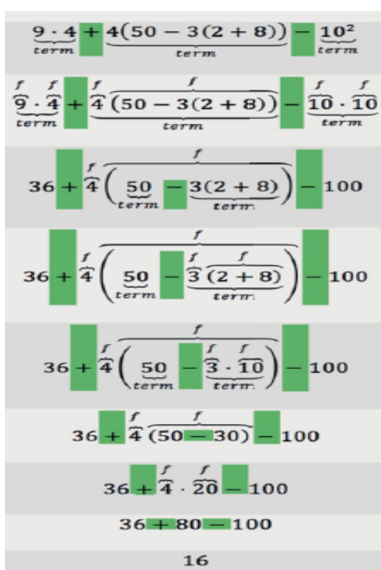


Figura 1. Modelo iTaff. Se pueden identificar los términos (term) y los factores (f) (Taff, 2017, p. 131)

Esta propuesta contempla una concepción de la jerarquía de operaciones, como una equivalencia estructural de factores de una expresión matemática, misma que también es visible en otras investigaciones. (Dupree, 2016; Liebenberg et al., 1999; Papadopoulos y Gunnarsson, 2020; Zorin y Carver, 2015).

En este estudio se propone el concepto de *unidades operativas* para el análisis de relaciones numéricas jerarquizadas bajo esquemas algebraicos. Tiene una base teórica en el planteamiento del Modelo iTaff. Las *unidades operativas* se definen como una cantidad que se deriva de la operación de otras dos cantidades. Por ejemplo, en la expresión $\frac{6}{2}(2+2)=x$, las unidades operativas son la división $(\frac{6}{2})$, la operación entre paréntesis $(2+2)$, y la multiplicación posterior del cociente y de la suma (3×4), lo que dará el valor de x (12). Esta misma expresión puede ser calculada aplicando la jerarquía de operaciones erróneamente, multiplicando el 2 por el valor de la suma del paréntesis y luego el resultado de esa operación sería el divisor del $6(\frac{6}{8})$. La importancia de las unidades operativas radica en que fungen como una guía al momento de utilizar la jerarquía de operaciones para resolver correctamente una igualdad, al reconocer que una expresión como $\frac{6}{2}$ o 3×4 constituyen una *unidad operativa* que requiere ser decodificada para poder continuar con la operación de la concatenación de las relaciones numéricas. Las *unidades operativas* explican la diferencia que existe entre una solución intuitiva de una expresión numérica y una solución aplicando propiedades numéricas, tal como se muestra en la Figura 2.

Solución intuitiva	***Solución con propiedades numéricas***
$5+3 \times 6 = 23$	$5+3 \times 6 = 23$
$5+3 \times 6 = 23$	$5+3 \times 6 = 23$
$8 \times 6 = 23$	$8 \times 6 = 23$
$48 = 23$	$48 = 23$

Figura 2. Comparación entre la solución de una igualdad de modo intuitivo (de izquierda a derecha) y la solución con base en la propiedad conmutativa (Fuente propia)

La multiplicación de la expresión anterior se sitúa como el primer nivel jerárquico de la expresión, ya que *sintetiza* el producto de 3 por 6 (18). Este producto se suma con el 5 y de ese modo se llega al resultado de la igualdad, 23.

La habilidad de identificar una estructura en una forma generalizada es crucial al momento de enfrentar una actividad algebraica que implique transformaciones, ya que así estas transformaciones encuentran sentido. La relación entre la generalización y encontrar una estructura subyacente a una expresión o igualdad impulsa el desarrollo del pensamiento algebraico, brindando la posibilidad a los escolares de "mirar a través" de objetos matemáticos (Kieran, 2017).

Mirar a través de objetos matemáticos implica una descomposición y una recomposición en términos estructurales, con la única intención de hacer evidente una estructura numérica. Por ejemplo, una expresión como $5 + 5 + 5 = 15$ es equivalente estructuralmente a $5 \times 3 = 15$. Por otra parte, $5 + 3 \times 2$ puede ser descompuesta en términos aditivos: $5 + 3 + 3$, manteniendo la misma estructura conmutativa. Esta clase de equivalencias, además de buscar que los alumnos puedan generalizar una estructura, pueden hacer evidente la necesidad de operar con la jerarquía de operaciones, desde un punto de vista relacional, que puede ser llevado al campo del pensamiento algebraico, gracias a la jerarquía de operaciones.

La estructura constituye un contenido esencial para las matemáticas (Bourbaki, 1963), además, su entendimiento requiere un enfoque en las características más abstractas de los fenómenos de la vida cotidiana, que pueden ser expresados bajo un discurso lingüístico cotidiano propio de la semántica de los alumnos de primaria. Este estudio se basa en el entendimiento de las relaciones de cantidades que se encuentran en una expresión matemática, a partir de la identificación de una estructura subyacente a factores o unidades operativas, mismas que pueden ser significativas para los niños de primaria, en un entorno escolar en el que se desenvuelven.

En la figura 3, se puede observar la concepción que se plantea para analizar la jerarquía de operaciones, a partir de las *unidades operativas* constitutivas de una expresión numérica.

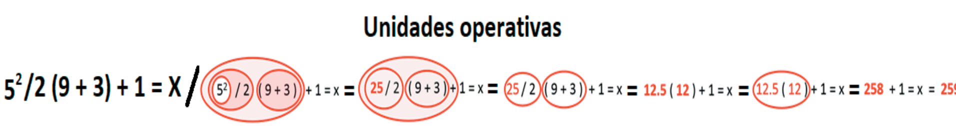


Figura 3. Secuencia de la jerarquía de operaciones, donde los óvalos constituyen las *unidades operativas.* (Fuente propia)

Con base en el marco conceptual descrito, se pueden subrayar cuatro aspectos cruciales en el entendimiento de relaciones numéricas: 1) el pensamiento relacional; 2) la integración entre las relaciones aritméticas y algebraicas; 3) la estructura numérica inmersa en aplicación de las propiedades numéricas a partir de la jerarquía de operaciones; 4) las actividades fenoménicas como potenciadoras de un entendimiento significativo de las relaciones numéricas.

El pensamiento relacional puede promover que los alumnos de primaria vinculen los dominios tanto aritméticos como algebraicos de un *modo estructural*, a partir de la aplicación de la *jerarquía de operaciones*, utilizando objetos matemáticos concretos (*actividades fenoménicas* – manipulación de dulces). La integración de estos cuatro aspectos constituye el punto sustantivo del presente estudio y la aportación original al área de Matemática Educativa.

2.4.. *Preguntas de investigación*

1) ¿Cuál es el efecto del pensamiento relacional a través de actividades fenoménicas en la aplicación y el entendimiento de propiedades numéricas a través de la jerarquía de operaciones?
2) ¿Cómo se vincula una estructura numérica con la representación de la jerarquía de operaciones?

2.5. *Hipótesis*

1) El pensamiento relacional se puede promover a partir de actividades fenoménicas.
2) La introducción del pensamiento relacional en la aplicación de la jerarquía de operaciones puede promover habilidades de representación estructural de relaciones de cantidad.

2.6. *Objetivo*

El objetivo general de este estudio fue promover el pensamiento relacional en el análisis de expresiones numéricas, utilizando la jerarquía de operaciones, en alumnos de tercer grado de primaria. Para realizar este objetivo, se analizaron las estrategias implementadas por los participantes, con base en representaciones gráficas y en el análisis de contenido de su discurso, en la resolución de problemas matemáticos en dos niveles de abstracción: concretos (actividades fenoménicas) y estructurales (expresiones numéricas aritméticas y de representación algebraica).

3. Método

3.1. *Participantes y escenario*

Para este estudio, se realizó un experimento de enseñanza multimétodo en un entorno escolarizado en una primaria pública de la Ciudad de México.

Los participantes fueron 30 estudiantes de tercer grado de primaria (8-9 años). Ninguno de ellos tenía experiencia en jerarquía de operaciones ni en representación simbólica-algebraica.

3.2. *Planteamiento, recolección y análisis de datos*

El experimento de enseñanza se implementó con la base metodológica de Miller y Mercer (1993) y Witzel et al., (2003), llamada *concrete-representational-abstract* (CRA), que está sustentada en la concepción *didáctica fenomenológica* de Freudenthal (1971). Esta estrategia brinda a los estudiantes experiencias cognitivas a partir de materiales concretos, orientados a la construcción de representaciones simbólicas para la formación de nociones matemáticas.

Para hacer la experiencia de una didáctica fenomenológica, se utilizaron dinámicas de operaciones concretas a partir de la distribución (suma, resta, multiplicación y división) de dulces. Se utilizaron dulces porque se consideró que podrían resultar apreciados por los participantes, por lo mismo podrían servir para motivarlos e inducir el entendimiento de relaciones de cantidad.

El diseño del experimento de enseñanza se muestra en la figura 4.

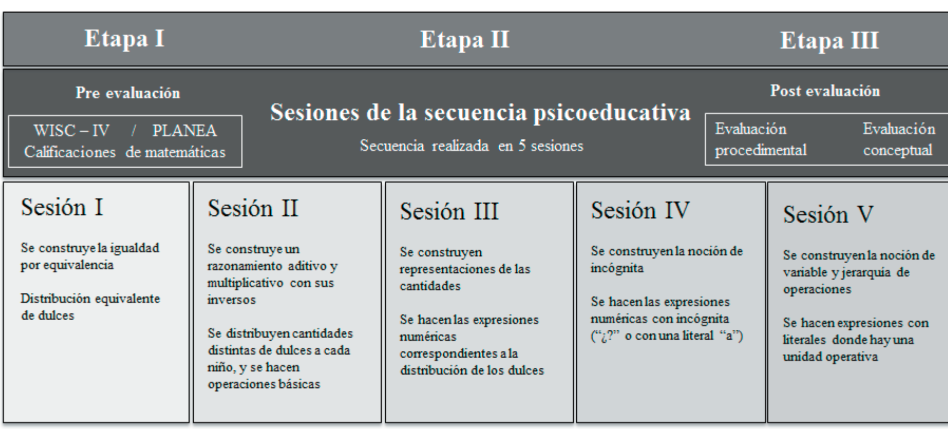


Figura 4. Organización del experimento de enseñanza en sus tres etapas de evaluación (Fuente propia)

Los indicadores de la *preevaluación* se basan en dos pruebas psicométricas, WISC-IV (extraídos de la sección de aritmética y validada con población mexicana) y reactivos de la prueba PLANEA (Plan Nacional para la Evaluación de los Aprendizajes) estandarizado por el Instituto Nacional de Evaluación Educativa (INEE). Además, se tomaron en cuenta los puntajes sistemáticos de la evaluación de la profesora, ya que consisten en evaluaciones longitudinales. Con los indicadores de la preevaluación se crearon los equipos de trabajo con 4 integrantes, distribuidos y balanceados en cuartiles por su promedio, de manera que en cada equipo había un integrante de cada cuartil (promedio muy alto, alto, medio y bajo), esto con base en la propuesta de aprendizaje cooperativo de Slavin (1995) y Johnson y Johnson (2014). En la tabla I se observan los puntajes promedio de los equipos formados, donde se puede apreciar que el promedio total de cada equipo es cercano, la mayor diferencia es de solo 6.38 puntos.

TABLA I
Organización de los equipos de trabajo en la etapa de preevaluación.

Equipo	*Promedio pruebas estandarizadas*	*Promedio puntaje de matemáticas*	*Promedio total*
	%WISC-IV %Planea	%	%
1	74.85	60.50	67.07
2	61.03	69.85	65.44
3	64.68	56.70	60.69
4	62.14	65.73	63.33
5	66.73	62.33	64.53
6	59.64	66.56	61.94
7	62.72	69.21	65.97

En la secuencia psicoeducativa se realizaron 5 sesiones como se aprecia en la figura 4. Al finalizar cada sesión, se evaluó el desempeño de los alumnos con base en el porcentaje de las tareas realizadas con éxito.

La primera sesión consistió en la organización fenoménica de dulces en bolsas con base en *igualdad por equivalencia*. Los participantes en cada equipo tenían que organizar bolsas con la misma cantidad de dulces en ellas, de tal modo que todos los integrantes del equipo tuvieran la misma cantidad de bolsas y dulces. Por ejemplo, si en un equipo había 12 bolsas y 60 dulces, tenían que construir la lógica de la operación de *dividir* las bolsas para que cada integrante tuviera el mismo número (3 bolsas) y los dulces para que tuvieran el mismo número (5 dulces en cada bolsa). Ahora se les solicitó que encontraran cuántos dulces le tocó a cada uno de ellos. Para esto las bolsas representaban de manera concreta (fenoménica) un factor (3) y la cantidad de dulces dentro de cada bolsa otro factor (5), de tal modo que tenían que construir la lógica de la *operación inversa* al *multiplicar* el número de bolsas por el número de dulces en cada bolsa, para obtener el producto (15). En la figura 5 se observa una *representación fenoménica* de la actividad.

"3 bolsas por 5 dulces en cada bolsa es *igual* a 15 dulces por integrante".

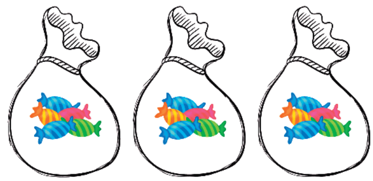


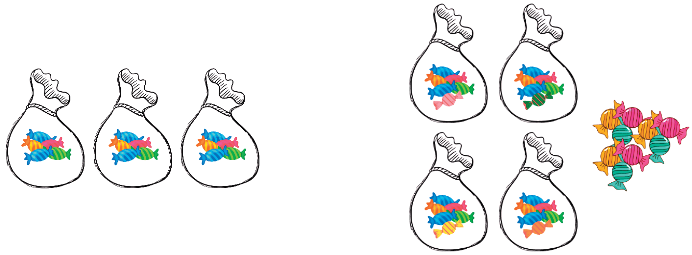
Figura 5. Representación del producto esperado para cada integrante de los equipos. (Fuente propia)

En la segunda sesión los alumnos tenían un número distinto de bolsas y dulces (por ejemplo, 16 bolsas y 96 dulces). Una vez que terminaban de dividir las bolsas y los dulces del mismo modo realizado en la anterior sesión, se les facilitaron otros 36 dulces por equipo, que tenían que construir la lógica de *dividir*, de tal modo que cada integrante tuviera la misma cantidad (9) pero sin introducirlos en bolsas, dulces "sueltos". Los dulces sueltos representaban una cantidad aditiva, que requería la lógica de construir la *suma* del factor de la cantidad de bolsas, *multiplicado* por el factor de dulces en cada bolsa. En la figura 6 se observa la *representación fenoménica* de la actividad de esta sesión.

"4 bolsas por 6 dulces en cada bolsa, más 9 dulces sueltos es *igual* a 33 dulces por integrante".

Figura 6. Representación del producto esperado para cada integrante de los equipos. (Fuente propia)

Dado que en la primera sesión los escolares repartieron el mismo número de dulces en las bolsas que tenían y en la segunda se agregaron dulces sueltos, ahora en la tercera sesión los estudiantes tenían que estructurar los arreglos fenoménicos, en el mayor número posible de modos lógicos de *representar las estructuras numéricas* que se les pudieran ocurrir. En la figura 7 se muestra las *representaciones numéricas* esperadas.



Sesión I

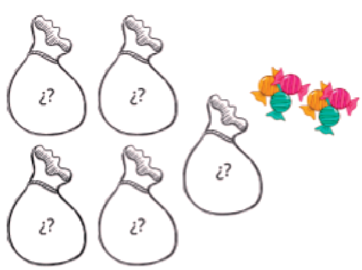
$5 + 5 + 5 = 15$ dulces en las bolsas.
$3 \times 5 = 15$ dulces en las bolsas.
$5 \times 3 = 15$ dulces en las bolsas.

Sesión II

$6 + 6 + 6 + 6 + 9 = 33$ dulces en total.
$4 \times 6 + 9 = 33$ dulces en total.
$9 + 4 \times 6 = 33$ dulces en total.

Figura 7. Representaciones numéricas de *igualdad por equivalencia*, para cada conjunto de arreglos fenoménicos y la representación de *unidades operativas* (Fuente propia)

En la cuarta sesión, los alumnos recibieron bolsas con una cantidad fija de dulces, que no eran contables porque las bolsas no eran traslucidas (oscuras), llamadas “bolsas incógnitas” que operan como una cantidad desconocida. Posteriormente, se les proporcionó el número de dulces que tenían en total, de manera que debían construir la lógica de la operación de *dividir* ese número por el número de bolsas, para *despejar la incógnita*. Para evocar la *operación inversa*, ahora se les planteó cómo podrían saber el número total de dulces si este fuera la incógnita, pero conociendo ahora el número de dulces que hay en cada bolsa, de manera que tenían que construir la lógica de la operación de *multiplicar* el número de dulces en cada bolsa por el número de bolsas. Después se les dieron dulces sueltos, de manera que tenían que *sumar* esta cantidad para saber el total de dulces que había. Ahora, estas relaciones entre cantidades conocidas y desconocidas tenían que representarla en el mayor número de expresiones numéricas posibles. En la figura 8 se observa la recreación del arreglo fenoménico y de las expresiones numéricas esperadas.



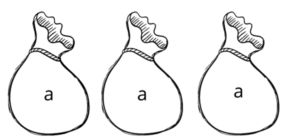
Número de dulces en bolsas.
$5 \times ¿? = 45$ dulces en las bolsas.
$5 \times a = 45$ dulces en las bolsas.
$45 / 5 = 9$ dulces cada bolsa.

Número total de dulces.
$5 \times ¿? + 6 = 51$ dulces en total.
$6 + 5 \times ¿? = 51$ dulces en total.

Número total de dulces.
$5 \times a + 6 = 51$ dulces en total.
$6 + 5 \times a = 51$ dulces en total.
$6 + 5 \times 9 = 51$ dulces en total.

Figura 8. Representaciones numéricas posibles para cada conjunto de arreglos fenoménicos. (Fuente propia)

Finalmente, la quinta sesión tenía como objetivo concebir estructuralmente las propiedades de una *función* y *variable* a partir de distintos arreglos entre las bolsas y los dulces. Para esto, se repartieron dulces y bolsas a los distintos equipos en cantidades diferentes. Se les pidió que repartieran los dulces en *función* del número de bolsas, de manera que ahora el número de dulces en las bolsas, entre los equipos, es *variable*. Los alumnos tenían que representar del modo más general posible las cantidades que desconocían de dulces en cada bolsa. Únicamente tenían el dato de la cantidad de bolsas y de los dulces en total en cada equipo, por lo que el número en cada bolsa era *variable*. Para asignar una representación a las cantidades *variables* que desconocían, deberían elegir una alternativa de *representación* de las distintas variaciones de cantidades. Para evocar regularidad a los escolares se les invitó a referir la cantidad que era una incógnita variable con una letra, a partir de un consenso, ellos decidían la literal con que inicia su nombre. En la figura 9 se muestra la recreación del arreglo fenoménico y simbólico esperado.



Dulces sueltos (d) + Cantidad de bolsas (b) × Dulces en cada bolsa (a) = Total de dulces (t)

$d + b \times a = t$

Figura 9. Representaciones numéricas simbólicas de la jerarquía de operaciones a partir de cantidades variables. (Fuente propia)

Una vez concluidas las sesiones de la secuencia psicoeducativa, los alumnos fueron evaluados en dos niveles: procedimental y conceptual. Para la *evaluación procedimental* se implementó una tarea de repartición de dulces a través de la representación de tres elementos: la jerarquía de operaciones, una estructuración numérica y la aplicación de un algoritmo de división. Cada integrante de los equipos tenía como objetivo repartir dulces de un modo equitativo en bolsas. Por ejemplo, se le pregunta al equipo, si cada uno tiene 5 bolsas y en cada bolsa hay 2 dulces, ¿cuántos dulces tiene cada uno? (5 × 2 = 10); si cada uno tiene 10 dulces y en su equipo son 4, ¿cuántos dulces en total tienen? (10 × 4 = 40); ahora, cada uno tiene 5 bolsas y son cuatro niños en el equipo ¿cuántas bolsas en total hay? (5 × 4 = 20). Posteriormente se le dan 8 dulces a cada niño. Sabiendo que hay 4 integrantes por equipo, se les pregunta ¿cuántos dulces se le repartió al equipo? ($4 \times 8 = 32$). Finalmente, se le brinda a cada niño una estructura numérica a partir de cajas (figura 10) para poder organizar las relaciones numéricas, planteando que si "a" es igual a al número de dulces sueltos, "b" el número de dulces en cada bolsa, "c" el número de bolsas, "w" el total de dulces, "y" el número de integrantes del equipo y "z" el número de dulces que le tocan a cada niño, ¿cómo quedarían organizadas estas cantidades en la estructura numérica? También se proporciona una estructura numérica a partir de literales $a + b \times c$ (figura 10) y se pregunta cuál es el número de dulces en total. La estructura es para promover la concepción de la jerarquía de operaciones, de tal manera que, si los datos de las cantidades de la estructura eran correctos, podían operar con la división de los dulces para saber qué cantidad le tocaba a cada integrante del equipo.

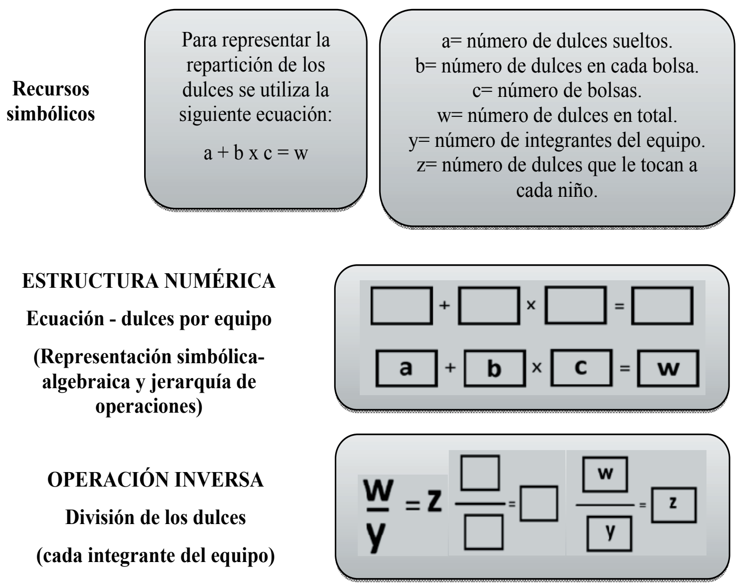


Figura 10. Estructura de la evaluación procedimental (Fuente propia)

En la *evaluación conceptual* se realizó un análisis de contenido ad hoc (Kvale, 2008) a partir de una entrevista semiestructurada e individual de las estrategias utilizadas para resolver situaciones reactivas entre igualdades. La intención de estas situaciones reactivas consistía en aplicar la jerarquía de operaciones conceptualmente, al hacer las *relaciones numéricas* de una expresión multiplicativa con su equivalencia en cantidades aditivas (propiedad numérica conmutativa). Los ejemplos de las situaciones reactivas y las preguntas de la entrevista semiestructurada se encuentran en la figura 11.

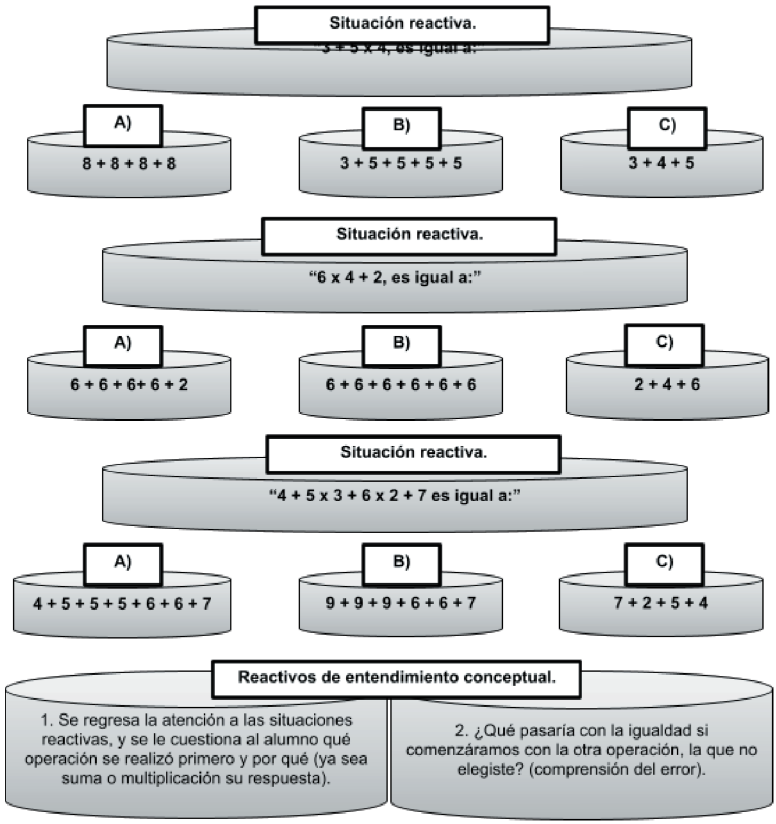


Figura 11. Evaluación conceptual del entendimiento de los alumnos de la aplicación estructural de la jerarquía de operaciones con base en el pensamiento relacional. Son tres situaciones reactivas y dos preguntas de entendimiento (Fuente propia)

Tanto las tareas de la secuencia psicoeducativa, como de las evaluaciones procedimental y conceptual, fueron puntuadas con base en el porcentaje realizado con éxito de cada tarea (0%-100%). La aplicación de las tareas se realizó en el salón de clases.

4. Resultados

Los resultados se dividen en 4 secciones: 1) secuencia psicoeducativa, 2) nivel de logro en las evaluaciones procedimental y conceptual, 3) entendimiento con base en análisis de contenido del discurso y 4) evaluación de la validez de los indicadores.

4.1. *Secuencia psicoeducativa*

En la figura 12, se observa el porcentaje promedio de logro en las cinco sesiones de la secuencia psicoeducativa.

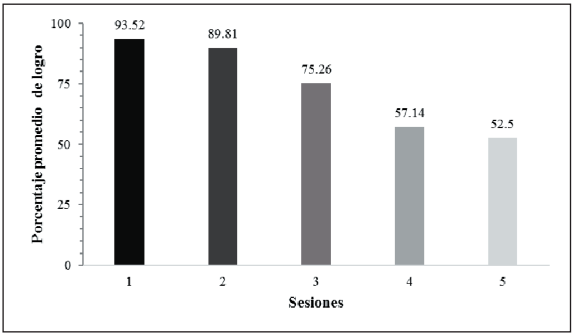


Figura 12. Porcentaje de logro promedio en las sesiones de la secuencia psicoeducativa

En la primera sesión, el puntaje promedio de los alumnos fue de 93.52%. En la segunda sesión el promedio del puntaje fue de 89.81%, mientras que en la tercera sesión la media del puntaje fue de 75.26%. En la cuarta sesión la media del puntaje fue de 57.14% y en la última sesión el promedio de la puntuación fue de 52.5%. Estos promedios permiten apreciar que en medida que las sesiones avanzaban, las tareas se volvían más complejas, por lo que el puntaje promedio disminuía.

4.2. *Nivel de logro en las evaluaciones procedimental y conceptual*

Para categorizar el desempeño de los estudiantes en las evaluaciones procedimental y conceptual, se utilizaron los puntajes totales de cada alumno en sus respuestas correctas a través de cuartiles: porcentaje de respuestas correctas, desempeño muy alto (100%-76%), alto (75%-51%), medio (50%-26%) y bajo (25%-0%). En la figura 13 se muestran los resultados categorizados en estos cuartiles.

En la evaluación procedimental, el 64.29% de los alumnos lograron un nivel de logro muy alto, un 17.86% un nivel de logro alto, solamente un 3.57% lograron un nivel medio y el restante 14.29% mostraron un nivel bajo. Por otra parte, en la evaluación conceptual, un 42.86% de los alumnos lograron un nivel de logro muy alto, un 28.57% un nivel alto, el 10.71% un nivel medio y un 17.86% un nivel de logro bajo. Cabe destacar que la evaluación conceptual se basa en una mayor cantidad de recursos de evaluación, principalmente aquellos basados en el análisis de los alumnos acerca de sus propias representaciones y toma de decisiones, por lo que es esperado que sea una evaluación más compleja y con un menor nivel de logro que la evaluación procedimental.

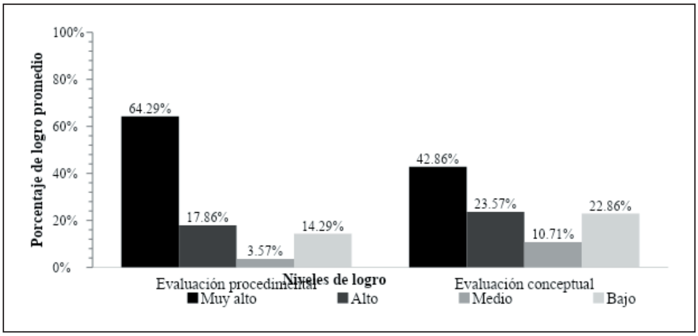


Figura 13. Porcentaje de logro en las evaluaciones procedimental y conceptual

4.3. *Entendimiento con base en análisis de contenido del discurso*

Para evaluar el entendimiento de los alumnos, se emplearon dos situaciones reactivas (ver figura 11, parte inferior, número 1 y 2). Los siguientes fragmentos de la entrevista semiestructurada implementada corresponden a dos alumnos de los niveles de logro muy alto y alto.

Caso #1: nivel de logro *muy alto*

Investigador: en la primera expresión “3 + 5 × 4 es igual a:”, ¿por qué elegiste la opción “b”?

Estudiante: es lo mismo, aquí está el 3 y es igual que arriba, 4 por 5 es 5 veces 4 o 4 veces cinco, por eso son iguales.

Investigador: en la primera expresión “4 + 5 × 3 + 6 × 2 + 7 es igual a:”, ¿por qué elegiste la opción “a”?

Estudiante: porque aquí está el 4, aquí el signo y luego 3 veces el cinco, luego dos veces el 6 luego el signo y luego el 7.

Investigador: ¿Qué operación se hace primero y por qué?

Estudiante: Multiplicar, porque están unidos los números de aquí, cuando multiplicamos. Si sumamos primero, aquí sería 2 más 46 y no nos daría el resultado correcto.

Investigador: ¿Qué pasaría con la igualdad si comenzáramos con la operación contraria a la que acabas de indicar que comenzarías primero?

Estudiante: Sale mal el resultado porque está diferente la manera de la operación… ya lo pensé mejor, por ejemplo, una de estas multiplicaciones, 3 más 5 serían 8, pero se va a cambiar el 8 por el 5… eso hace que nos dé el resultado mal y el total esté más grande o pequeño.

Por eso primero multiplicamos aquí, no sumamos. La suma es trampa para hacerla más grande o chiquita y el resultado se obtiene con la multiplicación.

Investigador: ¿Cómo podrías representar la relación entre la multiplicación y la suma en una igualdad con cantidades que varían?

Estudiante: … a lo mejor usando los signos en las clases le hacíamos con los dulces que nos llevábamos, pero eran dulces y aquí pueden ser nada más los números.

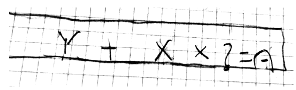


Figura 14. Representación simbólica del caso #1

Caso #2: nivel de logro *alto*

Investigador: en la primera expresión “3 + 5 × 4 es igual a:”, ¿por qué elegiste la opción “b”?

Estudiante: Porque si son 3 y lo multiplicamos 5 por 4, pues comenzamos por esa en vez de la suma. Es como si estuviera dividido el 5 y el 4.

Investigador: en la primera expresión “4 + 5 × 3 + 6 × 2 + 7 es igual a:”, ¿por qué elegiste la opción “a”?

Estudiante: Creo que es A, sí, es A, es la descomposición, aquí es cinco veces 3 y luego 6, a no, dos veces 6 y luego sumamos el 7.

Investigador: ¿Qué operación se hace primero y por qué?

Estudiante: Multiplicar. Porque si sumamos primero nos da una otro resultado, porque la multiplicación hay que hacerla para que nos dé el número, el resultado… si se suma primero el resultado se pierde, la multiplicación se haría, pero con otros números en el total.

Investigador: ¿Qué pasaría con la igualdad si comenzáramos con la operación contraria a la que acabas de indicar que comenzarías primero?

Estudiante: Nos daría un resultado mal si sumamos primero. Porque nos daría un resultado, por ejemplo, el 3 nos daría 8, por 4, 32, pero ese no es el resultado y no se descompondría.

Investigador: ¿Cómo podrías representar la relación entre la multiplicación y la suma en una igualdad con cantidades que varían?

Estudiante: … no sé, con números pues no puedo poner todos, pero a lo mejor con signos. En las clases con usted veíamos que hay como símbolos que usamos más que otros… yo lo haría así de dos maneras:

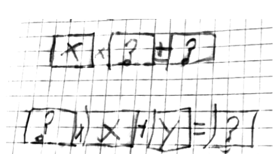


Figura 15. Representación simbólica del caso #2

4.4. *Evaluación de la validez de los indicadores*

Se aplicó el Rho de Spearman a los datos obtenidos en todos los indicadores del experimento de enseñanza (ver figura 4).

En la figura 16 se muestran las correlaciones (α < 0.05) en los indicadores que midieron el desempeño de los alumnos.

	PLANEA	*WISC IV Aritmética*	*Puntaje Matemáticas*	*Evaluación procedimental*	*Evaluación conceptual*	*Promedio secuencia*
Promedio secuencia	.532** .002	.476** .008	.592** .001	.508** .004	.731** .000	1
Evaluación conceptual	.496** .005	.471** .006	.695** .000	.776** .000	1	
Evaluación procedimental	.296** .025	.286** .012	.446** .013	1		
Puntaje en Matemáticas	.639** .000	.798** .000	1		α < 0.05**	
WISC IV Aritmética	.698** .000	1				
PLANEA	1		*Rho*	*Spearman*	*ρ*	
0-0.149	0.150-0.299	0.300-0.449	0.450-0.599	0.600-0.749	0.750-0.899	0.900-1

Figura 16. Correlaciones significativas entre los indicadores del experimento de enseñanza.

Las correlaciones más altas se ubican entre la calificación de los alumnos en matemáticas durante el año escolar con el puntaje de la prueba WISC IV (0.798 (p < 0.000)) y el desempeño de los escolares en la evaluación conceptual y procedimental (0.776 (p < 0.000)). La evaluación conceptual también tuvo una alta correlación entre el promedio de la secuencia (0.731 (p < 0.000)) y el puntaje de matemáticas (0.695 (p < 0.000)). La prueba PLANEA tuvo dos correlaciones altas entre el puntaje de la prueba WISC IV (0.698 (p < 0.000)) y el puntaje de matemáticas (0.639 (p < 0.000)). Por otra parte, el indicador de evaluación procedimental tuvo las correlaciones más bajas tanto con las dos pruebas estandarizadas de referencia como con el puntaje de los alumnos en matemáticas.

5. Discusión

El objetivo general de este estudio fue promover el pensamiento relacional en el análisis de expresiones numéricas, utilizando la jerarquía de operaciones, en alumnos de tercer grado de primaria. En vista de los resultados reportados, se puede afirmar que el objetivo se cumplió plenamente.

En primer lugar, es importante destacar que los resultados de las tareas de jerarquía de operaciones en población de alumnos de primaria son inéditos, en tanto no hay referentes en la literatura contemplando como variables de estudio el pensamiento relacional y las actividades fenoménicas. El referente en la literatura más cercano a los resultados del presente estudio, sin considerar el área de jerarquía de operaciones, se encuentra en la investigación de Venenciano et al. (2021), en la cual escolares de primer grado de primaria fueron capaces de desarrollar modos de pensamiento abstractos a partir de una aproximación relacional y estructural en la representación de las propiedades de objetos concretos, derivada de una adaptación del currículum de Davydov.

El 71.43% de los escolares, alcanzaron un nivel de logro de las tareas de evaluación conceptual muy alto o alto. De estos, el 42.86% lograron alcanzar un nivel muy alto de logro y un 28.57% lograron un logro en la evaluación conceptual alto. Esta evaluación tuvo un mayor nivel de relación con el constructo entendimiento, ya que se basó en un mayor nivel de recursos de evaluación: 1) un aspecto relacional, al evaluar el razonamiento de los alumnos en función de las equivalencias que observaban y cómo daban cuenta de ellas en su discurso; 2) el dominio conceptual de la jerarquía de operaciones, en su relación con estructuras de aritmética generalizada a partir del uso e interpretación de literales. Además, en varios casos las actividades fenoménicas promovieron una relación significativa con una representación abstracta de relaciones numéricas, como en el caso de las figuras 14 y 15.

El pensamiento relacional se ve reflejado en la argumentación de las soluciones de los alumnos, principalmente en la evaluación conceptual. En sus representaciones se muestra no solamente un modo simbólico de representar relaciones, sino un nivel de entendimiento conceptual con base en argumentos que sustentan sus decisiones.

Este estudio siguió una línea de investigación planteada por varios autores (Dupree, 2016; Glidden, 2008; Linchevski y Livneh, 1999: Papadopoulos y Gunnarsson, 2020; Taff, 2017), en cuanto a que la estructura de una expresión matemática requiere de un grado de significación para los alumnos, en la aplicación de las propiedades numéricas que contemplan la jerarquía de operaciones. El mayor aporte al campo de conocimiento de la jerarquía de operaciones consiste en generar la significación, en alumnos de primaria, de las propiedades numéricas a partir de actividades fenoménicas. En otras palabras, la integración del pensamiento relacional y las tareas fenoménicas a la estructuración numérica característica de la jerarquía de operaciones, lograron promover un entendimiento de tareas abstractas en alumnos de primaria.

El efecto de las actividades fenoménicas en la concepción relacional y estructural se puede notar en la evaluación conceptual, ya que a pesar de que las actividades de evaluación no se relacionaron directamente con la representación simbólica, en los dos casos presentados existió una relación entre las actividades fenoménicas de las sesiones de la secuencia psicoeducativa con su estructura numérica. Tal como en el presente estudio, este tipo de actividades han mostrado con anterioridad su eficacia en el entendimiento de conceptos matemáticos desde la perspectiva de la didáctica fenomenológica (Gravemeijer y Doorman, 1999; Larsen, 2013; Stephan y Akyuz, 2012).

Por otra parte, los resultados confirman que los alumnos de tercer grado de primaria pueden participar activamente en experiencias simbólico-algebraicas, que impliquen argumentar y representar la solución de un problema que contemplen el pensamiento algebraico, tal como lo afirman Blanton, Brizuela, Stephens, Knuth, Isler, Gardiner et al., (2017), quienes también indican que las intervenciones tempranas en álgebra con escolares de primaria, han demostrado mejorar el entendimiento algebraico de los alumnos, en los niveles de secundaria o bachillerato.

Si el desarrollo del pensamiento algebraico incluye un enfoque las relaciones de cantidad, las operaciones y sus inversos, así como representar y resolver problemas con números y literales a partir de un significado relacional del signo igual, tal como lo afirma Kieran (2004), todas las tareas del experimento de enseñanza se implementaron con una base conceptual derivada del pensamiento algebraico. Por lo tanto, los niveles de logro en los alumnos también se pueden vincular a la promoción del pensamiento algebraico. La representación de una estructura numérica se vincula con la jerarquía de operaciones a través del pensamiento algebraico, tal como lo afirma Freudenthal (1974). El uso del signo de interrogación, si bien no es parte de las convenciones acerca del empleo de literales en álgebra, representa un acercamiento para los escolares hacia la noción de incógnita o variable.

Asimismo, como parte de la validación de constructo convergente de los instrumentos utilizados en el experimento de enseñanza, las correlaciones entre los distintos indicadores muestran la consistencia y coherencia entre el desempeño de los alumnos con su grado de dominio matemático, en tareas de jerarquía de operaciones y estructuración numérica.

Las hipótesis del presente estudio, dados los resultados evaluados, se pueden confirmar: el pensamiento relacional se puede promover a partir de actividades fenoménicas; la introducción del pensamiento relacional en la aplicación de la jerarquía de operaciones puede promover habilidades de representación estructural de relaciones de cantidad.

5.4. *Importancia del estudio: enseñanza y aprendizaje de las matemáticas*

Se puede concluir que este estudio permite señalar la coherencia que hubo en los múltiples indicadores del desempeño de los escolares gracias a la evaluación de validez de los indicadores; mostrar que la estrategia educativa tiene factibilidad de ser implementada por un profesor de primaria en las condiciones escolares cotidianas; sustentar que en un escenario natural de la escolaridad pública de una primaria, es posible formar pensamiento relacional; evaluar el potencial de las experiencias fenoménicas para el entendimiento matemático y demostrar que los escolares a temprana edad, son capaces de entender jerarquía de operaciones a través del pensamiento algebraico y relacional, contemplando el potencial de la didáctica fenomenológica.

Agradecimientos

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (registro 609098 - beca 450414) por su soporte financiero, a los integrantes de la escuela primaria “Acayucan” y a la Universidad Nacional Autónoma de México – FES Iztacala – Programa de Investigación PsicoEducativa.

Referencias bibliográficas

Blanton, M., Brizuela, B. M., Stephens, A., Knuth, E., Isler, I., Gardiner, A. M., … Stylianou, D. (2017). Implementing a Framework for Early Algebra. In C. Kieran (Ed.), *Teaching and Learning Algebraic Thinking with 5 – to 12-Years-Olds* (pp. 79-105) Montreal: Springer.

Blanton, M. y Kaput, J. J. (2005). Characterizing a classroom practice that promotes Algebraic reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education*, 36 (5), 412-446.

Bourbaki, N. (1963). *Essays on the History of Mathematics.* Moscú: IL.

Carpenter, T. P., Franke, M. L., y Levi, L. (2003). Thinking mathematically: Integrating arithmetic and algebra in the elementary school. Portsmouth, NH: Heinemann.

Carpenter, T. P., Levi, L., Franke, M. L., y Zeringue, J. K. (2005). Algebra in elementary school: Developing relational thinking, *ZDM*, 37(1), 53-59.

Carraher, D. W., y Schliemann, A. D. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. In F. K. Lester, Jr. (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 669–705). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Common Core State Standards Initiative [CCSSM] (2010). Common Core State Standards for Mathematics. Washington, DC: National Governors Association Center for Best Practices and the Council of Chief State School Officers.

Davydov, V. V. (1962). An experiment in introducing elements of algebra in elementary school. *Soviet Education*, 8, 27-37.

Dupree, K. M. (2016). Questioning the Order of Operations. *Mathematics teaching in the Middle School*, 22 (3), 152-159.

Freudenthal, H. (1971). Geometry between the devil and the deep sea. In The teaching of geometry at the pre-college level (pp. 137-159). Springer, Dordrecht.

Freudenthal, H. (1974). Soviet research on teaching algebra at the lower grades of elementary school. *Educational Studies in Mathematics*, 5, 391-412.

Freudenthal, H. (1983). Didactical phenomenology of mathematical structures. Reidel Publishing, Dordrecht.

Glidden, P. L. (2008). Prospective Elementary Teachers' Understanding of Order of Operations. *School Science and Mathematics*, 108 (4), 130-137.

Gravemeijer, K. y Doorman, M. (1999) Context problems in realistic mathematics education: a calculus course as an example. Educational Studies in Mathematics 39 (1–3), 111–129.

Gunnarsson, R. Sönnerhed, W. W. y Hernell, B. (2016). Does it help to use mathematically superfluous brackets when teaching the rules for the order of operations? *Educational Studies of Mathematics*, 92, 91-105.

Headlam, C. (2013). An investigation into children understanding of the order of operations. Tesis Doctoral. Plymouth: Plymouth University.

Herscovics, N. y Kieran, C. (1980). Constructing meaning for the concept of equation, *Mathematics Teacher*, 73, 572-580.

Johnson, D., y Johnson, R. (2014). *La evaluación en el aprendizaje cooperativo. Cómo mejorar la evaluación individual a través del grupo*, Madrid, Ediciones SM.

Kaput, J. J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? In J. J. Kaput, D. W. Carraher, y M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 5–17). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 390–419). New York: Macmillan.

Kieran, C. (1996). The changing face of school algebra. In: C. Alsina, J. Alvarez, B. Hodgson, C. Laborde, y A. Pérez (Eds.), *8th International Congress on Mathematical Education: Selected lectures* (271-290). Seville, Spain: S. A. E. M. Thales.

Kieran, C. (2004). Algebraic Thinking in the Early Grades: What Is It? *The Mathematics Educator*, 8 (1), 139-151.

Kieran, C. (2017). Seeking, Using, and Expressing Structure in Numbers and Numerical Operations: A Fundamental Path to Developing Early Algebraic Thinking. In C. Kieran (Ed.), *Teaching and Learning Algebraic Thinking with 5 – to 12-Years-Olds* (pp. 79-105) Montreal: Springer.

Kieran, C. y Chalouh, L. (1993). The transition from arithmetic to algebra. In T. D. Owens (Ed.), *Research ideas for the classroom: Middle grades mathematics* (179-198). New York: Macmillan Publishing Company.

Kieran, C., Pang, J. S., Ng, S. F., Schifter, D., y Steinweg, A. S. (2017). Topic Study Group 10: Teaching and learning of early algebra. In G. Kaiser (Ed.), *The Proceedings of the 13th International Congress on Mathematical Education*. New York: Springer.

Knuth, E. J., Stephens, A. C., McNeil, N. M., y Alibali, M. W. (2006). Does Understanding the Equal Sign Matter? Evidence from Solving Equations. *Journal for Research in Mathematics Education, 37* (4), 297-312.

Kvale, S. (2008). Qualitative inquiry between scientistic evidentialism, ethical subjectivism and the free market. *International Review of Qualitative Research*, 1(1), 5-18.

Larsen, S. (2013) A local instructional theory for the guided reinvention of the group and isomorphism concepts. Journal of Mathematical Behavior, 32 (4), 712–725.

Linchevski, L., y Livneh, D. (1999). Structure sense: The relationship between algebraic and numerical contexts. *Educational Studies in Mathematics*, 40, 173–196.
Liebenberg, R., Sasman, M. y Olivier, A. (1999). From numerical equivalence to algebraic equivalence. *Proceedings of the Fifth Annual Congress of the Association for Mathematics Education of South Africa*, 2, 173-183.
Miller, S. P., y Mercer, C. D. (1993). Using data to learn Concrete-Semiconcrete-Abstract instruction for students with math disabilities. *Learning Disabilities Research and Practice*, 8, 89–96.
Molina, M. (2006). *Desarrollo de pensamiento relacional y comprensión del signo igual por alumnos de tercero de educación primaria*. Tesis doctoral. Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada.
Molina, M. (2009). Una propuesta de cambio curricular: integración del pensamiento algebraico en educación primaria, *PNA*, 3 (3), 135-156.
Molina, M., Castro, E., y Ambrose, R. (2006). Trabajo con igualdades numéricas para promover pensamiento relacional. *PNA*, 1(1), 31-46.
National Council of Teachers of Mathematics [NCTM] (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
Papadopoulos, I., y Gunnarsson, R. (2020). Exploring the way rational expressions trigger the use of “mental” brackets by primary school students. *Educational Studies in Mathematics*, 103(2), 191-207.
Riadi, A., Atini, N. L., y Ferita, R. A. (2019). Thinking Skills of Junior High School Students Related to Gender. International Journal of Trends in Mathematics Education Research, 2(3), 112-115.
Slavin, R. E. (1995). *Cooperative learning: Theory, research, and practice*. (2ª edición). Boston: Allyn y Bacon.
Stephens, M. (2007). Students’ emerging algebraic thinking in the middle school years. *Mathematics: Essential research, essential practice*, 2, 678-687.
Stephens, M., y Ribeiro, A. (2012). Working towards algebra: The importance of relational thinking. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 15(3), 373-402.
Taff, J. (2017). Rethinking order of operations (or what is the matter with Dear Aunt Sally). *Mathematics Teacher*, 111 (2), 126-132.
Venenciano, L.C., Yagi, S.L., y Zenigami, F.K. (2021). The development of relational thinking: a study of Measure Up first-grade students’ thinking and their symbolic understandings. *Educational Studies in Mathematics*, 1-16.
Warren, E., y Cooper, T. J. (2009). Developing Mathematics Understanding and Abstraction: The case of Equivalence in the Elementary Years. *Mathematics Education Research Journal*, 21 (2), 76-95.
Witzel, B. S., Mercer, C. D., y Miller, M. D. (2003). Teaching algebra to students with learning difficulties: An investigation of an explicit instruction model. *Learning Disabilities Research & Practice*, 18(2), 121-131.
Zorin, B. y Carver, D. (2015). Operation: Save Aunt Sally. *Mathematics Teaching in the Middle School*. National Council of Teachers of Mathematics, 20 (7), 438.443.

Autores

Uriel Escobar Durán. Universidad Nacional Autónoma de México, México.
urielescobar.unam@gmail.com
Felipe Tirado Segura. Universidad Nacional Autónoma de México, México.
ftirado@unam.mx

Celina Pestano, Concepción González, Mª. Candelaria Gil

ANALYSIS OF THE CRITICAL ATTITUDE OF UNIVERSITY SOCIAL SCIENCES STUDENTS TOWARD THE USE OF COMPUTING SOFTWARE

RESUMEN

Esta investigación se enmarca en el contexto de la formación matemática universitaria de estudiantes de ciencias sociales, en particular, en el ámbito de la economía, la empresa, la contabilidad y las finanzas. Surge de la deficiencia observada en la formación de los estudiantes, lo que les lleva a confiar en la exactitud de los resultados obtenidos mediante cualquier software matemático especializado y ampliamente reconocido. Algunos de ellos saben que el software puede equivocarse, pero creen que sólo ocurrirá en ejercicios de un nivel muy superior al que les afecta, es decir, los que tienen que ver con áreas estrictamente científicas. La investigación confirma que esta confianza ciega es cierta, y justifica por qué deben tener una actitud crítica hacia el uso de software a cualquier nivel. También proporciona una de las múltiples respuestas a la pregunta que algunos de ellos se hacen: ¿Por qué dedicar tiempo de clase a los métodos y a ciertos pasos de los algoritmos si el ordenador puede resolver los ejercicios?

PALABRAS CLAVE:

- *Educación tecnológica*
- *Educación matemática*
- *Pensamiento crítico y creativo*
- *Dualidad teoría-computación*

ABSTRACT

This research is in the context of university mathematics education for social sciences students, in particular, in the fields of economics, business, accounting and finance. It arises from the observed deficiency in the training of students that leads them to trust the accuracy of results obtained through any specialized and widely recognized mathematical software. Some of them know that the software can be mistaken, however they believe that it will only occur in exercises at a far higher level than that affecting them, meaning those involving strictly scientific areas. The research confirms that this blind trust is true, and justifies why they should have a critical attitude toward the use of software at any level. It also provides one of multiple answers to the question that some of them ask: Why devote class time to the methods and certain steps in the algorithms if the computer can solve the exercises?

KEY WORDS:

- *Technology education*
- *Mathematics education*
- *Critical and creative thinking*
- *Theory-computation duality*

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (2021) *24* (1): 35 - 60.
Recepción: Octubre 25, 2019 / Aceptación: Noviembre 4, 2020. DOI: 10.12802/relime.21.2412

RESUMO

Esta pesquisa está no contexto da educação matemática universitária para estudantes de ciências sociais, em particular, nas áreas de economia, negócios, contabilidade e finanças. Ela surge da deficiência observada na formação dos estudantes que os leva a confiar na exatidão dos resultados obtidos através de qualquer software matemático especializado e amplamente reconhecido. Alguns deles sabem que o software pode estar equivocado, porém acreditam que ele só ocorrerá em exercícios de um nível muito superior ao que os afeta, ou seja, aqueles que envolvem áreas estritamente científicas. A pesquisa confirma que esta confiança cega é verdadeira, e justifica por que eles devem ter uma atitude crítica em relação ao uso de software em qualquer nível. Ela também fornece uma das múltiplas respostas à pergunta que alguns deles fazem: Por que dedicar tempo de aula aos métodos e certos passos nos algoritmos, se o computador pode resolver os exercícios?

PALAVRAS CHAVE:

- *Educação tecnológica*
- *Educação matemática*
- *Pensamento crítico e criativo*
- *Dualidade teoria-computação*

RÉSUMÉ

Cette recherche s’inscrit dans le contexte de l’enseignement des mathématiques à l’université pour les étudiants en sciences sociales, en particulier dans les domaines de l’économie, du commerce, de la comptabilité et de la finance. Elle découle de la déficience observée dans la formation des étudiants qui les conduit à faire confiance à l’exactitude des résultats obtenus par tout logiciel mathématique spécialisé et largement reconnu. Certains d’entre eux savent que le logiciel peut se tromper, mais ils croient que cela ne se produira que dans des exercices d’un niveau bien supérieur à celui qui les concerne, c’est-à-dire ceux impliquant des domaines strictement scientifiques. La recherche confirme que cette confiance aveugle est vraie, et justifie pourquoi ils devraient avoir une attitude critique envers l’utilisation de logiciels de tout niveau. Elle apporte également une des multiples réponses à la question que certains d’entre eux se posent : pourquoi consacrer du temps en classe aux méthodes et à certaines étapes des algorithmes si l’ordinateur peut résoudre les exercices ?

MOTS CLÉS:

- *Enseignement technologique*
- *Enseignement des mathématiques*
- *Pensée critique et créative*
- *Dualité théorie-calcul*

1. Introduction

Critical thinking is a fundamental aspect to be developed in education (Facione (2007), European Commission (2015), Jaramillo et al. (2016) ...), and it must be encouraged in all individuals in any context: science, history, literature, politics, ethics, and in everyday life in general. The definition of critical thinking that we find in specialized literature contemplates a wide range of components and skills, which makes it difficult to provide a concrete definition. One aspect that is generally mentioned is the ability to make autonomous decisions based on reasoned and justified criteria. Therefore, it is inextricably linked to scientific education and, in particular, to the mathematical method, which relies on the exposition of principles or axioms, reflection, interrelation of concepts and rigor. In turn, it is closely related to creativity, imagination and innovation, characteristics that are increasingly essential for scientific and social progress.

Our research is based on the hypothesis that, except perhaps for mathematicians, engineers, computer scientists and physicists, it is common for most students in a first-year university course in social sciences to blindly trust the results of computers and to question the need to learn the steps in the algorithms and their properties, if problems can be solved using specialized and recognized mathematics software. Therefore, in this paper our aim is to reveal a poor critical attitude toward software in university social sciences students, to justify that software results cannot be relied upon blindly and to develop a critical attitude toward computer software in the context of mathematics education.

We understand the term critical attitude to mean the capacity or ability to detect, in some cases, erroneous or confusing results and, in others, the ability to justify, without a doubt, that a result is indeed correct. This disposition is undoubtedly necessary for self-learning in any context.

In the areas of economics, business, accounting and finance, as in many others, using software of all kinds is unavoidable: social media, computer software, verification and use of databases, which is growing exponentially due to the increased memory available in general-use platforms and computers, etc. Some authors have researched how the use of technology is changing even the way we act and make decisions (Rossi, 2017), and the role of university teachers in this new context (Rodrigo Cano et al., 2018).

From a quantitative point of view, the dimension of actual problems in terms of the volume of data available and the number of variables required makes solving them by hand untenable. The study we describe in this work involves first-year university students who are not yet familiar with large databases, but who are in the perfect position to become citizens trained in their chosen fields. Their education will require them to use both quantitative and qualitative data extensively, data that must be processed using advanced software. In particular, where *big data* is involved. At the same time, they must also interpret and contextualize these data and be critical of the algorithms used and conscious of the decisions, correct and incorrect, that said algorithms can output.

This context requires a methodological reflection of some depth in order to avoid the various types of errors that can be made. On the one hand, to avoid personal errors when using any software, it is recommended that manuals or user forums (usually created to provide mutual assistance) be consulted. However, to avoid interpretation errors require more solid, broader knowledge that is in no case provided by the software itself or its manual. On the other hand, all software contains programming errors, as these are algorithms designed by people. Although it is not in our power to correct this type of error, we can mitigate its consequences, and that is a primary focus of this paper.

We note below some of the papers that are most closely related to our study. For example, Ponce and Rivera (2011) involving high school students analyzes examples of calculating the primitives of a function using different software packages; Jehlicka and Rejsek (2018) provides a didactic proposal to illustrate the limitations of calculations made by computer due specifically to finite arithmetic. In a more scientific field and at the level of mathematics majors, Ciaurri and Varona (2006) considers if we can rely on calculations done by a computer, which was an important motivation behind our own research. The authors assume that errors in numerical results due to floating point arithmetic and problems of stability in numerical algorithms are well known by students because they are covered in the courses taken by mathematics majors. However, as they emphasize, the errors that can occur in symbolic computation, if finite arithmetic is not used, are less known. Some of the errors mentioned in Ciaurri and Varona (2006) using the *Mathematica* software have been corrected in later versions. However, as this type of software introduces new algorithms, in our work it is implicit that we can always find examples that will be affected by certain errors of varying importance.

As far as we could review the references consulted, we could not find any didactic proposals to achieve one of our objectives of assessing the critical attitude toward software of first-year economics and business majors, whose level of mathematics is more basic than that of, say, physics or engineering majors. Specifically, most of the books or papers recommended to the students of the subjects in our context, in which the use of various mathematical software packages is encouraged as a reasoning aid, do not warn of any potential errors in the software of the kind considered in this paper; rather, they focus on teaching different programs, depending on the author, to solve the exercises proposed and highlighting the increasing advantages of everything digital (González Pareja, 1997, 1999, Cahill and Kosicki, 2001, Barrios-García et al., 2005, 2006, Franco-Brañas, 2011, Hillier and Liberman, 2010, Taha, 2012, Cardeño and Córdoba, 2013).

As far as we know, critical thinking when using software in the social sciences context that we consider has not been properly investigated and is not being addressed, especially as it involves errors due to reasons other than those that result from the limitations of finite arithmetic. Thus, our approach of providing examples adapted to the level of economy, accounting and business majors is novel. Many readers will be surprised by the presence of programming errors in very basic problems. Therefore, one of our goals is to have university social sciences students ask for mathematical theory by having them recognize that software does not solve every problem. We also wish to make them aware of the fact that mathematical results obtained with a computer are not as infallible and accurate as they generally believe. As a consequence, we want them to appreciate even more the need to know the mathematical theory that underlies, for example, the models of mathematical economics. This theory is the only measure available to gauge the reliability of the results of such models. Therefore, when solving problems, even if they are using the best computer programs, they have to be mindful of employing critical thinking and creative reasoning at all times. Specifically, in keeping with Facione (2007), we believe that critical thinking skills (interpretation, analysis, evaluation, inference, explanation and self-regulation) can be acquired through mathematical training, provided that students are open to it by being inquisitive, judicious, systematic, analytical, truth-seeking, open-minded and confident in their reasoning. Also, as per Lithner (2008), our proposal would lead students to a necessarily creative attitude as it requires a process of reasoning and argumentation beyond the purely imitative. We cite the task provided in Olsson (2018) as an example of a learning activity that, through software interaction (in this case, *Geogebra*), encourages the same type of creative reasoning that is needed in our didactics, although its objective does not involve ensuring that there are no errors due to the software, but rather the need to discover the method that must be applied to arrive at a solution.

From the instructor's point of view, our work exposes the need to enrich the literature with new didactic proposals that help students develop critical thinking and creative reasoning when using software at any level. To this end, we provide material, part of which we have used to identify and assess the deficiency mentioned, in two areas, one to complete our training as instructors and another to design exercises aimed at students. The objective of completing and updating the set of exercises with a variety of original activities that require the student to ensure, in several ways, the goodness of the results that may be obtained through software will always remain open.

We also believe that this work contributes to increasing the multidisciplinary interest in STEM (Science, Technology, Engineer, Mathematics) subjects. As observed in, for example, Kolstø (2001), Elías (2008), Jehlicka and Rejsek (2018), and several of their references, although secondary and university students throughout all the world often employ technological means, the interest in science and technology in depth has declined enormously. For the most part, students' use of technology is very superficial, essentially at the level of end users who are fully reliant on the tool at their disposal. In this sense, references such as, for example, Bruton and Coll (2005), Lorenzo (2005), Carreras-Marin et al. (2013) try to encourage an interest in mathematics by creating links between theoretical and real problems and emphasizing multidisciplinarity. Increasingly, educators recognize the need to develop skills associated with the productive use of computing. Mathematics is thus undergoing a change in terms of the tools available to teachers and the possible ways to help students explore the potential of this discipline in various contexts (Pei et al., 2018).

In the next section, we explain the research methodology that we employed. In Section 3, we describe some of the materials that we as teachers have been gathering and that shaped the objective of critical thinking focused on teaching mathematics in economics and business, using computer software. The exercises selected involve matrix algebra and mathematical optimization, which are closely related to the applications in our area of interest. Section 4 describes the implementation of the classroom experiment, and includes the results obtained by the students and the group discussion. We finish with some conclusions and bibliographical references.

2. Research methodology

We followed the five interrelated phases shown in Figure 1.

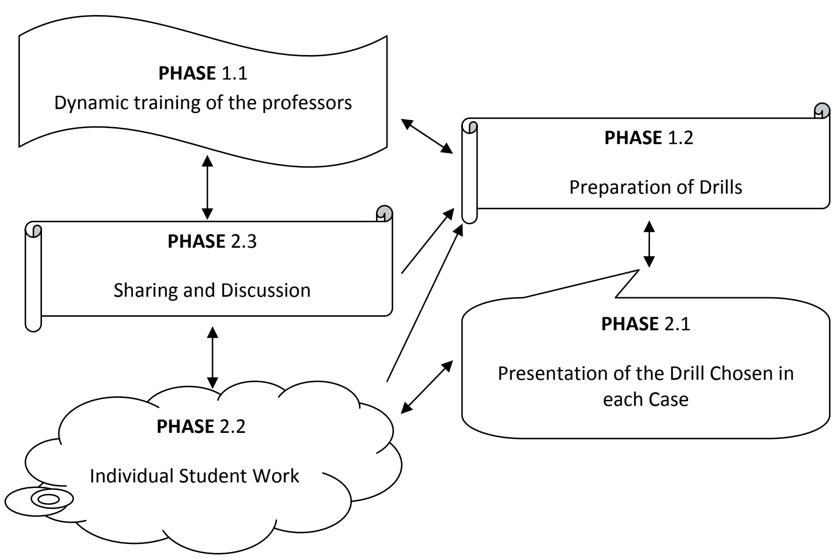


Figure 1. The five phases of the research methodology

The research methodology was constantly enhanced by the questions posed by our students regarding the convenience and limits of the use of theory and computation, and the reasons why one cannot be replaced by the other. This teacher-student relationship gives a circular character to this methodology, as indicated by the dual direction of some arrows, as appropriate. The border separating the work of the faculty and the students is very diffuse, although we can say that Phase 1.1 focuses on the faculty while Phase 2.2 corresponds exclusively to the students. Either one can mark the start point of the methodology. For the faculty, the methodology includes the five phases. Feedback is used to round out and update the teaching method. For the students, the practical exercises begin in Phase 2.1 and end in Phase 2.3.

2.1. *Description of the phases*

Phase 1.1- Dynamic training of the professors (*and research question Q1*)

The faculty has advanced mathematical training and routinely uses computer software as a problem-solving tool. However, this experience has taught us to be more critical in how we conduct our teaching by observing how students behave toward computer results. Therefore, we had to acknowledge the need for more dynamic training, if possible, if the goal is to use computer software to give students a critical and creative attitude. Therefore, in Phase 1.1, the professors must first find simple exercises suitable for a first-year social science course in which a specialized, powerful and prestigious mathematics software package (such as *Mathematica, Matlab, Maxima, Geogebra* or *Derive*) performs erroneously or confusingly. They also have to find a way to present them to students so that they not only learn to compute, but also acquire a critical attitude toward the use of software. It must be borne in mind that correcting the source codes is not within the reach of the user, and even if it were, it would be beyond the scope of this work.

Since the examples of errors that we have found in the mentioned references are not at the basic level required for our courses, and most of them were corrected in later versions, our first goal is to provide an answer to the following research question:

Q1: Is it possible to find interesting examples at the level of mathematics courses taught to first-year economics, business and finance majors that easily convince our students that they should not accept, without question, the results obtained through mathematical software (regardless of how well-regarded the software is and of how many improved versions have been marketed over the years)?

To this end, we started by computationally solving the Collection of Proposed Exercises that are presented in the course using theoretical mathematical methods. We chose the free online platform of *Mathematica* software, i.e., *Wolfram Alpha* (https://www.wolframalpha.com/), hereinafter *WA*. The specific results obtained depend on this choice, but the essence of the research remains valid regardless of the software selected, since all software is prone to similar weaknesses and will sometimes yield confusing or erroneous answers. Despite this platform's limitations, we believe that this choice is suitable primarily because it is based on a powerful symbolic calculation program, *Mathematica*.

As we will see, the answer to question Q1 will be affirmative, and the faculty found the list of examples, which was broader than expected, to be highly enriching from the start, allowing us to advance to the following phase.

Phase 1.2 - Preparation of Drills (and research question Q2)

In this Phase, we focus on preparing Drills based on a Collection of Proposed Exercises for Computing. We choose those that would allow the student, on the one hand, to positively value the computational tool as a complement to the theory, inescapable in certain applications, and on the other, accept the fact that the results are not always infallible, even in very simple cases. Therefore, the students must be very attentive when employing these tools. Each drill contains exercises where the software performs well and others where the software behaves erroneously or incompletely, to see if the students identify the difference, or are at least mindful of it.

The exercises selected are not all those collected in Phase 1.1, since the goal is to have them be sufficiently direct for the students to be able to easily interpret the computed results. To ensure that students remain attentive and critical, the activities have been designed with no apparent difference between a problem that the software solves perfectly well and one that it solves erroneously or incompletely.

The exercises were selected in an effort to answer the following research question:

Q2: In general, do our students use the mathematical software mechanically and accept the results without questioning them?

Phase 2.1 - Presentation of the drill chosen in each case

This is the first phase that is carried out in the classroom, where the first part of the drill to be conducted is presented. In it, the students are informed that the goal is to have them solve the proposed exercises, theoretically and computationally, in order to compare the results. This work will be done individually at first (outside the classroom) and then, in the second part, it will be evaluated by way of a classroom test.

Previously, similar exercises will have been solved in class. They will have been told to be mindful of the results at all times due to potential mistakes that might be made and that can lead to confusing or incorrect findings, regardless of the method used. We note that students tend to rely more on the computer than on the results obtained by hand. They are encouraged to be critical of the computational results by offering them some very simple alternatives to self-discover potential errors, namely, theoretically solving the exercise and solving it computationally by using alternative commands, if they exist, or through other software. These alternatives should be available to students without additional explanations from the professor, who will be available if they need help. However, the goal is to have them identify their own mistakes and the limitations of the software.

So far the methodology has focused on developing the materials and presenting them in class so that students can, in some way, realize that there are always different alternatives to solve any mathematical exercise and that, sometimes, mistakes arise from blindly trusting the answer provided by the software. We can say that, this phase focused on achieving two objectives:

- To have the students learn mathematics and teach themselves to use computing software and discover its potential and need.
- To have the students run into limitations and be ready to be critical.

And as the course progresses, we will see if the students learn cautiously, with a critical attitude, or if the initial bias persists.

Phase 2.2 - Individual student work

In this Phase, the students do the first part of the drill individually outside the classroom, noting everything they deem appropriate both for and against the methods used, as well as any questions or suggestions for changing the proposed drill, any contradiction or confusion identified in the results and anything they believe to be of interest. In this step of the process, any questions or suggestions have to be presented directly to the professor and not to the group as a whole, as it could affect the findings of other students. The professor will determine if changes need to be made to the drill or if a previous phase has to be repeated.

While doing the drill outside the classroom, the students are asked to reflect on questions of the type: What new reasons am I identifying to determine whether or not to be critical of computations in my exercises? How can I validate, to the extent possible, the solutions obtained? How can I solve the problem creatively with alternative methods and/or with different computer programs? Should I investigate in the manual and online forums the specifics of each instruction and the limitations of the software? Am I aware of the need to continually acquire knowledge and experience in the subject at hand by asking someone with more experience, reading, etc.?

Phase 2.3 - Test and discussion

This individual work, by the teacher and students, culminates in a test and group discussion to highlight any problems encountered and to interpret the results. This phase is very important because it will reveal the scope and conclusions of the work carried out. This is the last phase for the students, but for the professors it is one more step in their dynamic training. We trust that a large majority of the students now accept the importance of being critical of their calculations, even if they are obtained using globally accepted computer programs. In addition, we will learn how each student suggests solving each problem, each error and discover new ways that we had not previously considered.

In this phase, both the faculty and students are asked a question of the type: What would you change in the drill done and what other type of exercise do you think can enhance the acquisition of a critical attitude toward computing?

And in the continuous answers, we discover that there are many other exercises to be done and that no software is free from potential errors, which feeds back our teaching and the training of all the agents. We trust that students will appreciate the acquisition of this critical attitude and will be motivated to extrapolate it to other subjects and circumstances in their daily life.

3. Search for materials to implement the study: answer to research question Q1

In this section we implement Phase 1.1 of the methodology and, for our training and to develop materials as instructors, we look for examples with results that are faulty, confusing or that could lead to errors. The errors that can result are due, on the one hand, to *Mathematica*'s poor programming of the theoretical methods used, which in turn can be limited and, on the other hand, to the specifics of a certain instruction that, even if they are detailed in the software documentation, will likely not be known to the users in question. Determining why a software error occurs relies on reviewing its source code, something that, as noted, is not within our reach. Our goal here is merely to describe the error and justify it by emphasizing that there is a contradiction in some sense.

It is important to note that software errors, in general, are not easy to detect, and given the level of our students, we have selected examples in which an error is evident or can be induced. Therefore, we must take the same precautions both when the software performs well and when its performance is wrong or confusing. We did not look directly for the examples presented in this section; rather, we found them over several years of teaching by being attentive, with a constructive critical attitude, to what might appear. It must be noted that some of the mistakes we found in the past have already been corrected in *WA*, and that we continue to find new ones, without looking for them, when solving new problems. It also happens that in the history of computing, updated versions of software have behaved worse in some specific aspect than the previous version (Ciaurri and Varona, 2006). It is thus necessary to note that the exercises that were solved using *WA* in this paper employed the version available in March 2019.

For this work, we decided to focus the search for examples and errors on two of the modules typically used in our courses: Matrix Algebra and Optimization. The former allows us to convey the usefulness of matrix language as a powerful symbolic tool for studying economic models formulated in terms of systems of linear equations (static, dynamic, multisector and other models) in the areas of consumer theory, production, cost and profitability analysis, etc. The latter provides an opportunity to train students on the mathematical tools needed to make efficient decisions in contexts where economic agents pursue multiple goals and the resources to obtain them are scarce or limited. In both, the examples we provide can constitute the preliminary, intermediate or final interpretive step in solving mathematical problems or in an applied economics context.

3.1. *Some cases involving Matrices and Systems of Linear Equations*

Example 1. Calculating the rank of a matrix with parameters.

Let us calculate, for example, the rank of the matrix (a^2 1 1 1 a^2 1 1 1 a^2 2+a^2 4–a^3). In *WA*, the instruction and the result are the following:

Instruction:	rank{{*a*^2,1,1,2+*a*^2},{1,*a*^2,1,4–*a*},{1,1,*a*^2,3}}
WA Result:	3

In this example, *WA* result leads to confusion or misinterpretation, as it does not warn that the rank is only 3 if $a\neq1$ or $a\neq-1$. It also does not mention that if $a=1$, the rank is 1 and if $a=-1$, the rank is 2, which is easily verified by substituting in these values.

To find out the reason for this mistake, the question we must ask is: When studying the rank with parameters, does *WA* never warn of the different cases? The first thing we must ask is if we are using the *Rank* instruction correctly. If we look into which *Mathematica* instruction *WA* uses to calculate the rank, we see that it is *MatrixRank*. We then look in *Mathematica Documentation* (https: //reference.wolfram.com/language/ref/MatrixRank.html) and find that when working with parameters, *Mathematica* assumes that every symbol is independent. It outputs the maximum rank, which will obviously lead to confusion or error as in the previous example, since we do not expect *WA* not to indicate the parameters for which the result is valid when it has the capacity to do so.

Next, we illustrate the influence of the error described with a simple case from applied economics:

Example 2. A consulting firm has in its portfolio three types of projects (A, B and C). Each type of project has different needs in terms of analysts, programmers and terminals, as indicated:

	Analysts	*Programmers*	*Terminals*
Type A	3	2	4
Type B	6	5	11
Type C	9	4	6

To develop the projects, the company has 20 programmers and 30 analysts. The number of computer terminals that will be available is not yet known. For what number of terminals made available, denoted by *M*, does the proposed problem have some combination of projects to be carried out in which every analyst, programmer and terminal is used?

Letting x, y and z denote the number of projects of type A, B and C, respectively, that the company can perform, the mathematical approach to this exercise would symbolically be: $3x+6y+9z=30$, $2x+5y+4z=20$, $4x+11y+6z=M$. The question posed can be asked equivalently as, for what values of M is this linear system consistent? According to the theorem of Rouché Frobenius, this is equivalent to checking whether the rank of the coefficient matrix (3 6 9 2 5 4 4 1 1 6) is equal to that of the augmented matrix of the system, (3 6 9 2 5 4 4 1 1 6 30 20 M). If we do the calculations using *WA*:

Instruction:	rank{{3,6,9},{2,5,4},{4,11,6}}	rank{{3,6,9,30},{2,5,4,20},{4,11,6,M}}
WA Result:	2	3

The results could lead us to conclude, erroneously, that the proposed system is inconsistent, meaning there is no solution to the problem presented. But the rank of the augmented matrix would in fact be 2 if M=40, and 3 if M≠40. Therefore, the correct answer is: it has a solution only if 40 computer terminals are made available.

Example 3. Misleading solution of linear systems

If we solve the linear system:

$$\begin{aligned} &x+y+z+t=1\\ &x+ay+z+t=1\\ &x+y+a^2z+t=1\\ &x+y+z+a^2t=1 \end{aligned}$$

Instruction	solve($x+y+z+t=1,x+ay+z+t=1,x+y+a^{2}z+t=1,x+y+z+a^{2}t=1$)
WA Results	$z=-t-x-y+1$ and $a=1$ $t=0$ and $y=0$ and $z=1-x$ and $a=-\sqrt[3]{-1}$ $x=1-t$ and $y=0$ and $z=0$ and $a=-\sqrt[3]{-1}$ $x=1-t$ and $y=0$ and $z=0$ and $a=(-1)^{2/3}$ $t=0$ and $x=1$ and $y=0$ and $z=0$ and $a^3\neq1$ and $a+1\neq0$

Note that if we look at line 3 of *WA Results*, we could misinterpret that if a=1, then $x=1-t$, y=0, z=0, which is incorrect since if a=1, then y=0, z=1, $x=-t$ is also a solution (among others), which is included in the first line. Therefore, the results of this example are misleading.

Example 4. Situation that seems to have been corrected by *WA*

With respect to the specific system $2x+ay=3$ and $4x+8y=6$, Ciaurri and Varona (2006) notes that *Mathematica* did not recognize the indeterminate consistent case. However, this has been corrected, as we observe in the current output of *WA*:

Instruction	solve ({$2x+ay=3,4x+8y=6$},{x,y})
WA Results	$y=\frac{1}{4}(3-2x)$ and $a=4$ $x=\frac{3}{2}$ and $y=0$ and $a\neq 4$

Therefore, one might think that *Mathematica* already provides in its output all possible consistent cases when studying a system with parameters. However, the following example shows that this is not the case.

Example 5. *WA* does not always consider all consistent cases

If we solve the linear system:

$$a^2x+y+z=3$$
$$x+a^2y+z=4-a$$
$$x+y+a^2z=2+a^2$$

Instruction	solve($a^{2}x$+y+z=3,x+$a^{2}y$+z=4–a,x+y+$a^{2}z$=2+a^2)
WA Results	$z=-x-y+3$ and $a=1$ $x=\frac{2a+3}{a^3+a^2+2a+2}$ and $y=\frac{-a^2+2a+1}{a^3+a^2+2a+2}$ and $z=\frac{a^3+a^2+4a+5}{a^3+a^2+2a+2}$ and $a^4+a^2\neq 2$

Note that it does not warn of the case $a=-1$, which is obviously inconsistent (the first equation would be $x+y+z=3$ and the second equation $x+y+z=5$, which is absurd).

This might lead one to think that the *WA Solve* instruction informs of all the consistent systems, but not of the inconsistent ones. But this statement is not true because it also does not warn of the case $a=1$, for which the system is reduced to the equation $x+y+z=3$, which is obviously consistent and indeterminate, with 2 degrees of freedom.

As a consequence of this exercise, we note that the *WA Solve* instruction does not solve all the consistent systems and does not warn of what happens in cases of inconsistency.

The following example provides a simulated real context in which WA does not warn of cases in which the system is inconsistent.

Example 6. An economic example with incomplete information from *WA*

The equilibrium in the goods market in a simplified Keynesian model can be represented by the equation $Y=a_1+a_2(1-t)Y+a_3r+G$, while the equilibrium in the money market is given by $M=b_1+b_2Y+b_3r$, where Y is income, t the marginal propensity to tax, r the interest rate, G the public expenditure and M the amount of money. Assume a specific economy in which $a_1=10$, $a_2=0.8$, $t=0.2$, $b_1=15$, $b_2=1.5$, $b_3=-1$. What condition must a_3 satisfy for there to exist an equilibrium solution for variables Y and r?

Instruction:	solve (Y=10+0.64Y+ar+G, M=15+1.5Y–r,{r,Y})
WA Results	$Y=\frac{2}{3}(M+r-15)$ and $G=\frac{6M}{25}-\frac{68}{5}$ and $a=\frac{6}{25}$ $r=\frac{25G-6M+340}{6-25a}$ and $Y=\frac{50(-a(M-15)+G+10)}{18-75a}$ and $25a\neq 6$

Note that there is no warning that in the remaining cases it is inconsistent, that is, if $G\neq 6M/25-68/5$ and $a=6/25$.

We now consider whether *WA* always deems consistent systems to be determinate. To address it, we provide the following example.

Example 7. On systems that are consistent and determinate

Consider the following linear system:

$$x+y+z=1$$
$$ax+by+cz=d$$
$$a^2x+b^2y+c^2z=d$$

Instruction	solve(x+y+z=1, ax+by+cz=d, $a^{2}x$+$b^{2}y$+$c^{2}z$=d^2)
WA Results	$z=-x-y+1$ and $c=d$ and $b=d$ and $a=d$ $x=1$ and $z=-y$ and $b=c$ and $a=d$ and $c\neq d$ $y=-x$ and $z=1$ and $c=d$ and $a=b$ and $b\neq d$ $y=0$ and $z=1-x$ and $c=d$ and $a=d$ and $b\neq d$ $x=0$ and $z=1-y$ and $c=d$ and $b=d$ and $a\neq d$

Let us also calculate the determinant of the matrix associated with the system:

Instruction	det({{1,1,1},{a,b,c},{a^2, b^2, c^2}})
WA Results	$-(a-b)(a-c)(b-c)$

Note that the infinite cases in which this determinant is different from zero, and therefore the system is consistent and determinate, that is, if $a\neq b\neq c$ and $a\neq c$, are not considered in the *WA* results.

3.2. *Some Optimization cases*

Example 8. Wrong optimization results

If we try to calculate the maxima and minima of e^x+e^y subject to $x+y=10$ we find:

Instruction	extrema e^x+e^y with $x+y=10$
WA Results	*Global maxima*: (no global maxima found) *Global minimum*: min{ e^x+e^y / $x+y=10$}=2e^5 at $(x,y)=(5,5)$ *Local maximum*: max{ e^x+e^y / $x+y=10$}≈296.826 at $(x,y)=(5,5)$

The result is disconcerting since the same point is given as a local maximum and minimum. If we consider maximization and minimization separately, we get:

Instruction	maximize e^x+e^y with $x+y=10$	minimize e^x+e^y with $x+y=10$
WA Results	*Global maxima*: (no global maxima found) *Local maximum*: max{e^x+e^y/$x+y=10$}≈296.826 at $(x,y)=(5,5)$	*Global minimum*: min{e^x+e^y / $x+y=10$}=2e^5 at $(x,y)=(5,5)$

This is still confusing, since the same point is erroneously given as a local maximum and global minimum. We resort, therefore, to the theoretical method to dispel all doubts.

If we assume that $y=10–x$, then we solve the same problem using the substitution method, that is, Opt $f(x)=e^x+e^{10-x}$. Given that the unique candidate for this function is the critical point, that is, $x=5$, and the second derivative is always positive for any value of x, we can state that the point (5,5) is an absolute minimum of the initial problem.

Example 9. Not all instructions lead to the same results

Instruction	extrema xy with x^2+y^2=8
WA Result	*Global maxima:* $\max\{xy/x^2+y^2=8\}=4$ at $(x,y)=(-2,-2)$ $\max\{xy/x^2+y^2=8\}=4$ at $(x,y)=(2,2)$ *Global minima:* $\min\{xy/x^2+y^2=8\}=-4$ at $(x,y)=(-2,2)$ $\min\{xy/x^2+y^2=8\}=-4$ at $(x,y)=(2,-2)$ *Local minima:* $\min\{xy/x^2+y^2=8\}=4$ at $(x,y)=(-2,-2)$ $\min\{xy/x^2+y^2=8\}=4$ at $(x,y)=(2,2)$

Notice how *WA* reports that the points (–2, 2) and (2,2) are global maxima, with the value of the objective function equal to 4 and, at the same time, local minima. This is obviously an error.

Unlike what happened in the previous example, this error does not occur in this example with the *maximize* or *minimize* instruction.

Example 10. Incomplete solution

Instruction	extrema ($x-y+2z+3$)^2	minimize ($x-y+2z+3$)^2
WA Result	*Global maxima:* (no global maxima found) *Global minimum:* $\min\{(x-y+2z+3)^2\}=0$ at $(x,y,z)=(0,0,-\frac{3}{2})$	*Global minima:* $\min\{(x-y+2z+3)^2\}=0$ for $y=x+2z+3$

Given the output of *extrema* instruction, it may seem as if the function has a single global minimum. However, with the output provided by the *minimize* instruction, we see that there are infinite global minima. It is easy to verify that the latter is true given that the function is non-negative and is zero at all points where $y = x + 2z + 3$ is satisfied. Therefore, they are global minima.

Example 11. Minimize does not always work well

Instruction	minimize $(x-y)$^2 on x^2+y^2<=− 0.1
WA Results	*Global minimum:* $\min\{(x-y)^2 \,/\, x^2+y^2 \leq -0.1\}=0$ at $(x,y)=(0,0)$

It is obvious that the optimization problem has no solution since it is impossible to satisfy the restriction. The program not only does not detect this, but it proposes as a solution a point that obviously does not satisfy the restriction.

Although we could continue adding examples and more interesting "creative" comments, not only from these two modules but also from the other modules in our courses, what has been presented so far allows us to show that the answer to Q1, our first research question, is obviously affirmative.

4. Lack of critical attitude toward software: answer to research question Q2

The material compiled in the previous section, along with other exercises in the collection that did not exhibit problems with the software, allowed us to present various drills in the different modules in an effort to let the students work with the software on a regular basis and observe not only its benefits, but its limitations as well. The research we present herein is intended to assess if the students manifest a critical attitude toward the software used. So as not to unnecessarily prolong this paper, and since the philosophy followed in preparing the drills does not depend on the module in which they are employed, we will comment on only two of them in the Linear Algebra module. In this section, we call them Drill 1 and Drill 2, which include exercises in which the software gives a wrong or misleading result. The basic level chosen is necessary for two reasons:

1. So that students can do the drills even without having studied while allowing the professors to determine if they relied blindly on the software.
2. So that the professors can clearly identify how the students use the software without being unduly influenced by the level of knowledge.

Even so, we have to eliminate from the sample those students who are unable to interpret correct software results at a very basic level.

As noted, each drill consists of two parts, Part A and Part B. The student does Part A outside the classroom and then solves Part B in class by taking a test that is answered by taking Part A into account.

To help promote a critical attitude, when the drills are corrected in class, the students are warned not to accept the result output by software without thinking, and the mistakes made in this regard in the drill are highlighted.

4.1. *Drills*

In this section, by way of example, we show the two drills mentioned. We will denote by A1.i and A2.i the i-th exercises that the students did for homework from Drills 1 and 2, respectively, and by B1.i and B2.1 the questions in the tests given in class on the results from exercises A1.i and A2.i, respectively. We emphasize here the importance of Phase 2.2 of the methodology, to have students think in a relaxed setting outside the classroom. The student must justify all the answers chosen.

We note that the questions are asked in a way that implicitly aims to encourage the students to think creatively so they can identify mistakes in the software.

Drill 1

Exercise 1.1. Let

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \text{ and } C=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

A1.1 Enter {{0,−1},{1,0}}{{2,6},{1,3}}+{{2,−1},{−1,2}} into *WA*, write down the result and anything you think is interesting.

B1.1 In A1.1, what were you asked to calculate?

a) CA + B.
b) C(B+A).
c) (B+A)C.
d) None of the above.

Example of justification for the answer selected:

We see that *WA*, in the line it calls *Input*, believes that it has to calculate C(A+B). Since the order of matrices A and B does not alter the sum, it is the same as C(B+A), meaning the right answer is b). However, in keeping with the symbology learned in mathematics, since parentheses were not used, one might mistakenly think that *WA* solved option a).

The “creative way” of correctly answering B1.1 requires solving with *WA*, or by hand, each algebraic operation separately.

Exercise 1.2.

A1.2 Use *WA* to calculate the determinant of the matrix $E=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$, record the result and anything you think is interesting.

Instruction	det({{a,1,1},{1,a,1},{1,1,a}})
WA Result	a^3-3a+2

B1.2 In Exercise A1.2:

a) The determinant of E is never zero
b) The determinant of E is zero if $a=2$ or $a=-1$
c) The determinant of E is zero if $a=-2$ or $a=1$
d) None of the above

Example of justification for the answer selected:

Replacing in the determinant given by *WA*, we see that c) is correct.

Exercise 1.3.

A1.3 Use *WA* to calculate the inverse matrix of E, write down the result and anything you think is interesting.

Instruction	inv({{a,1,1},{1,a,1},{1,1,a}})
WA Result	$\frac{1}{a^2}$ (a+1−1−1−1a+1−1−1−1a+1)

B1.3 In Exercise A1.3:

a) Since the determinant of E is not a^2+a-2, the inverse of *WA* must be incorrectly calculated because the formula of the inverse is divided by the determinant of E, that is,

$E^{-1}=(E^*)^t/|E|$.

b) E always has an inverse and is the one given by *WA*.
c) E does not always have an inverse, but when it does, it is the one given by *WA*.
d) None of the above.

Example of justification for the answer selected:

Since, as noted in Exercise 1.2, the determinant of E is zero if $a=1$ or $a=-2$, these are the only two cases in which the inverse does not exist. When it exists, *WA* gives the correct simplified result. That is, the correct answer is c).

Drill 2

Exercise 2.1.

A2.1 Given the matrix $\begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 & 30 \\ 2 & 5 & 4 & 20 \\ 4 & 11 & 6 & M \end{pmatrix}$

a) use *WA* to calculate its rank. Write down the result.

Instruction	rank{{3,6,9,30},{2,5,4,20},{4,11,6,*M*}}
WA Result	3

b) Calculate by hand an upper triangular matrix that is equivalent to it.

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 & 30 \\ 2 & 5 & 4 & 20 \\ 4 & 11 & 6 & M \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 & 30 \\ 0 & 3 & -6 & 0 \\ 0 & 9 & -18 & 3M-120 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 & 30 \\ 0 & 3 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3M-120 \end{pmatrix}$$

B2.1 If the matrix in Exercise A2.1 were the extended matrix of a linear system of three equations with three unknowns:

a) This system would be consistent and determinate since its rank would be 3, the same as the number of unknowns.
b) Such a system would be inconsistent since when triangulating the extended matrix, one row indicates inconsistency.
c) The system would be consistent and indeterminate.
d) None of the above

Example of justification for the answer selected:

When triangulating by hand, we find that it is only consistent (indeterminate) if $M=40$.

Note that *WA* does not indicate that the rank is not always 3. Therefore, the correct answer is d).

Exercise 2.2.

A2.2 In *WA*, write *Solve*($a^{2}x$+y=3, x+$a^{2}y$=4–a), copy the result to test it.

Instruction	*solve* ($a^{2}x$+y=3, x+$a^{2}y$=4–a)
WA Results	$y = 3-x$ and $a=1$ $x = \frac{3a+4}{a^3+a^2+a+1}$ and $y = \frac{-a^2+3a+3}{a^3+a^2+a+1}$ and $a^4 \neq 1$

B2.2 The linear system in exercise A2.2:

a) Is always consistent because *WA* has given all the possible solutions.
b) Is always consistent and indeterminate because the solutions have degrees of freedom.
c) Is inconsistent if $a=0$.
d) None of the above

Example of justification for the answer selected:

Note that *WA* does not warn of the case $a=-1$, which is obviously inconsistent since the system we have in this case is: $x+y=3$, $x+y=5$. The correct answer is d).

Exercise 2.3.

B2.3 Provide a recommendation and warning to your classmates when working with *WA* that you have deduced from this drill.

We expect the students provide answers such as the following:

- In exercises with parameters, you have to be careful because sometimes *WA* does not offer all the possibilities:
- Consider whether the results are logical.
- When it solves it well, it is no doubt an invaluable aid.
- Do not blindly assume that any software will do everything correctly.

In the next section, we outline the results obtained from the students for these two drills.

3.3. *Discussion of results: Answer to research question Q2*

As indicated, in Drill 1 the correct answers are B1.1b, B1.2c and B1.3c. We decided to remove those who did not mark B1.2c from our study since they do not have enough of a baseline for us to interpret if their incorrect evaluation is independent of having used the software or not. Of the remaining students, those who marked B1.1a were deemed to be using the software incorrectly, and those who marked B1.1c, that they do not know how to work correctly with matrices.

Regarding Drill 2, those who marked B2.1a or B2.1b and B2.2b or B2.2c have a very poor baseline and were removed from the study. Those that marked B2.1a and B2.2a were deemed to be using the software incorrectly.

The results from a Mathematics course for Accounting and Finance majors at the University of La Laguna, during the academic year 2017-18, for students who attended class on a regular basis, were as follows:

	Drill 1	*Drill 2*
Students present	124	89
Sample with minimum level	70	38
Incorrect use of the software	27	24

Comments on the Table:

Drill 1: 56% had the minimum level needed to do it, of whom 38% used the software incorrectly.

Drill 2: 43% had the minimum level needed to do it, of whom 63% used the software incorrectly.

We believe there were fewer students in the second drill because after the first two months, some dropped out of the course and focused on others that they had a better chance of passing.

We do not think that the absolute percentages are critically important. They vary depending on the test and the subjective interpretation that we give based on the answer that they mark. However, we can conclude, based on our objective, that the number of students who do not analyze the results provided by the computer is high. Even after being advised to do it, we did not detect an improvement in their use of the software. We can say that at least 38% used the software without questioning it, blindly, without analyzing the results.

Similar studies were conducted in other mathematics courses given to Economics and Business Management majors. As a summary of the results obtained in the three university degrees and their various first-year mathematics courses, we can say that in each drill, at least 30% of the students, and in most cases around 60%, used the software without questioning it and without checking the results for errors.

Therefore, in answer to research question Q2, we can confirm our perception that the software is used mechanically and that the results are accepted without reasoning.

Although the study provided a basis for developing a constructive critical attitude toward software, even more activities would be necessary in this area, and not only in our courses.

5. Conclusions

We hope that the wider use of this methodology can contribute in several aspects, such as:

– Awakening in the students a positive and prudent critical attitude toward any software.
– Creating a desire to learn more about mathematical methods, which provide the only safe option to review and reason in various ways the result obtained in any mathematical context.
– Encouraging teachers to create new materials to develop critical thinking and creative reasoning toward the results provided by any software.
– Positively assessing the acquisition of a critical and creative attitude to any matter and circumstance in life.

By way of summary, we can conclude that this work:

– Confirms, by using examples, that even in highly improved versions of specialized software, errors can still be found in exercises. The exercises do not have to be of such a high level that students cannot encounter them.
– Easily proves that they are indeed software errors, not attributable to us, by highlighting some contradiction in the results.
– Contributes another possible answer, of the many it has, to the question, "Why study the mathematical methods in depth if we have specialized software to do the calculations?" It is *"Because no matter how powerful it is, we can't rely blindly on software results, even for simple exercises of our courses."*
– Shows students that a large percentage of them accept, without question, the results provided by a computer, something that must not be done.
– Promotes multidisciplinarity since, although our exercises involved mathematics, the basic ideas can be extrapolated to any computer tool that is used without being aware of its benefits and limitations.
– Provides guidelines and recommendations to try to alleviate, and in some cases correct, the deficiency detected.

We finish by noting that, without a doubt, it is better to have software than not. Keeping a constructive critical attitude is what makes using it truly useful, rather than a mistake.

At the same time, we intend to recommend to software distributors that they provide online the list of errors found in each version and that are corrected in the next version. This, rather than making their software less reliable, will generate more confidence in their product.

As a final point, we propose a historical summary of the errors involving real cases and described in, among others, Ciaurri and Varona (2006), or on the website http://ta.twi.tudelft.nl/users/vuik/wi211/disasters.html, which contains a collection of disasters resulting from computer errors. Knowing the history behind certain software errors, some of which have caused deaths, rocket explosions, economic losses, etc., suggests that the problem will persist no matter how sophisticated the technology may become.

This study encourages us to continue with the idea by introducing different didactic proposals that contribute to the critical awakening of students, to a level that is adequate to our courses.

Acknowledgments

We sincerely appreciate the comments and examples received from professors Domingo Israel Cruz Báez, Marianela Carrillo Fernández and Diana de las Nieves Sosa Martín.

Funding

The work was supported in part by Spain's Ministerio de Economía, Industria y Competitividad MTM2015-63680-R: 180.830.1602 (MINECO/FEDER) and MTM2015-71352-P.

References

Barrios-García, J. A. et al. (2005). Análisis de funciones y economía en la empresa. Ediciones Díaz de Santos, Madrid.

Barrios-García, J. A. et al. (2006). Álgebra matricial para economía y empresa. Delta Publicaciones, Madrid.

Brunton, M., & Coll, R. K. (2005). Enhancing Technology Education by Forming Links with Industry: A New Zealand Case Study. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *3*(1), 141-166.

Cahill, M. & Kosicki, G (2001). A Framework for Developing Spreadsheet Applications in Economics. *Social Science Computer Review,* 19 (2), 186-200.

Ciaurri, Ó., & Varona, J. L. (2008). ¿Podemos fiarnos de los cálculos efectuados con ordenador? *SEMA Bulletin*, (37), 93-121.

Cardeño Espinosa, J. & Córdoba Gómez, F.J. (2013), Innovación en la Enseñanza de las matemáticas: Uso de Geogebra. Fondo Editorial ITM.

Carreras-Marin , A., Blasco Martel, Y., Badia-Miro, M., Bosch-Princep, M., Morillo-Lopez, I., Cairo-I-Cespedes, G., & Casares Vidal, M. D. (2013). The promotion and assessment of generic skills from interdisciplinary teaching teams. *Edulearn13: 5th International Conference on Education and new Learning Technologies* (pp. 201-207). IATED-INT Assoc. Technology Education & Development, Lauri Volpi 6, Valencia, Burjassot 46100, Spain.

Elías, C. (2008). La razón estrangulada. La crisis de la ciencia en la sociedad contemporánea. Debate. Barcelona.

European Commission (2015), Science education for responsible citizenship Report EUR 26893 (EN chair H. Hazelkorn), Brussels.

Facione, P. (2007). Pensamiento Crítico: ¿Qué es y por qué es importante? *Insight assessment*, *23*, 56.

Franco Brañas, J.R. (2011) Fundamentos de Matemáticas. Ejercicios resueltos con Maxima, Editorial Ra-Ma, Madrid.

González Pareja, A. et al. (1997). Matemáticas en la economía y la empresa con DERIVE y MATHEMATICA en un entorno Windows: fundamentos de álgebra matricial, teoría de funciones y operaciones financieras, Editorial Ra-Ma, Madrid.

González Pareja, A. (1999.) *Mathematica*: programación matemática en la economía y la empresa, Editorial Ra-Ma, Madrid.

Hillier & Lieberman (2010). Introducción a la Investigación de Operaciones. Editorial McGraw-Hill, Mexico.

Jaramillo, E. M. W., Peña, J. M., & Falla, S. O. (2016). La actitud crítica un aspecto fundamental en la educación. Sophia, 12 (1), 107-114.

Jehlička, V., & Rejsek, O. (2018). A Multidisciplinary Approach to Teaching Mathematics and Information and Communication Technology. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, *14*(5), 1705-1718.

Kolstø, S. D. (2001). Scientific literacy for citizenship: Tools for dealing with the science dimension of controversial socioscientific issues. *Science education*, *85*(3), 291-310.

Lithner, J. (2008). A research framework for creative and imitative reasoning. *Educational Studies in Mathematics*, *67*(3), 255-276.

Lorenzo, M. (2005). The Development, Implementation, and Evaluation of a Problem Solving Heuristic. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *3*(1), 33-58.

Olsson, J. (2018). The contribution of reasoning to the use of feedback from software when solving mathematical problems. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *16*(4), 715-735.

Pei, C. Y., Weintrop, D. & Wilensky, U. (2018). Cultivating Computational Thinking Practices and Mathematical Habits of Mind in Lattice Land. *Mathematical Thinking and Learning*, 20:1, 75-89.

Ponce Campuzano, J.C. & Rivera Figueroa, A. (2011), Un análisis del uso de la tecnología para el cáculo de primitivas, *Números*, 77, 85-98.

Rodrigo Cano, D., de Casas Moreno, P. & Aguaded Gómez, J.I. (2018). El rol del docente universitario y su implicación ante las humanidades digitales. *Index. comunicación: Revista científica en el ámbito de la Comunicación Aplicada*, *8*(2), 13-31.

Rossi, P. G. (2017). Diseño Visible. *Revista Fuentes*, *19*(2), 23-38.

Taha, H A. (2012). Investigación de operaciones. 9th Edition. Pearson Educación, Mexico.

Autoras

Celina Pestano-Gabino. Universidad de La Laguna, España. cpestano@ull.es

Concepción González-Concepción. Universidad de La Laguna, España. cogonzal@ull.es

María Candelaria Gil-Fariña. Universidad de La Laguna, España. mgil@ull.es

Oscar Guerrero

CONSTRUCCIÓN DE CONOCIMIENTO SOBRE LA ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA EN ESTUDIANTES PARA PROFESORES DE MATEMÁTICA A TRAVÉS DE VÍDEOS

Knowledge construction on the teaching of mathematics in students for mathematics teachers through videos

RESUMEN

La presente investigación estudia de qué manera la integración de registros de la práctica (videos) a través de ambientes que favorezcan la interacción durante el análisis de esos registros de la práctica apoya la construcción de conocimiento sobre la enseñanza de las matemáticas. Se han analizado las respuestas de 23 estudiantes para profesor de matemáticas de educación secundaria a dos preguntas relacionadas con la competencia matemática presentadas en dos debates virtuales. Los resultados indican que las participaciones a los debates en forma de concuerda, concuerda y amplia, discrepa o discrepa o amplia favorecieron el proceso de instrumentalización de las herramientas conceptuales provenientes de la didáctica de la matemática. Estos resultados subrayan como el uso de los Videos como recurso de aprendizaje favorece la construcción del conocimiento en los procesos de negociación de significados por parte de los estudiantes para profesor de matemática.

PALABRAS CLAVE:

- *Construcción del Conocimiento*
- *Aprender a Enseñar Matemática*
- *Formación Inicial de Profesores de Matemática*
- *Vídeos*

ABSTRACT

This research studies how the integration of practice records (videos) through environments that favor interaction during the analysis of those practice records supports the construction of knowledge about the teaching of mathematics. We analyzed the responses of 23 students for secondary school mathematics teacher to two questions related to mathematical competence presented in two virtual debates. The results indicate that the participations to the debates in the form of agree, agree and broad, disagree or disagree or broad favored the process of instrumentalization of the conceptual tools coming from the didactics of mathematics. These results emphasize how the use of Videos as a learning resource favors the construction of knowledge in the processes of meaning negotiation by students for mathematics teacher.

KEY WORDS:

- *Building Knowledge*
- *Learning to Teach Mathematics*
- *Initial Training of Mathematics Teachers*
- *Videos*

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (2021) *24* (1): 61-82.
Recepción: Marzo 29, 2019 / Aceptación: Marzo 20, 2021. DOI: 10.12802/relime.21.2413

RESUMO

Esta pesquisa estuda como a integração de registros práticos (vídeos) por meio de ambientes que favorecem a interação durante a análise desses registros de práticas favorece a construção de conhecimentos sobre o ensino de matemática. Analisamos as respostas de 23 alunos para o professor de matemática do ensino médio a duas questões relacionadas à competência matemática apresentadas em dois debates virtuais. Os resultados indicam que as participações nos debates na forma de concordo, concordo e amplo, discordo ou discordo ou amplo favoreceram o processo de instrumentalização das ferramentas conceituais oriundas da didática da matemática. Esses resultados enfatizam como o uso de vídeos como recurso de aprendizagem favorece a construção do conhecimento nos processos de negociação de significados pelos alunos para o professor de matemática.

PALAVRAS CHAVE:

- *Construindo Conhecimento*
- *Aprendendo a Ensinar Matemática*
- *Formação Inicial de Professores de Matemática*
- *Vídeos*

RÉSUMÉ

Cette recherche étudie comment l'intégration des enregistrements de pratique (vidéos) dans des environnements qui favorisent l'interaction lors de l'analyse de ces enregistrements de support favorise la construction de connaissances sur l'enseignement des mathématiques. Nous avons analysé les réponses de 23 élèves de professeur de mathématiques du secondaire à deux questions relatives aux compétences en mathématiques présentées dans deux débats virtuels. Les résultats indiquent que les participations aux débats sous forme d'accord, d'accord et large, en désaccord ou en désaccord ou large ont favorisé le processus d'instrumentalisation des outils conceptuels issus de la didactique des mathématiques. Ces résultats soulignent le fait que l'utilisation de la vidéo comme ressource d'apprentissage favorise la construction de connaissances dans les processus de négociation de la signification par les élèves pour les enseignants de mathématiques.

MOTS CLÉS:

- *Acquérir des connaissances*
- *Apprendre à enseigner les mathématiques*
- *Formation initiale de professeurs de mathématiques*
- *Vidéos*

1. Introducción

En la formación inicial del profesor de matemática se han aplicado programas de formación que apuntan al desarrollo de diversas competencias docentes dirigidas al proceso de "aprender a enseñar", y a desarrollar competencias y conocimientos necesarios para aprender desde la práctica (Hiebert; Morris; Berk; Jansen, 2007; Llinares; Krainer 2006). Una perspectiva en formación inicial utiliza los video-clips de clases grabadas para ayudar a los estudiantes para profesor a desarrollar competencias docentes necesarias para aprender a enseñar matemática (Borko; Koellner; Jacobs; Seago, 2011). Aprender desde la práctica, permite analizar e identificar eventos, y, aspectos que suceden en la enseñanza para interpretarlos y generar información que fundamente las próximas decisiones de acción.

Asimismo, desde perspectivas socioculturales (Goos; Geiger, 2012), el proceso de aprendizaje es visto como una actividad social en la que el pensamiento es mediado por el discurso social a través del aprovechamiento de las tecnologías, las cuales, ofrecen entornos de aprendizaje que reflejan estos principios con el objetivo de apoyar el desarrollo en los estudiantes para profesor de la competencia docente de analizar la enseñanza como un mecanismo de apoyo a aprender desde la práctica.

Desde estas perspectivas, se pueden diseñar ambientes de aprendizaje que integran elementos como: registros de la práctica (videos), información teórica que desempeña el papel de instrumentos conceptuales, y la participación en espacios virtuales por parte del estudiante en proceso de formación. Los estudiantes para profesor visionan los videos, creando condiciones para que puedan aprenden a "ver" y a reflexionar sobre situaciones de enseñanza que ocurren en los salones de clase. Tales competencias, requeridas para aprender desde la práctica, deben permitir la interpretación, análisis e identificación de eventos y aspectos que suceden en la enseñanza. En este sentido, el proceso de aprender a enseñar hace referencia a la activación de los procesos constructivos por parte del aprendiz.

En consecuencia, es necesario investigar la manera como el estudiante para profesor de matemática conforma y construye conocimiento sobre la matemática, su enseñanza y aprendizaje a partir de contextos de interacción específicamente el vídeo y el uso de los principios y herramientas conceptuales proporcionadas por la didáctica de la matemática (Arce; Conejo; Muñoz, 2019; Cantoral; Farfán; Cordero; Alanís; Rodríguez; Garza, 2008; Castro, 2001; Chamorro, 2006; D'Amore, 2006; Linares y Sánchez, 1988; Penalva y Llinares, 2011; Rico; Moreno, 2016; Roller, 2016; Sherin, 2001). Es por ello, que la presente investigación tiene como propósito investigar de qué manera la integración de registros de la práctica (videos) en ambientes que favorezcan la interacción durante el análisis de esos registros de la práctica apoya la construcción de conocimiento sobre la enseñanza de las matemáticas.

2. Marco Teórico

2.1. *El vídeo en la enseñanza de la Matemática*

Aprender de la enseñanza de la matemática y sus efectos en el aprendizaje de los alumnos y alumnas significa reflexionar, interpretar, valorar observar lo que hace un docente cuando enseña matemáticas por parte de un futuro profesor de matemática. Este futuro profesor le ayuda a notar aspectos como las actividades que realizan docentes, alumnos y las relaciones que se establecen con la matemática, las interacciones entre alumnos, alumno docente, el proceso de aprendizaje, el aprendizaje logrado y sin lograr, la relación entre las estrategias didácticas empleadas por los docentes y los aprendizajes logrados; además de promover en ellos el planteamiento de nuevas estrategias y formas de presentar el contenido matemático a sus alumnos y el discurso elaborado en el aula.

Algunos autores (Borko, Jacobs, Eiteljorg y Pittman, 2008; Borko, Koellner, Jacobs y Seago, 2011; Coles, 2012; Kang y van Es, 2019; Kersting, Givvin, Sotelo y Stigler, 2010; Llinares y Sánchez, 1998; Males, 2017) plantean el desarrollo de estas capacidades mediante los vídeos como contexto en el que se puede representar la enseñanza de la matemática, lo cual tiene la ventaja de poder observar con detalle los eventos de enseñanza allí representados, pero la desventaja de que esas situaciones de enseñanza de la matemática no son en “vivo”. Otros autores (Goos y Benninson, 2008; Penalva, Rey y Llinares, 2011) incorporan los entornos de aprendizaje para incentivar a los estudiantes para profesor de matemática a dialogar sobre las formas de enseñar y aprender matemáticas.

En este sentido la investigación desarrollada por Santagata y Guarino (2011) tenia como propóstio de su investigación el uso del video para enseñar al futuro profesor a aprender desde la enseñanza. Esta investigación proporcionaba a los futuros profesores la oportunidad de aprender a reflexionar sobre la enseñanza de una manera disciplinada y estructurada para desarrollar habilidades relacionadas con la reflexión y el aprendizaje desde la enseñanza como: atender elementos importantes de la instrucción, razonar sobre esos elementos de forma integral y proponer estrategias de enseñanza alternativas.

Por otra parte, Van Es y Sherin (2010) desarrollaron una investigación para ayudar a los profesores a que aprendan a notar e interpretar los rasgos significativos de las interacciones que se dan en el aula de clases. Estos autores proponen que la habilidad de darse cuenta de la enseñanza se compone de tres aspectos principales: (a) determinar lo que es importante en una situación de enseñanza, (b) con lo que se sabe sobre el contexto razonar acerca de una situación, y (c) establecer las conexiones entre los eventos específicos y principios más amplios de la enseñanza y el aprendizaje.

De igual forma Van Es, Tekkumru-Kisa y Seago (2020) desde una perspectiva situada proponen un marco teórico para integrar el video en la formación de profesores de matemática. Para estos autores el video es un instrumento central dentro de la formación de profesores que permite capturar la enseñanza para ser reflexionada tanto por los estudiantes para profesor de matemática como por los profesores en formación permanente y a desarrollar un lenguaje que sea común con respecto a la enseñanza. Para ello propone el uso del video como un sistema de actividad que sirve de marco para articular las prácticas docentes de los formadores de profesores. Este sistema tiene las siguientes dimensiones: objetivos, audiencia, selección del video, diseño de las tareas, planificación y facilitación, y evaluación del aprendizaje. Esta forma de concebir el uso de los videos como un sistema de actividad puede contribuir a una aplicación sistemática y estructurada y en consecuencia al diseño de entornos de aprendizaje basados en videos para la formación y mejora docente.

De esta forma hay pocas investigaciones realizadas sobre el análisis de la enseñanza de las matemáticas en contextos de formación inicial de profesores de matemática (Alsawaie y Alghazo, 2010) que utilicen entornos de aprendizaje, los cuales integren:

- el video, en el que se presente eventos de enseñanza de la matemática,
- el uso de las ideas y principios teóricos procedentes de la didáctica de la matemática como instrumentos conceptuales para el análisis de la enseñanza de la matemática,
- la discusión online como espacio de debate e interacción de las ideas que progresivamente se van integrando en el discurso de los estudiantes para profesor de matemática para una visión interpretativa de la enseñanza de la matemática.

2.2. *Perspectiva sociocultural del aprendizaje del estudiante para profesor de matemática*

Tomando en consideración los argumentos anteriores, la perspectiva sociocultural del aprendizaje puede ayudar a la comprensión de cómo aprenden a convertirse los estudiantes para profesor en profesores de matemática. Esto es, cómo aprenden los estudiantes para profesor de matemática en el contexto de la enseñanza de la matemática y al resolver problemas profesionales propios de un profesor que enseña matemática. Es decir, los estudiantes deben aprender a usar instrumentos conceptuales / técnicos y a participar en espacios de interacción social como los debates virtuales (Llinares, 2012) para interpretar eventos de enseñanza registrados en los videos.

En este sentido, Llinares (2008), Monaghan, Trouche y Borwein (2016), Verillon y Rabardel (1995) plantean la relación entre la actividad cognitiva del aprendiz y los instrumentos que utilizan para apropiarse del conocimiento. En particular Monaghan, Trouche y Borwein (2016) sostienen que en la actividad instrumental los sujetos usan herramientas y desarrollan instrumentos los cuales tienen una doble naturaleza: materiales e ideales por lo que demandan de sus usuarios una actividad física e intelectual. Esa naturaleza dual de los instrumentos permite una clasificación no solo en términos de objetos físico o materiales sino también de conceptos y constructos teóricos que han sido desarrollados por la investigación en Educación Matemática.

De esta forma Llinares (1998) plantea que los instrumentos median las acciones y actividades que realizan los estudiantes para profesor de matemática al darles significado y usarlos en el desarrollo de las mismas. Este autor clasifica los instrumentos en técnicos y conceptuales. Los primeros se refieren a materiales y recursos didácticos (geoplanos, software didáctico, videos), y los segundos son aquellas construcciones teóricas que se han desarrollado producto de las investigaciones realizadas en el campo disciplinar de la Educación Matemática.

De igual manera, recientes investigaciones en la formación del profesor de matemática han focalizado su atención hacia aspectos sociales, culturales e institucionales sobre el aprendizaje del estudiante para profesor y del profesor de matemática (Lerman, 2010; Llinares, 2009; Llinares, 1998; Llinares, y Krainer, 2006). Estas investigaciones han puesto de manifiesto que el aprendizaje es producto de la interacción de la gente con las herramientas representacionales y materiales que les ofrece el medio ambiente. Bajo esta perspectiva, el aprendizaje, por lo tanto, no se considera solo la adquisición de conocimientos por los individuos, sino como un proceso de participación social. Al respecto, Peressini, Borko, Romagnano, Knuth y Willis (2004) consideran dos aspectos relacionados que son consecuencia de estas investigaciones. Primero, el aprendizaje es situado al considerar cómo una persona aprende un determinado conjunto de conocimientos y habilidades, y la situación en la que una persona aprende, son una parte fundamental de lo que se aprende. Segundo, los conocimientos y creencias de los docentes interactúan con los contextos históricos, sociales y políticos para crear las situaciones en las cuales el aprender a enseñar se produce. Desde esta perspectiva sociocultural, el aprendizaje del estudiante para profesor de matemática se considera como un proceso de participación creciente en la práctica de la enseñanza de la matemática, y a través de esta participación, se da el proceso de llegar a "ser profesor de matemática".

Así mismo, Lave y Wenger (1991) plantean el aprendizaje como una actividad situada, e introducen el concepto de "participación periférica legitima" (Legitimate peripheral participation)

> Con esto queremos destacar el hecho de que los principiantes participan inevitablemente en comunidades de profesionales y que el dominio del conocimiento y de la práctica les exige que participen cada vez más plenamente en las prácticas socioculturales de una comunidad. La expresión "participación periférica legítima" proporciona una manera de hablar sobre las actividades, las identidades, los artefactos y las comunidades de conocimiento y de práctica. Se refiere al proceso por el que los principiantes pasan a formar parte de una comunidad de práctica. Mediante el proceso

> de llegar a participar plenamente en una práctica sociocultural, se activan las intenciones de aprender de una persona y se configura el significado del aprendizaje. Este proceso social incluye, y en realidad subsume, el aprendizaje de capacidades avanzadas. (Lave y Wenger, 1991, p. 29).

Por ello, la presente investigación está relacionada con el aprendizaje del profesor. Así mismo, la caracterización de la problemática (problemática) es el aprendizaje del profesor del conocimiento necesario para enseñar, la forma en que se conceptúa tanto el conocimiento, el proceso de generación, los mecanismos que se conjeturan y organizan dicho proceso y las variables que influyen. Considerando esta problemática, el contexto general es el aprendizaje, los referentes previos de los aprendices, mecanismos que intervienen en la generación de nuevo conocimiento, diseño de entornos de aprendizaje específicos para facilitar un determinado aprendizaje. Por ello, ¿Cómo se concibe "aprender a enseñar? Se concibe como un proceso activo en el que el individuo construye su conocimiento tomando como referencia su conocimiento previo y el contexto en el que está, siendo este supuesto el que ayuda a definir algunas interrogantes de investigación específicas planteadas, los mecanismos de cambio, fases en el desarrollo, procesos característicos del aprendizaje.

Todo lo anterior hace que la construcción del conocimiento suponga del estudiante para profesor de matemática desarrolle una postura activa e integradora al dedicarse a la elaboración y comprensión de significados con los demás por medio de la interpretación de vídeos para la construcción, la utilización y la mejora progresiva de artefactos de representación al participar en entornos de aprendizaje que se centran en el análisis de la enseñanza de la matemática.

3. Consideraciones metodológicas

Está enmarcada dentro de la investigación cualitativa, considerando el método de análisis de contenido, bajo un posicionamiento epistemológico interpretativo a través del análisis de Vídeos como herramienta de aprendizaje a través del entorno del Campus Virtual de la Universidad de Alicante – España.

El entorno virtual de aprendizaje llamado Competencia Matemática y su Enseñanza está estructurado en tres partes (ver Figura 1). La primera corresponde al vídeo que puede ser visualizado; la segunda (interactiva) hace referencia al título de la sesión con los siguientes elementos: Guía de sesión, Materiales: pueden ser descargados a un ordenador, Debates (aparece un listado de los debates en los que pueden participar), Controles (permite la entrega de los informe-síntesis).

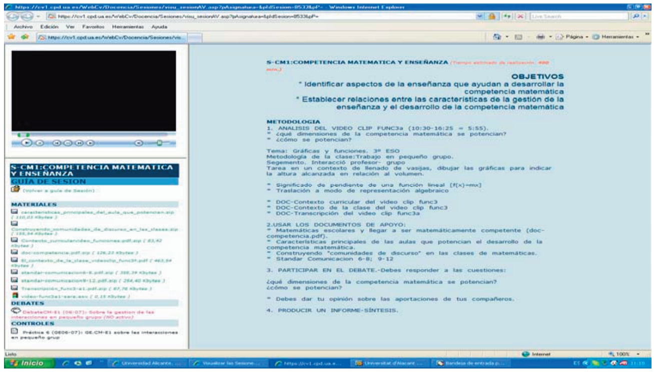


Figura 1. Entorno virtual de aprendizaje llamado Competencia Matemática y su Enseñanza.

La tercera, textual, aparecen los objetivos de la sesión y la metodología. En esta última se presenta una serie de documentos conceptuales que pueden ser descargados al ordenador. Está formada por:

1. Análisis del video-clip
2. Usar los documentos de apoyo
3. Participar en el debate
4. Producir un informe-síntesis

En conjunto, los tres elementos que están unidos e interrelacionados en este entorno de aprendizaje son: video, interacción y texto (Véase Figura 2).

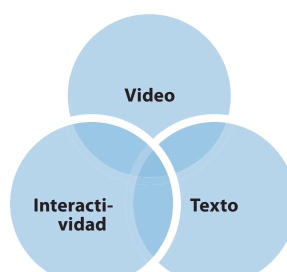
Elementos explícitos del entorno	*Elementos implícitos del entorno*
	 Conjunción de tareas, concepción de sus usos, papel del formador y documentos adicionales. Visionar videos, leer documentos, debatir, escribir informe.

Figura 2. Conjunción de elementos en un entorno de aprendizaje. Fuente: autor.

Participaron en esta investigación 23 estudiantes (9 alumnas y 14 alumnos) del 5to año de la Licenciatura en Matemáticas (estudiantes para profesor de matemáticas) de la Universidad de Alicante. Estos estudiantes estaban matriculados en la asignatura Didáctica de la Matemática en la Educación Secundaria, y participaron en las actividades o tareas que fueron elaboradas en grupo son: visionar videos, leer documentos y debatir.

Los vídeos poseían las siguientes cateristicas, tal como se evidencia en la tabla I.

TABLA I
Características de los Vídeos para la construcción del conocimiento para la enseñanza de la Matemática

Nombre del video	*Objetivo de la profesora del video*	*Tiempo del video*	*El video está centrado en la gestión de las interacciones en*	*Objetivo del debate*	*Los estudiantes para profesor debían responder las siguientes preguntas*
Debate CM-E1 (06-07)	Sus alumnos doten de sentido a la idea de pendiente de una función lineal	minuto 10:30 al minuto 16:25 (duración del segmento: 5:55 minutos)	pequeño grupo	analizar el video-clip func3-a	– ¿Qué dimensiones de la competencia matemática se potencian?, ¿cómo se potencian (tipos de tareas, características de la comunicación, …)? – Debes dar tú opinión sobre las aportaciones de tus compañeros
Debate CM-E2 (06-07)		del minuto 25 al 34:10 (duración del segmento: 9:10 minutos)	gran grupo	analizar el video-clip func3-b	

Para el análisis de las participaciones en los debates sobre las dos interrogantes planteadas sobre cada video utilizado, se implementó la inducción analítica conservando su naturaleza textual y la elaboración de categorías consideradas en función de su contenido e interpretación (Coffey; Atkinson, 2003). El procedimiento de análisis se desarrolló considerando aspectos cuantitativos y cualitativos. Los primeros, hacen referencia al número de aportaciones y distribución temporal de las participaciones. En los segundos, se toma en cuenta dos perspectivas: forma de participar (tipos de interacción) y calidad del discurso (niveles de construcción de conocimiento) de los estudiantes para profesor de matemática.

En primer lugar, se identificaron “cadenas conversacionales” y temas sobre los que interaccionaban los estudiantes. Una cadena conversacional, es una secuencia de mensajes y participaciones interactivos y se identifica cuando los estudiantes para profesor generan una serie de interacciones en relación al mismo tópico (Hara; Bonk; Angeli, 2000; Penalva; Rey; Llinares, 2013).

En relación a las formas de participar, cada participación se categorizó utilizando un sistema de 6 categorías:

- Aporta información (AI). Son aportaciones que responden a las cuestiones planteadas, pero sin hacer referencia a ninguna aportación previa.
- Clarifica (Cl). Participación que sirve para ampliar y/o refinar algún aspecto de alguna aportación anterior, propia o de otro participante, mediante el uso de nueva información, describiendo experiencias propias.
- Concuerda (C). Son aportaciones que manifiestan conformidad o apoyo hacia alguna de las intervenciones dadas anteriormente.
- Concuerda y amplia (C+A). Son participaciones que concuerda y amplia aspectos mencionados en otras aportaciones. Argumenta y genera hipótesis.
- Discrepa (D). Son aportaciones que manifiestan desacuerdo con ideas, disconformidad hacia parte del contenido de otra participación anterior.
- Discrepa y amplia (D+A). Son participaciones que manifiestan disconformidad y argumenta su discrepancia.

Para determinar los niveles de construcción de conocimiento (cognición), se caracterizó la calidad del discurso desarrollado y se utilizaron las siguientes categorías:

- Descriptivo-Narrativo (N1). Lo narrativo, supone la simple relación de acciones o eventos relacionados con acciones. El participante, de manera natural, sin utilizar aquellas ideas de la teoría que ion de eventos son necesarias y relevantes para analizar la situación, presenta rasgos, cualidades características asociadas a la situación que promueve la construcción de conocimiento. Sólo describen las partes diferentes de la enseñanza mostradas en el vídeo, pero sin hacer uso explícito de las ideas teóricas proporcionadas durante el curso.
- Retórico (N2). En la intervención se evidencia el uso de ideas teóricas de los documentos de apoyo (herramientas conceptuales) para construir un discurso, sin establecer relaciones entre estas ideas o de ellas con la situación. Falta cohesión en el discurso. Hacen referencia retórica a las ideas teóricas sin unirlos con los aspectos específicos del proceso de enseñanza identificado en los vídeos.

- Identificación e inicio de un uso instrumental de la información (N3). El participante identifica uno o varios aspectos relevantes de la situación y los interpreta utilizando ideas teóricas y los relacionan o no entre ellos. Identifican los aspectos específicos de la enseñanza y los relacionan con ciertos puntos teóricos para llegar a una interpretación; sin embargo, estas contribuciones no revelan una capacidad clara de establecer relaciones entre varios aspectos del proceso de enseñanza – evidencias empíricas - y las diferentes ideas teóricas expresadas en la documentación que tienen disponible.
- Teorizar – conceptualizar. Integración relacional (N4). Son intervenciones donde la información teórica se transforma en herramienta conceptual. Las herramientas conceptuales se identifican y se usan integrándolas para dar una respuesta a la tarea. Las contribuciones de los estudiantes para profesor de matemática forman o conceptúan opiniones mediante un proceso teórico de razonamiento (conceptuación). La característica relevante de este nivel es el empleo o uso integrado de la información teórica proporcionada para la identificación de ciertos aspectos relevantes de la enseñanza de la matemática.

4. Resultados

4.1. *Forma de Participación en los debates luego de visualizar el vídeo*

El número de aportaciones que realizaron los estudiantes para profesor de matemática en el Debate D1: CM-E1: Sobre la gestión de las interacciones en pequeño grupo, fue de 88. En los primeros siete días no hubo aportaciones al debate, estas comenzaron a partir del octavo día. El 91 % (80) de las contribuciones se realizaron en los tres últimos días el período establecido en el debate en línea 1, mientras que el resto (9 %) se repartió entre los días 8 y 13 (Tabla II).

TABLA II

Número de aportaciones por cada día de Debate D1 CM-E1 sobre la gestión de las interacciones en pequeño grupo

Días	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	13	14	15	16	Total
Nº de aportaciones	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	2	3	13	33	34	88

Fuente: autor.

En el debate 2: CM-E2 sobre la gestión de las interacciones en gran grupo, hubo 89. En los primeros cinco días no hubo participaciones, estas comenzaron a partir del sexto día. El 71 % (63) de las aportaciones se realizaron en los días doce (26 %), trece (21%) y catorce (24 %), mientras que el resto (29 %) se realizaron los días ocho, diez y once con 6 % (5) cada uno, y los días sexto y decimoquinto con 4 % (4) cada uno. Los días siete y nueve, fue de 1 % (1) y 2 % (2) de participaciones, respectivamente (Tabla III).

TABLA III
Número de aportaciones por cada día de Debate D2 CM-E2 sobre la gestión de las interacciones en gran grupo

Días	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	Total
Nº de aportaciones	0	0	0	0	0	4	1	5	2	5	5	23	19	21	4	89

Fuente: autor.

La tabla IV muestra las formas de participación entre los veintitrés estudiantes para profesor de matemática en los dos Debates. En el debate D1 sobre la gestión de las interacciones en pequeño grupo, 19 participaciones (21 % del total) no hicieron referencia a otra contribución realizada por sus compañeros. Lo que indica que más de las tres cuartas partes (79%) de todas las contribuciones a la discusión hicieron referencia explícita a alguna aportación hecha por otro estudiante. Este resultado es un indicador del esfuerzo realizado por los estudiantes durante la discusión en línea para llegar a una comprensión recíproca de los aspectos de la enseñanza que promuevan el desarrollo de la competencia matemática.

TABLA IV
Forma de participar en los Debates en línea D1 y D2

Categorías	*D1*		*D2*	
	f	%[a]	f	%[a]
AI: Aporta información	19	21	15	16
Cl: Clarifica	18	20	23	25
C: Concuerda	2	2	3	3
C+A: Concuerda y Amplia	32	35	16	17
D: Discrepa	0	0	1	1
D+A: Discrepa y amplia	20	22	35	38
Otros	0	0	0	0
Total de unidades de significado	91	100	93	100

Nota: D1: Debate de discusión en línea 1; D2: Debate de discusión en línea 2. [a] Los porcentajes se han redondeado a un número entero. Fuente: autor.

El hecho de que el 59 % de las participaciones se correspondan a las categorías "Concuerda", "Concuerda y Amplia", "Discrepa" y "Discrepa y Amplia", indican el grado de implicación cognitiva con cada una de las contribuciones que realizaron los demás estudiantes en el debate. Esto parece indicar que los estudiantes además de expresar sus propias ideas y opiniones intentaban contraponerlas o complementarlas con las de sus compañeros animando algunas veces a la yuxtaposición de diferentes puntos de vista. De las 54 aportaciones que reflejan interacción con otros estudiantes, el 63 % fueron "Concuerda" (34) y 37 % del tipo "Discrepa" (20). Es decir, más de la mitad de las aportaciones en este debate (54 de 91), muestran que los estudiantes contrastaron sus propias ideas con las de los demás y fueron capaces de ilustrar las diferencias o coincidencias ampliando sus argumentos.

En el debate D2 sobre la gestión de las interacciones en gran grupo, 15 participaciones (16 % del total) no hicieron referencia a cualquier otra contribución realizada por sus compañeros. Este hecho muestra que más de las cuatro quintas partes de todas las aportaciones a la discusión hicieron referencia explícita a alguna aportación hecha por otro estudiante. El hecho de que la mayoría de las contribuciones de los estudiantes establecen relación con las aportaciones de otros estudiantes también evidencia el esfuerzo realizado por los estudiantes durante la discusión en línea para llegar a una comprensión recíproca de los aspectos de la enseñanza que promuevan el desarrollo de la competencia matemática. El hecho de que también en este debate el 59 % de las aportaciones que hicieron los estudiantes se relacionan a las categorías "Concuerda", "Concuerda y Amplia", "Discrepa" y "Discrepa y Amplia", muestran el grado de implicación cognitiva con cada una de las aportaciones que realizaron los demás estudiantes en el debate. De las 55 contribuciones que reflejan la interacción con otros estudiantes, el 35% fue de la forma de participación "Concuerda" (19) y 65 % del tipo "Discrepa" (36). Es decir, más de la mitad de las contribuciones en este debate (55 de 93), evidencian que los estudiantes compararon sus propias ideas con las de sus compañeros y fueron capaces de ilustrar las diferencias o coincidencias ampliando sus argumentos. La existencia de un gran número de contribuciones de este tipo muestra que los estudiantes interactuaron juntos en la realización de las tareas profesionales establecidas en el debate sobre la gestión de las interacciones en gran grupo.

Considerando los resultados anteriores en conjunto, los hallazgos sugieren que cuanto mayor es el número de participaciones correspondiente a las categorías relativas al reconocimiento de tener en cuenta lo que ha dicho el otro mayor es la indicación de que los estudiantes para profesor de matemática estaban tratando, durante el debate en línea, de comprender a los demás puntos de vista y de concordar o discrepar conclusiones diferentes. Los aportes en esta dimensión pueden ser interpretados en el sentido de que indican intentos de negociación de significados, y de conseguir la comprensión recíproca de otros puntos de vista relacionados con la enseñanza de la matemática.

4.2. *Cadenas conversacionales: negociando significados*

En el debate 1 sobre la gestión de las interacciones en pequeño grupo pudimos identificar 8 cadenas conversacionales (Tabla V). Los contenidos de las cadenas conversacionales fueron: C1: Dimensiones de la competencia matemática; C2: Aspectos de la enseñanza que influyen en el desarrollo de las dimensiones de la competencia matemática; C3: Influencia de la tarea en la competencia matemática; C4: Algunas características que potencian la competencia matemática; C5: Desafíos de un profesor de matemática en secundaria; C6: Sara, ¿matemáticamente competente?; C7: La metodología de Sara; C8: El contenido del ejercicio.

Cada estudiante para profesor de matemática contribuyó en más de una cadena conversacional y lo hizo más de una vez en el debate D1 sobre la gestión de las interacciones en pequeño grupo. La participación en el debate D1 se focalizó en ciertas cadenas conversacionales, lo que parece indicar que los estudiantes para profesor identificaron tópicos o temas que son de su interés. En el debate D1, 70 aportaciones (77 %) se realizaron solo en cuatro cadenas: C2 (19), C4 (12), C5 (13) y C6 (26). Estas cadenas conversacionales trataban los tópicos: C2: Aspectos de la enseñanza que influyen en el desarrollo de las dimensiones de la competencia matemática; C4: Algunas características que potencian la competencia matemática; C5: Desafíos de un profesor de matemática en secundaria; C6: Sara, ¿matemáticamente competente?) en las que se desarrollaron la mayoría de aportaciones (70 de 91).

Mientras que en el debate D2 (Ver Tabla VI), 73 contribuciones (casi el 80 %) se realizaron en cuatro cadenas conversacionales: C1 (43), C3 (14), C5 (8) y C7 (8); cuyos tópicos eran C1: Objetivos de la clase; C3: El papel del profesor; C5: Aspectos del rol del profesor; C7: Contexto curricular del video.

La Tabla V, muestra la forma de participar en cada cadena conversacional en el Debate 1 sobre la gestión de las interacciones en pequeño grupo, evidenció un número desigual de aportaciones y de participantes en cada cadena conversacional. En estas cadenas, básicamente los estudiantes para profesor compartieron con sus compañeros sus opiniones de acuerdo o desacuerdo, tal y como se presenta en la C2 (14 de 19), C4 (7 de 12), C5 (6 de 13) y C6 (18 de 26).

De igual manera, la forma de interacción en la que los estudiantes para profesor manifiestan que concuerdan o discrepan de otras opiniones, o amplían sus argumentos de acuerdo o desacuerdo (54 de 91) sugiere que los participantes en el debate D1 sobre la gestión de las interacciones en pequeño grupo generaron como temas de interés aspectos de la enseñanza que influyen en el desarrollo de las dimensiones de la competencia matemática; algunas características que potencian la competencia matemática; desafíos de un profesor de matemática en secundaria; Sara, ¿matemáticamente competente? alrededor de los cuales ocurrió la negociación de significados.

Finalmente, en la cadena C2 (4) y cadena C6 (6) sobre Aspectos de la enseñanza que influyen en el desarrollo de las dimensiones de la competencia matemática y Sara, ¿matemáticamente competente? se aprecia una fuerte presencia de la dimensión "Clarifica", lo cual hace suponer la necesidad que sentían los participantes en ampliar y/o refinar algún aspecto de alguna aportación anterior, propia o de otro participante, mediante el uso de nueva información, describiendo experiencias propias o para presentar información relevante en relación a la comunicación como la dimensión de la competencia matemática que más se potencia y el ambiente de la clase, la motivación e interés como focos de interés de las cadenas conversacionales mencionadas.

TABLA V
Forma de participar por cada cadena conversacional en el debate de discusión en línea D1

Cadena conversacional	*AI*	*Cl*	*C*	*C+A*	*D*	*D+A*	*Total*
C1	2	1	0	1	0	1	5
C2	1	4	0	11	0	3	19
C3	1	0	0	1	0	0	2
C4	3	2	0	4	0	3	12
C5	4	3	1	2	0	3	13
C6	2	6	0	8	0	10	26
C7	1	1	1	3	0	0	6
C8	1	1	0	2	0	0	4
Otros	4	0	0	0	0	0	4
Total	19	18	2	32	0	20	91

Nota: C1: Dimensiones de la competencia matemática; C2: Aspectos de la enseñanza que influyen en el desarrollo de las dimensiones de la competencia matemática; C3: Influencia de la tarea en la competencia matemática; C4: Algunas características que potencian la competencia matemática; C5: Desafíos de un profesor de matemática en secundaria; C6: Sara, ¿matemáticamente competente?; C7: La metodología de Sara; C8: El contenido del ejercicio. Fuente: autor.

La tabla VI muestra la forma de interacción por cada cadena conversacional en el debate D2 sobre la gestión de las interacciones en gran grupo. En este debate identificamos cuatro cadenas principales (C1: Objetivos de la clase; C3: El papel del profesor; C5: Aspectos del rol del profesor; C7: Contexto curricular del video) en las que se generaron la mayoría de contribuciones (73 de 93) y en las que básicamente los estudiantes para profesor compartieron con sus compañeros sus opiniones de ampliar o refinar alguna aportación anterior o de acuerdo o desacuerdo. El que los estudiantes para profesor se centraran en estos tópicos parece indicar que sentían la necesidad de ampliar o refinar alguna participación anterior, argumentar sus comentarios y opiniones bien sea a favor o en desacuerdo con ideas de otras participaciones hechas por sus compañeros del debate virtual.

Así mismo, la forma de interacción en la que los estudiantes para profesor manifiestan sus acuerdos o desacuerdos o ampliación de sus argumentos de acuerdo o desacuerdo (55 de 93) sugiere que en las interacciones virtuales en el debate D2 sobre la gestión de las interacciones en gran grupo, se desarrollaron como tópicos de interés los objetivos de la clase; el papel del profesor; aspectos del rol del profesor; contexto curricular del video) alrededor de los cuales ocurrió la negociación de significados.

Finalmente, en relación al tópico "los objetivos de la clase" (C1) se aprecia una fuerte presencia de la dimensión "Clarifica" (8) lo cual hace suponer la necesidad que sentían los participantes en ampliar y/o refinar algún aspecto de alguna aportación anterior, propia o de otro participante.

TABLA VI

Forma de participar por cada cadena conversacional en el debate de discusión en línea D2

Cadena conversacional	*AI*	*Cl*	*C*	*C+A*	*D*	*D+A*	*Total*
C1	4	8	2	11	0	18	43
C2	3	0	0	1	0	2	6
C3	2	3	0	2	1	6	14
C4	1	1	1	1	0	0	4
C5	0	4	0	0	0	4	8
C6	0	2	0	0	0	2	4
C7	1	3	0	1	0	3	8
Otros	4	2	0	0	0	0	6
Total	15	23	3	16	1	35	93

Nota: C1: Objetivos de la clase; C2: Dimensiones de la competencia matemática; C3: El papel del profesor; C4: Competencia matemática; C5: Aspectos del rol del profesor; C6: La equidad; C7: Contexto curricular del video. Fuente: autor.

La fuerte presencia de las dimensiones relacionadas con la forma de interactuar (C, C+A, D, D+A) en los dos debates hace suponer la necesidad de los estudiantes para profesor de matemática de compartir sus opiniones y expresar sus propios puntos de vista relacionados con tópicos como: Aspectos de la enseñanza que influyen en el desarrollo de las dimensiones de la competencia matemática; algunas características que potencian la competencia matemática; desafíos de un profesor de matemática en secundaria; Sara, ¿matemáticamente competente?; Objetivos de la clase; El papel del profesor; Aspectos del rol del profesor; Contexto curricular del video; en los que negociaban significados relacionados con el desarrollo de las dimensiones de la competencia matemática y la enseñanza de la matemática.

4.3. *Niveles de construcción de conocimiento*

La manera como los estudiantes para profesor utilizaron las herramientas conceptuales (herramientas teóricas) para interpretar y analizar la enseñanza de la matemática fue diferente (Ver Tabla VII). En el debate sobre la gestión de las interacciones en pequeño grupo (D1), un poco más de las tres cuartas partes (76 %) de las aportaciones muestra indicios de que los estudiantes comenzaron a interpretar la enseñanza de la matemática mediante el uso de las ideas teóricas. Es decir, en los niveles N3 y N4.

En relación con el debate sobre la gestión de las interacciones en gran grupo (D2), 61 % de las participaciones se ubicaron en los niveles de uso instrumental de la información (N3) y teorizar (N4); mientras que un 39 % de las contribuciones se corresponden a los niveles narrativo-descriptivo (N1) y retórico (N2). Esto parece indicar que el uso de las herramientas teóricas para analizar e interpretar la enseñanza de la matemática no es fácil.

TABLA VII
Dimensión *Epistémica*, niveles de construcción de conocimiento en los Debates en línea D1 y D2

Categorías	*D1*		*D2*	
	f	*%[a]*	*f*	*%[a]*
N1: Narrativo-Descriptivo	11	13	32	36
N2: Retórico	10	11	3	3
N3: Uso instrumental de la información	57	65	50	56
N4: Teorizar conceptualizar	10	11	4	5
Otros	0	0	0	0
Total	88	100	89	100

Nota: D1: Debate 1 sobre la gestión de las interacciones en pequeño grupo; D2: Debate 2 sobre la gestión de las interacciones en gran grupo. [a] Los porcentajes se han redondeado a un número entero. Fuente: autor.

Finalmente, los resultados anteriores pueden interpretarse como un indicio de que la implicación cognitiva con los demás ayuda a los estudiantes a generar argumentos en un mayor nivel cognitivo. Los datos parecen mostrar que el contexto mediado por los debates de discusión en línea alienta a los estudiantes para mejorar el discurso generado con el fin de llegar a una comprensión compartida de la enseñanza de la matemática relacionada con la competencia matemática.

5. Conclusiones

El objetivo de esta investigación era estudiar de qué manera la integración de registros de la práctica (videos) con ambientes que favorezcan la interacción durante el análisis de esos registros de la práctica apoya la construcción de conocimiento sobre la enseñanza de las matemáticas. En particular, esta investigación aporta información en relación a cómo la participación en debates en línea en entornos de aprendizaje b-learning apoya el desarrollo de una comprensión compartida entre los estudiantes para profesor de la enseñanza de las matemáticas. El foco específico en estos entornos de aprendizaje era cómo los estudiantes para profesor empezaban a identificar el papel de mediador en el aprendizaje matemático que desempeña las características específicas del problema planteado por el profesor y el papel del discurso generado en el aula. En este sentido, los resultados de esta investigación aportan dos ideas relativas al (i) papel de las diferentes formas de participar en un debate en relación a la negociación de los significados, y (ii) los niveles de construcción de conocimiento que se generan durante procesos de interacción virtual. Por ello, en esta investigación se evidenció cómo los estudiantes focalizaron la atención en temas sobre los cuales giraba las participaciones y discusiones a la vez que relacionaron o vincularon evidencias particulares del video con ideas teóricas. Lo cual demuestra que hay intereses comunes y por tanto modos de interacción como concuerda y amplia o discrepa y amplia que se convierten en mecanismos generadores de formas discursivas que son utilizadas por los estudiantes para profesor de matemática (instrumentalización o teóricas), (campo conceptual y teórico, en las que deben construir argumentos para lograr convencer a los demás participantes. Esta investigación de alguna manera afirma que la construcción del conocimiento argumentativo se produce en las interacciones desarrolladas en entornos virtuales a la vez que contribuyen con la negociación de significados y la construcción del conocimiento sobre el tema de discusión que es el desarrollo de la competencia matemática en la enseñanza de la matemática.

Finalmente, los resultados obtenidos en la presente investigación contribuyen a la agenda de investigación sobre el aprendizaje del profesor de matemática. En particular, sobre qué y cómo aprenden los estudiantes para profesor de matemática a dotar de sentido y usar los instrumentos conceptuales en situaciones de enseñanza de la matemática en entornos virtuales de aprendizaje. Las evidencias obtenidas en la presente investigación sugieren que la presencia de "formas de interacción", en las participaciones de los estudiantes, indica un esfuerzo por la negociación de significados a la vez que hay una evolución en el uso progresivo de los instrumentos conceptuales para interpretar la enseñanza de la matemática.

Reconocimiento

Este trabajo ha sido apoyado por el Consejo de Desarrollo Científico, Humanístico, Tecnológico y de las Artes (CDCHTA), de la Universidad de Los Andes Venezuela, bajo el proyecto de investigación identificado con el código NUTA-H-366-13-04-B, organismo al que le agradecemos su apoyo financiero e institucional.

Agradecimiento

Quiero agardecer a los revisores del presente artículo por las sugerencias dadas, lo cual contribuyo a una mejora del mismo.

Referencias bibliográficas

Alsawie, O. y Alghazo, I. (2010). The effect of video-based approach on prospective teachers' ability to analyze mathematics teaching. *Journal of mathematics Teacher Education, 13* (3), 223-241.

Arce, M. Conejo, L. y Muñoz, J. (2019). *Aprendizaje y enseñanza de las matemáticas.* Madrid: Editorial Síntesis S. A.

Borba, M.C., y Llinares, S. (2012). Online mathematics teacher education: overview on an emergent field of research. *ZDM- The International Journal on Mathematics Education, 44*(6), doi 10.1007/s11858-012-0457-3.

Borko, H., Jacobs J., Eiteljorg, E. y Pittman, M. (2008). Video as a tool for fostering productive discussions in mathematics professional development. *Teaching and Teacher Education, 24* (2), 417-436

Borko, H., Koellner, K., Jacobs, J. y Seago, N. (2011). Using video representations of teaching in practice-based professional development programs. *ZDM (Zentralblatt für Didaktik der Mathematik), 43* (1), 175-187.

Cantoral, R., Farfán, R., Cordero, F., Alanís, J., Rodríguez, R., y Garza, A. (2008). *Desarrollo del pensamiento matemático.* México: Trillas.

Castro, E. (Ed.). (2001). *Didáctica de la matemática en la educación primaria*. Madrid: Síntesis Educación.

Chamorro, C. (2006). Herramientas de análisis en didáctica de las matemáticas. En M.C. Chamorro (Ed.), *Didáctica de las Matemáticas* (pp. 69-94). Madrid: PEARSON Prentice Hall.

Coffey, A. y Atkinson, P. (2003). *Encontrar el sentido a los datos cualitativos. Estrategias complementarias de investigación.* Colombia: Editorial Universidad de Antioquia.

Coles, A. (2012). Using video for professional development: the role of the discussion facilitator. *Journal of mathematics Teacher Education, 16*(3), 165-184.

D´Amore, B. (2006). *Didáctica de la matemática.* Bogotá: Cooperativa Editorial Magisterio.

Goos, M., y Benninson, A. (2008). Depeloping a communal identity as beginning teachers of mathematics: emergence of an online community of practice. *Journal of Mathematics Teacher Education, 11* (1), 41-60.

Goos, M. y Geiger, V. (2012). Connecting social perspectives on mathematics teacher education in online environments. *ZDM Mathematics Education, 44* (6), 705–715.

Hara, N., Bonk, C.J. y Angeli, C. (2000). Content análisis of online discusión in an applied educational psychology course. *Instructional Science*, 28, 115-152.

Hiebert, J., Morris, A., Berk, D. y Jansen, A. (2007). Preparing teachers to learn from teaching. *Journal of Teacher Education, 58* (1), 47-61.

Kang, H., & van Es, E. A. (2019). Articulating design principles for productive use of video in preservice education. *Journal of Teacher Education 70*(3), 237–250.

Kersting, N., Givvin, K., Sotelo, F. y Stigler, J. (2010). Teacher´s analyses of classroom video predict student learning of a novel measure of teacher knowledge. *Journal of Teacher Education, 61* (1-2), 172-181.

Krainer, K. y Llinares, S. (2010). Mathematics teacher education. En Peterson P, Baker E, McGaw B (Eds.) *International Encyclopedia of Education*, vol 7. Elsevier, Oxford, UK, pp 702–705.

Lave, J., y Wenger, E. (1991). *Situated learning: Legitimate peripheral participation*. Cambridge: Cambridge University Press.

Lerman, S. (2010). Theories of mathematics education: Is plurality a problem? En B. Sriraman y L. English (Eds.), *Theories of mathematics education seeing new frontiers* (pp. 123-146). Heidelberg: Springer.

Llinares, S. (1998). La investigación "sobre" el profesor de matemáticas: aprendizaje del profesor y práctica profesional. *Aula*, 10, pp153-179

Llinares, S. (abril 24-25, 2008). *Aprendizaje del estudiante para profesor de matemáticas y el papel de los nuevos instrumentos de la comunicación*. Conferencia invitada en: III Encuento de Programas de Formación Inicial de Profesores de Matemáticas. Bogotá, Colombia.

Llinares, S. (2009). Learning to "notice" the mathematics teaching. Adopting a socio-cultural perspective on student teachers´learning. En A. Gómez (Ed.), EME2008 *Elementary Mathematics Education* (pp. 31-44). Portugal: Barbosa y Xavier, Lda.

Llinares, S. (2012). Construcción de conocimiento y desarrollo de una mirada profesional para la práctica de enseñar matemáticas en entornos en línea. *AIEM. Avances de Investigación en Educación Matemática*, 2, 53 – 70.

Llinares, S., y Krainer, K. (2006). Mathematics (student) teachers and teachers educators as learners. En A. Gutierrez y P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future* (pp. 429–459). Rotterdam/Taipe: Sense Publishers.

Llinares, S. y Sánchez, V. (1988). *Fracciones. La relación parte-todo.* España: Editorial Síntesis.

Llinares, S. y Sánchez, V. (1998). Aprender a enseñar matemáticas: los vídeos como instrumento metodológico en la formación inicial de profesores. *Revista de Enseñanza Universitaria*, 13, 29-44.

Llinares, S. y Valls, J. (2010). Prospective primary mathematics teachers' learning from on-line discussions in a virtual video-based environment. *Journal of Mathematics Teacher Education, 13* (2), 177-196.

Males, L. (2017). Using video of peer teaching to examine grades 6-12 preservice teachers´noticing. En E. O. Schack; M. H. Fisher y J. A. Wilhelm, J. (Eds.), *Teacher noticing: bridging and broadening perspectives, contexts, and frameworks* (pp. 91-109). New York, NY: Springer.

Monaghan, J. Trouche, L. y Borwein, J. M. (2016). *Tools and mathematics: Instruments for learning.* Cham: Springer International Publishing.

Penalva, C. y Llinares, S. (2011). Las tareas matemáticas en la educación secundaria. En J. M. Goñi (Ed.), *Didáctica de las matemáticas* (pp. 27-51). Barcelona: Editorial Graó.

Penalva, C., Rey, C. y Llinares, S. (2011). Identidad y aprendizaje de estudiantes de psicopedagogía. Análisis en un contexto b-learning en didáctica de la matemática. *Revista Española de Pedagogía*, LXIX (248), 101-118.

Penalva, C., Rey, C. y Llinares, S. (2013). Aprendiendo a interpretar el aprendizaje de las matemáticas en educación primaria. Características en un contexto B-Learning. *Educación Matemática, 25* (1), 7-34.

Peressini, D., Borko, H., Romagnano, L., Knuth, E. y Willis, C. (2004). A conceptual framework for learning to teach secondary mathematics: A situative perspective. *Educational Studies in Mathematics*, 56, 67-96.

Rico, L. y Moreno, A. (Eds.) (2016). *Elementos de didáctica de la matemática para el profesor de secundaria*. Madrid: Pirámide.

Roller, S. A. (2016). What they notice in video: A study of prospective secondary mathematics teachers learning to teach. Journal of Mathematics Teacher Education, 19(5), 477–498.

Santagata, R. y Guarino, J. (2011). Using video to teach future teachers to learn from teaching. *ZDM, 43* (1), 133-145.

Sherin, M. G. (2001). Developing a professional vision of classroom events. En T., Wood; B., Nelson y J., Warfield (Eds.), *Beyond Classical Pedagogy: Teaching Elementary School Mathematics* (pp. 75-93). Hillsdale, NJ: Erlbaum.Wei.

Van Es, E. A. Miray Tekkumru-Kisa, M. y Seago, N. (2020). Leveraging the power of video for Teacher learnings. En S. Llinares y O. Chapman (Eds.), *International Handbook of Mathematics Teacher Education: Volume 2* (pp. 23-54). Leiden: Brill Sense.

Verillon, P., y Rabardel, P. (1995). Cognition and artifacts: A contribution to the study of thought in relation to instrumented activity. *European Journal of Psychology of Education, 10*(1), 77–101.

Autor

Oscar Guerrero. Universidad Arturo Prat (UNAP). Iquique - Chile. oguerreroc@gmail.com

Miguel Montes, Mª. Isabel Pascual, Nuria Climent

UN EXPERIMENTO DE ENSEÑANZA EN FORMACIÓN CONTINUA ESTRUCTURADO POR EL MODELO MTSK

A teaching experiment in continuing education structured by the MTSK model

RESUMEN

La formación de maestros ya egresados es un área infraexplorada en la investigación en Educación Matemática, especialmente en relación con su conocimiento. Presentamos aquí los resultados de un experimento de enseñanza orientado a la formación de maestros egresados. Este experimento tuvo lugar en la Universidad de Huelva con un total de 39 maestros, en el contexto de un curso de adaptación al Grado de Primaria. Para la fundamentación teórica del experimento usamos el modelo de Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas, que permitió a su vez generar una hipótesis de progresión de aprendizaje. Mostraremos tanto el diseño del experimento, como el análisis retrospectivo del mismo. Los resultados del estudio evidenciaron que los maestros mejoran en el uso de su conocimiento de los temas, y de la enseñanza de las matemáticas.

PALABRAS CLAVE:

- *Desarrollo Profesional*
- *Experimento de Enseñanza*
- *Conocimiento Especializado*
- *Conocimiento Profesional*
- *Maestros egresados*

ABSTRACT

The education of graduated teachers is an underexplored field in Mathematics Education. We present a teaching experiment focusing graduated teacher education, structured by the model of Mathematics Teachers' Specialized Knowledge. This experiment took place in the University of Huelva with 39 primary teachers, in the context of a course aiming to actualize the old teaching degrees to the new ones. The experiment was founded in the model of Mathematics Teachers Specialized Knowledge, that also was used to generate a progression hypothesis. We will show both the design of the experiment, and the retrospective analysis of this cycle. The results of the study show that the primary school teachers involved in the experiment improve their use of their knowledge of topics and knowledge of mathematics teaching.

KEY WORDS:

- *Professional Development*
- *Teaching Experiment*
- *Specialized Knowledge*
- *Professional Knowledge*
- *Graduated Teachers*

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (2021) *24* (1): 83-104.
Recepción: Octubre 29, 2019 / Aceptación: Marzo 18, 2021. DOI: 10.12802/relime.21.2414

RESUMO

A formação de professores já formados é uma área pouco explorada na pesquisa em Educação Matemática. Apresentamos aqui os resultados de um experimento de ensino voltado para a formação de professores graduados. Este experimento ocorreu na Universidade de Huelva, com um total de 39 professores, no contexto de um curso de adaptação ao grau primário. Para fundamentação teórica do experimento, foi utilizado o modelo de conhecimento especializado do Professor de Matemática, que por sua vez permitiu gerar uma hipótese de progressão da aprendizagem. Mostraremos o desenho do experimento e sua análise retrospectiva. Os resultados do estudo mostram que os professores melhoram o uso de elementos do conhecimento relacionados ao suo conhecimento das disciplinas e ao ensino de matemática.

PALAVRAS CHAVE:

- *Desenvolvimento profissional*
- *Experiência docente*
- *Conhecimento especializado*
- *Conhecimento profissional*
- *Professores graduados*

RÉSUMÉ

La formation d'enseignants déjà diplômés est un domaine sous-exploré dans la recherche sur l'enseignement des mathématiques. Nous présentons ici les résultats d'une expérience d'enseignement visant à former des enseignants diplômés. Cette expérience a eu lieu à l'Université de Huelva avec un total de 39 enseignants, dans le cadre d'un cours d'adaptation au diplôme de premier cycle. Le modèle de connaissances spécialisées du professeur de mathématiques a été utilisé comme base théorique de l'expérience, ce qui a permis de générer une hypothèse de progression de l'apprentissage. Nous montrerons à la fois la conception de l'expérience et son analyse rétrospective. Les résultats de l'étude montrent que les enseignants améliorent l'utilisation des éléments de connaissance liés à son connaissance des matières et à l'enseignement des mathématiques.

MOTS CLÉS:

- *Développement professionnel*
- *Expérience d'enseignement*
- *Connaissances spécialisées*
- *Connaissances professionnelles*
- *Professeurs diplômés*

1. Introducción

En la investigación en Educación Matemática en el contexto iberoamericano, el foco de las investigaciones que tienen como centro al profesor es amplio: investigaciones ligadas a la mirada profesional (Sánchez-Matamoros, Fernández y Llinares, 2015), al conocimiento profesional (Carrillo, Climent, et al., 2018; Godino, 2009), a la identidad profesional (Sanhueza, Penalva y Friz, 2013), al empoderamiento docente

(Reyes-Gasperini y Cantoral, 2013), o al desarrollo de dinámicas de formación (Godino, Giacomone, Batanero y Font, 2017), entre otras. La amplia mayoría de estas investigaciones se centran en maestros o profesores en formación inicial, sin embargo la formación continua ha recibido menor atención (e.g. Carrillo y Climent, 2011; Rhoads, Radu y Webber, 2011). En recientes trabajos (Carrillo, Climent, Contreras y Montes, 2020), se ha propuesto entender tanto la formación inicial de profesores como la continua, inmersa en un continuo de formación coherente y consistente, donde la reflexión tiene un papel central y en la que los métodos de formación en ambas etapas formativas pueden tener paralelismos. Desde esa perspectiva se propone que modelos de conocimiento profesional pueden suponer un estructurador de dicha formación (Carrillo et al., 2020).

En el sistema educativo español, la formación continua no tiene una organización curricular estructurada a nivel nacional (Escudero-Muñoz, 2017), sino que depende de la oferta de los centros de formación de profesorado. Sin embargo, tras la implantación de las enseñanzas de grado, como consecuencia de la creación del Espacio Europeo de Educación Superior, surgió la demanda por parte de maestros de Educación Primaria y de las instituciones educativas, de un tipo de titulación que permitiera acceder al título actual de graduado a los antiguos titulados (diplomados). Esta titulación tiene rasgos de formación continua, ya que todos los que acceden a ella son maestros egresados, con mayor o menor experiencia en la docencia. En la Universidad de Huelva, la titulación consiste en un curso que recibe el nombre de Curso de Adaptación al Grado de Educación Primaria, y que abarca diferentes áreas, varias de ellas ligadas a educación en diversas disciplinas. En lo relativo a la formación en Educación Matemática, el enfoque que se decidió desde el principio del diseño del curso, fue el de un experimento de enseñanza (Steffe y Thompson, 2000; Molina, Castro, Molina y Castro, 2011) para el desarrollo profesional de los maestros involucrados en el mismo (Cobb, Jackson y Dunlap, 2016). El objetivo del curso consistía en que los maestros participantes reflexionaran sobre los distintos aspectos, ligados a la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, que deben conocer a la hora de plantearse llevar un problema al aula. Para esto, el diseño estuvo guiado por el modelo de Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas, MTSK por sus siglas anglófonas (Carrillo, et al., 2018), asumiendo la resolución de problemas como eje transversal a la actividad matemática.

Así, nos planteamos como pregunta de investigación: ¿Qué impacto tiene, en el conocimiento de los maestros, un curso orientado a la construcción de conocimiento especializado sobre la resolución de problemas matemáticos? Para abordar esta cuestión, diseñamos un curso cuyas tareas están basadas en los subdominios del modelo MTSK. El análisis de los resultados de este curso permitirá analizar el aprendizaje de los maestros, a través de la comparación de los resultados de la primera y la última tarea usando una hipótesis de progresión diseñada ad hoc.

2. Referentes teóricos

El estudio del desarrollo profesional de los profesores de matemáticas ha sido uno de los focos de investigación más activos internacionalmente de los últimos años (Lin y Rowland, 2016). Diversas investigaciones asocian el desarrollo profesional a diferentes factores, como el aumento de coherencia entre las concepciones y la práctica de aula (Kaiser y Li, 2011), la mejora de la capacidad reflexiva (Cobb y McLain, 2001), o el aumento de conocimiento profesional (Bell, Wilson, Higgins y McCoach, 2010). En este estudio nos centramos en el aspecto cognitivo, asumiendo que, tras la formación inicial, es importante brindar a los maestros mecanismos estructurados para que sigan construyendo conocimiento especializado, lo que llevará a poder profundizar en la reflexión sobre su práctica.

Para organizar las tareas del curso usamos el modelo MTSK (Carrillo, et al., 2018), que constituye un modelo de análisis de conocimiento profesional, usado para explorar las diferentes naturalezas de conocimiento que un docente que enseñe matemáticas pone en juego en cualquier actividad ligada a su profesión. La elección de dicho constructo teórico responde a su utilidad para estructurar la formación inicial de maestros de primaria, tanto en el diseño de tareas, como en la estructuración de asignaturas completas (Montes, Carrillo, Contreras, Liñán-García, y Barrera-Castarnado, 2019). Usaremos por tanto dicho modelo como elemento estructurador implícito de las tareas del experimento de enseñanza.

2.1. *Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas*

En esta investigación, entendemos que el principal factor que determina la especialización del conocimiento del profesor es la materia que enseña. Así, asumimos una caracterización intrínseca de la noción de especialización (Scheiner, Montes, Godino, Carrillo y Pino-Fan, 2019) y, adoptamos el modelo MTSK como enfoque que determine las componentes de conocimiento profesional a construir en la formación de profesores. Este modelo sigue la estructura propuesta por Shulman (1986), estableciendo dos dominios de conocimiento, conocimiento disciplinar (en este caso matemático), y conocimiento didáctico del contenido. El modelo de conocimiento MTSK abarca también las creencias del profesor sobre la matemática y su enseñanza y aprendizaje, que no serán objeto de reflexión en este artículo.

El conocimiento matemático (MK) está constituido por los saberes matemáticos que posee el profesor que le permiten, dada una situación de enseñanza-aprendizaje de la matemática, planificarla, gestionarla, o reflexionar acerca de la misma, en solitario, o con otros agentes del proceso educativo. En la modelación propuesta por el modelo MTSK, se entiende que este conocimiento se puede explorar desde tres subdominios que contemplan naturalezas complementarias del mismo.

El primero de ellos es local al tema que se aborda en la situación de enseñanza y aprendizaje concreta. Un profesor puede, dado cierto tema, conocer las definiciones, propiedades y fundamentos de los diferentes conceptos usados en ese tema, así como los procedimientos matemáticos propios del tema, y los diferentes registros mediante los que pueden representarse los conceptos relativos a dicho tema (e.g. verbal, algebraico, gráfico, o enactivo, entre otros). Finalmente, un profesor puede estar familiarizado con la fenomenología del concepto (Gómez y Cañadas, 2016), y las aplicaciones del mismo. Este subdominio recibe el nombre de *Conocimiento de los Temas.*

El segundo subdominio, *Conocimiento de la Estructura Matemática*, se refiere a que el profesor puede conocer cómo se relaciona el tema que aborda con otros temas o conceptos matemáticos. Estas conexiones pueden ser de simplificación, si se refieren a temas más elementales; de complejización, si se refieren a una matemática más avanzada; transversales, si se refieren a conceptos matemáticos como el infinito o la proporcionalidad, que están presentes en distintos núcleos temáticos; o auxiliares, si consisten en usar como herramienta un objeto matemático en relación con el tema que se está abordando.

El tercer subdominio se relaciona con la sintaxis de la matemática. Desde esta visión, se estudia cómo el profesor conoce el quehacer matemático subyacente a la actividad matemática. Así, el profesor puede conocer diferentes formas de argumentación, validación, y prueba; características de los enunciados matemáticos (e.g. evitar condiciones incompatibles o redundantes en proposiciones); diferentes formas de organizar el trabajo matemático al enfrentarse a tareas matemáticas como la resolución de problemas (e.g. estrategias heurísticas en la resolución de problemas); o actividades concretas propias del quehacer matemático, como la modelación matemática. Este subdominio recibe el nombre de *Conocimiento de la Práctica Matemática.*

El conocimiento didáctico del contenido (PCK) abarca los saberes que el profesor posee, ligados al contenido, desde el enfoque de su consideración como objeto de enseñanza y aprendizaje (Shulman, 1986, p. 9). Así, en el MTSK se proponen tres subdominios relativos al PCK:

El *Conocimiento de la Enseñanza de las Matemáticas* contempla el conocimiento del profesor acerca de cómo transformar el contenido matemático para hacerlo comprensible a otros, abarcando teorías sobre la enseñanza de la matemática, que le permitan enfocar o estructurar de forma general su docencia de las matemáticas, estrategias, técnicas, tareas o ejemplos (siempre vinculados al contenido) que le permitan organizar sus sesiones de clase, o recursos materiales y virtuales de enseñanza de las matemáticas.

El segundo subdominio del PCK es el *Conocimiento de las Características del Aprendizaje de las Matemáticas*, que abarca el conocimiento que el profesor posee acerca de cómo se aprende el contenido matemático. Así, un profesor puede conocer teorías sobre el aprendizaje de las matemáticas, formales (e.g. APOS, Van Hiele), o personales. El conocimiento de las dificultades o fortalezas que pueden hallar los estudiantes al aprender un determinado contenido, el conocimiento de la dimensión emocional del aprendizaje de las matemáticas y el conocimiento que el profesor puede poseer acerca de cómo los estudiantes pueden interactuar con el contenido matemático, son herramientas útiles para su gestión de la enseñanza, de ahí que se incluyan en este subdominio.

El tercer subdominio, relativo al *Conocimiento de los Estándares de Aprendizaje de las Matemáticas*, recoge el conocimiento del profesor acerca de qué debe aprenderse en cada momento de la escolarización. Así, un profesor puede conocer tanto los hitos de aprendizaje que se espera en un alumno de un determinado nivel o edad, como el nivel de desarrollo conceptual o procedimental esperado respecto de cierto contenido, así como posibles secuenciaciones de temas. Este conocimiento puede venir dado por referentes estandarizados con diferentes niveles de concreción, desde el contenido vigente en la normativa estatal o autonómica, hasta los planes de centro.

3. Experimento de Enseñanza

Dentro de los estudios de diseño, pueden encontrarse dos tipos, los centrados en los diseños de aula, y los centrados en desarrollo profesional. Estos estudios suelen tener cinco características fundamentales: abordan problemáticas relevantes para la práctica de aula, tienen una naturaleza intervencionista, tienen un soporte teórico sólido y una orientación pragmática, implican testear, revisar y/o abandonar conjeturas, y buscan cierta generalidad (Cobb, et al., 2016). Suelen, asimismo, constar de varios ciclos, para aproximarse a la complejidad de las problemáticas abordadas (Molina, et al., 2011). En general, los experimentos de enseñanza, y en concreto aquellos centrados en desarrollo profesional, suelen tener tres fases (Cobb et al., 2016): (i) Preparación, que incluye documentar los puntos de partida de los profesores respecto de las variables a analizar, esbozar una trayectoria prevista de aprendizaje, o al menos un conjunto de hipótesis sobre dicho aprendizaje, y dotar de un contexto teórico al estudio.; (ii) Experimentación, que implica recoger datos que hagan posible un posterior análisis; y (iii) Realización de un análisis retrospectivo, que consiste en estudiar si se alcanzaron los hitos de desarrollo profesional previamente hipotetizados, buscando generalizaciones, sobre la base de los elementos teóricos que sustentan el diseño. En las siguientes subsecciones profundizaremos en cada una de estas fases, desde la concreción de cómo se han estructurado y desarrollado en el experimento de enseñanza que nos ocupa.

3.1. *Datos del experimento*

El experimento de enseñanza tuvo lugar en la Universidad de Huelva. En él participaron 39 egresados de las antiguas diplomaturas de Magisterio de Primaria, con entre 0 y 20 años de experiencia (usaremos la denominación 'maestros' para todos ellos). La duración del curso fue de 30 horas, distribuidas durante un mes, en tres sesiones semanales de tres horas.

Dentro del elenco de posibilidades para diseñar dinámicas de formación de profesorado, se eligieron dinámicas de clase similares a las de la formación inicial, centradas en la profundización en el contenido y los procesos de enseñanza y aprendizaje asociados al mismo (Even, 2005). En el experimento de enseñanza que nos ocupa, dada la naturaleza institucional del curso, con sus consiguientes requerimientos de evaluación individualizada, se adoptó un enfoque de realización individual de tareas, mediada por discusiones grupales de cada una de estas. En estas discusiones, dos formadores tenían un rol de moderadores, que podían, en casos puntuales, plantear preguntas que invitaran a la reflexión. El conjunto de tareas estuvo guiado por la pregunta: ¿Qué necesito saber, como maestro, para plantear este problema (el relativo a cada tarea) en un aula?, orientando la discusión hacia posibles planificaciones docentes alrededor de cada problema propuesto, de manera que los maestros pudieran desarrollar un sentido de pertenencia (Farmer, Gerretson y Lassak, 2003) hacia su diseño, lo cual les debería llevar a implicarse en mayor medida en la dinámica.

3.2. *Fase de preparación*

El experimento de enseñanza consistió en una serie de 8 tareas, de las cuales una se basaba en la familiarización con elementos curriculares y otra en la explicitación de creencias sobre la matemática y su enseñanza y aprendizaje, y no serán objeto de análisis en este estudio. Las seis tareas restantes, presentaban un problema matemático que permitiera diversas estrategias de resolución, y un guion de reflexión (Cuadro 1) cuya estructura general estaba orientada por los subdominios del modelo MTSK, pretendiéndose que el guion invitara a movilizar todos los subdominios. Así, las dos primeras preguntas incidían de forma especial en el *Conocimiento de los Temas*, llevando a los profesores al análisis de la situación en detalle, y fomentando la consideración de cierto grado de flexibilidad matemática (Star y Rittle-Johnson, 2008), al considerar dos posibles resoluciones. La segunda y especialmente la tercera pregunta pretendían que el maestro profundizase en el contenido matemático que aparecía en el problema, buscando relaciones tanto entre las resoluciones que construyese, como con otros contenidos matemáticos, invitando a movilizar *Conocimiento de la Estructura Matemática*. La cuarta pregunta profundizaba en el *Conocimiento de la Práctica Matemática*, a la vez que en el de las *Características del Aprendizaje de las Matemáticas*, y en particular en la interacción de los alumnos en las fases de la resolución de problemas (Polya, 1965). La sexta incidía en este último subdominio, así como en *Conocimiento de la Enseñanza de las Matemáticas,* al igual que la quinta pregunta al conducir a la reflexión sobre de qué forma organizar una sesión alrededor del problema dado. La séptima pregunta centraba la reflexión en el *Conocimiento de los Estándares de Aprendizaje de las Matemáticas* que pudieran relacionarse con el problema a discutir y la octava se añadió como instrumento de detección de las necesidades formativas declaradas por los maestros, de manera que en cada ciclo se obtuviera información de cara a completar el contenido para siguientes ciclos. Este guion de preguntas fue validado por profesores con amplia experiencia en formación continua de profesores de matemáticas.

1. Resuelva el problema de forma justificada, razonando cada paso. Tras resolverlo de esta primera forma, resuélvalo utilizando una segunda estrategia.
2. Analice, de forma detallada, qué conceptos matemáticos se involucran en ambas resoluciones.
3. Indique, de forma razonada, con qué conceptos matemáticos (no explícitos en la resolución) podría relacionar la resolución de este problema. Indique cómo.
4. Reflexione acerca de cómo se esperaría que unos alumnos siguieran las fases de resolución de problemas al tratar con este problema.
5. Describa cómo implementaría este problema en un aula (metodológicamente).
6. Describa qué dificultades, errores y/u obstáculos podría esperar que experimentase un/a alumno/a al tratar de resolver este problema. Reflexione sobre qué tareas podría proponerle para contribuir a superar dichas dificultades.
7. Indique, a la luz de diferentes estándares curriculares, en qué nivel (curso) se puede proponer este problema.
8. Plantee tres preguntas (significativamente diferentes entre sí) sobre aspectos ligados al problema (pueden ser de contenido, o de enseñanza y aprendizaje del contenido) que sienta que necesita responder para alimentar su propio conocimiento. Respóndalas, explicando por qué la plantea y las fuentes que ha consultado para responderla.

Cuadro 1. Guion de las tareas

La tarea se presentaba en el grupo de discusión, y los maestros asistentes reflexionaban primero individual y luego colectivamente sobre la tarea. Esta reflexión tendía a centrarse primero en aspectos matemáticos ligados a la resolución del problema, para posteriormente incidir sobre las diferentes preguntas del guion de la tarea. En primer lugar, se discutían todas las diferentes posibilidades de resolución planteadas, para hacer conscientes a los maestros de la riqueza derivada de considerar diversas resoluciones. En cuanto al conocimiento didáctico del contenido, la discusión se concentraba en la búsqueda de recursos bibliográficos que les permitieran fundamentar su discusión tanto de la enseñanza como de las características del aprendizaje ligadas a la tarea. Dichos recursos contemplaban desde la búsqueda a través de plataformas como Google Académico, hasta la revisión de actas de reuniones científicas específicas de educación matemática (CIBEM, RELME, SEIEM), o libros específicos (e.g. Polya, 1965). Complementariamente a la discusión, se disponía de un foro de discusión con un hilo de respuestas anidadas por cada tarea, que permitía una discusión asincrónica de la misma, sirviendo como herramienta adicional para la identificación de las necesidades formativas de los maestros, y de análisis de su conocimiento profesional (Montes, Escudero-Ávila, Flores-Medrano, Muñoz-Catalán y Carrillo, 2015). Asimismo, los maestros tenían a su disposición tutorías individuales o colectivas con los dos formadores.

Cada una de las tareas del curso se centraban en una situación matemática, respecto de la que se debía reflexionar usando las 8 preguntas del guion (Cuadro 1). Estas situaciones problemáticas se eligieron por la riqueza de elementos de conocimiento profesional que pueden movilizarse al reflexionar sobre las mismas. Las tareas propuestas abordaban contenidos matemáticos diversos, abarcando Probabilidad, Estadística, Medida, y Geometría. Para cada una de ellas se hizo una revisión sobre los conocimientos matemáticos requeridos para su resolución, así como sobre aspectos de conocimiento profesional para resolver la tarea, ligados tanto a resolución de problemas (Carrillo, Climent, Contreras, Montes, 2019), como a temas matemáticos específicos, como proporcionalidad (Buforn, Fernández, 2014). Se usó la primera tarea como evaluación inicial, de cara a documentar el punto de partida de los profesores, respecto a cada una de las variables, y la última como punto de evaluación final. Ambas tareas corresponden a la reflexión, siguiendo el guion dado en el Cuadro 1, acerca de dos situaciones matemáticas: El ‘problema del gato’ (Northrop, 1981): *Tenemos una cuerda tensada que da la vuelta a la Tierra por el Ecuador. Si añado 10 metros a esa cuerda, y la vuelvo a tensar uniformemente hacia afuera, ¿cabría un gato por debajo de ella?*; y una situación de proporcionalidad compuesta: *6 obreros trabajando 10 horas al día tardan 10 días en construir un muro. ¿Cuánto* *tardarán 8 obreros trabajando 6 horas al día? Resuelve el problema sin usar la regla de tres.* Así, por cada maestro, se obtuvieron, de cara a la evaluación, dos tareas completas respondiendo a las preguntas del guion (Cuadro 1), en relación con cada problema.

3.2.1. *Hipótesis de progresión del aprendizaje*

Las investigaciones basadas en experimentos de enseñanza requieren la evaluación de los resultados de los participantes (Cobb et al., 2016). Para evaluar los resultados de este experimento, se diseñó una hipótesis de progresión del aprendizaje de los maestros (Cuenca, 2003), que permitiera analizar el cambio en el uso del conocimiento y la habilidad de movilizar diferentes categorías del mismo. Así, la hipótesis de progresión consiste en un conjunto de conjeturas evaluables sobre el desarrollo del conocimiento del profesor, suponiendo una reinterpretación de la noción de trayectoria hipotética de aprendizaje. En nuestro caso, dicha trayectoria está definida en torno a varias categorías, sobre la que se especifican niveles de progresión en el uso de conocimiento.

En cuanto al conocimiento a evaluar, sel estudio e centró en cinco de los seis subdominios de MTSK, obviando el Conocimiento de la Práctica Matemática, dados los obstáculos que suele generar la obtención de datos de dicho subdominio cuando no se tiene posibilidad de obtener información complementaria, en forma, por ejemplo, de entrevistas (Delgado-Rebolledo y Zakaryan, 2019), que no eran posibles en este contexto. Así, en lo relativo al Conocimiento de los Temas (KoT), se evaluó la resolución de la tarea, la identificación de contenidos, y la flexibilidad matemática. En el Conocimiento de la Estructura Matemática (KSM), se evaluó la relación con contenidos matemáticos ajenos a la tarea. Centrándonos ahora en los subdominios ligados al Conocimiento Didáctico del Contenido, y en particular al Conocimiento de la Enseñanza de las Matemáticas, se evaluó el uso de recursos, de teorías, y la coherencia entre las tareas propuestas. En cuanto al Conocimiento de las Características del Aprendizaje de las Matemáticas (KFLM), se abordaron dos aspectos: el conocimiento de fortalezas y dificultades, y la descripción de formas de interacción de posibles alumnos con la tarea, en particular respecto de las fases de resolución de problemas. Finalmente, en lo relativo al Conocimiento de los Estándares de Aprendizaje de las Matemáticas (KMLS), nos centramos en el uso del currículo, y en particular en el grado de justificación de la articulación entre los distintos bloques curriculares.

Estos diez aspectos a evaluar permitieron estructurar una hipótesis de progresión del aprendizaje (Cuadro 2), donde para cada una de ellos se establecieron tres niveles de progresión en la posesión y uso del conocimiento profesional. Así, asumimos que los maestros avanzarán en cada una de las categorías, haciendo un uso de menos a más relacional de su conocimiento.

Subdominio	*Categoría*	*Carencia o no uso*	*Uso no relacional*	*Uso relacional*
KoT	*Resolución del problema*	No se resuelve el problema completamente	Se resuelve el problema, pero no se justifica	Se resuelve de forma justificada
	Identificación de contenidos	No identifican todos los contenidos necesarios para resolver el problema	Identifica los contenidos, pero no los relaciona con los momentos de la resolución	Identifica los contenidos y los pone en relación con la resolución
	Flexibilidad	No resuelve de más de una forma	Resuelve de dos formas, pero no describe diferencias	Resuelve de dos formas, y describe diferencias
KSM	*Relación con otros contenidos*	No se explicita relación con otros contenidos, o relaciona con contenidos no matemáticos.	Se relaciona con otros contenidos matemáticos, pero sin justificar la relación	Se relaciona con otros contenidos matemáticos y se justifica la relación
KMT	*Recursos*	No propone recursos específicos para el problema	Propone recursos, pero sin justificar la relación	Propone y justifica recursos
	Teorías	No se usan teorías para justificar	Se usan teorías generales o específicas, sin justificar relación	Se usan teorías justificando la relación con el problema
	Coherencia	Aproximación metodológica no adecuada para el problema	Aproximación metodológica adecuada, sin justificación de la relación	Aproximación metodológica adecuada y justificada
KFLM	*Fortalezas y dificultades*	No se describen dificultades o fortalezas, o son generales	Se describen fortalezas y/o dificultades, sin justificar relación	Se describen fortalezas y/o dificultades, justificadamente
	Fases de la Resolución de problemas	No describe las fases	Describe las fases sin relacionar con el problema	Describe las fases y las relaciona
KMLS	*Uso del currículo*	No usa elementos curriculares actualizados, o no articula los elementos curriculares necesarios	Usa los elementos curriculares actualizados necesarios, sin justificar la relación con el problema	Usa los elementos curriculares actualizados necesarios, y justifica la relación

Cuadro 2. Hipótesis de progresión

El primer nivel, el de carencia o no uso de conocimiento especializado, puede ser identificado cuando el maestro no articula un razonamiento válido, cuando no usa conocimiento relacionado con la situación, o cuando usa conocimiento no relacionado con las matemáticas, y, por tanto, no especializado desde la perspectiva intrínseca que aquí se usa. En un segundo nivel se sitúa el uso no relacional de conocimiento. Este nivel se caracteriza por la falta generalizada de justificación en las respuestas, en términos de la relación de lo argumentado con el problema propuesto, aunque estas sean adecuadas. Entendemos que, por ejemplo, articular los pasos matemáticos que llevan a dar la solución de los problemas propuestos requiere conocimiento matemático, si bien justificar cómo se fundamenta cada paso demuestra relacionar dicho conocimiento con la situación de forma consciente. Finalmente, el nivel de uso relacional viene dado por la justificación de las respuestas. La validación de la hipótesis de progresión fue realizada por tres expertos, dos de ellos en el uso de hipótesis de progresión, y otro en el análisis usando el modelo MTSK.

3.3. *Fase de Experimentación*

En el estudio de la evolución de los maestros con respecto a las variables estudiadas se realizó mediante una aproximación de tipo pre-post. Así, se usó la primera tarea como primer punto de control, y la última como segundo punto. Las respuestas se codificaron como Ai, con i=1, ..., 39, para referirnos a cada uno de los maestros participantes en el curso.

El análisis, se hizo en dos fases. En una primera fase usamos la hipótesis de progresión de forma cualitativa, con cada uno de los tres niveles definidos como categorías para un análisis de contenido (Krippendorf, 2013)). Este análisis fue realizado por cada uno de los investigadores, no existiendo casos de disensión. En segundo lugar, asignamos una puntuación de 0 al nivel de carencia o no uso del conocimiento, 1 al nivel de uso no relacional, y 2 al nivel de uso relacional. Como ejemplo de asignación a cada uno de los niveles, presentamos las respuestas de tres maestros al primer problema, en relación a la implementación de la tarea en el aula (pregunta 5 del guion), evaluadas en la categoría de KMT-recursos:

Puntuación 0: [A25] A través de una metodología activa y participativa, donde el alumnado sea motor de su aprendizaje […] en una educación basada en la experiencia, el descubrimiento y la construcción de los conceptos, procedimientos y estrategias. Ofreciendo recursos que se presten a la experimentación y potenciando la autoestima, la confianza y la seguridad.

Puntuación 1: [A18] Lo primero que haría sería preguntar a los alumnos, una vez leído el problema con los datos originales, si creen que podríamos trabajar ese mismo problema con otro objeto que nos resulte más familiar. Sería interesante que pudiéramos dibujar en la pizarra algún objeto que les ayudara a visualizar la pregunta, por ejemplo, un flotador, en el que aparecen claramente dos circunferencias concéntricas.

Puntuación 2: [A03] En primer lugar, dejaría a los alumnos que manipulen y experimenten con diferentes objetos como un hula-hoop o una pelota de fútbol, y dos trozos de cuerda de diferente tamaño para cada uno, para hacer el problema más cercano y sencillo, dada la similitud de los objetos con el problema. Los alumnos deberán anotar los resultados en sus cuadernos mediante tablas o listas. Después, a través de preguntas como ¿nos ayudarían estos objetos a encontrar la solución al problema? o ¿cuánto se levanta la cuerda en cada caso?, podríamos generalizar que siempre se levanta lo mismo, y luego lo haríamos con las ecuaciones.

Como se puede observar, las aportaciones de los tres maestros varían tanto en su concreción como en su justificación, pasando de aspectos generales de metodología de enseñanza, sin concreción alguna sobre el contenido matemático, y, por tanto, no englobadas en el modelo MTSK (A25), a propuestas concretas para trabajar el problema, relacionadas con las características del problema, y justificando la relación (A03).

Para evaluar el aprendizaje, se calculó la diferencia entre los valores del segundo punto de control y el primero, respecto de cada una de las categorías reflejadas en la hipótesis de aprendizaje, dando un valor que reflejaba la evolución del aprendizaje. Una vez obtenidas las puntuaciones para cada categoría, se agruparon por subdominios a través de una media aritmética. Así, las puntuaciones relativas a la evolución del conocimiento en cada subdominio oscilaron entre -2 y 2 puntos. Estos valores se organizaron según se indica en la Tabla I, para tener una clasificación operativa:

TABLA I
Niveles de valoración de la evolución

Intervalo de puntuaciones	*Evolución del aprendizaje*
[-2,0)	Evolución negativa
0	No evoluciona
(0,1]	Evolución positiva leve
(1,2]	Evolución positiva moderada

Se consideró el conjunto de valores negativos como 'Evolución negativa', ya que demuestran una involución en el conocimiento puesto en juego por los maestros. Los maestros que obtienen la misma puntuación por subdominios en ambas tareas (si bien pueden existir diferencias entre los diferentes parámetros que compensen unas con otras), se califican como 'No evoluciona'. Aquellos que obtuvieron una calificación entre 0 y 1 entendemos que experimentan una evolución positiva, leve, y a partir de 1, moderada.

3.4. *Fase de análisis retrospectivo*

Mostramos a continuación los resultados del análisis usando la hipótesis de progresión del aprendizaje de los maestros. Los organizaremos subdominio a subdominio, describiendo las frecuencias y porcentajes asociados a la evolución del conocimiento en cada uno de los subdominios, mostrando algunas evidencias sobre dicha evolución extraídas de las tareas de los maestros.

En primer lugar, mostramos los resultados relativos a la evolución del subdominio del conocimiento de los temas (KoT). Un número significativo (un 71%) de maestros participantes parecen experimentar una evolución en su conocimiento de los temas, siendo en un 7.69% especialmente significativa dicha evolución, pasando de una puntuación de 0 a 2. Dos maestros, un 5.13% del total, demuestran una evolución negativa, mientras que en un 23% del total, no se observa evolución. Un ejemplo de esto es el profesor A17, que resuelve el problema del gato por un procedimiento basado en considerar la altura de dicho gato igual a 40 cm, y hacer un tratamiento geométrico-algebraico para determinar cuántos metros de cuerda sería necesario añadir para dicho gato. En su segunda resolución del problema, hace un tratamiento geométrico-algebraico que lleva a calcular cuál será la altura a la que se eleve la cuerda sobre la circunferencia del ecuador terrestre. Sin embargo, se limita a mostrar ambas resoluciones, sin justificación alguna de las diferencias entre ambas. En la segunda tarea, resuelve primero por reducción a la unidad, y en segundo lugar usando la caracterización de la proporcionalidad inversa por productos constantes. En su argumentación posterior, afirma que *"En realidad, matemáticamente, ambas resoluciones son equivalentes, ya que en una estoy aplicando la misma propiedad que en la otra, pero ocultándola. Sin embargo, tener dos maneras de abordarlo puede ser útil si algún niño me pide que lo explique de otra forma".* En su afirmación, justifica el uso del mismo recurso matemático (las relaciones de proporcionalidad), haciendo patente que es consciente de que en la primera forma se usan implícitamente propiedades matemáticas que en la segunda se hacen explícitas.

Los datos en torno a este subdominio suponen un resultado muy positivo, ya que se observa una mejora generalizada en el conocimiento de los temas, en el que los maestros suelen demostrar debilidades al terminar su formación inicial (Montes, Contreras, Liñán, Muñoz-Catalán, Climent, Carrillo, 2015). En particular, resulta significativo que, en lo relativo al reconocimiento de la flexibilidad matemática, observamos que 21 maestros tienen un incremento de un punto en la evolución, y tres de ellos, en dos puntos, lo que parece indicar que existe un aumento significativo en la capacidad de plantear diversas soluciones de un problema matemático.

En el caso del conocimiento de la estructura matemática (KSM), observamos cómo aproximadamente la mitad de maestros no varían en su puntuación, mientras que un porcentaje algo menor experimenta una evolución positiva leve. En cuanto este subdominio, los resultados de tres participantes indican un descenso en evolución. Los maestros suelen recurrir a establecer conexiones entre contenidos de un mismo ámbito matemático, con base en su conocimiento del currículo oficial, como el alumno A33:

> [Segundo problema – A33]: Trabajaría otros contenidos del bloque de geometría relacionados con este problema como pueden ser: 4.6 La representación elemental del espacio, escalas y gráficas sencillas. 4.11. La circunferencia y el círculo. 4.12. Elementos básicos: centro, radio, diámetro, cuerda, arco, tangente y sector circular. 4.19. Introducción a la semejanza: ampliaciones y reducciones.

En la mayoría de casos donde se observa una evolución positiva leve, en lo relativo al conocimiento de la estructura matemática, el cambio suele radicar en que existe una cierta profundización en la justificación de las relaciones establecidas con otros contenidos, como sucede con el alumno A36, que centra su reflexión en las relaciones que podrían establecer posibles alumnos:

> [Primer problema- A36] Además de los contenidos de la tarea, podríamos aprovechar para trabajar los siguientes contenidos: Aprendizaje del manejo de instrumentos de medida (cinta métrica, balanza, etc.). Relación entre unidades de medida: convencionales y no convencionales. Unidad de medida de otras magnitudes (longitud, superficie, capacidad, volumen, masa…). Semejanza y proporcionalidad entre círculos concéntricos y su aplicación a otras figuras.
>
> [Segundo problema-A36] Aunque no son contenidos principales de la actividad, podemos relacionarla con: El uso de magnitudes derivadas, como es el caso de la magnitud horas por día, que puede dar lugar al trabajo de otras como la velocidad (espacio recorrido por tiempo empleado) o densidad

> (kilogramo por metro cúbico). Operaciones aritméticas: multiplicación y división de fracciones. Los alumnos tienen que multiplicar una magnitud por 8/6 y su correspondiente por 6/8, el contenido relacionado sería la equivalencia en dividir entre 8/6 o multiplicar por su inversa 6/8. Organización sistemática de la información a través de tablas. Los alumnos deben encontrar aumentos de 8/6, para trabajar ese aumento podemos escoger magnitudes que sean proporcionales y que aumenten o disminuyan doble o mitad, o una vez y media (3/2) de forma que se vea cierta progresión al aumento de 1 vez y un tercio de vez más.

Los resultados relativos al conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT) muestran cómo 9 de los maestros demuestran un nivel menor en la segunda prueba que en la primera, mientras que 8 no muestran variación. Por otro lado 22 maestros demuestran mejorar en sus resultados, uno de ellos de forma especialmente significativa. En este subdominio, es especialmente significativo el incremento en el uso de referentes teóricos propios de Educación Matemática para fundamentar el propio diseño, donde 18 participantes demostraron mejorar. Un ejemplo de esto es el maestro A36:

> [Primer problema – A36]: Trabajaría este problema con todo el grupo clase a la vez partiendo de los conocimientos previos. Acompañaría el enunciado de gráficos y dibujos en los que se destaquen los datos relevantes. Plantearía preguntas abiertas relativas al problema, creando un debate y participación activa por parte del alumnado, hasta que entendieran qué es lo que se pide, y cómo vamos a llegar a resolverlo. Llegados a este punto, tenemos que introducir la fórmula para medir la longitud de una circunferencia y que los alumnos realicen los cálculos.
>
> [Segundo problema - A36]: Siguiendo la estructura de fases de resolución de Pòlya, en la primera fase de la resolución, que se corresponde con la identificación y definición del problema, plantearía situaciones similares a la de construcción que hiciera que los alumnos percibiesen la necesidad de realizar esos cálculos. En la segunda fase (planificación del problema), propondría un debate en el que expusieran sus aproximaciones al problema y repasaría la teoría de proporcionalidad. En la tercera fase (ejecución de un plan), proporcionaría algún apoyo visual para ver más claramente las relaciones que se establecen entre los datos que tenemos, o algún ejemplo en el que se traten los mismos contenidos desde un nivel más asequible, partiendo el problema, por ejemplo. Por último, en la fase de verificación, los alumnos tendrían que hacer el problema inverso.

Vemos cómo este maestro, en su reflexión en torno a cómo abordar en el aula el primer problema, hace una aproximación descriptiva a su abordaje del trabajo, con elementos muy generales de gestión de la participación. Sin embargo, en el segundo problema, usa un referente específico que fundamenta su estructuración del posible abordaje del problema en el aula, así como establece las posibles implicaciones de cada una de las acciones desde la especificidad del trabajo centrado en la resolución de problemas. Así, demuestra una mejora significativa en el uso de su conocimiento para fundamentar su diseño.

Sin embargo, se pudo observar, en cuanto al conocimiento de recursos, que 13 maestros demostraron una evolución negativa, frente a otros 13 que mostraron evolución positiva. Asumimos que esto puede estar relacionado, en parte, con el contenido abordado en la segunda prueba, proporcionalidad, contenido en el que la mayoría de participantes reconoció que su aproximación habitual consistía en usar ‘la regla de tres’.

En cuanto a los resultados que conciernen al conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas (KFLM), alrededor de un 46% mejoran su nivel, mientras que cerca de un 40% no experimenta evolución alguna. El resto, 6 participantes, demuestran una evolución negativa. Resulta interesante, en cuanto a este tipo de conocimiento, el maestro A20, que, si bien obtiene la máxima puntuación en ambas tareas, usa fuentes significativamente diferentes en ambas. En la primera, declara: “He planteado el problema “El gato” a los alumnos del programa de refuerzo en el que se incluyen a alumnos de altas capacidades intelectuales”. Tras esto analiza las dificultades, y explora los posibles planteamientos que les ayudarían a superarlas. En la segunda tarea, decidió fundamentar su respuesta en resultados de investigación, y estructurando su respuesta desde los resultados de su búsqueda bibliográfica, usando para ello el trabajo de Godino y Batanero (2003) sobre proporcionalidad. En ambas tareas fundamenta profundamente sus respuestas en diferentes fuentes, si bien en la primera lo hace fundamentando exclusivamente en su práctica y en la segunda incorpora referentes externos. Observamos, sin embargo, una tendencia en la argumentación de los maestros a basar sus justificaciones en la experiencia que tienen, incorporando una cantidad limitada de aspectos basados en la bibliografía.

En cuanto al conocimiento de los estándares de aprendizaje matemático (KMLS), no se observa, en general, una evolución, demostrando más de un 80% de los maestros un nivel de uso relacional en ambas pruebas. Sólo en una cantidad marginal de casos hay una evolución positiva. Esto es consistente con el hecho de que los procesos públicos selectivos que llevan al servicio activo, en el contexto español, ponen mucho énfasis en el correcto uso de referentes curriculares.

En la Tabla II pueden observarse, por subdominios, los diferentes niveles de valoración de la evolución de los maestros, en porcentaje sobre el total de participantes.

TABLA II
Síntesis de resultados, en porcentajes

Evolución del aprendizaje	*KoT*	*KSM*	*KMT*	*KFLM*	*KMLS*
Evolución negativa	5.13	7.70	23.08	15.38	25.64
No evoluciona	23.08	48.72	20.51	38.46	56.41
Evolución positiva leve	64.1	43.5	53.85	46.16	17.95
Evolución positiva moderada	7.69	0	2.56	0	0

4. Resultados y conclusiones

El experimento de enseñanza aquí mostrado arroja unos resultados positivos, ya que se observa una evolución en el conocimiento que los maestros reflejan al responder la tarea. Parecen especialmente significativos los resultados respecto del conocimiento de los temas, y del conocimiento de la enseñanza de las matemáticas. En cuanto al primero, se observa que los maestros mejoran en su uso de su conocimiento profesional, especialmente en su flexibilidad matemática. En cuanto al conocimiento de la enseñanza de las matemáticas, al tener la mayoría de los participantes cierta experiencia docente, asumíamos que su exploración de recursos metodológicos para la enseñanza de las matemáticas, y de las características del aprendizaje de los alumnos debía haber existido como parte de la propia práctica. Sin embargo, los resultados obtenidos parecen mostrar que el curso tuvo impacto en el uso que daban estos maestros a dicho conocimiento, y en la incorporación de información proveniente de fuentes especializadas, como es el caso del alumno A20. Los resultados demuestran un mayor grado de invariancia en cuanto al aprendizaje en lo relativo al conocimiento de la estructura matemática y al conocimiento de los estándares de aprendizaje matemático. Entendemos que el primero de los subdominios supone uno de los desafíos pendientes para este tipo de experimentos y para la formación de profesores en general, dada la dificultad de que los maestros lleguen a adquirir una comprensión de la matemática desde un punto de vista superior (Kilpatrick, 2008). Por otro lado, la baja evolución en el uso del conocimiento de los estándares de aprendizaje matemático puede explicarse por el habitual grado de relación de los maestros con dichos estándares.

La gran heterogeneidad entre los grados de experiencia de los maestros participantes dificulta la posibilidad de dar carácter de generalizable al experimento, que suele ser uno de los objetivos de los experimentos de enseñanza

(Cobb et al., 2016). Sin embargo, entendemos que éste aporta resultados que pueden ser generalizados con matizaciones, respecto de aspectos ligados al diseño instruccional que podrían servir de orientación para futuros diseños. Así, las tareas planteadas se han mostrado útiles para la construcción de conocimiento profesional. Una consecuencia inmediata es el potencial de estructurar la formación continua usando tareas basadas en un modelo de conocimiento profesional como MTSK.

En cuanto a las tareas, entendemos que la combinación de la segmentación de la reflexión por apartados tan concretos ha contribuido a focalizar la atención de los maestros. Esto, unido a la selección de las situaciones problemáticas potentes, ha permitido una reflexión rica y detallada. Realizar varias tareas en este sentido, con diferentes contenidos, en un módulo de tan sólo un mes de duración parece haber tenido resultados positivos. En cuanto a la fundamentación en el modelo de conocimiento profesional, éste se ha mostrado útil y funcional para estructurar tanto las tareas como la hipótesis de progresión del aprendizaje de los maestros. Entendemos que, en esta línea, sería interesante tanto seguir desarrollando experimentos de enseñanza con el propio modelo MTSK, como explorar la posibilidad, desde otros grupos, de estructurar dinámicas de formación inicial desde sus propias perspectivas teóricas. En particular, y en relación con el desarrollo de diseños instruccionales desde el modelo MTSK, entendemos que este diseño ha contribuido especialmente a los subdominios KoT y KMT, que muestran resultados de aprendizaje satisfactorios. Atribuimos esto a la segmentación de la reflexión por preguntas orientativas basadas en dichos subdominios. Por otro lado, las preguntas basadas en el subdominio KMLS han sido útiles para mostrar el dominio que los maestros tienen de elementos curriculares, si bien creemos que sería interesante complementar la pregunta asociada a esta tarea con la exploración de otro tipo de estándares de naturaleza diferente (provenientes de asociaciones profesionales o libros de texto, por ejemplo), para permitir una mayor profundización. En cuanto al subdominio KFLM, creemos que sería interesante potenciar el uso de bibliografía especializada, de forma que esta complemente y permita justificar el conocimiento, basado en la experiencia, de los maestros. Además, sería potente añadir como complemento en la discusión de los problemas, resoluciones de los mismos por parte de niños (reales o recreadas, estas últimas basadas en la literatura de investigación). El subdominio KSM, por su parte, supone un desafío de cara a futuros diseños, dado que entendemos que deben reenfocarse las preguntas centradas en este subdominio para que la reflexión de los maestros supere un análisis superficial del currículo, y centrarla en argumentos matemáticos y sobre su enseñanza y aprendizaje. Finalmente, y en cuanto al subdominio no abordado en este diseño, el KPM, es necesario profundizar en la conceptualización del mismo, de forma que se pueda explorar el desarrollo de tareas asociadas al mismo.

Investigaciones como la que aquí se refleja, ligadas a un experimento de enseñanza centrada en el desarrollo profesional, tienen una limitación intrínseca, acerca de la sostenibilidad de los resultados obtenidos. Este experimento tuvo una duración de 30 horas, debido al plan de estudios en el que se enmarca, y la evaluación del aprendizaje de los maestros se realizó centrándonos en el estudio de la evolución entre el comienzo del conjunto de sesiones y el final del mismo. Sin embargo, con los instrumentos usados, es imposible afirmar que el experimento tuviera un impacto en el desempeño diario de su profesión, más allá de la aparente construcción o uso de ciertos elementos de conocimiento. Así, esta limitación supone un desafío pendiente para este tipo de investigación, que podría abordarse, por ejemplo, desarrollando estudios de carácter longitudinal, que permitan explorar la sostenibilidad del aprendizaje desarrollado en los experimentos de enseñanza donde la parte instruccional de los mismos esté orientada a la actividad profesional posterior de los docentes. Una limitación adicional del estudio está ligada a la hipótesis de progresión usada para evaluar la evolución en el conocimiento de los maestros. Así, esta hipótesis está basada en considerar de forma aislada cada uno de los subdominios. Esto tiene sentido, desde nuestra perspectiva, por ser este experimento de enseñanza el primero basado en el modelo MTSK, pero asumimos que en futuros desarrollos de esta hipótesis de progresión sería interesante considerar la integración tanto de las diferentes categorías como de los diferentes subdominios, recogiendo así la naturaleza holística e integrada del conocimiento.

Reconocimientos

Esta investigación fue financiada por el centro de investigación COIDESO de la Universidad de Huelva, y por el Ministerio de Ciencia, Innovación y Universidades, del Gobierno de España (Proyecto: RTI2018-096547-B-I00).

Referencias bibliográficas

Bell, C., Wilson, S., Higgins, T. y McCoach, D. (2010). Measuring the Effects of Professional Development on Teacher Knowledge: The Case of Developing Mathematical Ideas. *Journal for Research in Mathematics Education, 41*(5), 479-512.

Buforn, A., Fernández, C. (2014). Conocimiento de matemáticas especializado de los estudiantes para maestro de primaria en relación al razonamiento proporcional. *Bolema,* 28(48), 21-41.

Carrillo, J. y Climent, N. (2011). The development of teachers' expertise through their analyses of good practice in the mathematics classroom. *ZDM Mathematics Education*, *43*(6-7), 915-926. https://doi.org/10.1007/s11858-011-0363-0

Carrillo J., Climent N., Contreras L. C. y Montes M. Á. (2019). Mathematics Teachers' Specialised Knowledge in Managing Problem-Solving Classroom Tasks. En P. Felmer, P. Liljedahl y B. Koichu (Eds.), *Problem Solving in Mathematics Instruction and Teacher Professional Development* (pp. 297-316). Cham: Springer.

Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L. C. y Montes, M. (2020). Using Professional Development Contexts to Structure Prospective Teacher Education. En S. Llinares y O. Chapman (Eds.), *International Handbook of Mathematics Teacher Education: Volume 2* (pp. 393-419). Londres: Brill.

Carrillo, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, A., … Muñoz-Catalán, M. C. (2018). The Mathematics Teacher's Specialised Knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education,* 20(3), 236 – 253. DOI 10.1080/14794802.2018.1479981.

Cobb, P., Jackson, K. y Dunlap, C. (2016). Design Research. An Analysis and Critique. En L. D. English y D. Kirshner (Eds.), *Handbook of International Research in Mathematics Education* (pp.481-503). Londres: Rouletdge.

Cobb, P. y McClain, K. (2001). An approach for supporting teachers' learning in social context. En F. L. Lin y T. J. Cooney (Eds.), *Making sense of mathematics teacher education* (pp. 207–231). Dordrecht: Kluwer.

Cuenca, J. M. (2003). Análisis de concepciones sobre la enseñanza de patrimonio en la educación obligatoria. *Enseñanza de las Ciencias Sociales*, *2*, 37-45.

Delgado-Rebolledo, R. y Zakaryan, D. (2019). Relationships Between the Knowledge of Practices in Mathematics and the Pedagogical Content Knowledge of a Mathematics Lecturer. *International Journal of Science and Mathematics Education*. https://doi.org/10.1007/s10763-019-09977-0

Escudero-Muñoz, J.M. (2017). La formación continua del profesorado de la educación obligatoria en el contexto español. *Profesorado. Revista de curriculum y formación del profesorado, 21*(2), 1-20.

Even, R. (2005). Integrating Knowledge and Practice at Manor in the Development of Providers of Professional Development for Teachers. *Journal of Mathematics Teacher Education, 8*(4), 343-357. https://doi.org/10.1007/s10857-005-0855-3

Farmer, J. D., Gerretson, H. y Lassak, M. (2003). What Teachers Take From Professional Development: Cases And Implications. *Journal of Mathematics Teacher Education, 6*, 331–360. https://doi.org/10.1023/A:1026318709074

Godino, J. (2009). Categorías de Análisis de los conocimientos del Profesor de Matemáticas. *Revista iberoamericana de educación matemática,* 20, 13-31.

Godino, J. D. y Batanero, C. (2003). *Proporcionalidad y su didáctica para maestros*. Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Granada: Universidad de Granada. Recuperado de http://www.ugr.es/local/jgodino/

Godino, J. D., Giacomone, B., Batanero, C. y Font, V. (2017). Enfoque Ontosemiótico de los Conocimientos y Competencias del Profesor de Matemáticas. *Bolema, 31*(57), 90-113.

Gómez, C., y Cañadas, M.C. (2016). Dificultades de los profesores de matemáticas en formación en el aprendizaje del análisis fenomenológico. *Revista Latinoamericana de Investigación Educativa, 19*(3), 311-334.

Kaiser, G. y Li, Y. (2011). Reflections and future prospects. En Y. Li y G. Kaiser (Eds.), *Expertise in mathematics instruction. An international perspective* (pp. 343–353). New York: Springer.

Kilpatrick, J. (2008). A higher standpoint. In *ICMI proceedings: Regular lectures* (pp. 26–43). Recuperado de http://www.mathunion.org/icmi/publications/icme-proceedings/ materials-from-icme-11-mexico/regular-lectures/

Krippendorf, K. (2013). *Content Analysis: an introduction to its methodology*. Thousand Oaks: Sage.

Lin, F. L. y Rowland, T. (2016). Pre-Service and In-Service Mathematics Teachers' Knowledge and Professional Development. En Á. Gutiérrez, G.C. Leder, y P. Boero (Eds.), *The Second Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education* (pp. 483-519). Boston: Sense Publishers.

Molina, M., Castro, E., Molina, J. L. y Castro, E. (2011). Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza. *Enseñanza de las Ciencias*, *29*(1), 75–88.

Montes, M., Carrillo, J., Contreras, L. C., Liñán-García, M. M. y Barrera-Castarnado, V. (2019). Estructurando la formación inicial de profesores de matemáticas: Una propuesta desde el modelo MTSK. En E. Badillo, N. Climent, C. Fernández-Verdú y M. T. González-Astudillo (Eds.), *Investigación sobre el profesor de matemáticas: formación, práctica de aula, conocimiento y competencia profesional* (pp. 157-176). Salamanca: Ediciones Universidad de Salamanca.

Montes, M., Contreras, L. C., Liñán-García, M. M., Muñoz-Catalán, M. C., Climent, N. y Carrillo, J. (2015). Conocimiento de aritmética de futuros maestros. Debilidades y fortalezas. *Revista de Educación*, *367*, 36-62.

Montes, M., Escudero-Ávila, D., Flores-Medrano, E., Muñoz-Catalán, M. C. y Carrillo, J. (2015). El foro como contexto de exploración del conocimiento profesional de maestros en activo. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 381-389). Alicante: SEIEM.

Northrop, E. (1981). *Paradojas Matemáticas*. México: UTEHA.

Polya, G. (1965). *Cómo plantear y resolver problemas*. Trillas: México.

Reyes–Gasperini, D. y Cantoral, R. (2013). Socioepistemología y Empoderamiento: la profesionalización docente desde la problematización del saber matemático. *Boletim de Educação Matemática, 28*(48), 360–382.

Rhoads, K., Radu, I., y Weber, K. (2011). The Teacher Internship Experiences of Prospective High School Mathematics Teachers. *International Journal of Science and Mathematics Education, 9*, 999-1022.

Sánchez-Matamoros, G., Fernández, C. y Llinares, S. (2015). Developing pre-service teachers' noticing of students' understanding of the derivative concept. *International Journal of Science and Mathematics Education, 13*(6), 1305-1329. https://doi.org/10.1007/s10763-014-9544-y

Sanhueza, S., Penalva, M. y Friz, M. (2013). Identidades y competencias profesionales de estudiantes para maestro de educación infantil relativas a la enseñanza de la geometría. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 16* (1), 99-125.

Scheiner, T., Montes, M.A., Godino, J. D., Carrillo, J. y Pino-Fan, L. R. (2019). What Makes Mathematics Teacher Knowledge Specialized? Offering Alternative Views. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 17 (1), 153-172. https://doi.org/10.1007/s10763-017-9859-6

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, *15*(*2*), 4-14.

Star, J. R. y Rittle-Johnson, B. (2008). Flexibility in problem solving: The case of equation solving. *Learning and Instruction, 18*, 565–579.

Steffe, L. P. y Thompson, P. W. (2000). Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential elements. En R. Lesh y A. E. Kelly (Eds.), *Research design in mathematics and science education* (pp. 267-307). Hillsdale, N J: Erlbaum.

Autores

Miguel Montes. Universidad de Huelva, España. miguel.montes@ddcc.uhu.es

María Isabel Pascual. Universidad de Huelva, España. isabel.pascual@ddcc.uhu.es

Nuria Climent. Universidad de Huelva, España. climent@uhu.es

La Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (*Relime*) es la publicación oficial de investigación del Comité Latinoamericano de Matemática Educativa (Clame AC). Se edita tres veces por año. Acepta artículos en español, portugués, inglés y francés. Está dirigida a investigadores en Matemática Educativa, a profesores de matemáticas y ciencias, y estudiantes de licenciatura y posgrado interesados en conocer los resultados recientes de las investigaciones y en profundizar en el conocimiento de un tema en particular.

Objetivos:

1. *Relime* pretende ser un foro abierto a las diversas escuelas del pensamiento (paradigmas, teorías, metodologías, métodos, enfoques) en nuestra disciplina, la Matemática Educativa, sin definir perspectivas únicas y con un profundo respeto a las tradiciones educativas y los contextos de los diversos sistemas educativos de nuestra región.
2. Dar a conocer resultados de investigación original en Matemática Educativa que se realizan en América Latina y el Caribe y en el resto del mundo.
3. Contribuir al proceso de profesionalización de la Matemática Educativa en nuestra región.
4. Fomentar una cultura de divulgación e investigación entre los distintos grupos de investigación en nuestra región.
5. Propiciar el debate y la reflexión profunda sobre problemas de investigación que fortalezca la disciplina en nuestra área geográfica.
6. Fortalecer la calidad de la investigación en Matemática Educativa y la vinculación entre comunidades nacionales e internacionales.

INSTRUCCIONES TÉCNICAS PARA AUTORES

Las contribuciones

Toda contribución propuesta a Relime se somete a un estricto proceso de arbitraje. Las contribuciones deberán ser resultado de investigaciones teóricas o experimentales, estudios de caso, etnográficos, etc., en formato de artículo. Estas contribuciones deberán ser trabajos inéditos de investigación, no estar en arbitraje en otra revista ni tratarse de traducciones previamente publicadas en su lengua original.

Características de los manuscritos

Relime publica artículos en castellano, portugués, inglés y francés. Acepta ensayos teóricos originales así como propuestas que sean resultado de estudios experimentales, de casos, de observación, etnográficos, etc.

Los artículos deberán tener un máximo de nueve mil palabras, incluyendo referencias, figuras, cuadros y anexos. En caso de que su propuesta exceda esta extensión, el Comité de Redacción decide si considera la posibilidad de publicarlo siempre que tal propuesta no ocupe todo el espacio disponible en un número de la revista.

En el caso de reportes de estudios experimentales, de casos, de observación, etnográficos, etcétera, recomendamos que los escritos contengan:

1) Resumen del trabajo, deberá tener un máximo de 10 renglones escrito en español, portugués, inglés y francés y de 5 palabras clave en las cuatro lenguas. Resumen, título y palabras clave deben ser escritos en los cuatro idiomas.
2) Una exposición del problema de investigación (su pertinencia y relevancia en el tema que se aborda).
3) Indicaciones globales acerca de la estructura teórica del reporte.
4) Justificación de la metodología usada.
5) Desarrollo de algunos ejemplos y análisis de resultados.
6) Referencias bibliográficas.

Si se trata de ensayos teóricos y filosóficos, nuestra recomendación es la siguiente:

1) Iniciar con una exposición del problema de investigación (su pertinencia y relevancia en el tema que se aborda).
2) Revisión de la literatura que incluya trabajos importantes que sustenten la investigación, en el que se refleje una variedad de resultados actuales. Esta revisión debe incluir investigaciones internacionales pertinentes y no limitarse a estudios de un solo país.
3) Ofrecer indicaciones sobre la estructura teórica o filosófica en la cual se desarrolla el tema del artículo.
4) Exposición detallada de la posición del autor dentro del tema o los temas de exposición. Esto debe reflejarse a través del desarrollo de ideas, más que de una lista de reflexiones.

5) Implicaciones o consecuencias de la investigación en el área.
6) Referencias bibliográficas.

Proceso de evaluación en relime

Los artículos propuestos a Relime serán leídos por dos miembros del Comité de Redacción, y si el contenido atiende a la originalidad y satisface los criterios anteriores, así como a la claridad de la presentación e interés para la comunidad de matemática educativa, serán evaluados en forma "ciega" por dos investigadores reconocidos y con experiencia dentro del área. En el proceso de evaluación se garantizará el anonimato de autores y evaluadores.

El resultado del dictamen puede ser:

A. Sugerencia de publicar el artículo sin modificaciones.
B. Sugerencia de publicar el artículo bajo reserva de hacer ligeras modificaciones.
C. Sugerencia de reestructurar el artículo atendiendo a los comentarios, lo que precisaría una nueva revisión.
D. Sugerencia de rechazo del artículo.

Formato de las contribuciones

Todas las contribuciones deberán estar escritas en procesador de texto Word 6.0 o superior, tipo de letra Times New Roman, tamaño 11 y utilizar un espacio anterior y posterior de 4 pt, lo que significa que no se requiere dar espacio entre un párrafo y otro. Los cuatro márgenes de la página deberán ser de 2.5 cm. Para las expresiones matemáticas debe usarse el editor de ecuaciones.

Encabezados principales

El estilo de letra para los encabezados principales es tipo VERSALES en formato minúsculas, utilizando un espacio anterior de 36pt y el posterior de 12pt, lo que significa que no se requiere dar espacio entre un encabezado y los párrafos subsecuentes. Enumerar las secciones de los encabezados principales (usando 1, 2, 3, etc.) y utilizar el estilo de alineación centrada.

Subtítulos

El estilo de letra para los subtítulos del artículo es tipo Times New Roman, tamaño 11 y cursiva. La primera letra debe escribirse con mayúsculas. Utilizar un espacio anterior de 24 pt y el posterior de 10 pt, lo que significa que no se requiere dar espacio entre un subtítulo y los párrafos subsecuentes. Los subtítulos deberán enumerarse 1.1., 1.2, 1.3, etc., según corresponda en estilo tipo Normal. Los subtítulos posteriores a un encabezado principal deben tener un espacio anterior y posterior de 6 pts.

Estilo para las tablas

Las tablas deben tener una alineación centrada. El estilo de letra del texto en el interior de la tabla debe ser tipo Times New Roman, Normal, tamaño 10 y con un espacio anterior y posterior de 2 pto. Enumerar las tablas, usando tipo de letra VERSALES tamaño 10, en formato minúscula: TABLA I, TABLA II, TABLA III, etc., utilizando un espacio anterior de 6 pto y posterior de 0 pto. El número de la tabla debe escribirse en la parte superior y su título debajo, utilizando un estilo de alineación centrada y tipo de letra normal tamaño 10.

Estilo para las figuras e imágenes

Las figuras e imágenes deben tener una alineación centrada. El estilo de letra debe ser tipo Times New Roman, tamaño 10 y tipo Cursiva y Normal. Escribir el número de la figura o imagen en formato tipo cursiva y el título en formato tipo normal. Utilizar un espacio anterior de 2 pt y el posterior de 4 pt. Las imágenes y figuras deberán adjuntarse en un archivo independiente al manuscrito en formato de alta resolución.

Transcripciones

Para las transcripciones usar el estilo de letra normal, tipo Times New Roman tamaño 10. Utilizar un interlineado sencillo.

Usar estilos de transcripción como los siguientes:

Estudiante: Para graficar utilicé uno de los métodos que vimos en clase. Me pareció que era el más simple para resolverlo
Profesor: ¿Por qué consideras que ese método es más simple?

Si las líneas de la transcripción requieren ser numerados, entonces usar el estilo de transcripción enumerada como sigue:

[122] Entrevistador: En la primera actividad se te propuso determinar la función velocidad ¿Podrías explicar cómo la hallaste?
[123] Alumno: Hum... pues...

En el caso de que no se requiera hacer referencia a los números, se sugiere usar el primer estilo de transcripción (indicada párrafos arriba).

Reconocimientos

Los reconocimientos a personas, fondos, asociaciones, etc. deberán colocarse en una sección separada antes de las referencias bibliográficas. Los nombres de organizaciones financieras deberán escribirse completos.

Bibliografía, referencias y notas

Solicitamos emplear el estilo de la APA (Publication Manual of the American Psychological Association, 6th ed., 2009) para las citas de pie, notas, referencias textuales y bibliografía. (Pueden apoyarse en el siguiente link: http://www.apastyle.org/learn/tutorials/basics-tutorial.aspx; o bien, consultar el Manual).

La bibliografía deberá escribirse en forma de lista sin enumerar y en orden cronológico. El estilo de letra debe ser Times New Roman 9. Para escribir una referencia debe usarse alineación justificada para el primer renglón. A partir del segundo renglón deberán establecer una sangría especial de 0.63 cm.

Las notas deberán escribirse al final de cada página del documento. El estilo de letra que deberá usarse es Times New Roman 9 en formato normal.

Información complementaria

1) No se devolverán los artículos originales.
2) El editor se reserva el derecho de hacer algunas modificaciones necesarias para mantener el estilo de la publicación.
3) Los textos pueden ser publicados en otro órgano editorial previo permiso expreso, por escrito, y haciendo referencia explícita de la fuente.
4) Los autores recibirán gratuitamente dos ejemplares del número en que se haya publicado su artículo.
5) No se realizarán pagos a los autores por los artículos que se publiquen en *RELIME*. Para mayores informes, puede visitar la página web: http://www.clame.org.mx/relime.htm o bien el correo electrónico:

relime@clame.org.mx

Suscripción a Relime

Costo del volumen 24 (tres números)

Suscripción Institucional:
Volumen US$ 120
Cada número US$ 50

Suscripción Individual:
Volumen US$ 50
Cada número US$ 20

Suscripción Miembros Clame:
Volumen US$ 20
Cada número US$ 10

Estos costos NO aplican a *números especiales*,
NO incluyen gastos de envío, NI comisión bancaria por transferencias
o depósitos de cheques emitidos fuera de México

Las suscripciones deberán solicitarse al correo electrónico
suscripcion@relime.org

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa

Volumen 24, Número 1

Diseño digital:
LDG. Emilio Serna Hernández
Recrea. Soluciones infinitas
sernandem@yahoo.com.mx

Se imprimió en los talleres de
Editorial Progreso S.A. de C.V.
Sabino # 275
Col. Santa María la Ribera
Alcaldía Cuauhtémoc
06400, CDMX, México

Marzo de 2021
Tiraje: 1000 ejemplares más sobrantes