EDITORIAL

23 Desafíos matemáticos
"Debemos saber . Lo sabremos "
Ricardo Cantoral

ARTÍCULOS

Mathematical modeling from the eyes of preservice teachers
Yüksel Dede, Zehra Taşpinar Şener

Anamnesis de la teoría de los indivisibles de Cavalieri
Leonardo Solanilla Chavarro, Ana Celi Tamayo Acevedo

Epistemología de los profesores sobre el conocimiento matemático escolar: un estudio de caso
Karla Sepúlveda Obreque, Javier Lezama Andalón

Estudio interregional comparado de la educación matemática en la formación inicial del profesorado de educación primaria
Mª Cristina Naya-Rivero, Tania F. Gómez-Sánchez, Mª Begoña Rumbo-Arcas, Mª Elena Segade-Pampín

INSTRUCCIONES TÉCNICAS PARA AUTORES

RELIME 24-2

9 771665 243002 02402

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa

Vol. 24, Núm. 2, julio 2021

ISSN 1665-2436

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa

RELIME

Vol. 24, Núm. 2, 2021

Clame Comité Latinoamericano de Matemática Educativa

Publicación oficial de investigación del Comité Latinoamericano de Matemática Educativa

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa

Directora Fundadora: ROSA MARÍA FARFÁN

Director Editorial: RICARDO CANTORAL
Editora Asociada: GISELA MONTIEL
Editora: WENDOLYNE RÍOS

Departamento de Matemática Educativa – Cinvestav
AP 14-740, México 07000, CDMX
MÉXICO

Coordinación técnica: Martha Maldonado Rosales
Revisión de estilo: Rosalba Carrillo Fuentes
Formación y diseño: Emilio Serna Hernández
Portada: «Opus 1» de Oscar Reutersvärd en 1934. Reproducida con permiso de los herederos del artista.

Publicación oficial de investigación del Comité Latinoamericano de Matemática Educativa, Clame A.C. Consejo Directivo: *Presidente:* Olga Lidia Pérez González – Cuba; *Secretario:* Hugo Parra Sandoval – Venezuela; *Tesorera (encargada):* Rosario del Pilar Gilbert – México; *Vocal Norteamérica:* Rebeca Flores García – México; *Vocal Caribe:* Juan Mazueta Concepción – República Dominicana; *Vocal Centroamérica:* Rodolfo Fallas Soto – Costa Rica*: Vocal Sudamérica:* Marcela Parraguez González – Chile.

Publicación cuatrimestral. Se publica en los meses de marzo, julio y noviembre. Vol. 24, Núm.2, julio, 2021. Tiraje 1,000 ejemplares. Suscripciones: suscripcion@relime.org. Contribuciones e información: relime@clame.org.mx, http://www.clame.org.mx.

Relime es una revista indizada en:
ISI Web of Knowledge, SSCI – Social Sciences Citation Index y Journal Citation Reports • ERIH – European Reference Index for the Humanities • Conacyt – Índice de Revistas Mexicanas de Investigación Científica y Tecnológica • Scopus – Elsevier Database • ZDM – Zentralblatt für Didaktik der Mathematik • IBZ – International Bibliography of Periodical Literature in the Humanities and Social Sciences • Clase – Citas Latinoamericanas en Ciencias Sociales y Humanidades • Iresie – Índice de Revistas de Educación Superior e Investigación Educativa • Latindex – Sistema Regional de Información en Línea para Revistas Científicas de América Latina, el Caribe, España y Portugal • Redalyc – Red de Revistas Científicas de América Latina y el Caribe, España y Portugal • EBSCO – Information Services • Dialnet • Scielo-México – Scientific Electronic Library Online • Thomson Gale – Gale Iberoamérica.

2021 Impreso en México

Volumen 24 – Número 2 – 2021

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa

Clame Comité Latinoamericano de Matemática Educativa

Publicación oficial del Comité Latinoamericano de Matemática Educativa

2021

Volumen 24 Número 2 Julio de 2021

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa

EDITORIAL

115 23 Desafíos matemáticos
"Debemos saber . Lo sabremos "
Ricardo Cantoral

ARTÍCULOS

121 Mathematical modeling from the eyes of preservice teachers
Yüksel Dede, Zehra Taşpinar Şener

151 *Anamnesis* de la teoría de los indivisibles de Cavalieri
Leonardo Solanilla Chavarro, Ana Celi Tamayo Acevedo

177 Epistemología de los profesores sobre el conocimiento matemático escolar: un estudio de caso
Karla Sepúlveda Obreque, Javier Lezama Andalón

207 Estudio interregional comparado de la educación matemática en la formación inicial del profesorado de educación primaria
Mª Cristina Naya-Rivero, Tania F. Gómez-Sánchez, Mª Begoña Rumbo-Arcas, Mª Elena Segade-Pampín

234 INSTRUCCIONES TÉCNICAS PARA AUTORES

REVISTA LATINOAMERICANA DE INVESTIGACIÓN EN MATEMÁTICA EDUCATIVA, RELIME, es la publicación de investigación oficial del Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C. Editada por el Colegio Mexicano de Matemática Educativa, A. C., Av. Instituto Politécnico Nacional, 2508, Col. San Pedro Zacatenco, C.P. 07360, Alcaldía Gustavo A. Madero, CDMX, México. Tel. (55) 57473819, www.relime.org, relime@clame.org.mx. Director responsable: Ricardo Cantoral.

Reservas de Derechos al Uso Exclusivo, No. 04-2016-110914351000-102, con ISSN: 1665-2436, para el formato impreso; y No. 04-2016-110413025500-203, con e-ISSN: 2007-6819, para el formato digital; otorgados por el Instituto Nacional del Derecho de Autor. Derechos Reservados © Colegio Mexicano de Matemática Educativa, A. C. RFC: CMM 040505 IC7. Publicación cuatrimestral. Se publica en los meses de marzo, julio y noviembre, con el financiamiento del Clame. El Volumen 24, Número 2, se terminó de imprimir en julio de 2021, con un tiraje de 1,000 ejemplares más sobrantes.

Impresa por Editorial Progreso, S. A. de C. V., Sabino No. 275, Col. Sta. María la Ribera, C.P. 06400, Alcaldía Cuauhtémoc, CDMX, México.

EDITORIAL

23 DESAFÍOS MATEMÁTICOS
"*DEBEMOS SABER. LO SABREMOS*"

23 Mathematical challenges
"*Wir müssen wissen. Wir werden wissen*"

Ricardo Cantoral
Cinvestav-IPN México

Recientemente se publicó en el sitio https://lims.ac.uk/23-mathematical-challenges/ una información que considero relevante para nuestro campo y su futuro, la Matemática Educativa, la nota fue titulada "23 Mathematical challenges".

Esta lista fue compilada por el *London Institute for Mathematical Sciences* en virtud del lanzamiento de la nueva agencia científica británica ARIA (*Advanced Research and Inventions Agency*), y su objetivo es abordar los problemas más difíciles de nuestro tiempo.

A principios del siglo XX, específicamente en el año 1900, el Prof. David Hilbert hizo pública una lista de 23 problemas matemáticos importantes. Desde entonces, 17 problemas se han resuelto total o parcialmente y, la lista ha sido seminal para las Matemáticas.

Se espera que los nuevos 23 desafíos matemáticos interesen durante el siglo XXI, sólo que ahora fueron planteados en términos transdisciplinares con algunos ciertos criterios de demarcación. Esto es un sello de nuestros tiempos, pues trata de un cambio de paradigma que asume, en un sentido amplio, la célebre frase de Galileo respecto a las matemáticas, son el lenguaje de la ciencia y los avances científicos más transformadores dependen de ellas. La teoría de números, se cita como ejemplo, está en la base de la criptografía moderna.

Para conformar dicha lista, el *London Institute for Mathematical Sciences* organizó un simposio entre físicos y matemáticos. En los preparativos del encuentro, se les solicitó a 23 líderes mundiales en la investigación solicitándoles sus contribuciones. Se reunieron, de este modo, más de 100 desafíos que luego redujeron a 23. Según narran en su nota, se siguieron tres criterios para elegir la lista de desafíos matemáticos. 1. En primer lugar, se favorecieron los problemas

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (2021) *24* (2): 115-120.
DOI: 10.12802/relime.21.2420

cuya investigación tenga altas probabilidades de resultar fructífera (*demarcación de factibilidad*), incluso si no conduce a una solución real. 2. En segundo lugar, buscaron equilibrios entre problemas concretos con respuesta definitiva y desafíos especulativos planteados libremente. Estos tienden a ubicarse en campos establecidos y aquellos otros que recién emergen (*demarcación de diversidad*). 3. En tercer lugar, se procuró equilibrar la lista en toda la gama de ciencias matemáticas (*demarcación de cobertura*).

Para prepararse ante estos desafíos, la ARIA bien podría considerar el epitafio de Hilbert, cuyas palabras en su tumba del matemático de Göttingen dicen: "Wir müssen wissen. Wir werden wissen". En castellano esto sería: "Debemos saber. Lo sabremos".

Hacemos un llamado a la comunidad de Matemática Educativa, para organizar espacios de reflexión sobre nuestros propios desafíos, que sin desatender a la diversidad teórica y metodológica que nos caracteriza, consideren a su vez la dimensión regional y cultural en la que se lleva a cabo la tarea educativa.

Nos parece que la lista de desafíos matemáticos se intersecta fuertemente con nuestro quehacer, pero obviamente no lo cubre, pues algunas de las áreas emergentes en nuestro campo son propias de la dinámica de enseñanza y de aprendizaje de saberes escolares y corresponden también a una amplia gama de temáticas de corriente sociocultural, como las denominadas construcción social. Estas últimas han ido modificando la clásica centración en las estructuras cognoscitivas del sujeto, para explicar al aprendizaje matemático dentro de la psicología del pensamiento, para incluirlas como el resultado de la vida en sociedad.

Dejaremos en su idioma original, para mayor fidelidad, los citados desafíos esperando con ellos, la construcción de desafíos propios de la Matemática Educativa para Latinoamérica.

1. *Theory of everything*

We lack a single theory that describes the universe. Gravity, described by general relativity, is not consistent with our quantum field theory of the other three forces. Will this be resolved by string theory, loop quantum gravity, or something new? What are the testable consequences of such a theory, which is beyond the limit of human experimentation?

2. *Riemann hypothesis*

Attempts to settle the Riemann hypothesis have inspired whole new branches of mathematics. For example, the Riemann zeta function is the simplest kind of L-function, and these seem to play a role in modern mathematics similar to polynomials in ancient mathematics. What new concepts are needed to resolve this most important of open problems?

3. *Thermodynamics of life*

According to Darwin's theory, evolution is the result of mutation, selection and inheritance. But from a physics perspective, we don't understand how life got started in the first place. What is the thermodynamic basis for emergent self-replication and adaptation, of which biology is just one instance? Can it be used to create digital artificial life?

4. *The structure of innovation*

Despite advances in our understanding of evolution, what drives innovation remains elusive. Technological innovation operates in an expanding space of building blocks, in which combinations of technologies become new technologies. Can we characterise innovation in a mathematical way, so that we can predict it and influence it through interventions?

5. *Physics of self-assembly*

Self-assembly is how proteins fold, snowflakes form and viruses assemble. It can be used to manufacture complex and nanoscale objects at low cost. Because it is a physical embodiment of computation, it is deeply linked with decidability. Can statistical physics be combined with computability theory to build a comprehensive theory of self-assembly?

6. *Cosmological constant*

Only a small fraction of the observable universe is made up of known matter. The majority is conjectured to be dark matter and dark energy, for which there is no consensus in explanation. Why does the zero-point energy of the quantum vacuum not cause a large cosmological constant? What cancels it out? Is new fundamental physics needed to reformulate gravity?

7. *Langlands Program*

There is evidence of a grand unified theory for mathematics, called the Langlands Program. It seeks to relate automorphic forms in geometry and number theory to representation theory in algebra. Wiles' proof of Fermat's Last Theorem can be viewed as just one instance of it. How can we advance and extend this Program, and what fruit will it bear when we do?

8. *Intelligent AI*

Far from approaching artificial general intelligence, AI has not progressed beyond high-dimensional curve-fitting. What mathematical insights could lead to more intelligent AI, such as causal reasoning, functional modules or a representation of the environment? Are there fundamental limits to AI, and what might this tell us about human intelligence?

9. *Repairable instead of robust*

To be sure of success in the face of uncertainty, we make plans that can cope with the unexpected. One way is to be robust: able to absorb a known setback. Another is to be repairable: easily modifiable in the face of unknown setbacks. Our approaches to threats, such as war or climate change, tend to be robust. What would a theory of repairability look like?

10. *The operating system of life*

Networks of gene regulation govern morphogenesis and determine cell identity. The concision of viruses suggests that this genetic software uses subroutines, like digital software. What are the laws governing genetic information processing? Can they shed light on the operating system of life, setting the stage for a biological analogue of the silicon revolution?

11. *The mathematical universe*

Wigner noted the unreasonable effectiveness of mathematics in physics. Today, we are seeing the reverse: attempts to advance physics, such as string theory, are driving mathematics. Is there a convergence between these two disciplines, and should this inform how much we fund and advance mathematics? Can Tegmark's mathematical universe be made rigorous?

12. *Describing network structure*

Network science, which extracts meaning from real-world networks, is popular but unsophisticated. To realize its potential, it must build on more rigorous concepts from graph theory and beyond. Can we formalise notions of network geometry and topology that are compatible with their continuum analogues, and a thermodynamics to describe deviations away from them?

13. *Theory of free will*

The existence of free will has no grounding in the laws of physics that are known. Some attempts have been made to link it to quantum phenomena, but a theory of free will remains elusive. Is it a phantom, a consequence of life, or a more general attribute of the present moment? What new physics is required to understand this seemingly vital concept?

14. *Collective creativity*

Collective creativity started 300 years ago when the scientific paper sped up research by enabling fast marginal advances over slow major ones. Now, anonymous collaboration platforms such as Wikipedia suggest we can speed up much more. But why and when does collective creativity work? Can platforms like Gowers' Polymath transform the process of discovery?

15. *Programmable matter*

We can cause surfaces and volumes to change shape on command using polymers that respond to temperature and current. What are the scope and limits of such programmable matter? Can we use differential geometry, recent advances in algorithmic origami and other mathematical tools to provide a language for reverse engineering useful shapes and mechanisms?

16. *Foundation of QFT*

Can quantum field theory, which describes all elementary particles and interactions, be made rigorous? An open problem is to prove that for any compact gauge group, a Yang-Mills theory exists in four dimensions and predicts a lightest particle with positive mass. This will likely require new kinds of mathematics and offer a new perspective on physics.

17. *Mathematical dualities*

Dualities play a key role in how we form insights in physics and mathematics. Examples include the Geometric Langlands correspondence, dualities across quantum field and string theories, and the ADE classification. Are dualities an artefact of how we decipher new theories, or do they have a more fundamental cause? Can we systematise them to discover more?

18. *Engineerable AI*

Evolution and innovation both make use of interoperable functional modules to increase the odds of successful tinkering. But deep learning algorithms, by contrast, are globally wired. This makes them difficult to build up in a hierarchical way, as well as hard for humans to understand. Can we formulate a framework for AI that is engineerable?

19. *Theory of simplicity*

In an increasingly complex world, we seek simplicity in how we organise technology and society. But we don’t know how to describe simplicity, much less construct it. Physicists have developed various models of complexity, but what would a theory of simplicity look like? Is it connected to being able to readily reconfigure to new environments?

20. *AI-assisted conjectures*

Good conjectures can inspire new branches of mathematics. They come from spotting patterns and applying instinct. Because mathematics is exact and there are no equivalence coincidences, automated pattern detection is immune from the bias normally found in high dimensional search. Can machines help identify candidate conjectures and speed up theoretical research?

21. *Mathematics of causality*

Causality is fundamental to how we make predictions and structure society. Yet our mathematics for describing it is poor. Can a more sophisticated theory of causality help unlock challenges such as intelligent AI, the operating system of life and even how we build physical theories? How can we move from a microscopic to a macroscopic notion of causality?

22. *Emergence of virtue*

The fully-informed rational-agent basis of economics is inadequate for describing real-world behaviour, especially virtuous activity. Can insights from the microscopic view of behavioural science and the macroscopic view of thermodynamics form the basis of a cooperative game theory that accounts for the emergence of virtue in individuals and organisations?

23. *Theory of immortality*

Ageing is ascribed to the accumulation of errors—an inevitable consequence of the increase of disorder. But mounting experimental evidence suggests that ageing is not a fact of life. Is it a thermodynamic necessity, or is it instead favoured by natural selection? Can we mathematically describe the pros and cons of ageing? Is it possible to slow or even stop it?

Lecturas recomendadas

Yandell, B. (2001). *The Honors Class: Hilbert's Problems and Their Solvers*, CRC Press.

Nash, J. F. Jr. and Rassias, M. (eds.). (2016). *Open Problems in Mathematics*, Springer.

Smale, S. (1998). Mathematical Problems for the Next Century, *Mathematical Intelligencer 20*, 7.

23 *Mathematical Challenges*, Defense Advanced Research Projects Agency (2008). https://lims.ac.uk/23-mathematical-challenges/

Yüksel Dede, Zehra Taşpinar Şener

MATHEMATICAL MODELING FROM THE EYES OF PRESERVICE TEACHERS

RESUMEN

Utilizando las opiniones de los docentes en servicio como base, este estudio busca arrojar luz sobre el proceso seguido por los docentes en servicio en la enseñanza del modelado matemático a estudiantes de secundaria. El grupo de estudio estaba compuesto por 18 maestros de pre-servicio de matemáticas de la escuela intermedia, cada uno de los cuales fue seleccionado mediante muestreo intencional. Durante el período de investigación, los participantes viajaron en grupos a las escuelas donde debían realizar su práctica. Las lecciones fueron grabadas en video, y los participantes compartieron estas grabaciones y sus experiencias en el aula con sus compañeros. Como resultado del análisis, los hallazgos del estudio se agruparon en cuatro temas principales: (i) opiniones con respecto a actividades, (ii) opiniones con respecto a maestros en servicio, (iii) opiniones con respecto a estudiantes y (iv) opiniones con respecto a maestros de matemáticas.

PALABRAS CLAVE:

- *Modelación matemática*
- *Profesores de matemática en servicio*
- *Actividades de modelado matemático*
- *Ejecución de actividades*
- *Educación matemática*

ABSTRACT

Using preservice teachers' (PTs) opinions as its base, this study seeks to shed light on the process followed by PTs in teaching mathematical modeling to middle school students. The study group was composed of 18 middle school mathematics PTs, each of whom was selected using purposeful sampling. During the research period, PTs travelled in groups to the schools where they were to perform their practicum. Lessons were video recorded, and PTs shared these recordings and their classroom experiences with their peers. As a result of the analysis, the study's findings were grouped into four main themes: (i) opinions regarding activities, (ii) opinions regarding preservice teachers, (iii) opinions regarding students, and (iv) opinions regarding mathematics teachers. Discussion of these findings revolved around both teacher training and mathematical modeling, which then led to several recommendations being made.

KEY WORDS:

- *Mathematical modeling*
- *Preservice mathematics teachers*
- *Mathematical modeling activities*
- *Execution of activities*
- *Mathematics education*

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (2021) *24* (2): 121-150.
Recepción: Diciembre 24, 2019 / Aceptación: Junio 12, 2021. DOI: 10.12802/relime.21.2421

RESUMO

La discusión de estos hallazgos giraba en torno a la formación del profesorado y el modelado matemático, lo que llevó a varias recomendaciones. Usando as opiniões dos professores de preservice como base, este estudo procura esclarecer o processo seguido pelos professores de preservice no ensino de modelagem matemática para alunos do ensino médio. O grupo de estudo foi composto por 18 professores de matemática do ensino médio, cada um dos quais foi selecionado por meio de amostragem intencional. Durante o período da pesquisa, os participantes viajaram em grupos para as escolas onde deveriam realizar seu estágio. As aulas foram gravadas em vídeo e os participantes compartilharam essas gravações e suas experiências em sala de aula com seus colegas. Como resultado da análise, as conclusões do estudo foram agrupadas em quatro temas principais: (i) opiniões sobre atividades, (ii) opiniões sobre professores de preservação, (iii) opiniões sobre estudantes e (iv) opiniões sobre professores de matemática. A discussão dessas descobertas girou em torno da formação de professores e da modelagem matemática, o que levou a várias recomendações.

PALAVRAS CHAVE:

- *Modelagem matemática*
- *Professores de matemática preservice*
- *Atividades de modelagem matemática*
- *Execução de atividades*
- *Educação matemática*

RÉSUMÉ

En se fondant sur les opinions des enseignants de pré-requis quant à sa base, cette étude vise à mettre en lumière le processus suivi par les enseignants de pré-requis dans l'enseignement de la modélisation mathématique aux élèves du secondaire. Le groupe d'étude était composé de 18 enseignants du secondaire en mathématiques du secondaire, dont chacun a été sélectionné à l'aide d'un échantillonnage ciblé. Pendant la période de recherche, les participants se sont rendus en groupe dans les écoles où ils devaient effectuer leur stage. Les leçons ont été enregistrées sur vidéo et les participants ont partagé ces enregistrements et leurs expériences en classe avec leurs pairs. À la suite de l'analyse, les résultats de l'étude ont été regroupés en quatre thèmes principaux: (i) les opinions concernant les activités, (ii) les opinions concernant les enseignants préposés à l'entretien, (iii) les opinions concernant les élèves et (iv) les opinions concernant les professeurs de mathématiques. La discussion de ces résultats a tourné autour de la formation des enseignants et de la modélisation mathématique, ce qui a conduit à plusieurs recommandations.

MOTS CLÉS:

- *Modélisation mathématique*
- *Professeurs de mathématiques de base*
- *Activités de modélisation mathématique*
- *Exécution d'activités*
- *Enseignement des mathématiques*

1. Introduction

Recent studies have emphasized the need for students to be exposed to mathematical modeling (MM) at the earliest stages of school and have shown that by dealing with real-life problems, students are able to make significant developments to their mathematical and social skills (Asempapa, 2015; Doerr & English, 2003; English & Watters, 2004). As a result, just as MM is included in the curricula or educational standards of many developed countries, MM skills are considered basic skills that students are expected to master (Common Core State Standards Initiative [CCSSI], 2010; National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2000). This importance notwithstanding, MM is neither sufficiently integrated into teaching environments, nor is it properly taught to students. Since teachers are the most important element in overcoming this dilemma, they must first gain sufficient knowledge of MM and then create rich learning environments that nurture students' active participation in modeling activities (Borromeo & Blum, 2009).

1.1. *MM in Mathematics Education*

While models are defined as a system incorporating rules, relationships, operations, and other components to explain and construct a complicated and difficult-to-understand system (Lesh & Doerr, 2003), modeling refers to the process followed to create a model (Sriraman, 2005). MM is the process of using math to construct a model that produces answers to individuals' important real-life questions and then of testing and implementing this same model (see: Niss, Blum, & Galbraith, 2007). MM is one of the fundamental components of mathematics education in the world-wide accepted *Program for International Student Assessment* [*PISA] 2012 Assessment and Analytical Framework*. As such, the fundamental objectives and goals that the current mathematics education paradigm seeks to impart to students need to be evaluated from a MM perspective.

In mathematics education, four separate teaching objectives are considered important for MM: (i) behavioral objectives, (ii) process objectives, (iii) affective objectives, and (iv) cognitive objectives (Lesh & Doerr, 2003). Behavioral objectives include knowledge, input-output, and provisory courses of action. For example, skills included in educational programs expected to be acquired by students are considered behavioral goals. From a MM perspective, however, since knowledge is likened to a living organism instead of to a machine, acquiring behavioral objectives is not a primary objective in and of itself. Process objectives focus on problem-solving strategies used in lessons, with these strategies being taught independent of content. In MM, however, problem-solving strategies reflect how students interpret situations requiring solutions. That said, affective objectives represent students' beliefs about their lessons as well as their attitude, motivation, emotions, and values (Lesh, Zawojewski, & Carmona, 2003). Finally, cognitive objectives include models and conceptual systems used to explain, construct, and test mathematically complicated systems. From a MM standpoint, emphasizing other goals without including cognitive goals renders mathematics education into nothing more than rote memorizing rules that are then used to find the correct answer without actually making any calculations. Just as these four teaching objectives must be a component of students' experiences and mathematical interpretations, models must also be understood as approaches developed to aid students in making these interpretations (see: Lesh & Doerr, 2003).

On the other hand, the effective teaching of MM in a classroom setting is generally performed through the execution of relevant activities. Just as modeling activities aid students in using important mathematical concepts, they also offer teachers the opportunity to discover what their students think about mathematics and to shed light on their mathematical development (English, 2003; Mousolides, 2009). Accordingly, it is essential that MM activities gain a foothold in educational environments.

1.2. *Mathematical Modeling Activities*

Mathematical modeling is an activity in which real-life problems are solved using mathematical tools. (Vos, Hernandez-Martinez, & Frejd, 2020). However, not every activity in a real-life context can be a mathematical modeling activity. In the modeling activity, not all the data necessary to solve the problem are given in the problem. It is essential for the student to make some assumptions in order to solve the problem as in real life (Borromeo, 2018). In these activities, calculation is not at the forefront, and all necessary thinking and planning skills are at the forefront before the calculations begin. In addition, Modeling activities not only help students use important mathematical ideas, but also help teachers uncover their students' thoughts and provide an opportunity to develop an understanding of their mathematical development. (English, 2003; Mousolides, 2009). The theoretical and philosophical structure underlying this thought is based on American pragmatists like Dewey, who defended obtaining information by transforming concrete experiences into abstract concepts through observation, thought, and new inferences, as well as on modern philosophers like Piaget and Vygotsky (see Lesh & Doerr, 2003; Lesh & Sriraman, 2005a, 2005b). This is because this philosophical approach argues that the forms of thinking that are required always occur by using and integrating much more than a single discipline, single course book, or single subject area.

In the last 10-15 years, many empirical studies have been conducted to investigate the teaching and learning processes of mathematical modeling. Much of this work has focused on teaching students at the K-12 level. The most well-known of these is the work of Lesh and Doerr (2003) (Borromeo, 2018). These studies argue that mathematical modeling education should begin at a very early age for students to understand how mathematics is needed in their real lives. Below, mathematical modeling applications are given from the perspective of students from the eyes of Lesh and Doerr (2003).

1.3. *Mathematical modeling for students*

Modeling activities require students to develop mathematical models that allow them the opportunity to work in groups to make sense of their mathematical experiences and to focus on their structural characteristics, such as relationships between models, operations, and components (Chamberlin, 2004). Considering this importance, modeling activities can be executed in a planned manner using basic mathematical concepts previously taught; yet, this requires students to first develop a mathematical model for themselves (Lesh, Carmona, & Post, 2002). Lesh and Doerr (2003) express the principles that need to be taken into consideration while conducting modeling activities as follows: (i) The concepts and mathematical notions aimed to be taught need to be discussed with students beforehand, (ii) If necessary, a warm-up activity or activities seeking to increase the real-world application and meaningfulness of the problem's context for students should be completed, and (iii) Activities pertaining to the usability of models developed by students should be done following the main activity's completion (Lesh et al., 2000). Modeling activities following these principles are conducted with students in groups of three to five individuals. During group work, each student first offers his or her own interpretation of the problem, and these interpretations are then discussed in groups. During discussions, students are given ample opportunity to improve their communication skills. During these group discussions, students attempt to compromise on the most appropriate model. What is sought is a mathematical model able to be used to solve a problem identified in a given scenario or by an individual in need of an answer. So that their peers may benefit from the most suitable model possible, students must clearly describe their thought processes and explain their solutions (Chamberlin & Moon, 2005). This way, group work is more than simply a social activity for students; it develops into a cognitive environment (Burkhardt, 2006).

The stages that students go through during modeling activities are summarized by Yoon (2006) in Table I.

TABLE I
Stages of Modeling Activities

Warm-up	*Problem Solving*	*Presentation*
Students read and discuss relevant introductory articles on the problem context.	Students work in groups to develop solutions to the given problems.	Students share their solutions mostly through writing but sometimes visually.

Adapted from Yoon, C. (2006)

Generally speaking, MM activities' in-class execution and student-teacher roles greatly resemble the environments recommended in the constructivist approach (Burkhardt, 2006). The modeling process is realized in student-centered environments not only in which students are given the opportunity to learn from their mistakes in a constructive manner and are guided to consider different ideas and methods to solve problems but also in which teachers manage the entire process, including assessments, in an appropriate manner (Kunter & Voss, 2013). It is also known that these learning environments improve students' modeling skills (Blum & Borromeo, 2009).

1.4. *Mathematical modeling in terms of teachers and teacher candidates*

There are few studies in the field of mathematical modeling for teachers and prospective teachers (Borromeo, 2018; Yang, Schwarz & Leung, 2021). These studies report that teachers misunderstand the nature of modeling before receiving a training in mathematical modeling, and they also have difficulties in modeling processes (Manouchehri, 2017; Paolucci & Wessels, 2017; Yang, Schwarz & Leung, 2021). Blum & Borromeo (2009) reported that teachers are an indispensable element for mathematical modelling. Accordingly, teachers should provide ample opportunities for students to connect, encourage students' independence, and adopt an effective and student-centered classroom management. Niss, Blum & Galbraith (2007) report that the content of education designed for teachers should include modeling experiences that match what they are expected to teach. However, there are also studies suggesting an educational design that combines theory and practice. Accordingly, first the participants are given a theoretical training and they are provided to experience the current modeling activities. Then the participants design their own activities and apply it to the target audience. Finally, all applications are evaluated. (Borromeo, 2013; Borromeo, 2018; Borromeo & Blum, 2013; Lesh & Doerr, 2003).

1.5. *MM in the Turkish Mathematical Curriculum*

Together with the introduction of a new mathematics education program, a constructivist approach in which student-centered activities where students produce solutions to real-life problems was adopted in 2005 in Turkey, which served to revamp the entire education paradigm and its practices (Ersoy, 2006). Over the subsequent years, mathematics curricula were readjusted to reflect this change. In the Middle School Curriculum published in 2013 (Ministry of National Education in Turkey [MONE], 2013a), for example, MM skills were included among the basic skills expected to be acquired by students. During the same period, an elective class called *Mathematics Applications* incorporating MM activities was added to the middle school curriculum (MONE, 2013b). In the more recently updated 2018 Mathematics Curriculum, acquiring mathematical literacy skills, of which MM holds a central position, were included among the basic objectives of mathematics education (MONE, 2018). Generally speaking, a strong emphasis on mathematics' being an integral part of real life and a worthwhile endeavor pervades throughout the newly restructured mathematics curricula (Şen, 2017).

2. Research Objective and Importance

Studies have concluded that MM activities are not performed at the desired level in classroom settings (Blum & Borromeo, 2009; Burkhardt, 2006). Although performing MM activities is included as a basic objective of mathematics curricula, one of the most important reasons for their exclusion from being used in classroom settings is that it is difficult for both teachers and students to perform related activities. (Blum & Borromeo, 2009; Frejd & Ärlebäck 2011). In any case, every step of the above-mentioned modeling process constitutes a an aptly-named cognitive hurdle that must be overcome by students (Galbraith & Stillman, 2006). Upon comparison, the percentages corresponding to the number of correct answers to questions on the international PISA requiring MM skills were found to be lower than those of other questions on the same test (Turner, Dossey, Blum, & Niss, 2013). Additionally, teachers also need to have acquired a variety of skills, like being able to properly guide students in completing complex modeling processes, have mathematical and non-mathematical knowledge, and be able to conduct activities that facilitate the acquisition of new ideas (Blum, 2015).

Accordingly, teachers and students must know just what is required of them play an important role in activities so that activities may be effectively realized and gain real-life applications. In addition to this, it is important that preservice teachers (PTs) have worked with modeling activities and have gained valuable experience using them so that they may understand the difficulties involved in completing them and how they should direct their future students in their interactions with unfamiliar processes that incorporate open-ended questions and for which they must take into consideration numerous variables to solve. As such, the present study has examined three aspects of activities actively used in classroom settings: (i) the educator conducting the activity, (ii) the classroom teacher's behaviors, and (iii) students' behaviors. The outcomes of modeling activities offer important insight in helping educators identify potential problems while attempting to integrate them into teaching environments. In classes in which such activities are performed, determining the trends, behaviors, and opinions of students, teachers, and those PTs who have received MM training, including training about the approaches used to perform such activities will aid in making in-class adaptations of modeling activities more effective. It is therefore postulated that knowing how teach and integrate mathematical teaching and, even more importantly, MM activities into teaching environments will have a positive impact on teachers' future practice.

The current study, therefore, seeks to identify primary school mathematics PTs' opinions about performing MM activities. To this end, answers to the following question were solicited.

What are PTs' views on performing MM activities?

3. Method

3.1. *Research Design*

This study follows a case study methodology. Being qualitative in nature, case studies seek to gain further data on and a better understanding of a specific individual, group, event, or organization (Patton, 2014). Accordingly, the case investigated in the current study is PTs' opinions about creating modeling activities.

3.2. *Participants*

Participants consisted of 18 middle school mathematics PTs in their fourth year of study in the Faculty of Education of a state university located in Turkey's Marmara Region. Criterion sampling, a type of purposeful sampling, was used to select participants. As such, all volunteer PTs in their fourth year of undergraduate study enrolled in the MM elective class participated in the study.

Moreover, all participants had previously completed several content education and research methods classes like Analysis, Special Education Methods, and Scientific Research Methods.

3.3. *Research Process*

This study was conducted as part of the participants' undergraduate *MM* class. PTs were first provided theoretical information on models, the definition of modeling and MM, areas of use, basic components, different MM perspectives, activities and the modeling process, and in-class applications of MM. During this process, PTs also completed their own literature review in groups in which they investigated the solutions of different modeling activities. PTs were additionally asked to use EDMODO, an internet-based classroom management program designed for educational use, to report their opinions about the subjects and activities they had covered during lessons to the researchers at the conclusion of every lesson. Accordingly, PTs wrote what they thought about the activities they had completed at the end of each class in the form of a diary, which they then shared with the researchers. These diaries were read by the researchers every week, and feedback was provided to the diaries' owners if necessary. This way, participants were able to obtain sufficient theoretical knowledge about MM as well as ample experience solving related activities.

Traveling to the schools where they performed their practicum together with their fellow group mates, PTs video recorded the modeling activity that they had performed in class, which was shared with the other students in their modeling class. These activities consisted of activities thought to build relationships with middle school students' real lives. PTs realized these activities in groups of four to five individuals. Additionally, the middle school students' own mathematics teachers were included in three of the four activities conducted. Video recordings of the activities performed over a four-week period by four separate groups were watched in PTs' MM class, which served to convey their in-class experiences with their classmates. Every week, PTs offered their opinions and assessments of the videos in question.

Before performing any activity in a classroom setting, PTs chose several activities from a larger pool of activities. Therefore, different factors (e.g., how appropriate activities were for students' levels, activities' ability to attract students' interest, scheduling) related to the activities performed in PTs' MM class were taken into consideration beginning from the very start of the semester. Subsequently, documents importing on the significance of making an appropriate lesson plan and on the necessity of devising an effective division of labor during preplanning were submitted to the researcher during the MM class. PTs' preplanning documents were evaluated based on several criteria, including

(i) how many individuals were to be included in groups based on class size, (ii) what concepts were mentioned during warm-up activities prior to moving onto the activity's problem, (iii) how much time was to be given to solve problems, and (iv) the order that groups were to present their solutions. PTs were also provided feedback by the researcher. In order to prepare the participants for the activity, a number of adjustments were made, like reducing the number of in-class groups, providing participants with sufficient preliminary information about the activities to be performed, and increasing the amount of time they had to solve problems. Furthermore, PTs were also asked to include detailed explanations about the warm-up phase of the lesson, about how they had moved on from the activity's introduction to the actual problem itself, about their experiences with other groups and offering guidance, and about how they were planning to share various in-class responsibilities, like obtaining a video camera for the class. This was done to prevent any potential chaos from occurring during class.

PTs showed the video recordings of the activities they had performed with their peers in their MM class. The students were asked to watch the videos and listen to their fellow classmates describe their experiences while conducting these activities. After sharing videos and experiences, students participated in class-wide discussions in which the activities performed, the PTs conducting them, the students involved, the classroom environment, and the classroom teacher's attitude were all addressed from various angles. PTs listened to each other as they shared their experiences and even offered each other feedback based on the MM training they had received. Immediately following this, the researchers then used a semi-structured observation form to record what each PT thought about the video they had watched one day earlier, which was then uploaded to EDMODO. This was repeated for four weeks. Figure 1 gives a general overview of the research process.

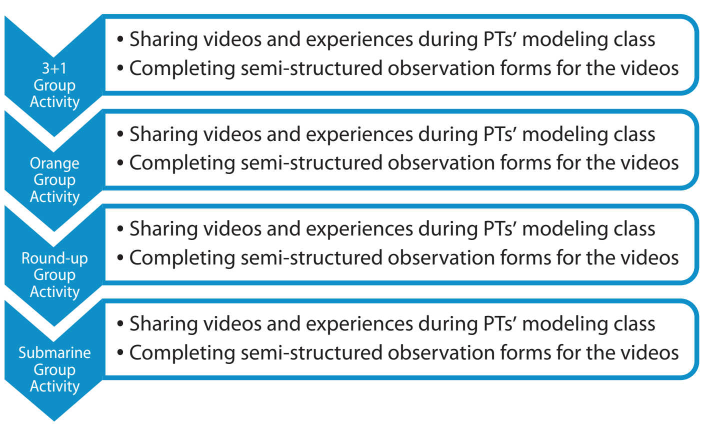


Figure 1. General overview of the steps followed during research

3.4. *Data Collection*

The following means were used to collect data for the current study: (i) lesson and execution plans for the activities PTs were to conduct, (ii) semi-structured observation forms, and (iii) notes taken by the researcher. Table II summarizes the activities that participants chose and implemented.

TABLE II
Activities implemented by participants

Activity Name	*Name of the Group Executing the Activity*	*Concept Addressed by the Activity*	*The reasons why teacher candidates choose these activities*
Big Head	3+1	Ratio and proportion	Attractive and suitable for students' level
Largest Shoe Size in the World	Orange	Ratio and proportion	Attractive and suitable for students' level
Horse Race	Group Round-up	Probability	The subject of probability is difficult for students. Students can understand the importance of knowing probability.
Bales of Hay	Submarine	Pythagorean Relation – Relationship between Diameter and Radius	Attractive and enjoyable

The activities in table II are briefly given below.

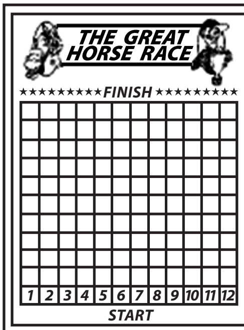
What would be the size of the statue if it showed Adenauer from head to toe at the same scale?

Figure 2. Big Head Activity adapted from Herget, Jahnke & Kroll (2001)

The person who fits this giant shoe must have enormous feet!

Antal Annus, a 73-year-old shoemaker from the Hungarian village of Csanédapáca, is depicted here, proudly presenling his hitherto most impressive “creation” To this very day, we still do not know whether he really made the shoe for one of his customers.

Figure 3. Largest Shoe Size in the World Activity (Herget, 2000)



The Great Horse Race Rules

1. Put the horses on their starting positions, 1 to 12.
2. Each player chooses a different horse.
   If there are only a few payers, then each can choose two or three horses. The remaining horses are still in the race but no one owns them.
3. Roll two dice and add the scores.
4. The horse with that number moves one square forward.
5. The first horse past the finish wins.

Figure 4. Horce Race Activity (Swan, Turner, Yoon & Muller, 2007)

In the figure below, there are 5 hay bales at the bottom. Hay bales is disposed to decrease towards the upper. Accordingly, find the height of the whole stack.

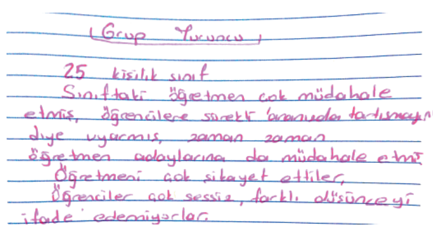
Figure 5. Bales of Hay Activity (Blum & Leiß, 2007)

Generally, pre-service teachers stated that they paid attention to the fact that the activities were easy and interesting because the students were not accustomed to such activities. They thought that it would be fun for students to compare their own body measurements in activities related to ratio-proportion. In the activity related to probability, they reported that the students had difficulties in probability, so they chose an activity that explained the importance of knowing probability.

PTs were given semi-structured observation forms after watching videos. Some of the questions included in these forms are:

- Was the activity effective in teaching the mathematical concept at hand?
- What are your observations of the classroom atmosphere?
- What do you think about (e.g., problems encountered, recommendations) the PT performing the activity?

Additionally, looked at research took her own notes while PTs' videos were being screened and while they shared their experiences with their peers. Figure 6 offers an example of such notes.



Group Orange
Class for 25 students
teacher has intervened a lot
teacher, constantly 'do not
argue between you' he warned.
The students are very quiet,
can not express themselves.

Figure 6. Example of notes taken by the researcher

3.5. *Data Analysis*

The data generated from this study were subject to content analysis. After watching the video recordings of activities, all the observation notes made by PTs were collected and transferred to a qualitative data analysis program. Then, all statements were coded and appropriate categories were made. These categories were themselves grouped under two headings, namely *Activity-Student-Teacher* and *Preservice Teachers.* Table III depicts a short section of the data analyzed. The themes addressed by PTs were divided into various categories and subcategories. Specifically, the subcategories included under the category *Classroom Environment* were: (i) active participation, (ii) communication-collaboration, and (iii) modeling process whereas the subcategories included under the category *Difficulties Experienced* were: (i) understanding-modeling, (ii) group work, and (iii) expression-assessment.

TABLE III
Example of PT's Opinions regarding Middle School Students and codes used by theme

Category	*Sub-category*	*Statements*
Classroom Environment	Active participation	P1: By having students work in groups, having them collaborate, and providing them venues where their self-confidence would be bolstered by valuing the ideas they came up with while trying to solve problems made positive contributions to their affective qualities. (Activity 1)
		P2: All groups worked hard to solve the problems at hand. Students who solved the problem quickly were keen to explain their solutions to their peers and did so with enthusiasm. When a student who fully understands the solution was chosen at random to stand up and explain his answer, the other students listened attentively to understand him. Students continued to explain their solutions even after the bell had rung, thereby foregoing their break time. (Activity 2)
	Communication - collaboration	P14: As a result of this activity, students were given the opportunity to share their thoughts, make educated guesses, and discuss their opinions as groups, which, similar to the activity that immediately preceded it, allowed them to develop their discussion skills and provided them an opportunity to showcase their collaboration skills. They were also able to use their prior mathematics knowledge. All of these were the result of long discussions and exchanges of ideas.
	Modeling process	P2: At first, there were some who designed and worked off of a case model. They drew the statue and reference point when they were explaining their solutions on the board. They thought about the ratio between the head and the entire body. Many groups used the height of the child on top of the statue as a starting point to estimate the size of the statue's head. They then estimated how big a person's head was compared to his body and used this to estimate the height of the entire statue. One group measured the child's height with a pen cap and another used his finger to measure it. One group used the street lamp as a reference point and determined the ratio between it and the statue's height. Some used the bust of Ataturk as a reference point to solve the problem. They all used appropriate methods to conduct their modeling process. (Activity 1)

Difficulties experienced	Understanding - modeling	P6: All of the students got hung up on the fact that the shoe maker was 73 years old, thinking that this information was necessary. This is because they have been trained to think that they need to use any mathematical information, even if it is simply extra, unrelated information. (Activity 2)
	Group work	P5: The first two groups were listened to and were able to share their ideas in a respectful and understanding manner. Although these groups were quite successful in completing their modeling activity and in providing solutions to the problem, some groups simply accepted the ideas of their speaker or of the 'group leader' without question and, instead of working as a group, simply rejected the otherwise bright ideas brought up by the other members in their group. When it came time for them to give their presentations, it was clear that they had tried to complete the activity without actually working in a group. (Activity 3)
	Expression - assessment	P6: The writing portion of this part was very problematic. Although I had repeated several times that they needed to make a report of the information I had given them multiple times before, the activity was still very difficult. Though some of the students were able to write it down on paper very well, when they were called to the board, it was as if they retained nothing and had completely lost their self-confidence. I think that they had difficulties because I had not provided them ample time or venues to express themselves. (Activity 3)

3.6. *Trustworthiness of Research*

One means to increase the trustworthiness of qualitative studies is the triangulation technique (Denzin, 1978). Accordingly, this study made use of PTs' lesson and execution plans, semi-structured observation forms, and field notes to collect data. To further increase the data's trustworthiness, peer assessments were employed. According to Guba and Lincoln (1994), peer assessment constitutes an external control mechanism for trustworthiness. That being the case, the themes and categories created by the researchers were sent to a researcher with a PhD in mathematics education and whose comments were used to make amendments to six subcategories. For example, while the category *Modeling Process* had been considered a theme related to activities, it was decided that it should be considered a student-related theme because it reflected the classroom environment and students' behaviors. Furthermore, we used participant confirmation to determine whether studies' findings accurately reflected their own opinions (Merriam, 2013). For this, the researchers conducted data analyses and, after the study had been completed, were reported and all data collected. These reports were then sent to participants, who were asked to indicate whether the analyses accurately reflected their own opinions and the research process.

4. Findings

Following the data's analysis, PTs' opinions regarding the execution of modeling activities were divided into four main themes. Findings related to these themes are presented below:

4.1. *Opinions regarding Activities*

Figure 7 summarizes participants' opinions on the activities conducted in class.

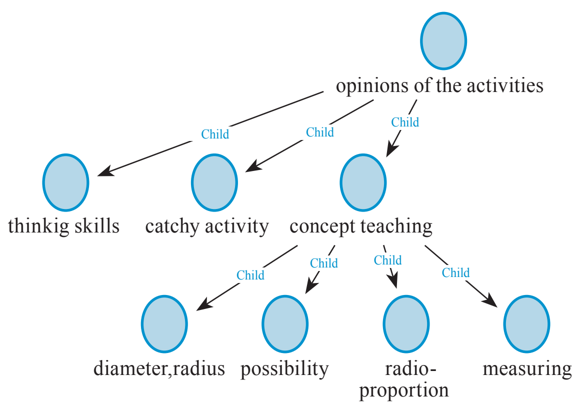


Figure 7. Participants' opinions regarding activities

Figure 7 illustrates how participants' opinions about activities were grouped into four separate categories. This chart indicates that PTs considered activities not only to increase various thinking skills of students and to be interesting, and could be used in teaching the concepts at hand.

Regarding *Thinking Skills*, PTs discussed how they thought the activities had influenced students' analytical, creative, and mathematical thinking skills, their sense of numbers, and their ability to observe relationships with real-life events and to consider issues from different perspectives. 'I think it helps to understand the subject better and use it in daily life' (Rukiye- pre-service teacher- for big head activity). In general, since all the comments made by PTs indicated that the activities attracted students' attention, it may be concluded that activities in the form of games or that are related to real life attract students' attention.

'The activity was interesting. Most of the groups were willing to figure it out. It felt different because they had not done such activities before and they did not do group work. Several groups discussed among themselves and found good results and expressed themselves well on the board. They discovered estimation skills and how to use ratio in such a problem' (Didem-pre-service teacher-for Largest Shoe Size in the World activity'

With regard to *Concept Teaching*, PTs discussed which activities could be used to teach which concepts. Appropriate answers were given to the designated target objectives in the first three activities; however, although the target objective in the final activity dealt with the Pythagorean relation, no PT mentioned it.

'Even though the students understood the concept of number sense, the main purpose was not to give them the concept. Our friends should have given this concept as additional information. They put too much emphasis on it, and from this point of view, the students perceived this concept of number sense as if it was a subject covered in a mathematics lesson. While the concept to be given in this activity is the Pythagorean relation, no student in the class has even used this concept' (Nurseda- pre-service teacher-for horce race activity)

In addition to stating that activities could be used to teach the concepts in question, PTs also articulated that activities actually had a greater impact on the other categories composing this theme than they did on concept teaching.

'We saw that the students tried to reach a solution by estimating the length of the shoe given in the picture, the shoulder width of the man holding the shoe, the glasses, the waist width and proportioning it with the shoe. Thanks to this activity, students put forward their thoughts by making assumptions like the previous activity, contributed to their discussion skills by discussing their thoughts in the group, had the opportunity to demonstrate their group work skills, and used their previous mathematical knowledge. Here they gained a lot of skills rather than an activity on 'ratio-proportion. This part was more important' (Seda- pre-service teacher- for Largest Shoe Size in the World activity').

4.2. *Opinions regarding Preservice Teachers*

Figure 8 depicts what participants thought about their peers after having watched video recordings of them conducting activities and listening to them share their experiences.

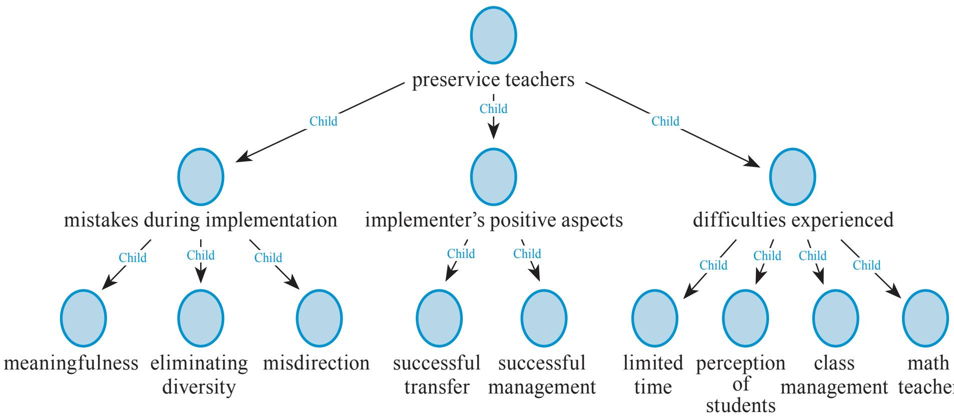
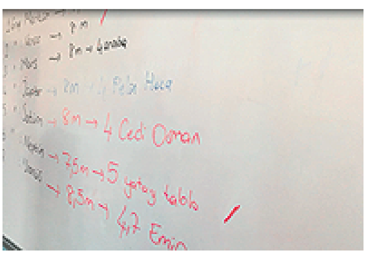


Figure 8. PTs Opinions regarding their Peers' Execution of Activities

Figure 8 indicates that PTs' opinions regarding their peers were divided into three separate categories. Accordingly, PTs' opinions regarding their peers' behaviors during activities considered to be improper were entered in the subcategory *Mistakes during Implementation*. Those opinions on the behaviors PTs' deemed to be constructive were entered in the subcategory *Implementer's Positive Aspects*. Finally, statements made regarding the most difficult situations encountered during activities' implementation were entered in the subcategory *Difficulties Experienced*.

Accordingly, the mistakes that PTs made during activities' execution were further grouped into three separate subcategories, namely (i) meaningfulness, (ii) eliminating diversity, and (iii) misdirection. With regard to M*eaningfulness*, PTs stated that additional preliminary information could have been given or more concrete materials could have been used to make the activity more meaningful for students and that it was necessary to spend more time on the preplanning phase instead of moving on to the actual problem, as that would help students better understand problems. With regard to *Eliminating Diversity*, statements existed indicating that student groups attempting to use different means to address the problem were interfered with and that groups were persuaded to solve the problem the same way that PTs had. For example, an examination of the third activity (i.e., Horse Race) reveals that one group of students thought it was necessary to use dice in order to solve the problem in the activity and, accordingly, started to make a die out of paper. Upon seeing this, the PTs orchestrating the activity advised students that dice were a waste of time and made several other recommendations instead. During the fourth activity (i.e., Bales of Hay), students modeled the positions of the bales of hay without actually looking at them and made a link between their conclusion and objects that existed in their own environments (Figure 3). After all of the groups had finished their presentations, one student mentioned that it was necessary to consider the positions of the bales and that it was therefore necessary to make another, entirely different model. However, the PTs conducting the activity did not ask the students to find another solution after this student had realized what needed to be done and instead ended the lesson. Consequently, the PTs watching the video recording of this activity criticized its implementers, stating that it is absolutely necessary for different ideas like the one in question to be given a place in classes.

With regard to *Misdirection*, after PTs had watched video recordings of the fourth activity (i.e., bales of hay), they articulated that some of their fellow PTs had misguided students and that they had not achieved their stated goal. At the beginning of the activity's execution, PTs' made comments on the sense of numbers during the warm-up activity that caused students to address the problem using various forms of estimation instead of with mathematical methods. Students were unable to construct an accurate model of the bales of hay by placing them on top of each other and attempted instead to solve the problem building off of relationships with real-life objects and people's heights. Figure 6 shows the solutions reached by all the groups in the class.



Group 1. Mercury → 8m
Group 2. Venus → 8m
Group 3. Anthem → 8m → 4 cars
Group 4. Jupiter → 8m → Pelin (their teacher)
Group 5. Saturn → 8m → 4 Cedi Osman
Group 6. Neptune → 7,5m → 5 Table
Group 7. Uranus → 8,5m → 4,7 Emir (their friend)

Figure 9. Example of Activity 4

Figure 9 illustrates that students attempted to associate the total height of the bales of hay with people and objects found in their own environments.

In addition to offering constructive criticism to their peers, PTs also stated that some of the activities were effectively executed, and such opinions were included in the category *Implementer's Positive Aspects.* Specifically, PTs successfully described all that had happened in the classroom, collaborated appropriately with their fellow PTs, and were able to manage the class effectively. These opinions may be considered evidence that PTs came prepared for their lesson, were enthusiastic, and successfully completed the activities.

The category *Difficulties Experienced* mostly includes statements pertaining to PTs' experiences while conducting activities. Several PTs stated that they had insufficient time to complete some of the activities when responding to their peers' criticism toward their implementation of activities.

‘ [..]We were very happy that a student finally noticed this. But we couldn’t say yes to the 30 people who enthusiastically held the event there. That would be to discourage them. That’s why we said your friends made the right point. But we said that our request from them is an estimated value, not a definite result. I do not think that we discouraged the student who realized this situation, and extinguished him. We congratulated and thanked him for noticing this. Our friends said that we should direct students to the right solution. Yes, then we could have achieved a tremendous result. But we didn’t have much time. We could only do so much in a limited time’ (Feyza-pre-service teacher - for bales of hay activity).

In fact, several articulated that the fact students were unfamiliar with this type of activities was an obstacle to their smooth progression and that the limited amount of time caused them stress. With regard to C*lassroom Management*, statements indicated that students’ inability to fully comprehend the activity and other factors like classroom teachers’ attitudes caused PTs severe difficulties in managing the class. That said, PTs stated that they would have faced even more difficulties had they been required to work on their own instead of working in groups of 4-5. Finally, the classroom teachers working with PTs were more likely to exhibit behaviors that hindered the activity’s objectives from being accomplished than otherwise.

4.3. *Opinions regarding Students*

PTs’ opinions regarding the middle school students with whom activities were conducted were divided into two separate categories, as illustrated in Figure 10.

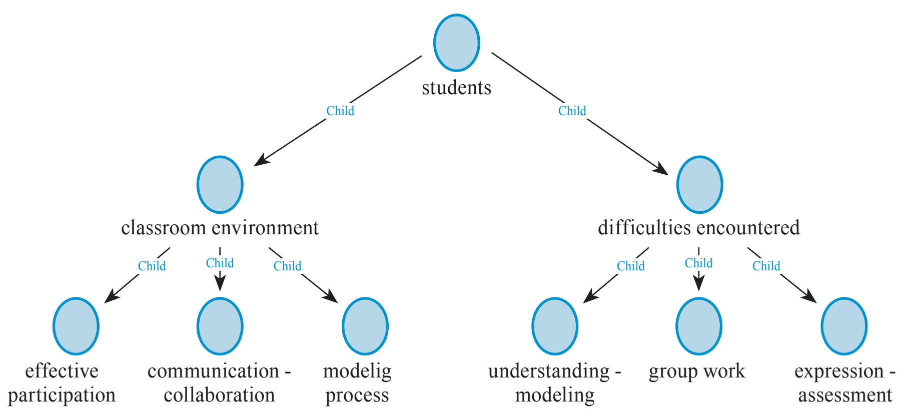


Figure 10. Participants’ opinions regarding students

Figure 10 reveals that participants’ opinions regarding students are divided into two separate categories, namely *Classroom Environment* and *Difficulties Encountered*. Under the former category are the subcategories *effective* *participation*, *communication-collaboration*, and *modeling process* whereas under the latter category are the subcategories *understanding-modeling*, *group work*, and *expression-assessment.*

PTs' statements indicating that students had approached the activity with a positive mindset and had thought over and discussed the problem for a significant amount of time in order to find an appropriate solution were included in the subcategory *effective participation*. Included in the subcategory *communication-collaboration* are statements by PTs indicating that students had discussed their solutions in groups, had communicated with others, and in short, had shared their ideas with their peers. In the subcategory *modeling process* are statements made by PTs indicating that students used math first to construct and then to solve the problem after understanding what was being asked of them. During all of this, however, PTs determined certain areas in which students struggled. One such area was *understanding-modeling*, in which students had difficulties both in understanding the activity and in constructing relationshipships between real life and mathematics. In an effort to remedy this, PTs resorted to numerous strategies to guide students. Moreover, since students were unfamiliar with group work etiquette, PTs articulated that the students struggled to work together in groups in an effective manner. PTs' statements describing such difficulties were included in the category *group work*. Finaly, although several students reached a specific conclusion, they were unable to express themselves in a convincing manner. PTs' statements indicating that students had difficulties deciding as to whether their conclusions were accurate or not were included in the category *expression-assessment*.

4.4. *Opinions regarding Teachers*

PTs' opinions regarding the mathematics teachers partaking in the activities with them were included in the theme *Mathematics Teacher.* The three categories included in this theme are illustrated below in Figure 11.

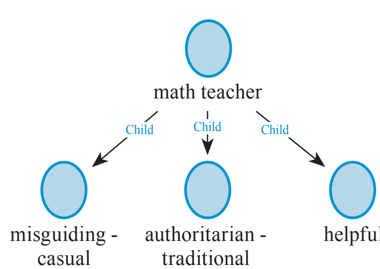


Figure 11. Preservice Teachers' Opinions regarding the Mathematics Teachers Participating in Modeling Activities

Figure 11 depicts the subcategories into which PTs' opinions regarding classroom teachers were divided, namely: *misguiding-casual*, authoritarian, and *helpful*. These categories included opinions of different teachers. For example, PTs' comments on the teacher participating in the first activity (i.e., Big Head) were included under the subcategory *misguiding-casual*. PTs stated that they had difficulty maintaining control over the class as a result of this particular teacher's overly casual attitude. The same teacher was also stated to have given hints to students without allowing them the opportunity to think about the problem for themselves. 'The teacher wanted to help the students. But he misdirected. There was a more casual classroom because of the classroom teacher. They saw our friends who went to the practice not as teachers, but as older sisters/brothers' (Sude-preservice teacher-for big head activity).

Under the subcategory *authoritarian-traditional* were comments made about the second activity (i.e., Shoe Number). The teacher who participated in this activity exhibited a very authoritarian attitude throughout the entire activity, which negatively affected the entire course of the activity 'The groups were supposed to discuss together, and it was normal for noise to come out during this time. However, the teacher's warning at every sound prevented the students from discussing and arguing' (Nurseda-preservice teacher).

The third activity (i.e., Horse Race) included PTs' statements about a teacher who would support them whenever they asked. This teacher would exchange ideas with the PTs about forming groups to ensure that they were not homogeneous and about which students should present their group's findings to the class. Finally, since no mathematics teacher participated in the fourth activity (i.e., Bales of Hay), no category was created for it.

'The teacher behaved exactly as he should have. He helped our friends with classroom silence and control. In addition, the students did not direct them while doing the activity. It is clear that he is much better than the teacher standing at the head of our friends last week' (Şevval-preservice teacher).

5. Discussion

In this study, opinions regarding middle school mathematics PTs' execution of MM activities were discussed. As such, PTs' opinions were categorized under four themes.

The first theme created was *Activities*, which indicated how the format of activities impacted students. As a result, four separate categories were created. All of these categories consist of specific features emphasized in modeling activities. Lesh and Doerr (2003), as stated above, have emphasized there to be four separate dimensions that students working with modeling activities learn, namely behavioral (basic facts and skills), process (mental habits not linked to a specific mathematical structure), affective (attitude, beliefs, and emotions), and cognitive dimensions. As such, the current study shows that from among the categories included under *Activities*, students' affective dimension is influenced by *interestingness* whereas their behavioral dimension is influenced by *concept teaching*. Statements included in the category *thinking skills*, however, describe the structure that Lesh and Doerr (2003) call mathematical thinking in MM. This is because mathematical thinking gives greater precedence to making interpretations and giving explanations than to simply performing arithmetical calculations. As such, since mathematical thinking aims for students to construct conceptual systems instead of simply finding the correct answer, these activities, when performed in classroom settings, are observed to facilitate the very thinking system that MM seeks to instill in students. Furthermore, PTs' statements revealed that these concepts' being associated with and organized in light of real-life events instead of simply facilitating students' superficial understanding of the concepts sought to be taught led to significant development in their mathematical thinking skills. An examination of the literature reveals that unlike the prevailing claim in the constructivist approach that deems it necessary for knowledge to be constructed/taught from scratch, the MM approach followed in mathematics education emphasizes that it is more important for individuals to organize a system or construct a relationship based on what they already know than to construct all the mathematical systems and rules. In other words, while the constructivist approach considers it necessary for individuals/students to discover new ideas and concepts emerging as a result of the ever-developing conceptual systems in their minds, MM aims for individuals/students to understand and conceptualize patterns and systems outside of their own minds instead of focusing on what the term discovery actually means (Lesh & Doerr, 2003). Accordingly, the fact that activities practice concepts already learned, organizational skills, and making associations instead of simply teaching concepts resembles the MM approach. According to the current study's findings, PTs stated that they had realized this fact while executing the activities in class. However, it is known that there are 2 main features of mathematical modeling activity. (school-based modeling activities offer a window beyond the school, (2) offer a window into the world beyond the school on the use of school-based mathematics in practical situations (Vos, Hernandez-Martinez, & Frejd, 2020). Therefore, the fact that the activities develop thinking skills more than the gains is an indication that the activities have a structure that can positively affect the future lives of the students.

Regarding student-related categories, the fact that students actively and enthusiastically participated in activities and were satisfied with the classroom environment is clear evidence that these activities were related to real life.

However, the fact that students were unable to work in collaborative learning environments or to perform self-evaluations indicates that they were unfamiliar not only with modeling activities but also with other activities based on a constructivist philosophy. This finding is valid both in Turkey and other countries. The problems that students encounter are generally only distantly related to the actual modeling process, and modeling activities play a minimal role in mathematics teaching (Blum & Borromeo, 2009; Doerr & English, 2003; Pollak, 2003; Zawojewski, 2010). In themes related to students, participants stated that in addition to students' experiencing difficulties as a result of their unfamiliarity with the activities, the fact that students exhibited positive attitudes toward the activities indicated that they could very well complete these activities in the proper learning environment and if correct guidance were given. In fact, several studies have revealed that in the event that MM is taught properly, students are certainly able to learn how to construct and use such models (Maaß 2006; Biccard & Wessels 2011; Blum & Leiß 2007).

Regarding *Mistakes during Implementation*, PTs stated that they had completed the meaning-making phase of the activity too quickly and had moved on to the actual problem before students had completely understood the context. PTs completed the activities within 1-2 class periods. As such, instead of restricting activities to 40-45 minute periods, activities can be completed within a more flexible time period in which all ideas are given due consideration. This may provide opportunities for the teacher to complete every stage of the modeling process in greater detail and care.

Regarding themes pertaining to teachers participating in activities alongside PTs, the two teachers involved in the first two activities (i.e., Big Head, Shoe Size) exhibited behaviors inconsistent with those recommended in the MM approach. Teachers' interference in the process made the activity even more difficult. A look at the names of the categories that the behaviors of these two teachers were included (i.e., misguiding-casual and authoritarian-traditional) revealed that they exhibited contradictory behaviors (i.e., casual-authoritarian). In other words, teachers' mix of casual and authoritarian attitudes caused students to have difficulties completing activities. In MM, similar to constructivism, the teacher is considered to be an advisor and a guide who, using questions, directs students to express their own ideas (Burkhardt, 2006). Because the teacher did not interfere in the activity's execution in the third activity, however, no problems were experienced. The teachers participating in the first two activities did not exhibit behaviors considered appropriate for MM or in line with a constructivist philosophy. That said, regardless of how much information they were given prior to the activity, it is possible that teachers' interference in the process stemmed from their not wanting their own teaching to be perceived poorly in the video recordings made in class.

A lasting balance between (minimum) teacher guidance and (maximum) student independence is essential for quality teaching (Blum & Borromeo, 2009) Similar studies reveal that teachers unconsciously tended to direct students toward their own ways of solving problems and that this stemmed from their lack of information regarding the scope of their duties (Borromeo & Blum, 2009; Blum, 2015). Likewise, the current study revealed that teachers needed additional knowledge about their classroom roles and the type of teaching that was to be used.

In addition to all of the above, although PTs had received MM training, they were still found to have some gaps in some of their knowledge and skills, which caused them to receive criticism from their peers. An examination of PTs' *Mistakes during Implementation* revealed that both PTs and students hastened to reach the expected solution as soon as possible. In other words, as described in the modeling steps (Borromeo, 2006), PTs attempted to persuade students to accept their own plans instead of those that each of them had devised on their own. Instead of encouraging them to understand their own thinking processes, students were, in a manner of speaking, asked simply to imitate their teachers. In a similar vein, Yu and Change (2009) examined the studies on classroom environment conducted in Taiwan and found that the majority of mathematics teachers continued to teach the same way they had learned, that classes generally consisted of teachers transferring their own knowledge to students, and that the main reason that such activities were not completed in class was because teachers felt no unease in completing the school curriculum and considered standardized tests to be an appropriate indicator of academic achievement.

The current study indicates that although teachers had learned what kind of profile they needed to adopt during the modeling training that they had received prior to executing the activity, they had difficulties in putting it into practice. Reasons for this included the amount of time allotted for activities, discomfort caused by excessive student noise, and the need for the activity to be successfully completed. Using Lesh and Doerr's (2003) four main goals in mathematics education to interpret this finding, it appears that both behavioral (e.g., input-output, reaching one's goals) and affective goals (e.g., students fear of liking activities) eclipsed the cognitive process. Accordingly, improving the cognitive aspect of activities has been stated to facilitate teaching mathematics and to pave the way for students to make greater process in successfully completing mathematics-related objectives compared to other targets (Stigler & Hiebert, 2004). Keeping in mind that the most beneficial act able to be done in the classroom environment is to nurture an environment in which high cognitive goals are held and in which students are provided with ample opportunities to practice and develop their reasoning skills (Stein, Smith, Henningsen, & Silver, 2009), those aspects that impede the acquisition of cognitive goals may be eliminated and ideal activities may be conducted. This will, in turn, allow all variables affecting in-school learning (e.g., curricular targets, examination types, classroom environment, and both class length and times) to be restructured in such a way that they focus on students' cognitive development.

6. Conclusion

In this study, opinions of PTs on carrying out MM activities were determined. Accordingly, PTs reported that the activities revealed students' different thinking skills. pre-service teachers who received modeling training tried to provide an appropriate learning environment in practice. They identified some problems in their interventions with students and attributed these problems to some factors such as limited time, readiness of students, and attitudes of teachers. They stated that the students liked modeling activities very much, they approached them with interest and curiosity, but they did not know exactly how to behave. They also stated that the activities revealed the different thinking skills of the students. On the other hand, they reported that the teachers made unnecessary interventions to the students and this situation negatively affected the modeling process.

7. Research Limitations and Recommendations for Future Research

Using PTs' own statements and opinions, this study attempted to reveal how MM activities were executed. Future studies can include the opinions of students and fully-licensed teachers to increase the overall scope of the research.

In the current study, however, the process by which MM activities were executed was laid out and the conclusions were discussed in light of all of the system components influencing activities' execution (i.e., curriculum, target acquisitions, teaching methods, assessment, and classroom environment). Indeed, teachers constitute the most potent element in conducing MM activities in schools. Consequently, this study revealed that regardless of the difficulties faced by students, they approached activities positively and were enthusiastic to participate in them. That said, however, both teachers and PTs exhibited normative, restrictive behaviors during activities' execution. PTs justified these behaviors citing time limits, classroom management, and not wanting to discourage students. This study further revealed that further investigation into mathematics education is required. Building off the concept of mathematics literacy and considering that an individual's ability to use mathematics to solve real-life problems is more important than simply learning mathematical concepts and terminology, it is necessary to give greater importance to studies focusing completely on the various components making up the system, namely the curriculum, target acquisitions, assessment and evaluation, teacher education, and learning environments (Blum, 2015), in order for modeling activities to be successfully implemented.

References

Asempapa, R. S. (2015). Mathematical modeling: Essential for elementary and middle school students. *Journal of Mathematics Education*, *8*(1), 16-29.

Biccard, P., & Wessels, D. C. (2011). Documenting the development of modelling competencies of Grade 7 mathematics students. In G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo Ferri ve G. Stillman (Eds.). *Trends in Teaching And Learning of Mathematical Modelling* (pp. 375-383). Springer Netherlands. http://doi.org/10.4102/pythagoras.v32i1.20

Blum, W. (2015). Quality teaching of mathematical modelling: What do we know, what can we do?. In *The proceedings of the 12th international congress on mathematical education* (pp. 73-96). Springer, Cham.

Blum, W. & Borromeo, R. (2009). Mathematical modelling: Can it be taught and learnt? Journal of Mathematical Modelling and Application, 1(1), 45-58. http://gorila.furb.br/ojs/index.php/modelling/article/view/1620

Blum, W., & Leiβ, D. (2007). How do students and teachers deal with mathematical modelling problems? In C. Haines, P. Galbraith, W. Blum, S. Khan (Eds.), *Mathematical Modelling (ICTMA 12): Education, Engineering and Economics*, (pp. 222-231). http://doi.org/10.1533/9780857099419.5.221

Borromeo, R. (2006). Theoretical and empirical differentiations of phases in the modelling process. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education*, *38*(2), 86-95. https://doi.org/10.1007/BF02655883

Borromeo, R. (2013). Mathematical Modeling - The Teacher's Responsibility. Journal of Mathematics Education at Teachers College.

Borromeo, R. (2018). Key Competencies for Teaching Mathematical Modeling. In Learning How to Teach Mathematical Modeling in School and Teacher Education (pp. 1-12). Springer, Cham.

Borromeo Ferri & Blum, W. (2013, February). Barriers and motivations of primary teachers for implementing modelling in mathematics lessons. In Eighth Congress of European Research in Mathematics Education (CERME 8), Antalya, Turkey.

Blum, W. & Borromeo, R. (2009). Mathematical modelling: Can it be taught and learnt? *Journal of Mathematical Modelling and Application*, 1(1), 45-58. http://gorila.furb.br/ojs/index.php/modelling/article/view/1620

Borromeo, R., & Blum, W. (2009). Mathematical modelling in teacher education–Experiences from a modelling seminar. *Cerme 6–Working Group 11*, 2046–2055. Retrieved from http://fractus.uson.mx/Papers/CERME6/wg11.pdf#page=7

Burkhardt, H. (2006). Modelling in mathematics classrooms: reflections on past development and the future. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 38(2), 178–195. https://doi.org/10.1007/BF02655888

Chamberlin, M. (2004). Design Principles for Teacher Investigations of Student Work. *Mathematics Teacher Education and Development*, 6, 52-65. https://eric.ed.gov/?id=EJ852386 sayfasýndan eriþilmiþtir.

Chamberlin, S. A., & Moon, S. M. (2005). Model-Eliciting Activities as a Tool to Develop and Identify Creatively Gifted Mathematicians. *The Journal of Secondary Gifted Education,* 17(1), 37-47. http://doi.org/10.4219/jsge-2005-393

Common Core State Standards Initiative (CCSSI) (2010). Common Core State Standards for Mathematics. Washington, DC: National Governors Association Center for Best Practices and the Council of ChiefState School Officers. http://www.corestandards.org/wp-content/uploads/Math_Standards.pdf

Denzin, N. K. (1978). *The research act: A theoretical introduction to research methods*. New Brunswick, NJ: Aldine Transaction.

Doerr, H. M., & English, L. (2003). A modeling perspective on students' mathematical reasoning about data. *Journal for Research in Mathematics Education*, *34*(2), 110–136.

English, L. (2003). Mathematical modelling with young learners. In *Mathematical Modelling* (pp. 3-17). Woodhead Publishing.

English, L. D., & Watters, J. (2004). *Mathematical modelling with young children. 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* 2, 335–342.

Ersoy, Y. (2006). Ýlköðretim matematik öðretim programýndaki yenilikler-I: Amaç, içerik ve kazanýmlar. Ýlköðretim online, *5*(1), 30-44.

Frejd, P. & Ärlebäck, J. (2011). First Results from a Study Investigating Swedish Upper Secondary Students' Mathematical Modelling Competencies. In: Kaiser, G. et al. (Eds). Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling (ICTMA 14). Dordrecht: Springer, 407-416.

Galbraith, P., & Stillman, G. (2006). A framework for identifying student blockages during transitions in the modelling process. *ZDM - International Journal on Mathematics Education*, *38*(2), 143–162. http://doi.org/10.1007/BF02655886

Guba, E. L., & Lincoln, Y. (1994). Competing paradigms in qualitative research. Handbook of cualitative research. California: Sage, 105-117.

Herget, W. (2000). 'Pictorial Problems'- One question, but Many Ways, and Many Different Answers. Weigand H, Neville N, Peter-Koop A., Reiss K., Törner, G., Wollring, B. (ed). Developments in mathematics education in german speaking countries(76-87). Gesellschaft für Didaktik der Mathematik (GDM).

Herget, W., Jahnke, T., & Kroll, W. (2001). *Produktive Aufgaben für den Mathematikunterricht in der Sekundarstufe I.* Cornelsen.

Kunter, M. & Voss, T. (2013). The Model of Instructional Quality in COACTIV: A Multicriteria Analysis. In: Kunter, M., Baumert, J., Blum, W. et al. (Eds), Cognitive Activation in the Mathematics Classroom and Professional Competence of Teachers – Results from the COACTIV Project. New York: Springer, 97-124.

Lesh, R., Carmona, G., & Post, T. (2002). Models and modeling. In D. Mewborn, P. Sztajn, D. White, H. Wiegel, R. Bryant, et al. (Eds.), Proceedings of the 24th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (Vol. 1, pp. 89–98). Columbus, OH: ERIC Clearinghouse

Lesh, R., & Doerr, H. M. (2003). *Beyond Constructivism: Models and Modeling Perspectives on Mathematics Problem Solving, Learning and Teaching.* Routletge.

Lesh, R. & Sriraman, B. (2005a). John Dewey Revisited - Pragmatism and the models-modeling perspective on mathematical learning. In A. Beckmann et al. (Eds.), Proceedings of the 1st International Symposium on Mathematics and its Connections to the Arts and Sciences (pp. 32-51). May 18-21, 2005, Pedagogical University of Schwaebisch Gmuend. Hildesheim: Franzbecker.

Lesh, R., & Sriraman, B. (2005b). Mathematics education as a design science. ZDM, 37(6), 490-505.

Lesh, R., Zawojewski J. S., & Carmona G. (2003). What Mathematical Abilities Are Needed for Success Beyond School in a Technology-Based Age of Information? In R. Lesh & H Doerr (Eds)., Beyond Constructivism Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Maaß, K. (2006). What are modelling competencies? *ZDM - International Journal on Mathematics Education*, 38(2), 113–142. http://doi.org/10.1007/BF02655885

Maaß, K. (2007). Modelling taks for low achieving students. First results of an empirical study. In D. Pitta-Pantazi & G. Philippou (Eds.), CERME 5 – Proceedings of the Fifth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (pp. 2120–2129). Larnaca: University of Cyprus.

Manouchehri, A. (2017). Implementing mathematical modelling: The challenge of teacher educating. In Mathematical Modelling and Applications (pp. 421-432). Springer, Cham.

Merriam S. B. (2013). Nitel Araþtýrma Desen ve Uygulama Ýçin Bir Rehber (Selahattin Turan, Çev.). Ankara : Nobel.

Ministry of National Education [MoNE]. (2013a). Middle School Mathematics Course (Grades 5-8). Curriculum. Ankara.

Ministry of National Education [MoNE]. (2013b). Secondary School and Imam Hatip Secondary School Mathematics Applications Course (Grades 5, 6, 7 and 8) Teaching Program. Ankara.

Ministry of National Education [MoNE]. (2018). Secondary Mathematics Course (Grades 9-12). Curriculum.

Mousoulides, N. G., (2009). Mathematical modeling for elementary and secondary school teachers. In Kontakos, A. (Ed), *Research & Theories in Teacher Education*. Greece: University of the Aegean.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston, VA: Author.

Niss, M., Blum, W., & Galbraith, P. (2007). Introduction. In W. Blum, P. Galbraith, H-W. Henn & M. Niss. (Eds.) (2007), *Modelling and Applications in Mathematics Education. The 14th ICMI Study* (pp 3–32). New York, NY: Springer Science + Business Media, LLC.

OECD (2012). *PISA 2012 Assessment and Analytical Framework Mathematics, Reading, Science, Problem Solving and Financial Literacy.* OECD Publishing. http://www.oecd.org/pisa/pisaproducts/PISA%202012%20framework%20e-book_final.pdf sayfasýndan eriþilmiþtir.

Paolucci, C., & Wessels, H. (2017). An examination of preservice teachers' capacity to create mathematical modeling problems for children. Journal of Teacher Education, 68(3), 330-344.

Patton, M. Q. (2014). Nitel araþtýrma ve deðerlendirme yöntemleri. (M. Bütün ve S. B. Demir, Çev.), Ankara: Pegem Akademi.

Pollak, H. O. (2003). A History of the Teaching of Modelling, in Stanic, G. M. A. and Kilpatrick, J. (Eds). A History of School Mathematics. (pp 647-672), National Council of Teachers of Mathematics, Reston, VA.

Sriraman, B. (2005). Are giftedness and creativity synonyms in mathematics? *Journal of Secondary Gifted Education*, 17(1) , 20–36.

Stein, M. K., Smith, M. S., Henningsen, M. A., & Silver, E. A. (2009). *Implementing standards-based math instruction: A casebook for professional development.* Teachers College Press.

Stigler, J. W., & Hiebert, J. (2004). Improving mathematics teaching. *Educational leadership*, *61*(5), 12-17.

Þen, Ö. (2017). Matematik Dersi Ortaokul Öðretim Programlarýnýn Karþýlaþtýrýlmasý: 2009-2013-2017. *Current Research in Education*, *3*(3), 116-128.

Turner, R., Dossey, J., Blum, W. & Niss, M. (2013). Using Mathematical Competencies to Predict Item Difficulty in PISA: A MEG Study. In: Prenzel, M., Kobarg, M., Schöps, K. & Rönnebeck, S. (Eds.), Research on PISA – Research Outcomes of the PISA Research Conference 2009. New York: Springer, 23-37.

Vos, P., Hernandez-Martinez, P., & Frejd, P. (2020). Connections of science capital and the teaching and learning of mathematical modelling: An introduction. In Mathematical modelling education and sense-making (pp. 33-38). Springer, Cham.

Yang, X., Schwarz, B., & Leung, I. K. (2021). Pre-service mathematics teachers' professional modeling competencies: a comparative study between Germany, Mainland China, and Hong Kong. Educational Studies in Mathematics, 1-21.

Yoon, C. (2006). A Conceptual Analysis of the Models and Modeling Characterization of Model-Eliciting Activities as "Thought-Revealing Activities". Yayýnlanmamýþ Doktora Tezi.

Yu, S., & Chang, C. (2009). What did Taiwan mathematics teachers think of model-eliciting activities and modeling? … And Learning Of Mathematical Modelling http://120.107.180.177/1832/9802/98-2-04pa.pdf

Zawojewski, J. (2013). Problem solving versus modeling. In *Modeling students' mathematical modeling competencies* (pp. 237-243). Springer, Dordrecht.

Autores

Yüksel Dede. Gazi University. Turkey. ydede@gazi.edu.tr

Zehra Taşpinar Şener. Yildiz Technical University. Turkey. zehrataspinarr@udgmail.com

Leonardo Solanilla Chavarro, Ana Celi Tamayo Acevedo

ANAMNESIS DE LA TEORÍA DE LOS INDIVISIBLES DE CAVALIERI

Anamnesis of the theory of the indivisibles of Cavalieri

RESUMEN

En su circunstancia social y cultural concreta, los indivisibles cavalerianos constituyen una teoría entendible que busca los símbolos de lo infinito-continuo en los albores de la Modernidad europea. Muchas de las nociones claves de esta teoría perviven en las matemáticas de hoy.

PALABRAS CLAVE:

- *Indivisibles*
- *Cavalieri*
- *Siglo XVII*
- *Cálculo infinitesimal*
- *Infinito matemático*

ABSTRACT

Within their concrete social and cultural circumstances, Cavalieri's indivisibles make up an understandable theory seeking its symbols to explain the infinite - continuous at the dawn of European Modernity. Many of the key notions of this theory survive in today's mathematics.

KEY WORDS:

- *Cavalieri's indivisibles*
- *17th century*
- *Cavalieri*
- *Infinitesimal calculus*
- *Infinity*

RESUMO

Em sua circunstância social e cultural concreta, os indivisíveis cavalerianos constituem uma teoria perfeitamente compreensível que busca símbolos para o infinito continuum no início da modernidade européia. Muitas das noções fundamentais dessa teoria sobrevivem na matemática de hoje.

PALAVRAS CHAVE:

- *Indivisíveis*
- *Cavalieri*
- *Século XVII*
- *Cálculo infinitesimal*
- *Infinito matemático*

RÉSUMÉ

Dans leur situation sociale et culturelle concrète, les indivisibles cavalériens constituent une théorie parfaitement compréhensible qui cherche des symboles pour l'infini et la continuité à l'aube de la modernité européenne. Beaucoup des notions fondamentales de cette théorie survivent dans les mathématiques d'aujourd'hui.

MOTS CLÉS:

- *Indivisibles*
- *Cavalieris*
- *17e siècle*
- *Calcul infinitésimal*
- *Infini mathématique*

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (2021) *24* (2): 151-176.
Recepción: Enero 31, 2020 / Aceptación: Junio 11, 2021. DOI: 10.12802/relime.21.2422

1. Introducción

Cuando se repasa la vida del matemático y astrónomo suizo Paulus Guldinus (1577-1643), judío y jesuita, se entiende que algunos fanáticos defensores del aristotelismo de Tomás de Aquino —pensamiento oficial del papado durante la Reforma— criticaron despiadadamente a los indivisibles matemáticos cavalerianos (Cavalieri, 1647, III; Andersen, 1985, p. 5; Koyré, 1978, p. 324 y ss.; Brunschvicg, 1912, p.165). Para ellos, la metafísica escolástica debería seguir dictando los caminos de la "ciencia". Se declararon contrarios a la tesis platónica del infinito actual y no advirtieron los hervores de rebelión que se cocinaban en los cazos matemáticos. Por otra parte, son muchos los testimonios escritos que prueban que los indivisibles matemáticos fueron acogidos por los pensadores que mejor entendieron el arrebatador *Zeitgeist* del siglo XVII. No sólo Torricelli (1969), Pascal (1658) y Roberval (1693), sino también Leibniz (1956, p. 139) y Newton (1687, p. 35) los comprendieron de buena o mala gana. Newton y Leibniz se alejaron de los indivisibles para acoger las fluxiones y las fluentes; o los infinitesimales, respectivamente. Luego los indivisibles fueron condenados al olvido. Desde el siglo XVIII la *amnesia* de los indivisibles ha reinado entre los matemáticos de profesión. Fueron acusados de ser oscuros y contrarios a las cosas del mundo. En este artículo se defiende el provecho de desempolvar a los olvidados indivisibles de Cavalieri, no solamente en favor de las matemáticas mismas, sino también para aprehender cómo éstas se encarnan en la historia material de los hombres. Se defenderá que los indivisibles no constituyen una teoría "oscura". Todo lo contrario, conforman una teoría admirablemente erigida sobre las mejores tradiciones lógicas y matemáticas de Occidente. En la terminología de Lakatos (1978), esta teoría es "empirista", pues parte de unas proposiciones básicas con términos conocidos (empíricos), tal como se verá en la Sección 3 de más abajo.

La *amnesia* de los matemáticos ha sido internalizada por muchos historiadores de las matemáticas, quienes han decidido no entender los indivisibles por la simple razón de que no coinciden con su ideario del cálculo infinitesimal. Para ellos, los infinitesimales, las fluentes y las fluxiones constituyen el "glorioso origen" del cálculo infinitesimal. Este proceder ignora la censura —justificada— del obispo Berkeley (1734) a los *Principia* de Newton (1687). Esto es solamente la punta de un iceberg que esconde bajo el agua los titánicos intentos posteriores por formalizar el cálculo infinitesimal como análisis matemático. Baste aquí con mencionar la reformulación euleriana y el largo padecer del análisis infinitesimal durante el siglo XIX (Hairer y Wanner, 1996). En efecto, no tiene mucho sentido resaltar un momento particular dentro del turbulento devenir del análisis de lo infinito - continuo, pues a cada instante se puede percibir una cierta preservación de algo y una ruptura con lo anterior, como en toda creación cultural. Aquí se adopta una posición crítica frente a dicho estilo de historia de las matemáticas, que se concentra en explicar la disciplina contemporánea como el producto acabado y evidente de un movimiento lineal, continuo y en ascenso permanente —dicha historia quita todo lo que le incomoda en provecho de las "estructuras más firmes"—. Cabalmente, se ha de mirar a las matemáticas no sólo en ellas mismas, sino enmarcadas en sus circunstancias materiales de emergencia y ruptura permanentes. Además, se ha de leer con calma y mucho cuidado la *Geometria* de Cavalieri (1653), pues allí es dónde yacen los elementos para una *anamnesis* del pensamiento de su autor.

En la Sección 2 se marca la diferencia entre los indivisibles como teoría y como método, distinción que resulta ser importante para revivir la memoria de estos objetos matemáticos. La Sección 3 presenta las definiciones del Libro II de la *Geometria*. Esto permite rescatar la rica elaboración especulativa contenida en la obra. Muchas intuiciones de Cavalieri perviven hasta hoy, aunque bajo formulaciones distintas. En la Sección 4 se examina el Teorema I del Libro II, en cuanto intento crucial para asignar magnitudes a las figuras geométricas, acierto de la conceptualización cavaleriana. Otro grupo de teoremas importantes del Libro II se trata en la Sección 5. Estos resultados se dan sin mayores explicaciones para exponer el entramado lógico que soporta el método de los indivisibles. Dicho método es el objeto de la Sección 6. No se dan muchos detalles, pues es la parte más conocida de la *Geometria*. En la Sección 7 se defiende la claridad de los indivisibles de Cavalieri, a pesar de la tradición que los etiqueta de incomprensibles. Finalmente, en la Sección 8, se esbozan algunas conclusiones.

2. Los indivisibles, teoría y método

La *Geometria*, desde su prefacio, es una teoría del espacio soportada por un andamiaje lógico similar al de los *Elementos* de Euclides. Los indivisibles son el sueño de Galileo para explicar la *compositio continui* (Raffo, 2016, p. 51 y ss.). Dicho continuo es una creación cultural, que se venía gestando en los vientres mercantilistas de muchas pujantes ciudades europeas desde fines de la Edad Media. Radford (2008) ha documentado el cambio ocurrido en las concepciones de movimiento desde el siglo VIII hasta el Renacimiento. Tales estructuras culturales —*épistèmes* foucaultianas— abarcaban en sus comienzos lo finito-discreto. Hacia el fin de la Edad Media y comienzos del Renacimiento, por el contrario, ya se había aceptado en el inconsciente europeo que cada todo contenía infinitas partes y que las cosas cambiaban continuamente:

> *In the same way as time became minutely measurable, so too did space, through the invention of perspective [...] This was the emergence of a new form of dynamic narrative in which the individual was displayed in concrete spatial and temporal settings. Through numbers, speed and time became systems. As such, they made possible the creation of unifying systems of knowledge representation.* (Radford, 2008, p. 5).

Por una impetuosa voluntad, los pensadores del siglo XVII matematizaron la nueva realidad del espacio, el tiempo y el movimiento. Ni Cavalieri ni Mengoli[1] alcanzaron a prever la resonancia que sus elucrubaciones iban a tener en Europa, ni mucho menos a sospechar las enemistades que ellas les iban a traer hasta el final de sus días (Tamayo, 2018). Ciertamente, la lucha política por la verdad de una teoría hegemónica sobre lo infinito y lo continuo iba a ser brutal, casi sanguinaria (Hall, 2002).

A pesar de su pretensión de teoría, desde el comienzo se habló de un «método» de los indivisibles. Quizás esto se deba al título de la obra: *Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota*. La intención de Cavalieri es clara: su objeto es la geometría, un estudio discursivo sobre las figuras en el plano y el espacio. Lo que puede desconcertar es que se estudie de una manera nueva, por medio de los indivisibles. Esto, quizás, significó que se trataba de un método, antes que una teoría. También Pascal[2] (1658, p.10), desde su dialéctica vertiginosa, lo entendió como una manera de hablar y no como la afirmación perentoria de una nueva realidad. Más recientemente, Andersen (1985) ha retomado esta tradición.

Es interesante examinar el uso de la palabra «método» en el siglo XVII, pues este siglo está lleno de métodos matemáticos y filosóficos. Brunschvicg (1912), menciona, por ejemplo, *la méthode des tangentes de Barrow* (Brunschvicg, 1912, p. 174 y ss.) y *les méthodes pour les tangents* (Brunschvicg, 1912, p. 177 y ss.). Incluso dentro del propio cálculo infinitesimal, *la méthode des infiniment petits* (Brunschvicg, 1912, p. 248, nota al pie) o *méthode différentielle pour les tangentes* (Brunschvicg, 1912, p. 190, nota al pie) es equivalente y se opone a *la méthode des fluxions de Newton* (Brunschvicg, 1912, p. 192). Concretamente, una gran teoría se desdobla en varios métodos y algunos de ellos pueden ser

[1] No han sido los primeros europeos que enfrentaron estas realidades desde el pensamiento. En la Edad Media, Oresme (ca. 1323-1382) y Cusa (1401-1461) habían abordado problemas similares.

[2] *Et c'est pourquoy je ne feray aucune difficulté dans la suitte d'user de ce langage des indiuisibles* la somme des lignes*, ou* la somme des plans*; [...] je ne feray aucune difficulté d'user de cette expression* la somme des ordonnées*, qui semble n'estre pas Geometrique à ceux qui n'entendent pas la doctrine des indiuisibles, & qui s'imaginent que c'est pecher contre la Geometrie que d'exprimer un plan par un nombre indefiny des lignes [...]*

equivalentes entre sí, aunque por vías distintas. Un simple método, por el contrario, señala solamente un camino de solución, a veces apenas una débil luz, una sugerencia. En el siglo de los indivisibles, los geómetras buscaban «buenos métodos» para dar razón de la infinidad matemática del «ser».

Aquí se alcanza un punto central de esta discusión. Como bien lo ha dicho Brunschvicg refiriéndose a Cavalieri:

> *Il y a une grande difficulté à suivre les détails techniques d'un ouvrage où l'auteur posait des problèmes nouveaux, et les étudiait à l'aide d'une méthode nouvelle, créant un langage sans y joindre d'ailleurs de symboles appropriés.* (Brunschvicg, 1912, p. 192).

La historia oficial de las matemáticas prefiere idolatrar las grandes teorías y menospreciar los simples métodos porque privilegia los enfoques hermenéuticos sobre los heurísticos. Los métodos tienen que ver con la invención y el descubrimiento, la imaginación y la originalidad. Proveen técnicas o procedimientos para resolver —quizás momentáneamente— los problemas inmediatos. Del lado de las teorías, por el contrario, reposa la perfección aparente de lo que no es humano ni cambiante, de lo ajeno a la historia,… de Dios. Los círculos hermenéuticos se acercan, poco a poco sin lograrlo, a la verdad absoluta, *hyperuránion tópon…*

Vale la pena recordar a los indivisibles —como teoría o método con sus aciertos y limitaciones— porque intentaron hablar de nuevas concepciones de espacio y tiempo, cuando lo finito-discreto perdió sentido en la mentalidad renacentista. Asimismo, con mayor profundidad para la historia de las matemáticas y su enseñanza, cobra más sentido indagar en las heurísticas y la inestabilidad de los descubrimientos, que en la estabilidad y en la falsa sensación de permanencia detrás de las grandes teorías.

3. Definiciones del Libro II

En relación con lo dicho, la mayoría de los análisis sobre la obra del milanés se consagran casi exclusivamente a describir la manera cómo los indivisibles sirven para calcular áreas y volúmenes (Andersen, 1985; Koyré, 1978; Brunschvicg, 1912). Este proceder sepulta de tajo todo el prodigioso ejercicio de conceptualización de Cavalieri que, por cierto, soporta lógicamente tales cálculos. Incluso Andersen (1985), que dedica una sección —muy breve— a bosquejar algunas nociones relativas a las figuras que se describen en el Libro I, se queda corta al enfocarse en detalles sobre las tangentes y la noción cavaleriana de magnitud.

Como aquí se quiere rememorar al autor, a continuación, se recorre de la mano del texto original el extraordinario trabajo de abstracción y generalización que Cavalieri puso antes de sus teoremas. Empero, antes conviene decir un par de palabras sobre la concepción y redacción de la *Geometria.* En particular, el primer libro de la obra no fue el primero que Cavalieri escribió: *Il libro I è quel "libro delle propositione lematiche" che Cavalieri aveva "in confuso", e che redasse in modo definitivo solo dopo aver scritto i quattro seguenti* (*cfr. Introduzione*). (Lombardo-Radice, 1966, p. 59).

Luego del descubrimiento de las *omnes lineae*, que describe con orgullo al comienzo (Cavalieri, 1653, *Praefatio*), Cavalieri demostró muchos e importantes resultados, que acomodó de un solo golpe de inspiración en cuatro libros. Enseguida reflexiona sobre sus suposiciones y las ubica en el Libro I. Así, el primer libro es verdaderamente el quinto: un artificio de escritura para dar la impresión de un edificio construido desde los cimientos. Pero el estrés de la escritura no terminó allí:

> *Comme abbiamo ampiamente spiegato nell'Introduzione, il libro VII occupa unan posizione particolare nella Geometria di Cavalieri; esso venne composto alcuni anni che l'Autore aveva portato a termine i primi sei. La caratteristica di quest'ultimo libro va soprattutto cercata nel nuovo metodo ivi adottato, che in un primo tempo Cavalieri riteneva costituito "senza indivisibili". Più tardi si accorgerà che, a rigore, neanche esso fa a meno di tale nozione, pur usandola in modo diverso; lo chiamerà quindi "secondo metodo degli indivisibili".* (Lombardo-Radice, 1966, p. 649).

Esto se debió a las críticas sobre las bases metafísicas de los indivisibles. Ante la ortodoxia científica, Cavalieri recula de la posición defendida en lo que va escrito del libro e intenta recrear los indivisibles de manera que no riñan con los dogmas de su tiempo.

3.1. *Regiones planas*

El Libro II de la *Geometria* comienza con una definición rotunda:

> I. Si por tangentes opuestas a una figura plana cualquiera se levantan dos planos mutuamente paralelos —perpendiculares o inclinados respecto al plano de la figura dada, infinitamente prolongados de una y otra parte, de los cuales uno se mueve hacia el otro, concebido siempre paralelo al primero, hasta sobreponerse con el segundo— los segmentos individuales —que durante todo el movimiento se forman por las intersecciones del plano móvil y la figura dada, tomadas todas juntas— se llaman *omnes lineae* de dicha figura —referida a una *regula* (regla, referencia), [...] (Cavalieri, 1653; *Liber secvndvs*, *Definitiones I.*).

Como el tratamiento de los *omnia plana* para los sólidos es similar, aquí solamente se consideran figuras planas. Además, podemos prescindir de las representaciones tridimensionales y tratar intrínsecamente el caso plano. Así, la definición anterior se reinterpreta como: "si una de dos tangentes opuestas a una figura plana se mueve hacia la otra, manteniéndose en cada instante paralela a ella, los segmentos que se forman por intersección de la recta móvil con la figura se llaman todas las líneas de la figura, referidas a la dirección de las mentadas tangentes". Con ello inaugura una geometría en la que el movimiento y lo continuo están entrelazados íntimamente. Lo infinito se torna acto bajo la forma de colección infinita. Dichas colecciones cobran significado preciso en los postulados y sus propiedades se desvelan en los teoremas.

No interesan las "equivocaciones" de Cavalieri a la luz de invenciones posteriores, sino defender que muchas cosas de la *Geometria* todavía perduran, bruñidas por las procelosas corrientes del tiempo. Por ello está permitido reescribir las definiciones en el lenguaje de la Geometría Diferencial de hoy. Aquí, los resultados valen, no para una *aliqua figura plana*, sino para una región conexa compacta R del plano euclidiano, encerrada por una curva regular de Jordan C. En términos profanos, R

- es cerrada y acotada, en particular, está contenida en un círculo de radio finito;
- dos puntos cualesquiera en R se pueden unir por un camino continuo que no se sale de ella;
- la curva C es diferenciable con derivada no nula (en cada punto se puede trazar la recta tangente) y particiona el plano en dos partes (interior y exterior).

La Figura 1 sugiere esta noción de región plana. Los segmentos que se trazan con líneas más delgadas son algunos de los *omnes lineae*. Aunque Cavalieri no lo dice, estos segmentos son los "indivisibles" de R.

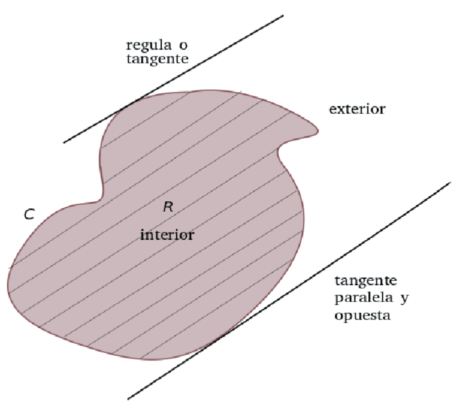


Figura 1. Región plana acotada R, encerrada por una curva de Jordan regular C. (elaboración propia)

Este recurso del análisis de un texto —matemático—, por medio del cual se relacionan dos nociones de distintas épocas, surge normalmente cuando se abandonan los prejuicios críticos que quieren detectar “errores” en obras de tiempos pasados. En efecto, dicho recurso enfatiza los significados antes que los significantes, tal como algunos han creído detectar en los estudios de Michel Serres: *Pour Serres, lire le texte, c’est travailler sur les choses mêmes, sur le monde dont part et parle le texte. Ainsi définie, la critique devient « une physique généralisée » (Feux 15) et l’interprétation reçoit pour tâche de saisir la matérialité de l’œuvre dans l’espace où elle se découpe*. (Porée; 2000, p. 5). Asimismo, realza la simbolización inherente al pensamiento, en la cual se pueden tender puentes entre instantes y lugares diferentes*: Le feu réel dissémine les cendres, le feu métaphorique dissémine les signes. D’où chez Serres le triomphe du principe d’identité et/ou d’analogie, rendu par les termes d’isomorphisme, d’homologie, d’homorhésie*. (Porée; 2000, p. 5). Dichos “isomorfismos serresianos” se erigen como herramientas indispensables del análisis de los conceptos.

Tampoco se comete un anacronismo, porque no se están situando los conceptos o nociones en momentos o épocas que no les corresponden. Al revés: el enfoque tradicional de la historia de los conceptos matemáticos tiende al protocronismo.

3.2. *Colecciones*

La *regula* se desplaza paralelamente a sí misma hasta encontrar la tangente opuesta. En su recorrido se determinan los indivisibles de la región *R*. A Cavalieri se le refutó duramente por sugerir que las figuras estaban formadas por indivisibles. Ello lo obligó a cambiar su método en el Libro VII de la obra. Hoy, gracias a la Teoría de Conjuntos, Cavalieri tiene razón: la región *R* es la reunión de sus indivisibles. Se resalta el fuerte sabor conjuntista de la *Geometria*. En la traducción de Lombardo-Radice (1966) se utiliza el sustantivo *insieme*, conjunto, para refererirse a las colecciones de elementos. Además, Cavalieri usa reiteradamente el adjetivo *omnes*, todos, para aclarar que considera todos los elementos constituyentes de una colección “infinita innumerable”. El grupo de trabajo de Lombardo-Radice (1966) llega a afirmar que Cavalieri tenía claro el concepto de biyección y, con él, lo fundamental del cardinal de un conjunto:

> *Il concetto di corrispondenza biunivoca tra insieme infiniti sembre a noi uno dei più importanti contributi di B. C. allo sviluppo della astrazione matematica. Il Cavalieri si libera arditamente (arditamente rispetto alla sua epoca) del problema del numero degli elementi dei due insiemi, e si preoccupa soltanto di vedere se è possibile, o no, stabilire una legge che faccia corrispondere a un elemento del primo insieme uno edun solo elemento del secondo, e in modo che ogni elemento del secondo sia immagine di uno e un solo elemento del primo.* (Lombardo-Radice; 1966, p. 194)

La aceptación de estas aplicaciones biyectivas encerraba un riesgo debido a ciertos argumentos aristotélicos que se habían esgrimido desde la Edad

Media (Solère, s. f.). Es muy posible que Cavalieri solamente considerara correspondencias binunívocas que resultaran de movimientos euclidianos, los cuales conocía muy bien. Este asunto se retoma en la subsección 3.6. Es poco probable que quisiese tratar con las dificultades que introduciría el considerar todas las "permutaciones" posibles de los indivisibles de una figura.

Sorprendentemente, tales colecciones infinitas de segmentos ya habían aparecido en Arquímedes y visto la luz en su famoso *Método de los teoremas mecánicos*, conociedo oficialmente sólo desde 1906 (Heiberg, 1907; 1909; Assis y Magnaghi, 2012). No hay evidencia de que Cavalieri hubiese tenido a la mano un ejemplar de este tratado. Lo que sí se puede leer todavía es que Arquímedes, por prejuicios metafísicos, no consideraba al método mecánico digno de demostrar las verdades intemporales de las matemáticas. De hecho, en la "prueba" de la Proposición 1 del *Método*, sobre la cuadratura de la parábola, dice que

> *[...] the fact here stated is not actually demonstrated by the argument used; but that argument has given a sort of indication that the conclusion is true. Seeing then that the theorem is not demonstrated, but at the same time susjjecting that the conclusion is true, we shall have recourse to the geometrical demonstration which I myself discovered and have already published.* (Heath; 1912, pp. 17-18).

El fuego metafísico de los signos arquimedianos conservó su calor hasta el Renacimiento y sus cenizas, todavía candentes, alcanzaron a Cavalieri.

3.3. *Vértices*

Debe darse crédito a Cavalieri por su intuición del vértice de una figura plana. En la primera definición del Libro I se lee:

> I. A. Cuando dos líneas rectas, paralelas entre sí, tocan tangencialmente a una figura plana situada en el mismo plano (de ellas), se llama vértice a uno de aquellos puntos de contacto. Se llaman vértices opuestos los puntos de contacto de las mencionadas tangentes paralelas, tomados juntos. […] los vértices se entenderán siempre con respecto a una cualquiera de las mencionadas rectas tangentes equidistantes, que en lo que sigue se llama *regula* (regla o referencia). (Cavalieri, 1653; *Liber primus, Definitiones A. I.*).

La definición contemporánea de vértice tiene que ver con el cambio instantáneo de las rectas tangentes en la frontera de *R*. En concreto, un vértice es un punto de la curva C donde se anula la curvatura. La existencia de los vértices se garantiza, hoy en día, por el Teorema de los cuatro vértices que asegura que "toda curva plana regular, cerrada y simple tiene al menos cuatro vértices", *cf.* Do Carmo (1976, p. 36 y ss.). Cavalieri asume sencillamente que los vértices existen.

Andersen (1985; p. 316, Fig. V.1.) ha recriminado a Cavalieri su ignorancia de la noción de curvatura. Sobre esto volveremos en la Sección 6.

3.4. *"Sistema de Coordenadas"*

Otro mérito de Cavalieri se plasma en un sistema para ubicar los puntos de una figura. Para ello introduce otra colección conformada por "todos los infinitos puntos" que cumplen cierta condición:

> III. Si dos líneas rectas encuentran internamente planos tangentes opuestos —la una perpendicularmente, la otra oblicuamente—, los puntos de la intersección de la línea recta dada incidente perpendicularmente sobre los planos individuales —que tomados juntos se llaman "todos los planos" (prolongados para que puedan tocar la recta)—, o sea, los puntos que son intersección de ella y los planos móviles, generados en todo el movimiento, tomados juntos se llaman "todos los puntos de tránsito recto" […] (Cavalieri, 1653; *Liber secvndvs, Definitiones III.*).

Cavalieri no usa "números reales" sino puntos. Su estilo euclidiano lo obligaba a considerar únicamente propiedades y variaciones geométricas. Esta restricción es voluntaria y evidencia su gran fuerza de voluntad, pues estaba al tanto de los logros del Álgebra renacentista, como lo deja ver en la *Exercitatio quarta* (Cavalieri; 1647, p. 283 y ss.), donde acepta los métodos algebraicos de Beaugrand.

Volviendo a la Definición III, la relación con las coordenadas cartesianas es clara. La Figura 2 esboza estas nociones.

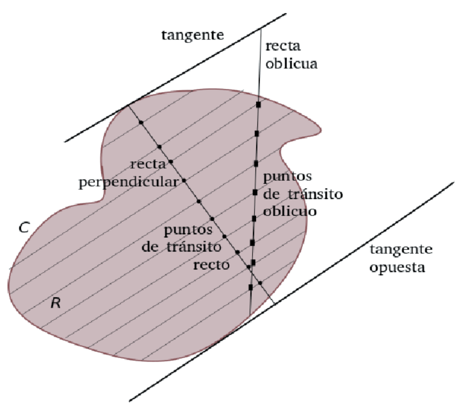


Figura 2. Recta perpendicular y oblicua con sus puntos de tránsito (elaboración propia)

Hasta ahora todo parece normal para un lector contemporáneo. La sorpresa se presenta con la manera de ubicar los puntos en las rectas:

> IV. Si tomamos los segmentos comprendidos entre uno de los extremos de la línea recta dada y los puntos individuales, que juntos se llaman "todos los puntos de tránsito recto u oblicuo de ella"; tales líneas, tomadas juntas, se llaman "todas las abscisas del segmento dado" […]
>
> V. […], los segmentos rectos, situados sobre la línea dada de la definición antecedente, comprendidos entre los mismos puntos y el extremo restante, se llaman los "residuos de todas las abscisas" de la línea dada […]
>
> VI. Si por una cualquiera de aquellos segmentos, que se llaman todas las abscisas del segmento dado (segmento completo o total), se imagina tomada una vez el mismo segmento dado o uno igual a él, tales segmentos tomados juntos se llaman "las máximas de todas las abscisas" de la línea dada; o bien, se sobreentenderá siempre que sean las máximas de todas ellas, […] se dirá simplemente las "máximas de las abscisas". (Cavalieri, 1653; *Liber secvndvs, Definitiones IV, V & VVI.*).

Estas definiciones desconciertan, pero luego se revelan como evidentes y naturales. El punto se mueve de un extremo del segmento al otro y, en cada instante, se toman tres piezas de información: el segmento ya recorrido o abscisa, el segmento que falta recorrer o residuo y el segmento total que se alcanza al final del recorrido. La Figura 3 ilustra esta asignación para dos instantes dados.

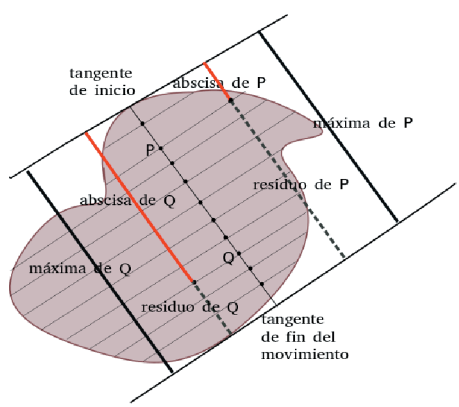


Figura 3. Abscisas, residuos y máximas de los puntos de tránsito (recto) *P* y *Q* (elaboración propia)

Abscissa, del verbo *abscindo*, quitar, denota la parte que se quita. Lo que queda es el *residuus.* Lo que se toma y lo que queda solamente cobran sentido cuando se explicita el todo o *maxima*. El uso de este superlativo es natural para la mente matemática contemporánea, puesto que evoca algunos hechos básicos de la Topología. El segmento considerado también es un compacto y se recorre según una función continua. Por lo tanto, dicha función es acotada y admite un valor mínimo y un valor máximo. *Cf.* Hairer y Wanner (1996; p. 206, *Theorem 3.6*).

Claro está, hablar de valores extremos, solamente tendría sentido en el marco de "una relación de orden".

La Definición VI va seguida de la observación sobre las correspondencias biunívocas de la subsección 3.2.

3.5. *Parejas de elementos*

En la Definición VII, "se asigna" un segmento cualquiera a una abscisa.

> VII. Si a cada una de las abscisas de la línea recta dada se imagina juntado otro segmento igual a un segmento dado, las compuestas de todas las abscisas y los segmentos adjuntos, tomadas juntas, se llamarán "todas las abscisas de tal segmento adjunto dado" [...] (Cavalieri, 1653; *Liber Secvundvs, Definitiones VII.*).

La naturaleza del segmento que se adjunta a cada abscisa no se explica. En este punto es inevitable no evocar las figuras bidimensionales de Nicolás de Oresme en *De configurationibus qualitatum et motuum*: un segmento representa la intensidad de una cualidad y el otro segmento representa la extensión de un cuerpo (Clagett, 1968). De otro lado, los segmentos adjuntos son arbitrarios, de cualquier tamaño. Se podría pensar en tomar uno distinto para cada punto de tránsito y así, construir una figura (como una "aplicación"). Esto, empero, no está en Cavalieri. Lo único que se dice allí es que se asigna el mismo segmento, digamos *AB*, a cada punto punto de tránsito, como en la Figura 4. Esta figura no aparece en Cavalieri y solamente pretende explicar sus palabras. En favor de esta interpretación se tiene el testimonio de Mengoli (1659), alumno de Cavalieri, quien usó representaciones similares. No es claro lo que Cavalieri entendía por adjunción de un segmento a otro.

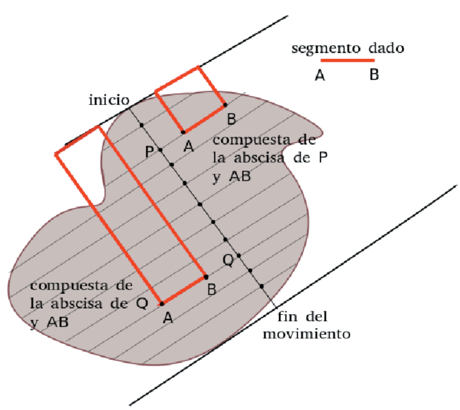


Figura 4. Segmento adjunto *AB* compuesto con las abscisas de *P* y *Q* (elaboración propia)

Con esto se concluye la descripción de las regiones del Libro II. Cavalieri no habla de “ordenadas”, ni siquiera utiliza esta palabra.

3.6. *Congruencias*

Cavalieri conoce a Euclides, Apolonio y Arquímedes y lo deja saber desde el Prefacio de su obra. Sabía, entre otras cosas, que habían figuras congruentes y semejantes. En varias ocasiones, se vale de “figuras libres” que acomoda en posiciones adecuadas a sus propósitos particulares. Por ejemplo, en la Definición VIII. A. (subsección 3.7) explica la manera de poner juntas a ciertas figuras semejantes entre sí sobre una figura dada. También, más adelante, para la demostración del Teorema I, compara dos figuras dibujándolas sobre una *regula* común. Tal proceder sólo se justifica comprendiendo que Cavalieri era consciente de lo que hoy conocemos como invarianza bajo los movimientos euclidianos.

Ahora, cuando se trata de permutar los segmentos, todo indica que Cavalieri no alcanza a imaginarse todas las permutaciones de los puntos de un segmento, un proceder que le conduciría a aceptar figuras “muy raras”. Es más admisible creer que él considerara solamente las permutaciones de los segmentos que resultan de los movimientos euclidianos, o sea, de reflejar las figuras sobre una o varias rectas dadas cualesquiera (Kunz, 1976).

3.7. *Semejanzas*

Para ilustrar lo anterior, se analiza la definición A VIII del Libro II, referente a la construcción de ciertos sólidos. Es interesante ver cómo se las ingenia para levantar figuras semejantes sobre una región plana:

> A. VIII. Dada una figura plana cualquiera y trazada —de algún modo— en ella un segmento recto con sus dos extremos sobre el contorno, si se concibe que dicho segmento recto describe una figura plana cualquiera, que no yace en el plano de la figura dada y si comprendemos así que el resto de tales segmentos, que hemos llamado “todas las líneas” de la figura dada, tomadas con referencia a una línea trazada, […] describen figuras planas semejantes, ubicadas propia y paralelamente a aquella descrita antes, de modo que todas los segmentos que se describen sean segmentos homólogos de la figura descrita, entonces todas las figuras descritas tomadas juntas se llamarán “todas las figuras planas semejantes de la tal figura dada” [...] (Cavalieri, 1653; *Liber Secvundvs, Definitiones A. VIII.*).

La figura levantada, digamos un cuadrado, se copia por semejanza sobre todos los indivisibles de la original. La Figura 5 ilustra esta situación.

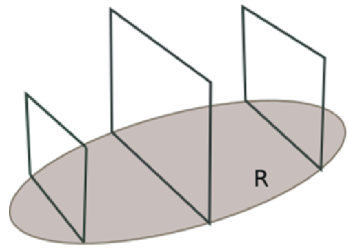


Figura 5. Cuadrados levantados sobre una figura base *R* (elaboración propia).

Hoy se dice que los cuadrados cambian "suavemente" sobre la figura debido a las hipótesis impuestas sobre la región *R*. Esta construcción inspiró a otros pensadores de los indivisibles del siglo XVII. Por ejemplo, el concepto pascaliano de *onglet*, cuña, pestaña, (Pascal, 1658; *Traité des trilignes rectangles, & de leurs onglets*) está estrechamente relacionado con esta noción de Cavalieri.

3.8. *Postulado*

En su estilo euclidiano, Cavalieri presenta los postulados después de las definiciones. Mientras que las definiciones contienen verdades "evidentes" sobre el continuo, los postulados expresan verdades menos obvias. Ellas convienen con la construcción lógica de la teoría y son el fruto de una profunda meditación sobre la organización del tratado. Como aquí interesan sólo las regiones planas, basta con el primero de los postulados:

> POSTULADOS. I. Todas las líneas de figuras planas congruentes, tomadas con respecto a una referencia o *regula* común, son congruentes […] (Cavalieri, 1653; *Liber Secvundvs, Postulata I.*).

O sea: "si dos figuras planas son congruentes, entonces sus colecciones de segmentos indivisibles son congruentes". La intención de Cavalieri es manifiesta. En lo que sigue, ha de demostrarse el recíproco de este postulado: si los indivisibles de dos figuras planas son congruentes (bajo cierta biyección), entonces las figuras mismas son congruentes. Además de la pertinencia estratégica de este postulado, se observa que es inmediato a la luz del espíritu geométrico griego:

> Il significato del Postulado I viene spiegato molto chiaramente da B. C. nel capitolo VII dell'Esercitazione IV – Contro Guldino (cf. Appendice II). Quando due figure sovrapponibili (congruenti) si sovrappongono di fatto, ciascuna delle linee della prima figura que vengo dette tutte le linee (rispetto a una determinata regula) si sovrappone ad una, e ad una soltanto, delle linee che vengono dette tutte le linee della seconda figura, presa come riferimento

> la linea sulla quale va ad adagiarsi la regula sopra detta [...] (Lombardo-Radice; 1966, p. 200, nota al pie).

De nuevo, llama la atención el uso de los movimientos euclidianos. Este postulado marca el fin de las suposiciones sobre los indivisibles. Lo que sigue tiene que ver con las verdades que se demuestran a partir de ellas.

4. Teorema I, Libro II

Queda por precisar una noción práctica de *omnes lineae*, que sirva para determinar el “área de una región plana”. La primera tarea de Cavalieri consiste en demostrar que las *omnes lineae* son magnitudes o números, si se quiere.

El Teorema I del Libro II dice: “Todas las líneas en un tránsito recto de figuras planas cualesquiera [...] son magnitudes que guardan proporción entre sí” (Cavalieri; 1653, p. 108 y ss.). Lo importante es que a cada región plana se le asigna una magnitud y dos magnitudes se pueden poner en proporción. A cada región *R* se le puede asignar un número real y Cavalieri no puede percatarse que los siglos van a esculpir estos asuntos como una teoría de la medida y la integración, *cf.* Jones (2001). No obstante, las ideas fundamentales están ya presentes en la *Geometria* y se asemejan mucho a la construcción de área que se hacía en algunos textos de Geometría Euclidiana a finales del siglo XIX y comienzos de XX:

> 136°. Def. I. — The area of a plane closed figure is the portion of the plane within the figure, this portion being considered with respecto to its extend only, and wihout respect to form.
>
> A closed figure of any form may contain an area of any given extent, and closed figures of different forms may contain areas of the same extent, or equal areas. […]
>
> 137°. Areas are compared by superposition. (Dupuis; 1914, p. 91).

En la popular *Wentworth’s Plane Geometry*, se usa cierta «unidad de superficie» y el área se mide con dichas «unidades» (Wentworth y Smith; 1910, p. 191). Cavalieri solamente cuenta con *omnes lineae* y debe llenar el espacio plano con ellas. A continuación revisamos los pasos de su demostración, contenida en las páginas 108 a 111 de la *Geometria*.

Se parte de dos figuras planas cualesquiera *EAG* y *GOQ*, levantadas sobre una *regula* común *EGQ*, sobre bases respectivas *EG* y *GQ* y alturas respectivas *AR* y *OP*. Las dos figuras se han dispuesto una junto a la otra, tocándose en el punto *G*. Esto supone algunos movimientos previos de las figuras. La Figura 6 bosqueja la situación.

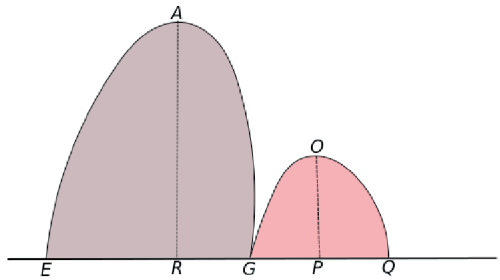


Figura 6. Figuras de partida
(elaboración propia)

Luego se consideran los indivisibles de *EAG* y *GOQ*, paralelos a *EGQ*. Pueden suceder dos casos: *AR* y *OP* son iguales, o bien, distintos. Cuando son iguales, la correspondencia biunívoca de las alturas es evidente. Estos dos segmentos se pueden poner en proporción, de acuerdo con la Definición 4 del Libro V de los *Elementos* de Euclides: *Rationem inter se habere magnitudines dicuntur, quae multiplicatae altera alteram superare possunt* (Heiberg; 1884, p. 3).

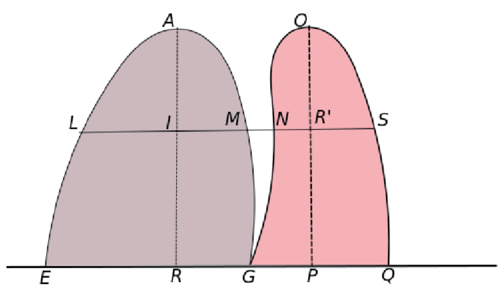


Figura 7. Figuras con igual altura
(elaboración propia)

Después Cavalieri argumenta que lo propio vale globalmente y que una figura se puede «dilatar» hasta superar a la otra. Andersen (1985) ha reconocido que Cavalieri se apoya en *rather loose considerations [...] he did not perceive the problem of finding a maximum of those infinitely many n's [...] even if he had seen it, he would have had no way to establish the existence of that maximum.* (Andersen; 1985, p. 318). De alguna manera, Cavalieri llegó a una conclusión correcta para su posteridad: todas las líneas de una figura se vuelven mayores que todas las líneas de la otra figura aún cuando no sabía nada de funciones continuas que toman valores reales en un compacto. El factor es el máximo de las proporciones de *LM* en *NS* (Figura 7), o viceversa, tomadas sobre todos los puntos *I* y *R*' en las alturas.

Cuando las alturas son distintas, como en la Figura 8, la parte de *EAG* con altura mayor a *OP*, o sea *ABD*, se corta y pone aparte sobre la *regula* con el nombre *HFE*. Cavalieri sabe que el proceso debe culminar en finitos pasos (compacidad junto con la propiedad arquimediana de los reales). Considera el caso en que *AR* es igual a $CR = OP$ más *AC*, con *AC* menor que *OP*. Las magnitudes proporcionales están garantizadas para *EBDG* y *GOQ* porque tienen la misma altura. Para lo que falta, el segmento *NS* (respectivamente *YT*) y el segmento suma $YT + LM > YT$ (respectivamente $LM + NS > NS$) son magnitudes euclidianas. Lo propio para *NS* y *YT*. Esto vale hasta la paralela a la *regula* por *F*. El resto de los indivisibles son del tipo *LM* y *NS*, los cuales ya están resueltos. Enseguida se pasa de lo individual a lo global como antes. Es ingenioso que Cavalieri haya puesto a *EAG* entre *FHE* y *GOQ*, para evitar la ausencia de segmentos de *FHE* por encima de *F*.

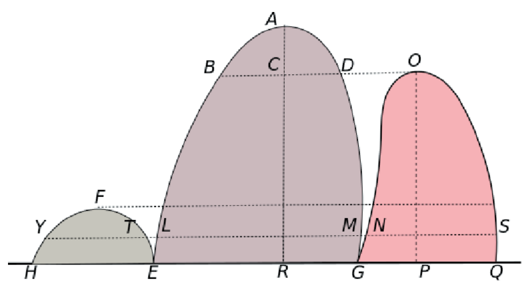


Figura 8. Figuras con alturas distintas (elaboración propia)

Los dibujos insinúan que Cavalieri ha ordenado los indivisibles. Por ejemplo, *EG* es mayor que *BD* en *EAG* y *GQ* es mayor o igual que *NS* en *GOQ*. Bajo tal suposición, las demostraciones se simplificarían grandemente. Quizás nunca se sabrá si Cavalieri tuvo la osadía de ordenar los indivisibles de las figuras, una audacia suprema que supone cierta intuición de las aplicaciones continuas.

5. Otros teoremas

Al ser magnitudes, los *omnes lineae* deberían verificar los teoremas sobre proporciones de Euclides. En especial, la Proposición 1 del Libro VI de los Elementos: *Trianguli et parallelogramma sub eadem altitudine posita eandem inter se rationem habent ac bases.* (Heiberg; 1884, p. 73). Para Euclides no hay una noción medianera entre figura y “área”. Para Cavalieri, de otro lado, los *omnes* *lineae* son una propiedad "numérica" de las figuras. Así, estas colecciones se deben considerar como una noción de área de la figura. Esto posibilita el sentido preciso del "Teorema II. Todas las líneas (segmentos) de figuras planas iguales son iguales, […] tomando una referencia cualquiera". (Cavalieri; 1653, p.112). Si dos figuras planas son iguales en el sentido euclidiano, entonces sus colecciones de segmentos (magnitudes) también son iguales. Este hecho es independiente de la elección particular de la *regula*. La demostración se ilustra en la Figura 9.

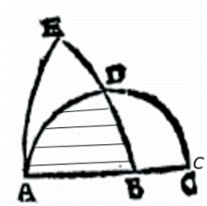


Figura 9. Dibujo de Cavalieri (1653, p.112) para el Teorema II. Los segmentos en *ABD* y la letra *C* son de elaboración propia

Claramente, *ADC* y *AEB* están formadas por puntos distintos. Pero son iguales en el sentido griego porque tienen igual área. La demostración se basa en la superposición de las figuras. Ellas se intersecan en la región *ABD*, donde se han trazado algunos indivisibles, que no aparecen en el original. Luego, se repite el proceso superponiendo las partes restantes *AED* y *BDC*. El proceso termina y la igualdad euclidiana de las figuras garantiza que las magnitudes son iguales.

Estos resultados completan el ciclo de implicaciones que abrió el postulado (subsección 3.8): si dos figuras son congruentes, entonces son iguales en el sentido euclidiano (tienen la misma área). Por lo tanto, sus colecciones de indivisibles son iguales como magnitudes, lo cual provee una noción de congruencia para las *omnes lineae*. Sin embargo, esto último no aparece en Cavalieri. Bien lo ha detectado Andersen (1985, p. 316):

> *In Geometria CAVALIERI took it for granted that his readers would understand what he meant by congruent collections of lines, but in Exercitationes (pp. 200-201) he added an explanation: When two congruent figures, F1 and F2, are placed so that they coincide, then each line in OF1(l) will coincide with exactly one line in OF2(l) (and vice versa), and the collections of lines are called congruent.* (Andersen; 1985, p. 316).

Con esta noción de congruencia, dos figuras planas son congruentes si y sólo si sus *omnes lineae* son congruentes.

El siguiente paso es considerar figuras cualesquiera: "Teorema III. Las figuras planas guardan entre sí la misma proporción que todas sus líneas referidas a una *regula* cualquiera [...]" (Cavalieri; 1653, p.113). Si dos figuras guardan una proporción en el sentido euclidiano (sus áreas guardan tal proporción), entonces sus colecciones de indivisibles guardan la misma proporción. Para la prueba, Cavalieri (1653, p. 113 y ss.) usa copias repetidas de las figuras. Lo más interesante es que elabora dos demostraciones: una suponiendo que el continuo está formado por indivisibles y otra sin suponerlo. La demostración más fácil usa la hipótesis de los indivisibles como constituyentes del continuo. Para Cavalieri, solamente una de las dos teorías sería válida, pues sus axiomas son contradictorios. Como para Euclides, los axiomas son verdades absolutas sobre la naturaleza del ser y no, como para nosotros, simples juicios sintéticos *a priori*. No deja de ser interesante notar el ajedrez que conlleva el cambio de los axiomas de una teoría. Con este teorema la teoría arranca de verdad:

> "Corolario. […], para encontrar la proporción que guardan entre sí dos figuras planas […] es suficiente determinar la proporción que […] guardan entre sí todas sus líneas […] con respecto a una *regula* cualquiera, hecho que pongo como máximo fundamento de mi nueva Geometría." (Cavalieri; 1653, p.115).

6. El método

La aplicabilidad de los teoremas reposa en las biyecciones de los segmentos:

> Teorema IV. Si dos figuras planas se levantan con la misma altura y si, además, se trazan líneas rectas cualesquiera, paralelas entre ellas, con respecto a las cuales se toma la susodicha altura, se encontrará que las porciones de las líneas trazadas que cortan las figuras planas son magnitudes proporcionales, que siempre existen como homólogas o correspondientes en su propia figura. Además, las dichas figuras guardarán entre sí la proporción que haya entre uno cualquiera de los antecedentes con el consecuente que le corresponde en la otra figura. (Cavalieri; 1653, p. 115).

Este teorema constituye el "principio de Cavalieri". En algunos libros de texto contemporáneos este nombre se refiere a resultados similares sobre integrales, *cf. e. g.* Marsden y Tromba (1988, p. 306).

La analogía con los *Elementos* es patente. La redacción es prácticamente idéntica. Ya se vio que Euclides pone dos triángulos o paralelogramos *sub eadem altitudine*. Cavalieri habla de dos "figuras cualesquiera" que se disponen *in eadem altitudine*. Para Euclides, las bases de los triángulos o paralelogramos deciden la proporción de las figuras. Para Cavalieri, el asunto es más difícil puesto que sus figuras no tienen una base reconocible. De todos modos, busca determinar la proporción de las figuras ayudándose con los indivisibles. Su intención es generalizar a Euclides.

Andersen (1985) analiza el teorema con base en una “traducción libre” y simple: *If two plane figures have equal altitudes, and if sections made by lines parallel to the bases and at equal distances from them are always in the same ratio, then the plane figures also are in this ratio.* (Boyer; 1968, p. 362). Se trata de un resumen de Boyer sobre una traducción de Smith (1929, p. 605 y ss.) para el primer teorema del Libro VII de la *Geometria*. Se percibe que se han perdido algunos aspectos importantes del original cavaleriano, sobre todo la enigmática frase *homologis in eadem figura semper existentibus*, que el grupo de edición de Lombardo-Radice (1966) ha traducido por *esistendo sempre [linee] corrispondenti*. Se habla, pues, de segmentos homólogos o correspondientes que existen siempre y tienen magnitudes proporcionales. ¿Qué son magnitudes homólogas? La respuesta está naturalmente en Euclides. La homología tiene que ver con cuatro magnitudes “continuamente” proporcionales: el antecedente de una es al otro antecedente como el consecuente de la primera es al otro consecuente. Tal es la Definición XI del Libro V de los Elementos: *Respondentes magnitudines dicuntur praecedentes praecedentibus, sequentes sequentibus*. (Heiberg; 1884, p. 5).[3] Tales magnitudes también se dicen homólogas, pues el adjetivo *respondentes* es traducción del griego *ὁμόλογα* (Heiberg; 1884, p. 4). ¿Qué significa la existencia de estas magnitudes? Pues lo que quiere decir desde siempre en matemáticas, o en lógica: que es posible encontrar tales segmentos.

En la Figura 10 tomada de Cavalieri. Las figuras, de igual altura *MC* son *CAM* y *CME*. Si aceptamos la interpretación simplificada de Smith-Boyer-Andersen, todo fluye sin complicaciones. La figura *CAM* es a la figura *CME*, como *BR* es a *RD*, o como *AM* es a *ME*: así como uno de los antecedentes es a un consecuente, así todos los antecedentes son a todos los consecuentes (Proposición 12 del Libro V, *Elementos*). Cavalieri se da cuenta de que su interpretación de Euclides es bastante osada, pues se aplica a colecciones formadas por infinitos indivisibles.

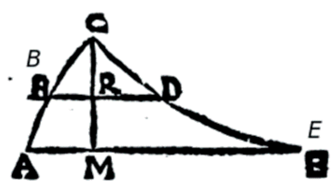


Figura 10. Dibujo de Cavalieri (1653, p.112) para el Teorema IV. Las letras *B* y *E* son de elaboración propia

[3] Estas magnitudes se llaman correspondientes: el antecedente al antecedente y el consecuente al consecuente.

Andersen no queda satisfecha con la Figura 10: *In making the figure Cavalieri was not aware that the assumption (V.3) implies that the curves ABC and ECD have similar curvature at corresponding points.* (1985, p. 316, Fig. V.1). La suposición (V.3) declara que *BR*: *RD*:: *AM*: *ME*.

La interpretación de Boyer-Andersen es adecuada para entender la demostración de Cavalieri y las proposiciones que siguen. Empero, el dibujo y la redacción suscitan otras ideas interesantes. Sobre todo, el asunto de la existencia de los segmentos homólogos. Ellos evocan el teorema del valor medio para integrales: si f es continua en $[a, b]$, entonces existe un c en $[a, b]$ tal que

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)\,(b-a)$$

Cf. Hairer y Wanner (1996, p. 227). Cavalieri busca cuatro magnitudes homólogas. De allí proviene el reproche de Andersen sobre las curvaturas de la Figura 10. Hoy por hoy, la existencia de dos segmentos que guardan una proporción igual a la de las figuras está garantizada. Para la figura *CMA*, descrita por una función f, se tendría un c; para *CME*, descrita por g, un d. Entonces, *CMA: CME::* $f(c) : g(d)$. Los indivisibles *BR* y *RD* no estarían a la misma altura.

La invocación de este teorema no es exótica, pues su intuición había flotado en Europa durante siglos. Basta recordar la regla de Merton sobre la velocidad media y sus reelaboraciones en Oresme y Cusa (Boyer; 1959, pp.79-89): (Edwards; 1979, p. 86-90); (Clagett; 1968, pp. 466-467). El valor medio contiene otro de los signos que esparcía el fuego metafórico del continuo en los días de Cavalieri.

El "principio de Cavalieri" sirve para estudiar muchas figuras geométricas. Baste aquí con recordar que "Si se traza una diagonal (diámetro) de un paralelogramo, entonces el paralelogramo es el doble de cualquiera de los triángulos formados por dicha diagonal." (Cavalieri; 1653, p. 140). La demostración consiste en establecer una biyección entre los segmentos de los dos triángulos determinados por la diagonal. Otra aplicación se puede leer en el Libro III, donde se estudia la teoría del círculo y la elipse. Esta vez la biyección entre los segmentos de un círculo y una elipse es evidente cuando se entiende que una elipse se obtiene dilatando el círculo en la dirección de un eje, mientras que en el eje perpendicular nada cambia.

7. Claridad y oscuridad de los indivisibles

Durante el siglo XVII los indivisibles fueron tachados de difíciles por los que no entendían las matemáticas (Tamayo, 2018, p. 49). Pero los matemáticos sí recibieron el mensaje. Entre ellos se cuentan a: Angeli, Daviso, Mengoli, Torricelli, Fabry y Renaldinus (Andersen, 1985, p. 335). Incluso Guldino, el gran enemigo intelectual de Cavalieri, los entendió, así le pareciesen falsos. Ciertamente, Newton y Leibniz los comprendieron.

Pero algo sucedió en el siglo XVIII. De repente, nadie entendió a los indivisibles. La leyenda negra llegó hasta nuestros días. Koyré (1978, p. 320 y ss.), Andersen (1985) y hasta el certero Boyer (1941, p, 85) aceptan la oscuridad de Cavalieri. Aquí se deja de lado esta costumbre: las secciones anteriores muestran un pensamiento matemático comprensible, aunque lleno de nociones que buscan todavía su significado. Lejos de lo que pudo haber sido y no fue, es hora de regresar al siglo XVII y redescubrir, al lado de sus contemporáneos del maestro, la claridad auténtica de los indivisibles.

Se debe asimismo abandonar el embeleco de que el latín de Cavalieri es enredado. Salvo por la primera oración gramatical de la *Geometria*, en la cual aparece una famosa metáfora sobre el oso y la miel (Tamayo, 2018, pp. 63-65), el latín del maestro no ofrece mayor problema. Se le da la razón a sus traductores italianos: *Il latino de fra Buonaventura ci è sembrato assai buono, migliore di quello di un Keplero o di un Guldino, senz'altro paragonabile a quello di Galilei [...]* (Lombardo-Radice, 1966, p. 45, nota al pie).

8. A modo de conclusión

La epistemología internalista y tradicional de las matemáticas propone dos razones para explicar la dificultad de comunicar los indivisibles cavalerianos:

- un continuo no puede estar formado por indivisibles (Guldino),
- los indivisibles no son homogéneos con el área (como sí lo son los infinitesimales), es decir no pueden explicar las áreas porque ellos no son áreas.

Tales razones pierden fuerza por las matemáticas mismas. La Teoría de Conjuntos provee ejemplos de continuos compuestos por "indivisibles" y los infinitesimales de Leibniz tampoco constituyen una teoría acabada. En verdad, se tuvo que esperar a la formalización de Robinson (1966) para que los infinitesimales obtuviesen su carta de ciudadanía matemática.

La visión material de las matemáticas aporta explicaciones más sencillas y evidentes: la dificultad de los indivisibles yace en los significantes y no en su significado. Los críticos de Cavalieri reconocen el mérito de su teoría porque da razón de lo infinito-continuo. Lo que no gusta es la manera de presentarla. Cavalieri se apegó a la tradición milenaria de la geometría griega en un tiempo en que los hombres hablaban un lenguaje matemático distinto. El desprecio consciente del Álgebra es la característica central de sus símbolos. Las muletillas euclidianas ya habían pasado de moda. La Geometría ya no era griega y antigua; sino moderna y cartesiana. Lombardo-Radice (1966, p. 20) lo ha dicho bien: *la Geometria nuova di Cavalieri è scritta in latino, come lingua: e scritta al modo classico, greco, come costruzione.*

La búsqueda de los símbolos aleja al historiador de la actitud que descalifica a Cavalieri como un "autor menor". Tampoco puede considerarse como un estudiante de Cálculo, al cual se le muestran los errores. La historia oficial de las matemáticas debería revisar algunas suposiciones y métodos. En particular, debería aprender a diferenciar el rigor del formalismo.

En este artículo se ha mostrado que el método de los indivisibles cavalerianos contiene muchos resultados que son válidos para las matemáticas de hoy. Sin embargo, uno puede cavar un poco más adentro para caer en la cuenta de que el valor y la verdad de estos resultados no necesita de las matemáticas posteriores. El conjunto de definiciones, postulados, lemas, teoremas y escolios constituye un sistema, es decir, un conjunto de proposiciones cuidadosamente enlazadas entre sí que pretende explicar el continuo moderno-europeo, quizás por primera vez. Este sistema se sostiene por sí mismo y por la Geometría Euclidiana. Es bien conocido entre los historiadores de la matemática que los indivisibles fueron mal acogidos por las mayorías; pero apreciados y alabados por los grandes pensadores del siglo XVII: Torricelli, Mengoli, Pascal, Roberval, Wallis, entre otros, pero sobre todo por Leibniz y Newton. Éstos dos últimos creyeron y acogieron a los indivisibles, tal como lo han manifestado en varios lugares de sus monumentales obras. Lo que sucedió fue que más tarde en sus vidas los cambiaron por los infinitesimales o por las fluxiones para sintetizar en una sola teoría las cuadraturas ("integrales") y la determinación de las tangentes ("derivadas"). Y aquí está nuestro punto: todos estos grandes matemáticos entendieron los indivisibles (antes de concebir sus nuevas teorías, así los hayan cambiado luego por otro concepto fundamental). Y he aquí nuestro humilde aporte al estudio de estas materias: el análisis histórico de una teoría pasada debe buscar fundamentalmente la reconstrucción del sistema original, mostrando las relaciones entre sus elementos y la forma como las conclusiones se desprenden de las premisas. El análisis de la validez de lo obtenido en las formalizadas matemáticas de hoy debe ser un producto posterior, que, en verdad, no es tan central como se podría creer a primera vista. De esta forma se vería que todas las investigaciones serias contienen su verdad, una verdad explicada a su propia manera. Si nos fijamos en dicha "propia manera" (notaciones y otros elementos de un lenguaje particular), comprenderemos por qué el sistema era claro y sencillo para su autor y para sus contemporáneos. En este sentido, se nos ha desvelado la claridad de Cavaleri. Con este método de trabajo se resolverían favorablemente algunas apreciaciones infortunadas que comenten algunos historiadores de las matemáticas, los cuales identifican la epistemología de las matemáticas con el estado actual de las matemáticas. Si podemos distinguir las diferencias entre estas dos disciplinas ya no se cometería más el error de hablar de "conceptos epistemológicamente correctos", pues todos los conceptos de un autor, que han sido aceptados por toda una comunidad científica en cierto momento de la historia, son simplemente "correctos". Aún más, son piezas clave para entender los cambios posteriores de las matemáticas. En particular, si nos fijamos bien, los indivisibles del siglo XVII han legado a la posteridad los problemas centrales del Análisis matemático contemporáneo: el continuo, la medida, la integración, entre otros. Algunos de estos conceptos no se han entendido todavía a cabalidad y los próximos siglos —muy seguramente— verán como ellos devienen en otros, más aceptables para los matemáticos del futuro.

Reconocimientos

Este proyecto fue financiado por la Vicerrectoría de Investigaciones de la Universidad de Medellín y la oficina de Investigaciones de la Universidad del Tolima.

Referencias bibliográficas

Andersen, K. (1985). Cavalieri's Method of Indivisibles. *Archive for the History of Exact Sciences*, 31, 291-367.

Assis, A. K. T. y Magnaghi, C. P. (2012). *The Ilustrated Method of Archimedes: Utilizing the Law of the Lever to Calculate Areas, Volumes, and Centers of Gravity.* Montreal: Apeiron.

Berkeley, G. (1734). The Analyst; or a Discourse Addressed to an Infidel Mathematician […] Londres: Printed for J. Tonson in the Strand.

Boyer, C. (1959). *The History of the Calculus and its Conceptual Development*. New York: Dover.

Boyer, C. (1968). *A History of Mathematics*. New York: John Wiley & Sons.

Brunschvicg, L. (1912). *Les étapes de la philosophie mathématique*. París: Librairie Félix Alcan.

Cavalieri, B. (1647). *Exercitationes geometricae sex*. Bolonia: Typis Iacobi Montij.

Cavalieri, B. (1653*). Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota*. Bolonia: Ex Typographia de Lucijs.

Clagett, M. (Ed.). (1968). *Nicole Oresme and the Medieval Geometry of Qualities and Motions*. Madison: The University of Wisconsin Press.

Do Carmo, M. P. (1976). *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall Inc.

Dupuis, N. F. (1914). *Elementary Synthetic Geometry of the Point, Line and Circle in the Plane*. London: MacMillan & Co., Ltd.

Edwards, C. H. (1979). *The Historical Development of the Calculus*. New York: Springer.

Hairer, E. y Wanner, G. (1996). *Analysis by Its History*. New York: Springer.

Hall, A. R. (2002). *Philosophers at War. The Quarrel between Newton and Leibniz*. Cambridge: Cambridge University Press.

Heath, T. L. (1912). *The Method of Archimedes*. Cambridge: Cambridge University Press.

Heiberg, J. L. y Menge H. (Eds.) (MDCCCLXXXIV). *Euclidis Opera Omnia*. *Vol. II. Libros V-IX continens*. Lipsiae: in aedibus B. G. Teubneri.

Heiberg, J. L. (1907). Eine neue Archimedeshandschrift. *Hermes : Zeitschrift für klassische Philologie*, *42* (2), 235-303.

Heiberg, J. L. (Trad.) (1909). *Geometric Solutions Derived from Mechanics*. A Treatise of Archimedes. Chicago: The Open Court Publishing Company.

Jones, F. (2001). *Lebesgue Integration on Euclidean Space*. Sudbury, Massachusetts: Jones and Bartlett Publishers.

Koyré, A. (1978). *Estudios de historia del pensamiento científico* (E. Pérez y E. Bustos, Trans). México: Siglo veintiuno editores. (Obra original publicada en 1973).

Kunz, E. (1976). *Ebene Geometrie. Axiomatische Begründung der euklidischen und nichteuklidischen Geometrie*. Hamburg: ro ro ro vieweg.

Lakatos, I. (1978). *Mathematics, Science and Epistemology-Philosophical Papers*. Volume 2. Cambridge: Cambridge University Press.

Leibniz, G. W. (1956). Studies in Physics and the Nature of Body, 1671. En L. E. Loemker. (Ed.), *Philosophical Papers and Letters* (139-145). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers. (Obra original publicada en 1671).

Lombardo-Radice, L. (Ed.). (1966). *Geometria degli indivisibili di Bonaventura Cavalieri*. Turín: Unione Tipografico-Editrice Torinese.

Marsden, J. E. y Tromba, A. J. (1988). *Vector Calculus. Third Edition*. New York: W. H. Freeman and Company.

Mengoli, P. (1659). *Geometriae speciosae elementa*. Bolonia: Typis Io. Baptistae Ferronij.

Newton, I. (1687). *Philosophia naturalis principia mathematica*. Londres: Jussu Societatis Regiae ac Typis Josephi Streater.

Pascal, B. (1658). *Lettres de A. Dettonville* […] París.

Porée, M. (2000). La «méthode Serres». *Sillages critiques 1.* Online since 11.01.2013, connection on 04.04.2019. http://journals.openedition.org/sillagescritiques/3155

Radford, L. (2008, julio). Semiotic Reflections on Medieval and Contemporary Graphic Representations of Motion. Ponencia presentada en la *History and Pedagogy of Mathematics Conference*, México D. F.

Raffo, F. (2016). *Continuo e infinito. Influencias y génesis del tratamiento leibniziano del laberinto del continuo* (Tesis doctoral). Universidad Nacional de La Plata, La Plata, Argentina.

Roberval, G. P. (1693). *Traité des indivisibles*. En Messieurs de l'Académie Royale des Sciences. Divers ouvrages de mathématiques et de physique (190-245). París: L'Imprimerie Royale.

Robinson, A. (1966). *Non-standard Analysis*. Amsterdam: North-Holland Publishing Company.

Smith, D. E. (1929). *A Source Book in Mathematics*. New York: McGraw-Hill Book Company, Inc.

Solère, J. L. (s. f.). *Scotus Geometres*. The longetivity of Duns Scotus's geometric arguments against indivisibilism. https://www2.bc.edu/jeanluc-solere/docs/PAPERS/Solere_Scotus%20Geometres%202.pdf, Recuperado 21.03.2019.

Tamayo, A. C. (2018). *Escenas de la representación matemática de los indivisibles en el siglo XVII* (Tesis doctoral no publicada). Universidad Nacional de Colombia, Medellín, Colombia.

Torricelli, E. (1969). *On the Acute Hyperbolic Solid*. En D. J. Struik. A Source Book in Mathematics, 1200-1800 (227-232). Princeton: Princeton University Press. (Obra original publicada ca. 1643).

Wentworth, G. y Smith, D. E. (Revs.) (1910). *Wentworth's Plane Geometry*. Boston: Ginn and Company.

Autores

Leonardo Solanilla Chavarro. Universidad del Tolima. Colombia. leonsolc@ut.edu.co

Ana Celi Tamayo Acevedo. Universidad de Medellín. Colombia. actamayo@udem.edu.co

Karla Sepúlveda Obreque, Javier Lezama Andalón

EPISTEMOLOGÍA DE LOS PROFESORES SOBRE EL CONOCIMIENTO MATEMÁTICO ESCOLAR: UN ESTUDIO DE CASO

Teachers´ Epistemology of School Mathematical Knowledge: A Case Study

RESUMEN

Se buscó conocer la epistemología de los profesores sobre el conocimiento matemático escolar. El estudio se enmarcó en la Teoría Socioepistemológica entendiendo la matemática como una actividad humana desde el relativismo epistémico. Este estudio cualitativo utilizó el análisis microscópico para formar categorías y luego analizó dialécticamente esas categorías. El interés investigativo surgió al observar la influencia del eurocentrismo, el mono epistemismo de la escuela y la ausencia de algunos conocimientos en la enseñanza. La epistemología del profesor influye su enseñanza y afecta el modelo escolar como herramienta de cambio o de continuidad social. Los resultados mostraron que los profesores mayoritariamente entienden la matemática como un conocimiento a priori, asignando a la acción humana el rol de descubrirla, interpretarla o formalizarla.

PALABRAS CLAVE:
- *Socioepistemología*
- *Conocimiento matemático escolar*
- *Epistemología del profesor*

ABSTRACT

It was sought to know the epistemology of the teachers on school mathematical knowledge. The study was framed in the Socioepistemological Theory, understanding mathematics as a human activity from epistemic relativism. This qualitative study used microscopic analysis to form categories and then dialectically analyzed those categories. The investigative interest arose when observing the influence of Eurocentrism, the mono epistemism of the school and the absence of some knowledge in teaching. The epistemology of the teacher influences his teaching and affects the school model as a tool for change or social continuity. The results showed that teachers mostly understand mathematics as a priori knowledge, assigning to human action the role of discovering, interpreting or formalizing it.

KEY WORDS:
- *Socioepistemology*
- *Mathematical school knowledge*
- *Teacher epistemology*

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (2021) *24* (2): 177-206.
Recepción: Febrero 13, 2020 / Aceptación: Junio 26, 2021. DOI: 10.12802/relime.21.2423

RESUMO

Procuramos conhecer a epistemologia dos professores sobre o conhecimento matemático escolar. O estudo foi enquadrado na Teoria Socioepistemológica, entendendo a matemática como uma atividade humana a partir do relativismo epistêmico. Este estudo qualitativo usou a análise microscópica para formar categorias e, em seguida, analisou dialeticamente essas categorias. O interesse de investigação surgiu ao observar a influência do eurocentrismo, do mono epistemismo da escola e da ausência de alguns saberes na docência. A epistemologia do professor influencia seu ensino e afeta o modelo escolar como ferramenta de mudança ou continuidade social. Os resultados mostraram que os professores, em sua maioria, entendem a matemática como um conhecimento a priori, atribuindo à ação humana o papel de descobri-la, interpretá-la ou formalizá-la.

PALAVRAS CHAVE:

- *Socioepistemologia*
- *Conhecimento escolar matemático*
- *Epistemologia do profesor*

RÉSUMÉ

Nous avons cherché à connaître l'épistémologie des enseignants sur les savoirs mathématiques scolaires. L'étude a été encadrée dans la théorie socioépistémologique, comprenant les mathématiques comme une activité humaine à partir du relativisme épistémique. Cette étude qualitative a utilisé l'analyse microscopique pour former des catégories, puis a analysé dialectiquement ces catégories. L'intérêt de la recherche est né de l'observation de l'influence de l'eurocentrisme, du mono épistémisme de l'école et de l'absence de certaines connaissances dans l'enseignement. L'épistémologie de l'enseignant influence son enseignement et affecte le modèle scolaire comme outil de changement ou de continuité sociale. Les résultats ont montré que les enseignants appréhendent surtout les mathématiques comme des connaissances a priori, assignant à l'action humaine le rôle de la découvrir, de l'interpréter ou de la formaliser.

MOTS CLÉS:

- *Socioépistémologie*
- *Connaissances scolaires mathématiques*
- *Épistémologie des enseignants*

1. Antecedentes del problema

En la enseñanza de las matemáticas escolares se observan ausencias de ciertos conocimientos. Estas ausencias corresponden a diversos saberes matemáticos que no forman parte del curriculum de la escuela. Los conocimientos matemáticos dejados fuera de la enseñanza escolar, son creaciones de personas y grupos sociales que también quedan excluidos de formar parte del conocimiento oficial escolar.

Podemos observar en la escuela la presencia de una racionalidad mono epistémica del conocimiento que obedece, en parte, a la aceptación de la ciencia moderna como criterio único de verdad. Algunos argumentos que favorecen entender a la ciencia como criterio preferente de verdad ven propiciada su materialización en el eurocentrismo como fenómeno global de dominación. El eurocentrismo es una expresión hegemónica que coloca a Europa como centro de todo. En Quijano (1999) y De Sousa (2010) se describe que los efectos del eurocentrismo se expresan en la exclusión de conocimientos y de las personas y grupos que les dan origen. El eurocentrismo es un producto colonizador que aún persiste y se manifiesta de manera importante en lo que se conoce como colonización cognitiva (De Sousa, 2010).

El mono epistemismo de la institución escolar se expresa en la monoculturalidad del curriculum. La escuela como institución del estado, ha sido entendida para Althusser (1991), como una herramienta de control ideológico del estado sobre las personas y que busca la reproducción de las condiciones sociales de producción. Por otra parte, Berger y Luckman (1986) la entienden como un agente de socialización que provee la cultura que los individuos harán propia. Lo anterior da cuenta de la importancia de la escuela en la vida de las personas y las sociedades. El curriculum como expresión pública de la escuela, ha recreado y desarrollado el mono epistemismo de carácter científico permeando a gran parte de la población con la enseñanza de algunos conocimientos declarados oficiales y excluyendo a muchos otros que no encuentran cabida en el espacio escolar.

Esta situación afecta también a la matemática escolar, que está marcada por la ausencia de muchos conocimientos matemáticos. Por esta razón, se necesita avanzar en la democratización de su enseñanza. Esto es, lograr que se abran espacios para enseñar otras formas de conocer en matemáticas, relativizando las posturas epistémicas de la escuela y el profesorado. Algunos ejemplos de conocimientos ausentes en el curriculum escolar chileno son las construcciones matemáticas de las primeras naciones que habitan hasta hoy el territorio del país. Estos conocimientos intencionalmente ignorados por la escuela están vigentes y son usados por diferentes comunidades y grupos humanos de distintas zonas geográficas del territorio chileno.

Tanto en la institución escolar como en la sociedad toda, la figura del profesorado tiene gran importancia. Su trabajo de enseñanza es decisivo en el proceso antropogénico de los individuos o sujetos sociales. De esta forma, los docentes como agentes de cambio social adquieren relevante interés investigativo. Observamos que hoy predomina una escasa consciencia sobre sus epistemologías propias, así como un desconocimiento generalizado sobre la epistemología del conocimiento escolar. Si se aspira a relativizar las posturas epistemológicas para la democratización de la enseñanza de la matemática escolar, es necesario que profesores y profesoras identifiquen sus posturas epistemológicas individuales a fin de facilitar las modificaciones que fuesen necesarias.

Debido a lo anterior, el objetivo de esta investigación fue analizar la epistemología que manifiestan los profesores sobre el conocimiento matemático escolar. Para eso se trabajó con 75 docentes que se imparten clases a niños entre los 6 y los 15 años de edad, en la Región de la Araucanía en Chile. Este estudio de caso heurístico buscó también aportar a la construcción teórica de la epistemología de los profesores sobre el conocimiento matemático escolar apoyándose en la constatación histórica del conocimiento matemático y la dialectización de la información recogida.

Nuestra búsqueda de la epistemología del profesorado, difiere de la búsqueda de sus creencias. Las creencias son construcciones personales de los individuos que se entienden "como una parte de la dimensión personal, afectiva y emocional, íntimamente ligada a la propia cultura que se manifiesta en el ambiente en el que estamos y en el que configuramos, influyendo, a su vez, en nosotros y en lo que hacemos" (Oliver, 2009, p 63). Se puede hablar de creencias como teorías implícitas que cada persona construye para dar sentido y consistencia a la experiencia cotidiana (Rodrigo, Rodríguez y Marrero, 1993).

Por su parte, la epistemología se refiere a construcciones específicas sobre el conocimiento, tradicionalmente situados en el estudio de la ciencia. Pese a existir epistemologías individuales, estas se entienden desde el posmodernismo, influenciadas por un marco de saber acorde a la determinada "verdad" impuesta desde un poder en cada época (Foucault, 1998). Estos marcos hegemónicos regulatorios de las epistemologías se conocen como *epistemes*. Debido a la existencia de *epistemes*, es de gran dificultad que las personas puedan entender o crear concepciones fuera del marco hegemónico que le asigna cada época. Por lo anterior, el estudio de la epistemología involucra el estudio y consideración de las relaciones ideológicas, de clase y de poder de cada tiempo histórico.

En particular, este estudio se acoge a los principios de la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Desde esta concepción teórica el estudio de la epistemología del conocimiento incorpora el componente de lo social relativizando la aceptación de formas válidas de conocer.

Para el desarrollo de este estudio fue necesario realizar una revisión histórica de la epistemología del conocimiento matemático. Esto se hizo con el propósito de lograr una interpretación integrada de la realidad, entendiendo al conocimiento matemático como parte de un todo histórico y de esta forma construir proposiciones dialécticas para poder analizar la epistemología de los profesores sobre el conocimiento matemático escolar.

1.1. *Epistemología del conocimiento matemático*

Para comenzar, se hace necesario una aproximación al desarrollo histórico de la epistemología del conocimiento matemático desde Pitágoras, Platón, Aristóteles y Euclides; la Modernidad de Leibniz (2007), Kant y Mill; las escuelas de fundamentación de la matemática como los logisitas, formalistas e intuicionistas hasta autores del siglo XX como Wittgenstein (1988), Feyerabend y Lakatos que transitan desde el positivismo clásico hasta el anarquismo epistemológico abriendo cabida a las concepciones metafísicas en las matemáticas.

En esta revisión se evidencia que el conocimiento matemático ha sido motivo de intensas reflexiones a lo largo de la historia. La pugna entre las características de inmutabilidad y universalidad versus las propuestas enriquecidas desde la mecánica cuántica que plantean la imposibilidad de la inmutabilidad en las relaciones de sujeto objeto y por tanto la inconsistencia de cualquier criterio de universalidad, han obligado a los interesados en la materia a adoptar posturas frente a este problema respecto a la esencia de los entes matemáticos.

Una considerable distinción entre las diferentes posturas de pensamiento referidas al conocimiento matemático en la historia, tiene que ver con la idea del apriorismo versus el posteriorisismo. Esto se refiere a entender el conocimiento matemático como algo anterior al hombre y por tanto independiente de él, o entenderlo como un conocimiento posterior al hombre y por tanto dependiente de él. Esta distinción deriva en la comprensión del conocimiento matemático como un cuerpo objetivo de verdades o una construcción subjetiva de saberes.

Una situación que es necesario destacar se refiere a la centración de las teorías. Esto quiere decir, en qué se han centrado principalmente las teorías que se ocupan de estudiar el conocimiento matemático. Mayoritariamente se ha atendido el estudio de los objetos matemáticos. En contraste, la postura teórica de este estudio no tiene su centración en el objeto, sino en el ser humano haciendo matemáticas en contextos específicos, matematizando su entorno, es decir, en el proceso de producción del conocimiento matemático (Cantoral, 2013).

La figura I intenta representar algunas de las principales corrientes que han influido la forma de entender este conocimiento matemático en la historia.

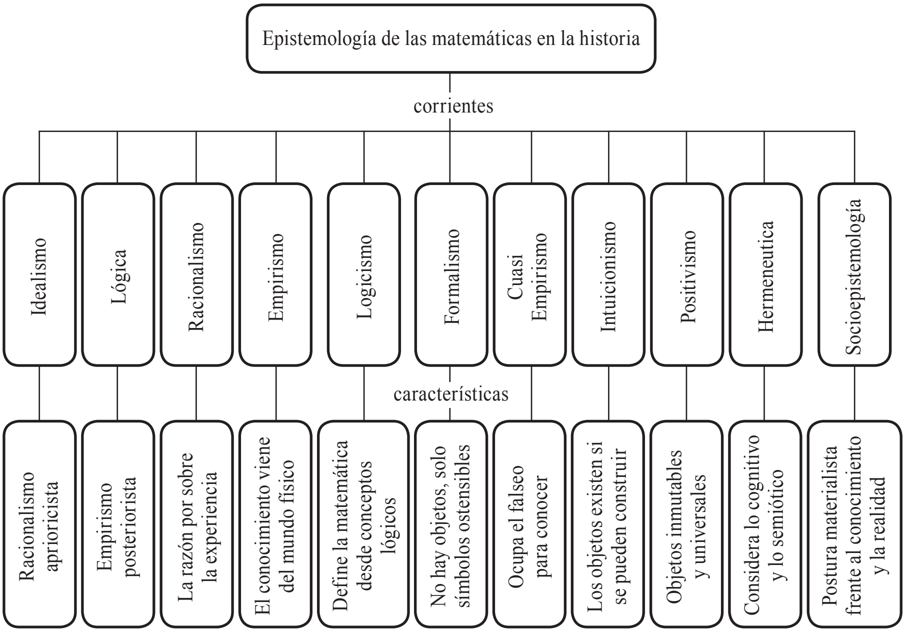


Figura 1. Principales corrientes epistemológicas de las matemáticas en la historia
Fuente: Elaboración propia

En nuestro análisis, hemos identificado que a lo largo de la historia ha predominado una postura epistemológica lógico racional de herencia idealista que encuentra su expresión más desarrollada en el siglo XX en el círculo de Viena. Pese a ciertas diferencias entre las corrientes de pensamiento sobre la matemática, predominan en ellas elementos de universalidad que caracterizan a los objetos matemáticos. La tendencia mono epistemológica con que se ha entendido el conocimiento matemático se puede relacionar con la influencia platónica. En ella, las características ideales de los objetos existen separadas de las situaciones materiales de la realidad sensible. Los objetos matemáticos entendidos como entes habitan en el mundo de las ideas y poseen características universales que no se afectan por el tiempo ni el espacio.

De forma contraria a las ideas idealistas o apriorisistas emergen las corrientes materialistas de la comprensión del conocimiento y la realidad. Estas sufren un importante desarrollo en Alemania a fines del siglo XIX. Destacados son los aportes de Engels en su obra *Dialéctica de la Naturaleza*, en donde, por ejemplo, refiriéndose al *infinito* plantea, “El infinito matemático está tomado, aunque sea de un modo inconsciente, de la realidad, razón por la cual sólo puede comprenderse partiendo de la realidad y no de él mismo, de la abstracción matemática” (Engels, 1981, p.232).

Una alternativa epistemológica posteriorista más cercana en el tiempo es la llamada Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Esta teoría desarrollada por Cantoral, surge a finales del siglo XX y se ocupa principalmente de la construcción social del conocimiento. Su interés no radica en el estudio de los objetos matemáticos, sino más bien se ocupa de la producción matemática como fruto de la acción humana sobre el medio en contextos específicos. Desde su enfoque materialista incorpora novedosamente elementos de lo social a la epistemología del conocimiento matemático. La Socioepistemología, como teoría de lo social que asume un enfoque materialista sobre el estudio del conocimiento matemático es una opción que difiere del platonismo, porque entiende que las personas tienen la capacidad de construir explicaciones de la realidad que les es suya mediante procesos propios de construcción de significados compartidos.

No se puede pensar que las distintas formas de entender la realidad y el conocimiento son casuales. Ellas implican modos antagónicos de comprender la existencia de las cosas. Las diferentes posturas epistemológicas del cocimiento matemático traen consigo pugnas y contraposiciones de corrientes ideológicas contrarias. Cada una de ellas se relaciona con intereses históricos que afectan directamente nuestras formas de vida. Por ejemplo, el apriorismo y la inmutabilidad de los objetos son ideas contrapuestas a las ideas materialistas posteriores a Hegel. Engels (1981) plantea que cambio y movimiento son atributos de la materia. Para los materialistas la matemática debe ser estudiada a partir del comportamiento de la materia y no de ella misma. Esto se explica en el entendido que, para ellos, en las sociedades capitalistas la estructura o base material de los modos de producción determina a la superestructura social en donde se producen los fenómenos ideológicos, es decir, las ideas como leyes, estado o matemáticas. Para ellos, las leyes que rigen el pensamiento subjetivo son las mismas que rigen el mundo objetivo.

Antes del siglo XVIII, el materialismo no se ocupó de investigar la premisa recién descrita. Por esa razón, hasta ese entonces predominó el idealismo, cuya marca de objetividad sobre el conocimiento verdadero requería de la estabilidad y la permanencia. El apriorismo idealista no considera la acción humana en la creación del conocimiento matemático. Desde la contemplación intuitiva de Platón, la monadología de Leibniz, la intuición y el concepto como elementos fundantes del conocimiento en Kant, la idea del yo absoluto en Schelling, hasta la dicotomía entre pensar y conocer de Hegel, se observa una relegación del ser humano de la posibilidad creadora y transformadora de su propia historia. Solo a fines del siglo XIX, Marx desarrolla una alternativa ideológica que coloca al ser humano en el centro de la historia y como motor de una estructura fundamental representada por las relaciones económicas de producción. Contemporáneo y en cooperación al trabajo de Marx, Engels desarrolla en parte de su obra la llamada *Dialéctica de la matemática.* La relación entre desarrollo material del ser humano y producción de conocimiento se describe a continuación.

> Así como Darwin descubrió la ley de la evolución del mundo orgánico, Marx descubrió la ley de la evolución de la historia humana; el hecho tan sencillo, pero oculto hasta entonces bajo la maleza ideológica, de que el hombre necesita, en primer lugar, comer, beber, tener un techo y vestirse antes de poder hacer política, ciencia, arte, religión, etc.; que por tanto la producción de los medios materiales inmediatos de vida y, por consiguiente, la correspondiente fase de la evolución económica de un pueblo o de una época son la base sobre la que se han desarrollado las instituciones estatales, las concepciones jurídicas, el arte y también las ideas religiosas de los hombres, con arreglo a la que por tanto deben explicarse y no al revés, como hasta entonces se había venido haciendo (Engels, 1981, p. 66)

El surgimiento del materialismo histórico eliminó los defectos principales de todas las teorías idealistas que le antecedieron que se limitaban al examen de los motivos ideológicos de la actividad humana sin investigar sus causas materiales y, además, estudiaban en lo fundamental tan sólo el papel de las personalidades destacadas en la historia, sin prestar atención a las acciones de las masas populares, verdaderos artífices de la historia y gestores del conocimiento (Rosental y Iudin, 1984).

En esta historia de contrapuestos epistemológicos, una contradicción sencilla de observar es la oposición de los círculos religiosos en algunas épocas, pero no es la única. Así los trabajos de Leibniz y Newton sobre el análisis infinitesimal fueron duramente criticados por el obispo Berkeley, particularmente el concepto de *momento newtoniano* fue altamente cuestionado, ni siquiera los trabajos de Cauchy en el siglo XIX pudieron terminar con esta corriente opositora. A lo anterior, Lobachevsky en 1826 presenta sus argumentos para una geometría no euclidiana, pero no es hasta finales del siglo XIX que sus propuestas son reconocidas y desarrolladas. Sólo después del surgimiento de la teoría de la relatividad las propuestas sobre una supuesta naturaleza del continuo espacio-tiempo se convirtieron en parte de los fundamentos matemáticos.

La revisión de las corrientes de pensamiento y las epistemologías referidas al conocimiento matemático en la historia, da cuenta de interesantes pugnas entre ideas contrapuestas sobre la matemática. Es un hecho que este conocimiento ha causado gran interés tanto de filósofos, como de teóricos que buscan explicaciones de las cosas o pretenden dar respuestas a problemas concretos en sus campos de estudio.

En este dinámico espacio de diversidades sobre la interpretación de la realidad y el conocimiento, los profesores de matemáticas no están inmunes a estas pugnas ideológico – epistemológicas. La epistemología del profesorado sobre el conocimiento matemático influirá sus formas de enseñanza y, por lo tanto, el proceso antropogénico que desarrolla la escuela. Zemelman (2001) advierte la importancia de observar la formación pedagógica del profesorado avanzando a propuestas investigativas más abstractas que consideren asuntos epistemológicos del conocimiento en la formación de profesores. Para él, las políticas de formación de los científicos sociales en América Latina no han mostrado un interés por esto, quizá porque se cree que asuntos como la epistemología del conocimiento debe ser trabajo sólo de los filósofos. Así como el conocimiento de las disciplinas escolares, el conocimiento pedagógico y el conocimiento didáctico son parte de la formación de profesores, es importante que el conocimiento epistemológico también lo sea. Esto permitirá al profesorado reflexionar y problematizar el conocimiento que enseña y a la vez adquirir mayor conciencia de su influencia en la vida de las y los estudiantes.

Las relaciones de las diferentes posturas epistemológicas sobre el conocimiento matemático en la historia se manifiestan en la escuela a través de una expresión mono epistémica de carácter científico. La predominancia de la valoración del conocimiento científico por sobre otros conocimientos se explica a través del eurocentrismo como forma de dominación mundial. Él es en parte responsable de las ausencias de múltiples conocimientos locales en el curriculum escolar. Para que se logre la democratización de la enseñanza matemática escolar se requiere avanzar hacia el relativismo epistémico que acepte la validez de diversos tipos de conocimientos. Este tránsito o cambio epistemológico no es un asunto sencillo. Su debate lleva décadas de desarrollo. En el anarquismo epistemológico de mediados del siglo XX se encuentran afirmaciones como, “Pese a eso, la ciencia continúa reinando de modo soberano, porque sus seguidores son incapaces de comprender y están mal dispuestos a pactar con ideologías distintas (Feyerabend, 1986, p. 192).

En la revisión del mono epistemismo de carácter científico que ha influido desde Europa nuestro continente, se observa que tal como el carácter neutral propuesto a los objetos matemáticos desde el idealismo, el estado moderno se define también como una estructura ideológicamente neutra. Y en ese tipo de estados, la ciencia ha logrado catalogarse y ser aceptada como estructura neutral con conocimiento positivo independiente de la cultura, ideología o prejuicio. Ella se presenta como descubridora de un método que transforma las ideas ideológicamente contaminadas en teorías verdaderas, pues no se muestra a sí misma como simple ideología, sino como una medida objetiva de todas las ideologías. Así la ciencia se excluye de la separación entre estado e ideología logrando que el estado permita que en la instrucción escolar los padres puedan elegir si sus hijos entran o no a la clase de religión, pero no pueden decidir sobre la clase de ciencia.

Estas epistemologías del conocimiento centradas en el valor de la ciencia, han afectado a nuestro continente bajo distintas expresiones colonizadoras influyendo en la mayoría de la población. Especialmente vulnerable a estas influencias son aquellos que acceden a la enseñanza escolar. Esto se explica al entender que la escuela es la institución del estado que se encarga de la difusión de las ideologías y valores dominantes, así como de su estandarización en la población a través del curriculum.

1.2. *La escuela como herramienta de la hegemonía epistémica*

Apple (1996) pone de manifiesto que la escuela en su expresión pública, el curriculum, formula su decisión de definir como más justificado el conocimiento de algunos grupos, dificultando que el conocimiento de otros salga a la luz, produciendo así ausencias de contenidos y significados. De Sousa (2010) explica estas ausencias argumentando que lo que no existe es activamente producido como no existente. Esto quiere decir, que las ausencias de conocimientos en el espacio escolar son intencionadas y no casuales. Estas decisiones de incluir a unos conocimientos y dejar fuera a otros ha permeado el curriculum escolar afectando la forma de entender las matemáticas en la población.

Desde una postura materialista que entiende a las matemáticas como una actividad humana realizada por personas y grupos sociales en contextos específicos, se acepta que las creaciones matemáticas se relacionan con sus contextos socio históricos. En ese caso, la decisión de la escuela de excluir conocimientos creados por las personas y los significados que estas les atribuyen, es también la exclusión de las personas y grupos sociales que en sus prácticas sociales dieron origen a esos saberes. Desde esta perspectiva podría llegar a decirse que el acto de exclusión de conocimientos en el espacio escolar es *la negación del hombre por el hombre.*

Los procesos de control hegemónico social, político y cultural han generado un sistema escolar que ha tendido a invisibilizar formas de conocimiento usados y emanados en y desde las prácticas sociales de una gran parte de la población. Esta exclusión se sustenta en la existencia de epistemes instaladas desde la colonialidad que evidencian solo ciertos tipos de conocimiento como válidos y oficiales basándose en la instalación de discursos hegemónicos (Gramsci, 1967) y se apoya en ciertos medios de difusión económicamente controlados.

Las posturas epistemológicas que se debaten al interior de la escuela, la transforman en un escenario complejo. El profesorado que a diario se desenvuelve en ella, no siempre es consciente de estas pugnas. Sin embargo, la importancia de sus decisiones sobre la enseñanza y las diferentes alternativas de desarrollo del curriculum desde su implementación didáctica, tienen gran repercusión en el tipo de ser humanos que crea la escuela. La acción del profesorado en el aula es la que da o no cumplimiento a los fines de la escuela expresados en el curriculum. De esta forma, la epistemología que los profesores tengan sobre el conocimiento matemático jugará un papel fundamental en su toma de decisiones, tal como lo describe Zemelman (2001).

La reflexión sobre asuntos epistemológicos del conocimiento a enseñar, no es una práctica común en las escuelas. En general, los establecimientos educacionales tienen dificultades para organizar sus tiempos de reflexión pedagógica. Esto se debe a sus altos niveles de trabajo y dificultades de organización interna. Sin embargo, sin importar si existe o no reflexión o consciencia sobre ella, la epistemología que se tiene sobre el conocimiento, influye en la toma de decisiones pedagógicas y la forma que se desarrolla la enseñanza y por lo tanto afecta a las y los estudiantes. Es necesario explicitar que, no porque algo no se converse o visibilice, quiere decir que no existe o no tiene efectos importantes sobre lo que hacemos.

En Porlán, Rivero y Martín del Pozo (1997), se describe una tendencia del profesorado a requerir respuestas prácticas para la realización de sus tareas de enseñanza, mostrando desinterés y rechazo por asuntos como, por ejemplo, la epistemología o cualquier forma de argumentación teórica. Esto también ocurre en el campo de las matemáticas escolares, las que en ocasiones se ven reducidas al cálculo numérico y desarrollo algorítmico. El desconocimiento de asuntos epistemológicos del conocimiento matemático escolar y la falta de problematización sobre éste, puede volvernos vulnerables a cualquier intento de dominación cognitiva. La reflexión, problematización y juicio constante sobre el conocimiento, pueden transformarse en una forma de defensa cognitiva necesaria en un escenario de complejas diferencias, pugnas y luchas ideológicas como el hasta acá descrito.

Para compensar los intentos hegemónicos de la escuela se requiere reflexionar constantemente sobre asuntos referidos a los fines de la escuela y la enseñanza. Por esto, Zemelman (2001) propone la necesidad de una constante resignificación como tarea principal de las ciencias sociales, especialmente sobre la construcción del conocimiento. También se debe atender la tensión entre teoría y práctica. Esta es descrita en De Sousa (2010) como una tensión con carácter de ceguera. Se trata de una ceguera en donde la teoría “sub teoriza” a la práctica y la práctica atribuye irrelevancia de la teoría. La distancia entre teoría y práctica no obedece solo al contexto, es más bien un asunto de carácter ideológico y epistemológico.

Se hace necesario que en las escuelas se abran mayores espacios para la reflexión epistemológica, especialmente sobre el conocimiento matemático. Fuera del espacio escolar este conocimiento ha inquietado históricamente desde filósofos hasta estadistas o grandes hombres de fe. La paradoja de esto es que el *creador* del conocimiento matemático, el hombre común, es quien ha estado más ausente de estas reflexiones sobre el conocimiento. Así también, la presencia del profesorado ha sido escasa en estos asuntos. Eso conlleva una preocupación, porque son quienes tiene la misión de educar matemáticamente a la población escolar compuesta por niños, niñas y jóvenes. En la medida que las y los profesores adquieran conciencia de sus epistemologías y su relación con la episteme dominante, tendrán mayores herramientas anti hegemónicas para contrarrestar cualquier intento de dominación cognitiva que pudiera suceder.

Por lo tanto, para el logro de los esfuerzos anti hegemónicos es fundamental la función que desempeña el profesorado. Ellos actúan en un espacio determinado en la intersección entre la estructura y la superestructura social, constituyendo un bloque histórico determinante para la contradicción de difusión o cambio del discurso cognitivo dominante que da sustento a la hegemonía del conocimiento de unos pocos sobre el de muchos.

Encontramos que, las concepciones epistemológicas del profesorado, son herramientas con las que interpreta la realidad y se desenvuelve en ella y son a la vez obstáculos que inhiben cursos de acción alternativos (Porlán, Rivero y Martín del Pozo, 1997). Por lo que, estas epistemologías pueden ser parte de la solución al problema de justicia cognitiva y reconocimiento del valor social del conocimiento que se requiere nuestro continente. La justicia cognitiva que se necesita, no es otra cosa que el reconocimiento y valoración de las diversas construcciones de conocimiento hechas por las diferentes personas, grupos humanos y culturas. Como las epistemologías de los profesores son sistemas de ideas en evolución, las orientaciones que éstas adquieran pueden ayudar a la consolidación de criterios más inclusivos que reconozcan la diversidad epistémica del conocimiento matemático y reafirmen posturas de relatividad al respecto.

2. Fundamento teórico

El enfoque que guió este estudio toma como referente a la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Esta teoría se caracteriza por ser “contextualizada, relativista, pragmática y funcional” (Cantoral, 2013, pág. 139). Este estudio comparte con la Socioepistemología la descentración del objeto matemático para ocuparse en estudiar al hombre haciendo matemáticas en contextos específicos. En particular, nos interesa estudiar la epistemología del profesor sobre el conocimiento matemático escolar. Esta investigación coincide con la Socioepistemología al asumir “la legitimidad de toda forma de saber, sea este popular, técnico o culto” (Cantoral, 2013, p. 26). También concuerda en entender que el saber matemático “se ha constituido socialmente en ámbitos no escolares y su introducción al sistema educativo le obliga a modificaciones que afectan su estructura y funcionamiento” (Cantoral, 2013, p. 26).

Tal como la Socioepistemología problematiza el saber, lo historiza y dialectiza, este estudio desde una concepción materialista de la realidad, hace una revisión histórica y asigna un tratamiento dialéctico a los procesos de construcción social del conocimiento matemático.

La dialectización del saber conlleva concebir al cambio como una categoría fundamental del ser. Se entiende que nada es estático y nada es inmutable, el movimiento es el principio de las cosas. Desde esta perspectiva, la realidad está sometida al cambio histórico. Por lo tanto, las epistemologías sobre el conocimiento no son entendidas como estados definitivos, sino como procesos dinámicos del ser. El cambio tiene su origen en la existencia de contradicciones en el seno mismo de las cosas y se caracteriza por una racionalidad que responde al esquema de afirmación, negación y negación de la negación.

Debido a que el trabajo didáctico del profesor condiciona la producción matemática de los estudiantes, Cantoral (2013) ha entendido a la institución como un agente estructurante de las formas de enseñanza y las formas de socialización del conocimiento. Esto ha movido a la Socioepistemología a incorporar aspectos sociales a la investigación didáctica, ampliando el espacio de la escuela e incorporando otras prácticas de referencia, generando así un cambio conceptual de centración.

La Socioepistemología no se ocupa de los conceptos y sus estructuras conceptuales de manera aislada, sino que se enfoca en las prácticas que los producen y propician el uso de estos (Cantoral, 2013). En este estudio hemos querido enfatizar los procesos de construcción social del conocimiento matemático y su difusión institucional a través de la comprensión de las epistemologías que tienen los profesores entendiéndolos como agentes estructurantes de las formas de pensamiento de sus estudiantes.

Desde la teoría Socioepistemológica, Cantoral (2013) explica que se han formulado tres preguntas importantes: ¿cuál es la naturaleza del conocimiento matemático?, ¿qué es conocer en matemáticas? y ¿cuáles son los mecanismos de difusión institucional? Estás preguntas orientan la búsqueda de respuestas sobre cuál es la epistemología de los profesores sobre el conocimiento matemático.

3. Método

Estudiar la epistemología del conocimiento de un grupo humano como una forma relativa de verdad deriva en disyuntivas metodológicas por encontrar la forma de hacer visible algo invisible y a veces inconsciente, pero indudablemente permeado por la realidad social y las relaciones de poder del momento histórico.

Dado el carácter metafísico del objeto de estudio, la epistemología del profesorado sobre el conocimiento matemático, se optó por un modelo investigativo cualitativo. El carácter metafísico está dado por la inmaterialidad del objeto de estudio. La opción del modelo cualitativo se basa en que para esta investigación la realidad no es objetiva, son más bien los métodos positivos los que objetivan la realidad. Según Vela (2008 en Tarrés coord.) La metafísica "es, la ciencia fundamental de lo que es, pero no puede experimentarse empíricamente. Metafísica, o sea más allá de lo físicamente estudiable o medible" (Gómez, 1990, p.5).

Esta investigación corresponde a un estudio de caso heurístico. Se entiende el concepto de caso como método básico de investigación de las ciencias sociales y el caso heurístico según Eckstein (2008, en Tarrés coord.) corresponde a una elección deliberada que se realiza con el fin de contribuir al desarrollo teórico de una idea.

El caso heurístico estudiado estuvo compuesto por 75 docentes que se desempañan entre 1° año de enseñanza básica y II año de enseñanza media en la Región de la Araucanía en Chile. De ellos, 39 son profesores de Educación Básica de los cuales 37 poseen Postítulo de especialidad en Matemáticas. Los otros 36 profesores son docentes de Matemáticas en Enseñanza Media y 4 de ellos poseen grado de Magister, 3 en Educación Matemática y 1en Matemática Educativa.

Dada la dificultad de crear un diseño metodológico que pudiera dar cuenta de la epistemología de los profesores sobre el conocimiento matemático, se tomó la decisión de formular una pre-categoría de análisis construida a partir de elementos de la Teoría Socioepistemológica: *Origen de las nociones matemáticas.* Esta pre-categoría fue creada para orientar la búsqueda de información dejando abierta la posibilidad de surgimiento de nuevas categorías en la información recogida.

La información se recogió durante reuniones de reflexión pedagógica que se efectuaron con cada uno de los profesores del caso de forma individual, esto es con cada uno de ellos por separado. La técnica utilizada para la recogida de información durante el desarrollo de las reflexiones pedagógicas fue la entrevista cualitativa no estructurada. En Tarrés (2008) encontramos que la entrevista cualitativa se ubica en el plano de la interacción entre individuos cuyas intenciones y símbolos están muchas veces ocultos y donde su empleo permite descubrirlos.

La información recogida en notas de estudio fue ordenada y luego sometida a diferentes etapas de procesamiento. Se comenzó con un microanálisis línea a línea para realizar los procesos de codificación abierta, axial y selectiva. Una vez que la información recogida estuvo ordenada en categorías y subcategorías, que responden a la Socioepistemología, se analizó dialécticamente con contrastación bibliográfica y del marco teórico. Luego se compararon las posturas epistemológicas identificadas en los integrantes del caso con las corrientes epistemológicas predominantes en la historia. En esta etapa se buscaron similitudes con algunas corrientes epistemológicas para poder comprender en mayor profundidad los dichos del profesorado e intentar sus epistemologías propias.

La dialéctica utilizada es un método científico de análisis crítico para abordar los fenómenos de la naturaleza y de la realidad social. En ella se realiza el ejercicio de contraponer opuestos de ideas con el fin de lograr una síntesis que dé cuenta de la realidad. Este ejercicio corresponde a un trabajo de reflexión filosófica desde una concepción materialista de la historia. La dialéctica es opuesta al análisis cartesiano y a todo idealismo.

4. Resultados

A continuación, se presentan los análisis sobre la información recogida y organizada en las categorías y subcategorías construidas a partir de la información recogida. Se analizarán 2 categorías que fueron identificadas en el tratamiento de la información. En el diseño metodológico se definió una pre categoría tomada de la Socioepistemología: *Origen de las nociones matemáticas*. Pero luego de tratar la información emergió una nueva categoría: *Naturaleza del conocimiento matemático*.

Estas dos categorías fueron consideradas para ser analizadas como parte integrante de los supuestos epistemológicos del profesorado. La naturaleza del conocimiento matemático es una preocupación del programa socioepistemológico de investigación. Esto se puede observar en la afirmación referida a la socioepistemología en donde se aprecia que ésta “establece una filiación entre la naturaleza del conocimiento que los seres humanos producen con las actividades mediante las cuales, y en razón de las cuales, dichos conocimientos son producidos” (Cantoral, Montiel y Reyes –Gasperini, 2015, p. 12).

4.1. *Sobre el origen de las nociones matemáticas*

De la información recogida durante el desarrollo de las reuniones de reflexión pedagógica que se realizaron con cada uno de los profesores que conformaron el caso, se pudo identificar la pre categoría *Origen del conocimiento matemático.* En los momentos de entrevista cualitativa no estructurada de reflexión sobre el conocimiento matemático los participantes enunciaron afirmaciones como las que mostramos a continuación. En esta oportunidad los profesores son nombrados como *P1, P2, P3...Pn,* pero no mantienen un orden entre ellos. Mostramos algunas de las afirmaciones emergidas del microanálisis con el interés de exponer una muestra representativa del total de las declaraciones del caso.

P1: Están en la naturaleza y se descubren o descifran por el hombre.
P2: La matemática se encuentra en la naturaleza y el hombre crea diseños o modelos que permiten descifrarla.
P3: Su origen está en la observación de lo que nos rodea.
P4: Desde el comienzo de los tiempos el hombre se ha visto en la necesidad de descubrir la matemática con el fin de dar soluciones a sus problemas cotidianos. La matemática está en todos los lados en donde podamos observar.
P5: La matemática está a nuestro alrededor en todas las cosas naturales y en todo lo que nos rodea, el hombre descubre y descifra tratando de comprender sus maravillas.
P6: Está en todo lo que nos rodea el hombre lo ha descubierto al existir una necesidad.
P7: El origen de la matemática es la creación de todas las cosas, ahí están. El ser humano lo descubrió y las interpreta con símbolos para explicar los milagros exactos que ella produce.
P8: Su origen está para ser descubierto por el hombre. Transformado en un lenguaje simbólico exacto y perfecto. las actividades matemáticas están dirigidas a una elite muy seleccionada.

De los dichos expuestos respecto al origen del conocimiento se observa que lo entienden como un tipo de conocimiento que emerge del entorno natural externo al hombre. El ser humano juega un papel de descubridor de este conocimiento que no es obra suya. El aporte del hombre es su formalización a través de un lenguaje simbólico. Las expresiones vertidas por algunos participantes muestran una cierta admiración hacia este conocimiento al que adjetivan con tildes de maravilla. Al parecer es un conocimiento que asombra y es capaz de solucionar problemas que sin ella no serían posibles de subsanar.

Una cantidad menor de profesores del caso construido atribuyen injerencia al hombre en la creación del conocimiento matemático. Sin embargo, algunos de ellos muestran contradicción discursiva al mencionarlas como creación humana que se descubre o está implícita en la naturaleza.

P9: Es una creación humana que proviene de la necesidad de dar respuesta a una inquietud, necesidad humana y están implícitas en la naturaleza de ahí se originan y transforman en símbolos, áreas y propiedades.
P10: Es una creación humana y se sebe descubrir. Para eso estudiamos, lograr ser un matemático es llegar a verlas donde otros no pueden. Claro que esos son los menos.
P11: Es una creación humana para comprender mejor la naturaleza.
P12: No sé realmente cuál será su origen. Ni siquiera estoy segura si tienen origen.

Durante las reuniones de reflexión pedagógica se observó un grado de dificultad de los profesores para referirse a temas relacionados con la naturaleza epistémica del conocimiento matemático. Confesaron que para ellos no es habitual la reflexión y problematización de las matemáticas. Sus tiempos fuera del aula están destinados a planificar clases y centrarse en la resolución algorítmica de ejercicios. Conversar sobre esto es algo nuevo que los llena de interrogantes que no habían tenido hasta ahora. El tratamiento que dan a las matemáticas en el trabajo de aula comienza en el nivel taxonómico de conocer, obviando la comprensión, pues se les hace difícil trabajarlo, y la mayor parte del tiempo de enseñanza lo dedican a la aplicación. Preguntas sobre aspectos anteriores a la aceptación de la existencia del conocimiento no son parte del quehacer del profesorado en general.

La figura 2 muestra los resultados del caso en donde 50 de los 75 profesores dicen entender la matemática como un conocimiento a priori. Mencionan que son descubiertas por el hombre a través de la observación. Afirman que tienen su origen en la naturaleza y se constituyen en un lenguaje universal. La acción del hombre radica en formalizar un conocimiento descubierto. Otros 20 profesores participantes declaran que las matemáticas son creación humana utilizada para conocer el mundo natural y cuantificarlo. Cuatro profesores declaran no saber qué decir pues nunca lo han pensado.

En la figura 2 se aprecia una tendencia a entender el conocimiento matemático como algo *preexistente* al ser humano en donde el descubrimiento juega un rol importante. El rol de descubridor se tiende a asignar a personas con características particulares, capaces de descubrir lo que la mayoría mira, pero no ve.

A partir de sus declaraciones se aprecia una contradicción interna de los profesores. Ellos entienden que el conocimiento matemático se descubre, sin embargo, su trabajo didáctico con los estudiantes está principalmente orientado al aprendizaje de reglas y procedimientos. De esta forma, la escuela no forma descubridores, sino más bien estudiantes que aprenden lo que se les muestra y explica. Luego ellos deben intentar aprenderlo y con mucha ejercitación dominar como se opera con esos conceptos. Es sabido, que los estudiantes no siempre comprenden lo que están haciendo y tampoco lo que quieren decir o representan sus operaciones. En ocasiones la presión de las mediciones estandarizadas externa es más fuerte y obliga a los profesores a obviar esto y entrenar a sus estudiantes para responder correctamente a los reactivos planteados.

Al contrastar la información recogida de los profesores con la revisión teórica hecha para este estudio pudimos identificar relaciones entre sus declaraciones y algunas posturas clásicas de como se ha entendido el conocimiento matemático en la historia. La figura 3 muestra como relacionamos los enunciados del profesorado con las corrientes del pensamiento sobre el conocimiento matemático identificables en la historia.

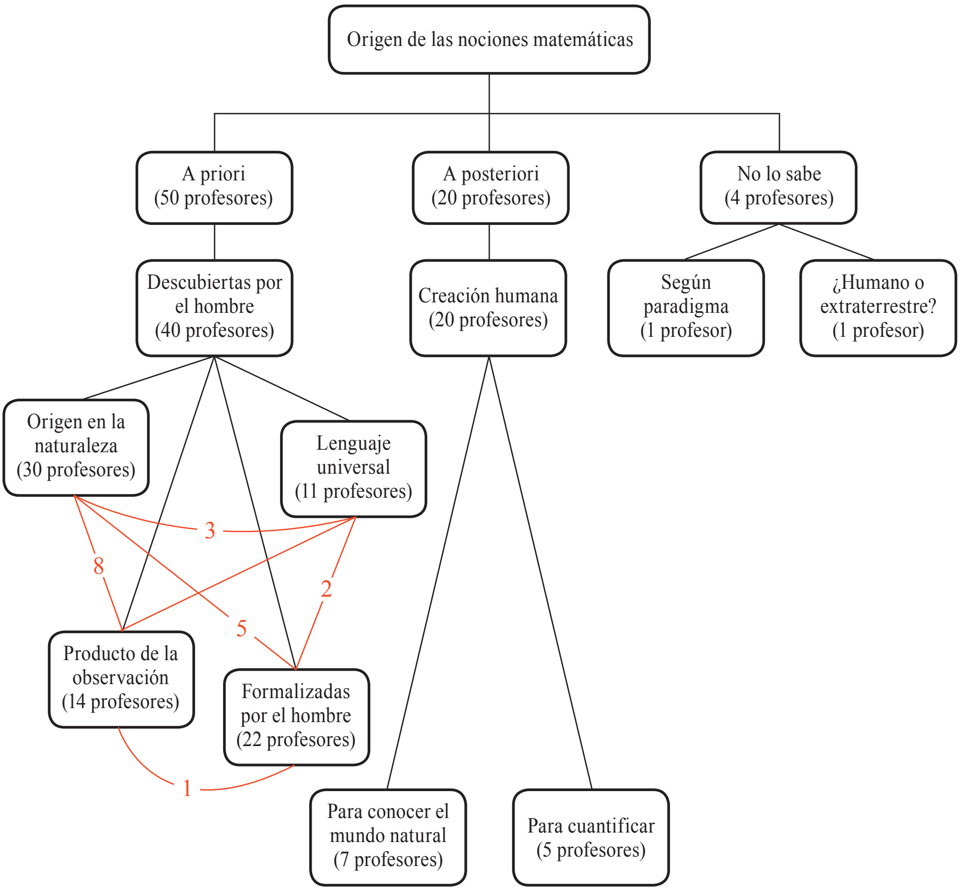


Figura 2. Origen de las nociones matemáticas según el profesorado
Fuente: Elaboración propia

En la 3 figura se aprecia una importante correspondencia de los dichos de algunos profesores con algunas ideas del idealismo que entiende la existencia de objetos ideales, ajenos al hombre e inmutables que están para ser conocidos. También se observan profesores que coinciden con ideas empiristas al entender al conocimiento matemático como algo proveniente del mundo físico que nos rodea. A diferencia del idealismo, en las ideas empiristas la experiencia y la percepción sensorial juegan un papel fundamental. También existe coincidencia entre sus dichos y las posturas positivistas de Schlick (1967), Carnap, Frank y otros pensadores de principios del siglo XX quienes atribuían elementos lógicos a la constatación de la realidad objetiva que no puede existir independiente de la experiencia sensible. Los positivistas se mantuvieron siempre en una lucha ideológica en contra del materialismo centrando el objetivo de la filosofía en el análisis de las nociones y de los juicios científicos. Se aprecian también algunas ideas formalistas, en donde el rol del ser humano es formalizar con símbolos ostensibles que no requieren mayor significado, pues el símbolo es suficiente. Una cantidad menor del caso que entiende las matemáticas como obra humana, pero tiene dificultades para entregar sus argumentaciones. No se aprecia que los profesores establezcan relaciones de análisis entre el conocimiento matemático y las condiciones materiales de producción de las personas.

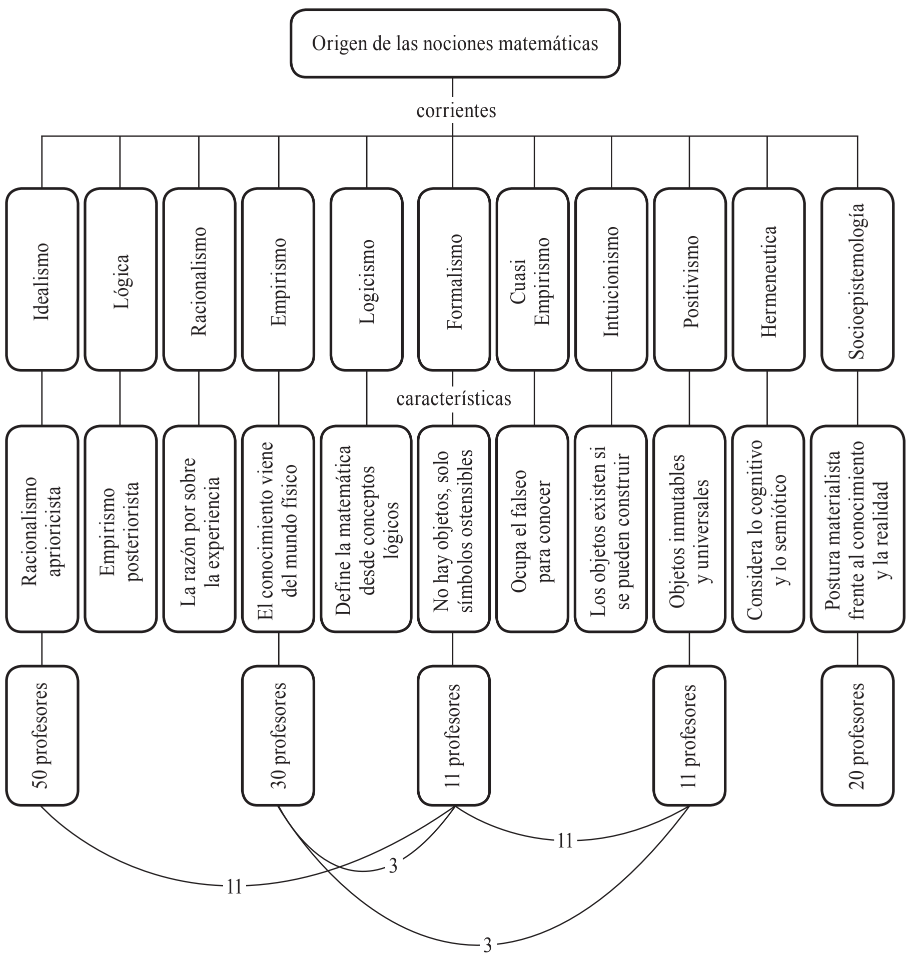


Figura 3. Relación entre declaraciones del profesorado y las posturas clásicas en la historia
Fuente: Elaboración propia

4.2. *Sobre la naturaleza del conocimiento matemático*

Otra categoría que se logró identificar fue *Naturaleza del conocimiento matemático.* Ante preguntas referidas a qué es o son las matemáticas, de qué trata este conocimiento, cómo lo entienden y cómo lo pueden explicar; los profesores lo refirieron principalmente como un conocimiento científico. A continuación, exponemos de un modo representativo afirmaciones del caso que fueron extraídas en la fase de análisis microscópico de la información. Mostramos parte de lo dicho por los integrantes del caso para poder exponer mejor las figuras que se presentan y el porqué de los análisis que construimos.

P1: Es una ciencia exacta que explica numérica o algebraicamente el universo.
P2: Se puede decir que es una ciencia exacta, una ciencia; pero también la base para casi todas las ciencias.
P3: Lo común, una ciencia que permite desarrollar el pensamiento crítico y el razonamiento lógico. Pero por sobre todo es un conocimiento exacto.
P4: Es una ciencia exacta desarrollada por el hombre a través de la historia. …la obtiene de estudiar el mundo natural.
P5: Una ciencia exacta.
P6: Es una ciencia exacta, lógica, es perfecta.
P7: Ciencia que busca dar solución a los distintos fenómenos naturales.
P8: Ciencia de los números que permite encontrar respuestas a múltiples interrogantes que nos planteamos.
P9: Ciencia que estudia los números y forman la relación lógica entre ellos.
P10: Es una ciencia que estudia, investiga, demuestra. Tenemos las áreas del algebra, geometría y los ejes propios de ella, para entender el mundo y los fenómenos y poder dar solución a los problemas en otras áreas, como medicina y áreas de otras ciencias.
P11: Es una ciencia exacta, que se preocupa de enseñar ejercicios de cálculos con las cuatro operaciones para resolver diversos problemas. Según los ejes (números, estadística, geometría, medición, etc.).
P12: Es una ciencia exacta.

La información extraída del microanálisis muestra la tendencia a entender el conocimiento matemático como ciencia. La consideración científica del conocimiento muestra una influencia europea en la concepción del mundo y de las ideas. Al observar la explicación de la historia desde la concepción europea del siglo XVI se observa con frecuencia la noción de descubrimiento. La expansión de Europa se sostiene sobre los descubrimientos del siglo XVI. Descubrir algo supone una hazaña o logro en la cual se encuentra lo que no se conocía hasta entonces. Luego se asume la existencia del objeto descubierto y se acepta que este era antes de su descubridor. Esta argumentación influye en la construcción del concepto de ciencia moderna. La idea de ciencia llega a nuestro continente junto con la colonización y su influencia en la población es un indicador de la presencia del eurocentrismo. La ciencia moderna propone una concepción lineal del tiempo, con dirección y sentido único y conocido, en donde progreso, revolución, modernización y globalización establecen los conocimientos que dominan las instituciones. Para De Sousa (2010) esta lógica produce la no existencia de todo lo que, según la norma, es temporalmente asimétrico en relación con lo que se declara avanzado. Esto ha quitado validez de otros conocimientos, más allá del conocimiento científico, invisibilizando a los conocimientos y criterios de validez que otorgan visibilidad a las prácticas cognitivas de las clases y grupos sociales. De esta forma, por ejemplo, conocimientos matemáticos latino americanos de las primeras culturas o grupos humanos quedan fuera de la concepción de modernidad científica y son sub valorados o invisibilizados.

Otra forma de entender la naturaleza del conocimiento matemático que predomina entre los profesores del caso utilizado en este estudio es su naturaleza lógica.

P13: Razonamiento lógico de la vida en sí.
P14: Todo un conjunto organizado de conocimientos que surgen en respuesta a las necesidades de un contexto, una época o una necesidad especifica de una situación cotidiana. Su organización es lógica y universal.
P15: Las matemáticas es una manera de ver de formas cuantitativa distintas situaciones. Donde se puede analizar desde un aspecto lógico.
P16: Yo creo que es el fenómeno humano vinculado a la capacidad de abstracción que opera símbolos según reglas lógicas.
P17: Son procesos lógicos, que tienen una representación abstracta.

Desde la concepción científica del mundo expuesta desde el Círculo de Viena se observa la defensa del empirismo lógico, la lucha por la unificación del lenguaje de la ciencia, el termino de las consideraciones relativas del conocimiento y la instalación del concepto de universalidad. Esto se puede observar de manera incipiente en los trabajos de Hume, Match y Locke, quienes comienzan a sentar las bases de un tipo de ciencia que deriva en las ideas de los siglos posteriores. Los matemáticos del siglo XX liderados por Schlick apostaron por la concepción de la verdad de Aristóteles y el simbolismo lógico desarrollado por Frege. Entender la matemática como un conocimiento lógico es una postura excluyente de una gran construcción de matemáticas que no responden a criterios lógicos. Existen algunos ejemplos como la matemática mapuche en el sur de Chile, en donde su construcción situada obedece a asuntos religiosos y espirituales. La idea del componente lógico como condición del conocimiento matemático, es excluyente y da cuenta de un mono epistemismo frente al conocimiento.

También se observó en algunos profesores del caso una concepción de naturaleza humana del conocimiento matemático y algunos docentes que declararon no saber o nunca haber reflexionado sobre el tema.

P18: Es la disciplina humana que se encarga del estudio del orden, forma, cantidades y regularidades del mundo para trabajarlas de manera simbólica y operar con ellas de manera lógica.
P19: Nunca me lo había preguntado…no sé.
P20: Realmente no lo sé.
P21: Es un arte que nos permite encontrar el equilibrio en la vida.

La observación del conocimiento matemático como una actividad de naturaleza humana fue la menos presente en las afirmaciones del caso estudiado. La idea de un conocimiento posterior al hombre no predomina en las observaciones. En Kant (1998) encontramos que todo nuestro conocimiento comienza por la experiencia, pero no por eso surge todo él de la experiencia. Esta idea kantiana de las cosas se puede identificar en las afirmaciones de los profesores participantes. Existe también un número de profesores que aceptan no haberse cuestionado hasta ahora asuntos epistémicos del conocimiento que enseñan.

La figura 4 muestra los resultados del estudio en donde 53 de los 75 profesores entienden la matemática como un conocimiento científico, cinco profesores la entienden como un conocimiento lógico, tres de ellos como una disciplina simbólica, tres profesores como una actividad humana, un profesor declara que es un arte y tres profesores dicen no haberlo pensado.

Lo observado en la figura 4 se coincide con lo encontrado en la revisión teórica en donde se declara que existe una fuerte tendencia a comprender el conocimiento epistemológicamente válido como ciencia (Quijano, 1999; De Sousa 2010). La idea de ciencia domina en el profesorado a la hora de referirse a la naturaleza del conocimiento matemático. Una de las características de la ciencia es la búsqueda de la unificación del lenguaje y del método. Estas particularidades no son necesariamente consideradas cuando los profesores refieren entender al conocimiento matemático de esta forma. Se puede llegar a pensar que algunas declaraciones del profesorado están influenciadas externamente por asuntos culturales o de socialización, pero carecen de reflexiones internas propias sobre el conocimiento. De esta forma puede llegar a suceder, y sucede, que conocimientos matemáticos locales, son subvalorados por no responder al canon de la ciencia. Cuando estos conocimientos subvalorados son propios de los espacios geográficos o humanos de donde provienen los estudiantes, la subvaloración se traspasa al origen del niño, niña o joven. Así, la escuela va acumulando ausencias intencionalmente producidas dejando fuera conocimientos de personas y grupos humanos que producen sus saberes en contextos específicos otorgando prioridad al valor de uso por sobre el canon de la ciencia, el que en ocasiones no conocen y sin embargo han logrado subsistir como individuos y colectivos en el tiempo.

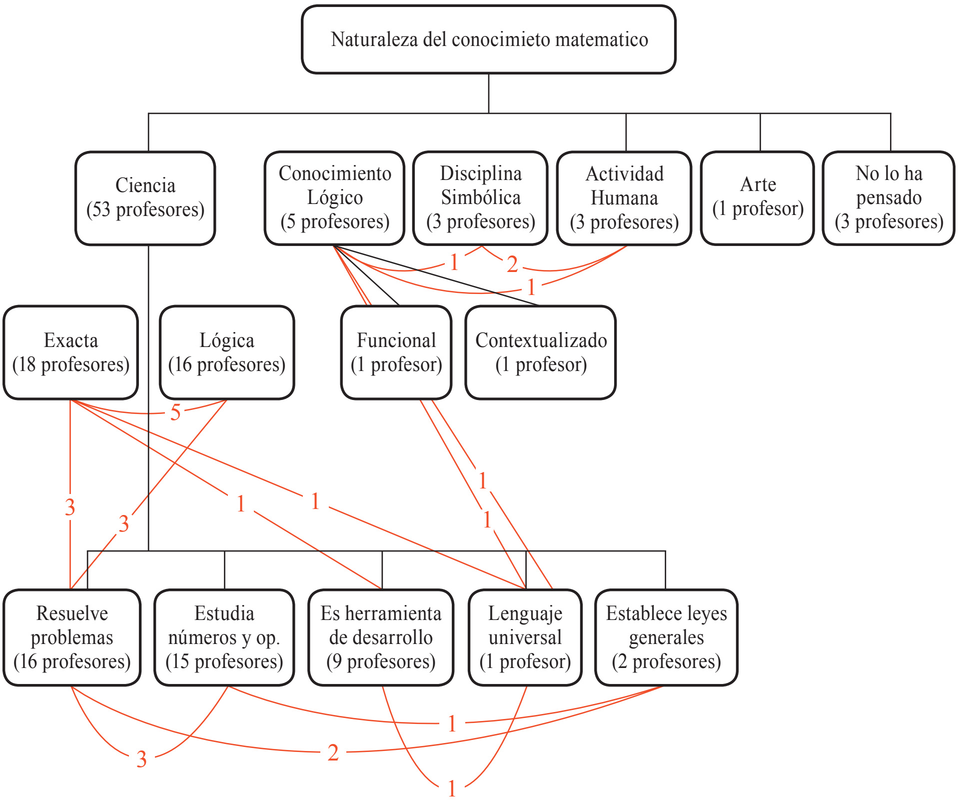


Figura 4. Naturaleza del conocimiento matemático según el profesorado
Fuente: Elaboración propia

Para intentar comprender mejor la información recogida del caso estudiado contrastamos la información de la categoría *Naturaleza del conocimiento matemático* con la revisión histórica del conocimiento. Este procedimiento metodológico se realiza con el propósito de profundizar la comprensión de las ideas del profesorado y acercarnos a conocer su epistemología del conocimiento matemático. Para eso, intentamos conocer si la tendencia epistemológica de los profesores se condecía con algunas de las posturas clásicas de la epistemología de las matemáticas en el tiempo. En la figura 5 mostramos las concordancias encontradas entre las distintas corrientes de origen europeo y el pensamiento del profesorado.

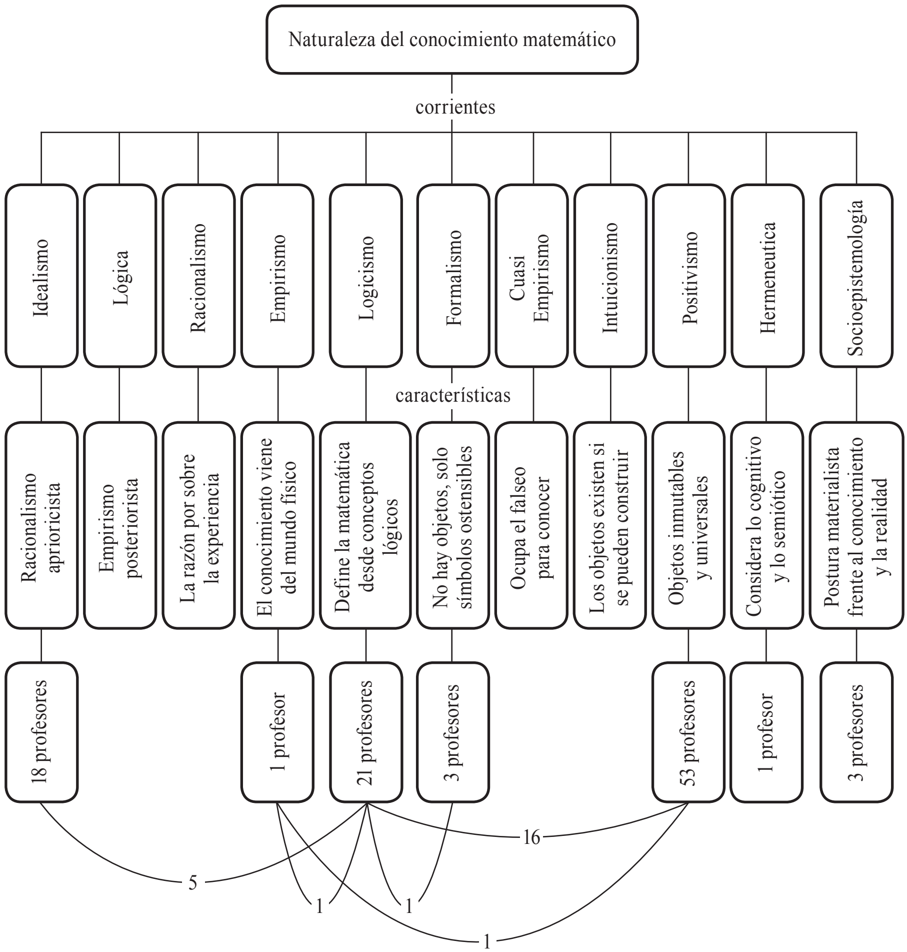


Figura 5. Relación entre declaraciones del profesorado y las posturas clásicas en la historia
Fuente: Elaboración propia

De la figura 5 se observa que de los 75 profesores que conformaron el caso se identificaron 53 afirmaciones similares al pensamiento positivista en cuento el conocimiento deriva en una sola ciencia. También se puede ver que 18 afirmaciones que se refirieron a los objetos matemáticos como objetos ideales dado su inmutabilidad. Con esto una vez más se hace presente la idea del aprioricismo entre los profesores. De ellos, 21 declaraciones mencionan también el carácter lógico de la matemática, 3 que apelaban al formalismo de la disciplina y 4 menciones que reconocieron la acción humana en la creación del conocimiento y la existencia de aspectos metafísicos con condiciones de subjetividad. Esta información fue tomada de la fase de análisis microscópico de la información. En esta búsqueda de similitudes entre las afirmaciones de los profesores del caso y las corrientes epistemológicas identificadas en la historia, predominan semejanzas de tipo apriorisistas, logisistas o positivistas. Una vez más, ideas de tipo materialistas son las menos observables en las referencias hechas sobre el conocimiento matemático.

Existen algunas coincidencias entre las epistemologías identificadas en el caso de estudio y las llamadas epistemologías clásicas de origen europeo. Estas epistemes dominantes se han catalogado a sí mismas como universales, creando una contradicción discursiva, pues Europa no es el universo. Al respecto, los profesores comentan no haber reflexionado sobre estos asuntos. Sin embargo, adoptan algunas ideas foráneas a América Latina como formas de entender al conocimiento y crean argumentos para su defensa y validez.

5. Conclusiones

El estudio permitió acercarnos a conocer la epistemología de los profesores sobre el conocimiento matemático. En los antecedentes del problema describimos el fenómeno del eurocentrismo, el que pudo ser observado en la presencia de ideas apriorisistas o empiristas lógicas entre el profesorado. Esta situación permite constatar la presencia de elementos colonizadores o al menos foráneos en la caracterización de la epistemología del caso estudiado.

Respecto al origen del conocimiento matemático los profesores lo entienden mayoritariamente como un conocimiento externo presente en el medio natural que nos rodea y la acción del hombre es la de descubridor de este conocimiento. Pese a existir profesores que lo describen como una creación humana, estos no logran argumentar el cómo y cuándo los hombres pueden crear matemáticas. Más bien pareciera que hacen afirmaciones intuitivas sobre sus percepciones sobre el origen de este conocimiento. No establecen relaciones entre la producción del conocimiento y las condiciones materiales de producción humanas.

Respecto al ser del descubridor, los profesores lo entienden como alguien con ciertas facultades especiales no presentes en el común de la masa humana: *las actividades matemáticas están dirigidas a una elite muy seleccionada.* Estos descubridores pueden identificar y traer a los otros el conocimiento que nos rodea y que a la mayoría le pasa desapercibido por no poseer estas facultades. Esto representa una alerta en el espacio escolar, pues pensamientos discriminadores podrían transmitir a los estudiantes el sentido de elite como condición para pertenecer a un grupo dotado capaz de descubrir lo que no ha creado. Pareciera que entender las matemáticas como un descubrimiento es más común que entenderlas como una creación, pese a que se asume que descubrir no es tarea que todos puedan cumplir. Esto en parte muestra una especie de falta de fe en el ser humano común.

Sobre la naturaleza del conocimiento matemático las apreciaciones recogidas evidencian una muy alta valoración de este: *ciencia que sostiene a las otras ciencias, lógica, exacta... es perfecta.* Ante esta naturaleza de estatus superior no es sencillo pensar que el obrero, el campesino, el vendedor, el artista o los propios estudiantes puedan crear matemáticas. Los profesores en general entienden la matemática más como ciencia lógica que como actividad humana que puede obedecer a las características propias de los distintos grupos sociales.

5.1. *Priorismo y posibles efectos*

El entender las matemáticas como un conocimiento a priori es una postura observada entre los profesores participantes. Esta visión ha dominado la epistemología del conocimiento a lo largo de la historia desde las corrientes de pensamiento de origen europeo. La negación de la posibilidad creadora del hombre sobre su realidad es la negación también de la posibilidad de modificarla. El no reconocimiento de otras matemáticas más allá de la concepción platónica es una forma de *negación del hombre por el hombre.* Cuando se niega la capacidad matematizadora de la persona sobre su entorno y no se reconoce su creación, también se niega al creador, es decir al hombre que construyó este conocimiento. Esta forma de pensar se observa entre profesores cuyo rol no es solo enseñar matemáticas, sino también crear un tipo de ser humano desde la función antropogénica de la escuela. Realizar la enseñanza en el espacio escolar requiere de mayor reflexión sobre lo que se dice, lo que se hace y no se hace y de manera especial sobre el conocimiento que se enseña. Los efectos socializadores del maestro y la escuela son determinantes del tipo de hombre que la escuela produce (Bourdeau,1991) y configuran la realidad social para el cambio o la reproducción.

5.2. *Inmutabilidad de las cosas*

El carácter ideal del conocimiento matemático cuando es entendido como objeto no tangible con condiciones de inmutabilidad, es una concepción presente entre el profesorado y por consiguiente transmitida de una u otra forma en el espacio escolar. Este razonamiento de descendencia platónica cuida constantemente que no sucedan re-significaciones o adaptaciones que pudieran hacerse con la intención de adecuar su uso. Así los llamados objetos matemáticos se caracterizan porque que se comportan siempre e idénticamente del mismo modo. Estos objetos matemáticos no son cosas materiales, sino objetos que solo pueden ser pensados (Platón, 2000). Independiente de la esfera del saber en que estos objetos sean aplicados, ya sean sensibles o inteligibles, componen el mismo *arithmós* del pensamiento matemático griego. Si en la clase de matemática se transmite la idea de atender permanentemente para no permitir que suceda el cambio, el riesgo de modificar el axioma o el error de desvirtuar a través de la re-significación se puede pensar que se está frente a una expresión más del *curriculum oculto.* En ese caso, sucede que al igual que en las teorías de la Reproducción social, de La correspondencia o de La reproducción cultural, la escuela en su conjunto se las arregla para realizar el secreto y no declarado trabajo de reproducir la sociedad de clases de tal manera que las condiciones de producción se mantengan inmutables. Esto lo hace valiéndose de rutinas, actitudes y dichos que transmiten al estudiantado la imposibilidad de cambiar lo que conoce (Bourdieu y Passeron, 1977 y 1993; Bowles y Gintis, 1981; Berger y Luckman, 1986; Torres, 1992). De esto, adquiere importancia que el profesor de matemáticas pueda problematizar la disciplina que enseña y apoyado en procesos reflexivos pueda dar cuenta de su hacer en el aula, dado que tiene repercusiones no solo en la vida de cada estudiante, sino también en el colectivo social. Al inicio de este trabajo mencionamos que “no podrá haber justicia social en nuestro continente, si primero no logramos justicia cognitiva” y ahora a la luz de lo investigado observamos la necesidad de reconocer otras matemáticas más allá de las de origen griego o más ampliamente de origen europeo. Se requiere observar, valorar y permear al curriculum de las creaciones de diferentes culturas, prácticas, oficios o profesiones. Todas ellas difieren en la necesidad que les dio origen y el uso que se hace de ellas, sin embargo, coinciden en que son la matematización que el ser humano ha hecho de la realidad en que habita. La relatividad epistémica es una condición de justicia y reconocimiento del otro y se constituye en un paso hacia la búsqueda de la igualdad que es requisito para la justicia.

5.3. *Una mirada a la formación de profesores*

Al observar la dificultad declarada por los profesores para pensar y referirse a temas epistemológicos de las matemáticas o para intentar definirlas o caracterizarlas, queda de manifiesto la necesidad de observar los procesos de formación de profesores y el espacio que estos otorgan a la formación epistemológica y al cuestionamiento de la disciplina de enseñanza.

No cabe duda que las instituciones que forman profesores se ocupan de enseñar asuntos del conocimiento disciplinar, didáctico y pedagógico, sin embargo, no existe seguridad de la importancia que atribuyen al estudio de la epistemología del conocimiento. Como resultado se observa un grupo de profesores con dificultades para discernir epistemológicamente sobre el conocimiento que enseñan. El estudio da cuenta de profesores con algunas dificultades para establecer con seguridad su postura frente al origen de las nociones matemáticas, sus declaraciones son más bien influenciadas por construcciones culturales o el fenómeno de la colonización. De esta forma se hace difícil transitar de un cuerpo de profesores que saben operar matemáticamente aplicando teoremas y algoritmos, a otro donde se logre que los profesores cuestionen, problematicen y comprendan la naturaleza del conocimiento que enseñan. Con ello, podrán entender de mejor manera la forma en que sus estudiantes entienden y conviven con saberes especializados.

Parece difícil pensar que se pueda enseñar lo que no se sabe qué es, de dónde proviene o para qué sirve. Esto también puede dificultar el lograr saber cuándo el estudiante lo ha aprendido y cuando no, ¿pues si ignoro la naturaleza de lo que enseño, cómo puedo crear indicadores que me permitan saber si otro lo ha aprendido?

5.4. *Consideraciones finales*

Al concluir este escrito podemos decir que se hace necesario refrescar las miradas teóricas clásicas que han intentado explicar las matemáticas e incluir posturas teóricas locales a nuestro continente que sean alternativas al idealismo. Existe necesidad de abrirnos a la relatividad epistémica para poder mirarnos los unos a los otros asignándonos valor. El no hacerlo y continuar depreciando las formas matemáticas de muchos es también una forma de violencia hacia el otro que es preciso terminar. Por último, cabe señalar que el componente social requiere ser incorporado en los análisis filosóficos del conocimiento matemático.

Referencias bibliográficas

Althusser, L. (1991). *Ideología y aparatos ideológicos del estado.* Londres: New Left Books.

Apple, M. W. (1996). *Política cultural y educación*. Madrid: Morata.

Arrieta, J., Buendía, G., Ferrari, M., Martínez, G., y Suárez, L. (2004). Las prácticas sociales como generadoras del conocimiento matemático. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, *17*(1), 418-422.

Berger, P. y Luckman, T. (1986). *Los fundamentos del conocimiento en la vida cotidiana. La construcción social de la realidad*. Amorrortu-Murguía, 36-52.

Bourdieu, P. y Passeron, J. C. (1977): *La reproducción. Elementos para una teoría del sistema de enseñanza*. Barcelona. Laia.

Bourdieu, P. y Passeron, J. C. (1993) *Reproducción en educación, sociedad y cultura*, Madrid: Ediciones Morata.

Bourdieu, P. (1991). Entrevista "Sobre la escuela" en Chercheurs de notre temp por Philippe Miquel en http://youtu.be/_BkO_wjL-LM

Bowles, S. y Gintis, H. (1981). *Educación y desarrollo personal: la larga sobra del trabajo, en: La institución escolar en la América capitalista*. México: Siglo XXI.

Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento.* México: Gedisa.

Cantoral, R., Montiel, G. y Reyes-Gasperini, D. (2015). El programa socioepistemológico de investigación en Matemática Educativa: el caso de Latinoamérica. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 18*(1), 5-17. Disponible en http://www.scielo.org.mx/pdf/relime/v18n1/v18n1a1.pdf

De Sousa, B. (2010). *Descolonizar el saber, reinventar el poder*. Uruguay: Trilce

Engels, F. (1981). *Obras Escogidas de Carlos Marx y Federico Engels: El papel del trabajo en la transformación del mono en hombre*. Moscú: Progreso.

Feyerabend, P. (1986). *Tratado contra el método*. Madrid: Editorial Tecnos.

Foucault, M. (1998) *Las palabras y las cosas.* Madrid: Siglo XXI.

Gómez, R. (1990). *Introducción a la metafísica*. Madrid: Ediciones Rialpgomez.

Gramsci, A. (1967). *La formación de los intelectuales.* México: Grijalbo.

Kant, I. (1998). Guyer, P. y Wood, A. W. (Eds.). *Critique of pure reason*. Cambridge University Press.

Leibniz, G. W. (2007). *Obras filosóficas y científicas.* Nicolás J.A. y Ramon M. (Eds). Granada, Comares, 3-152.

Oliver, C (2009). El valor formativo y las ataduras de las creencias en la formación del profesorado. Aquello que no se ve, pero se percibe en el aula. *Reifop*, *12*(1) 63-75.

Platón (2000) Ed. Gómez, *La Republica*. México: UNAM.

Porlán, R., Rivero, A., & Martín del Pozo, R. (1997). Conocimiento profesional y epistemología de los profesores I: Teoría, métodos e instrumentos. *Enseñanza de las Ciencias*, *15*(2), 155-171. Recuperado en https://www.raco.cat/index.php/Ensenanza/article/view/21488

Quijano, A. (1999). Colonialidad del poder, cultura y conocimiento en América Latina. *Dispositio,* 137-148.

Rodrigo, M., Rodríguez, A. y Marrero, J. (1993). *Las teorías implícitas: Una aproximación al conocimiento cotidiano.* Madrid: Visor.

Rosental, M., y Iudin, P. (1984). *Diccionario de filosofía*. Moscu: Editorial Progreso.

Schlick, M. (1967). *Filosofía, metafísica y significado,* en Ayer (ed). *El positivismo lógico.* La Habana: Estudios.

Tarrés, M. L. (2008). *Observar, escuchar y comprender sobre la tradición cualitativa*. México: Colegio de México-Flacso.

Torres, J. (1992), *El curriculum oculto.* Madrid: Ediciones Morata

Wittgenstein, L. (1988). *Investigaciones filosóficas.* Barcelona: Crítica.
Zemelman, H. (2001). *Pensar Teórico y Pensar epistémico. Los Retos de las Ciencias Sociales Latinoamericanas.* En Conferencia dictada en la Universidad de la Ciudad de México

Autores

Karla Sepúlveda Obreque. Universidad Católica de Temuco. Chile. ksepulveda@uct.cl
Javier Lezama Andalón. CICATA, Instituto Politécnico Nacional. México.
jlezamaipn@gmail.com

Mª Cristina Naya-Rivero, Tania F. Gómez-Sánchez,
Mª Begoña Rumbo-Arcas, Mª Elena Segade-Pampín

ESTUDIO INTERREGIONAL COMPARADO DE LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA EN LA FORMACIÓN INICIAL DEL PROFESORADO DE EDUCACIÓN PRIMARIA

Comparative interregional study of Mathematical Education for preservice Primary Teachers

RESUMEN

En este artículo se analiza la formación inicial en Educación Matemática del Grado en Educación Primaria en las universidades públicas de España. El objetivo es estudiar el tipo de conocimiento matemático presente en los planes de estudio de estas titulaciones. Para ello se realiza un estudio comparado de las guías docentes, cuyo análisis parte de dos parámetros de comparación, basándose en el informe TEDS-M International: el conocimiento del contenido matemático y el conocimiento del contenido pedagógico. Los principales resultados obtenidos muestran una gran variabilidad en la distribución del número y carácter de ECTS ofertados; y el predominio del conocimiento del contenido matemático en relación al contenido pedagógico.

PALABRAS CLAVE:

- *Formación Inicial de Profesorado*
- *Educación Matemática*
- *Educación Primaria*
- *Plan de Estudios*

ABSTRACT

This article analyses the initial training in Mathematical Education of the Degree in Primary Education in the public universities in Spain. The aim is to study the type of mathematical knowledge defined in syllabus. For this purpose, it has been carried out a comparative study about preservice teachers' curriculum. Two comparison parameters included in the TEDS-M International report have been into account: knowledge of mathematical content and knowledge of pedagogical content. The results obtained show a high variability in the distribution of the number and nature of ECTS offered and a prevalence of the knowledge of the mathematical content in relation to the pedagogical content.

KEY WORDS:

- *Preservice Teacher Education*
- *Mathematics Education*
- *Primary Education*
- *Syllabus*

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (2021) *24* (2): 207-233.
Recepción: Abril 21, 2020 / Aceptación: Julio 11, 2021. DOI: 10.12802/relime.21.2424

RESUMO

Neste artigo analisamos a formação inicial em Educação Matemática do Ensino Básico nas universidades públicas em Espanha. O objectivo é estudar o tipo de conhecimentos matemáticos presentes nos currículos destas licenciaturas. Para o efeito, é realizado um estudo comparativo dos guias de ensino, cuja análise se baseia em dois parâmetros de comparação, com base no relatório TEDS-M International: conhecimento do conteúdo matemático e conhecimento do conteúdo pedagógico. Os principais resultados obtidos mostram uma grande variabilidade na distribuição do número e carácter dos ECTS oferecidos; e a predominância do conhecimento do conteúdo matemático em relação ao conteúdo pedagógico.

PALAVRAS CHAVE:

- *Formação Inicial de Professores*
- *Educação Matemática*
- *Ensino Básico*
- *Curriculum*

RÉSUMÉ

Cet article traite de réaliser une analyse comparative de la formation initiale en mathématiques de l'enseignement primaire dans les universités publiques en Espagne. L'objectif est d'étudier le type de connaissances mathématiques présentes dans les programmes d'études de ces diplômes. À cette fin, une étude comparative des guides pédagogiques est réalisée, dont l'analyse commence à partir de deux paramètres de comparaison, sur la base du rapport TEDS-M International: la connaissance du contenu mathématique et la connaissance du contenu pédagogique. Les principaux résultats obtenus montrent une grande variabilité dans la distribution du nombre et du caractère des ECTS offerts; et la prédominance de la connaissance du contenu mathématique par rapport au contenu pédagogique.

MOTS CLÉS:

- *Formation initiale des enseignants*
- *Enseignement des mathématiques*
- *École primaire*
- *Programme d'études*

1. Introducción

En un contexto globalizado y altamente tecnologizado en el que la educación STEM (Science Technology Engenering Maththematics) empieza a ser el centro de interés de todas las políticas supranacionales, centrar la formación del futuro profesorado de primaria en las competencias genéricas más valoradas en los países con fuertes puntuaciones en conocimientos STEM, se convierte en una necesidad para nuestro actual sistema educativo, esto es, investigación, resolución de problemas, pensamiento crítico, innovación y creatividad (Lyn y Kishmer, 2016; López, Couso y Simarro, 2020; Valero-Matas y Cocas, 2021).

Sin embargo, la formación inicial del profesorado para el proceso de enseñanza/aprendizaje en educación matemática se ha cuestionado, especialmente a partir de los resultados evidenciados en pruebas internacionales como el Programme for International Student Assessment (PISA), Trends in International Mathematics and Science Study (TIMSS) o Teacher education and development study in mathematics (TEDS-M) (Socas, 2011; Muñiz-Rodríguez, Alonso, Rodríguez - Muñiz y Valckle, 2016).

Al realizar una aproximación a la formación inicial del profesorado de Educación Primaria, algunos trabajos expresan una considerable falta de confianza por parte de los futuros maestros y maestras en su propio conocimiento y comprensión de las matemáticas. Obviamente, no se puede enseñar lo que no se sabe por mucha motivación que uno tenga (Anderson y Kim, 2003) y lo cierto es que la etapa de Educación Primaria, siguiendo a Socas (2011), es "…una parte esencial de la Educación Obligatoria, y consideraremos al profesorado de esta etapa como un elemento básico, …, para mejorar y conseguir un aprendizaje de calidad (cognoscitivo, significativo y efectivo) en Matemáticas" (p. 200); entre otras cosas, porque en esta etapa es cuando se establecen los hábitos de razonamiento matemático de lo que depende el éxito posterior en la competencia matemática. Esta realidad, ampliamente compartida por los profesionales de la educación, ha despertado nuestro interés en conocer cómo es el perfil de los futuros maestros y maestras y cómo acceden a los estudios universitarios. Estudios previos como el realizado por Monge (1993) muestran que la mitad del alumnado elegía la profesión docente porque le gustaba. Tras cursar la titulación, a más de la mitad de la muestra le gustaba más y sólo al 11% menos. Cabe señalar, asimismo, que el porcentaje de alumnado que considera ejercer la profesión docente al finalizar los estudios se situaba en el 52%, mientras que el 39% optaba por continuar los estudios.

En esta misma línea, Sánchez (2009) ha evidenciado que una de las motivaciones de la elección de la carrera era su corta duración y que, en consonancia con el trabajo anterior, facilitaba la continuación de los estudios. Esta autora señala como factores motivantes en la elección: el salario, las vacaciones, la duración de la carrera, los insignificantes requisitos para el acceso y la vocación.

No obstante, Ruiz, García y Sarasua (2013) en su estudio orientado a conocer la perspectiva de los futuros maestros y maestros de Educación Primaria sobre educación matemática y su importancia en la formación, muestran resultados diferentes. Señalan que los estudios son fundamentalmente vocacionales, siendo seleccionados como primera opción por el 89% del alumnado; además, explican que la demanda para cursarlos se ve incrementada en la actualidad, lo que se refleja en una mayor competitividad en la entrada evidenciada en la nota de corte requerida para su acceso. En relación con el acceso a la titulación, la mayor parte del alumnado procede del bachillerato de ciencias sociales (60%), mientras que el científico-tecnológico (16%) y ciencias de la salud (24%), habiendo cursado matemáticas el 76% de la muestra en segundo de Bachillerato.

Los autores distinguen tres perfiles a partir de los resultados obtenidos. Un primer grupo de alumnado más motivado, caracterizado por haber cursado un bachillerato distinto al de ciencias sociales, que entiende que las matemáticas es una de las materias más importantes en Educación Primaria. En consecuencia, deben profundizar en su conocimiento, valoran la materia tan importante como las demás, consideran que ser buen docente es complejo y que el título contribuirá de distintas formas a su formación.

El segundo grupo que considera que ser buen docente en matemáticas es fácil, no estiman necesaria la preparación universitaria para la profesión, pero esperan que una formación de tipo pedagógico y didáctica basada en enseñar a enseñar y conocer el desarrollo evolutivo de los niños y las niñas. No perciben que más conocimientos contribuyan a ser mejores docentes y, por tanto, creen que no es necesario dominar más matemáticas de las que van a enseñar.

Por último, un tercer perfil que no es tan claro y presenta unas características intermedias entre los anteriores.

Por otra parte, la propuesta de Díaz, de la Torre y Guerrero (2006) sobre la formación inicial incide en la necesidad de un conocimiento profundo de la disciplina (contenidos matemáticos y métodos de obtención del conocimiento matemático, así como de los recursos didácticos y los procesos de matematización de distintos ámbitos: ciencias de la naturaleza, ciencias sociales…).

> Aunque la formación actual que reciben los estudiantes para maestros en las universidades españolas los debe capacitar profesionalmente para impartir docencia en cualquier materia de la Educación Primaria, la estructura que se puede contemplar en los diferentes planes de estudio no es consecuente con esa tarea. En general se ha puesto un énfasis muy claro en materias que se interesan por la cuestión educativa (pedagogía, psicología, sociología, historia de la educación, etc.), reduciendo el espacio de formación específica para cada una de las materias curriculares y su correspondiente didáctica (Díaz, de la Torre y Guerrero, 2006).

Siguiendo a Blanco (1996), la formación de maestros/as de Educación Primaria en el área de matemáticas se ve afectada por tres aspectos fundamentales: las transformaciones en el curriculum, las contribuciones que se han realizado para el aprendizaje de las matemáticas, y el contexto en el que tiene lugar el proceso de enseñanza-aprendizaje. En esta dirección, se pueden observar dos ámbitos sobre los que se estructura la formación inicial: la Didáctica, sobre la que descansa el curriculum, y el Contenido Matemático, sobre el que se establece la disciplina.

Socas (2011) plantea la representación de los diferentes ámbitos del contenido matemático y su vinculación con los aspectos didácticos y de contenido, diferenciando contenido matemático disciplinar, curricular y de enseñanza, señalando cuatro ejes en la formación en Educación Matemática: las matemáticas para los maestros, el análisis e interpretación de las producciones del alumnado, la didáctica de las matemáticas y la gestión del contenido matemático en el aula.

Ante la necesidad de alcanzar un modelo integrador entre los diferentes ámbitos del contenido matemático, este estudio se ha focalizado en el análisis de los programas que recogen la formación de futuros docentes de Educación Primaria. En España, los programas académicos de Grado se desarrollan bajo un marco orientativo del gobierno central que luego cada comunidad autónoma concreta, siendo las propias universidades en virtud de su autonomía, quienes configuran el plan de estudios de la formación del futuro docente de Educación Primaria.

2. Problema de investigación y marco teórico

El propósito principal de este trabajo ha sido analizar el tipo de conocimiento matemático que se refleja en los planes de estudio de las titulaciones de Grado en Educación Primaria en las universidades públicas españolas. Para ello se ha realizado una aproximación comparada de las guías docentes de las materias del área de Didáctica de las Matemáticas. Concretamente, se ha llevado a cabo un estudio exploratorio de carácter comparado nacional que tiene como objetivo conocer las tendencias y la estructura de los programas académicos en la formación inicial en el campo de la educación matemática, así como las diferencias que se pueden observar en los mismos.

Los programas de formación del profesorado en los que trabajamos se basan en un modelo propuesto en el marco de la convergencia en Europa. Se ha tomado como referencia el trabajo realizado por Rico, Gómez y Cañadas (2014) sobre los programas de la formación inicial en relación con el estudio TEDS-M (Tatto, Schwille, Senk, Ingvarson, Peck y Rowley, 2012) con carácter previo a la reforma curricular de la Ley Orgánica 8/2013, de Mejora de la Calidad en Educación y a la aprobación de los nuevos planes de estudio para los maestros de Educación Primaria, que se aprobaron y publicaron principalmente a partir del 2010.

Nuestro encuadre teórico se contextualiza en la perspectiva sociocultural de la matemática educativa al asumir las practicas sociales como la base de la construcción del conocimiento matemático en los futuros profesores de primaria, en tanto en cuanto, los objetivos del presente estudio no se focalizan en el estudio de la matemática como disciplina científica, sino en el cuestionamiento sobre el saber matemático que se está enseñando a los futuros maestros y maestras de educación primaria en las facultades de ciencias de la educación (Reyes-Gasperini y Cantoral, 2014; Guerrero, 2021).

Recientes estudios (Ball, 2000; Anderson y Kim, 2003; Morales, Anderson y McGowan, 2003; Hill, Ball y Schilling, 2008; Appova y Taylor, 2020) nos proporcionan una importante distinción entre saber matemáticas y la manera en que se capacita su uso en la práctica. Esta idea es clave para entender como el conocimiento de las matemáticas se transforma en una buena enseñanza. No se trata sólo de saber lo que los profesores de primaria saben de matemáticas, sino también de cómo lo saben y cuáles son sus creencias sobre la disciplina que enseñan.

A partir de la clasificación de los tipos de conocimiento de Shulman (1986, 1987), Carrillo et al. (2018) nos informan de la existencia de diferentes modelos enfocados en conceptualizar y caracterizar el conocimiento necesario para el profesorado. Entre los modelos destacados se encuentra el Mathematics Teacher's Specialised Knowledge (MTSK) (Carrillo et al., 2018). Este modelo es definido por los propios autores como una conceptualización del conocimiento del profesor que presta atención al carácter especializado de las matemáticas, además del conocimiento que le es útil y necesario al profesorado de matemáticas y su relación con el proceso de su enseñanza y aprendizaje. De esta forma, el MTSK considera los siguientes dominios: *Conocimiento Matemático* (*Mathematical Knowledge*, MK); *Conocimiento Didáctico del Contenido* (*Pedagogical Content Knowledge*, PCK), y, además el dominio Creencias sobre la matemática y sobre su enseñanza y aprendizaje.

De acuerdo con Carrillo et al. (2018), el carácter especializado del conocimiento del profesor se encuentra en la integración y las relaciones entre los diferentes conocimientos en distintas dimensiones, lo que deriva de su labor docente. Sin embargo, tal y como señalan Anderson y Kim (2003), faltan estudios concluyentes que conecten la necesidad del *conocimiento del contenido matemático* (*Mathematical Content Knowledge*, MCK) y el PCK con los logros en matemáticas del alumnado.

Con relación a las creencias y la solidez en las mismas, los perfiles se aproximan a los resultados de Latorre y Pérez (2005). Estas autoras realizan su investigación a partir de su acercamiento al ámbito laboral, diferenciando los que no habían cursado las prácticas de los que lo habían hecho. Con respecto al primer grupo, aunque todos comparten un planteamiento positivo con respecto a la aproximación a la práctica docente, se pueden diferenciar dos perfiles, mientras que un grupo se siente más comprometido y con creencias más sólidas y sostenidas;

el otro grupo demuestra una actitud más cómoda y laxa. En relación con los que no han cursado prácticas, se aprecian también dos perfiles diferenciados por su intensidad en las creencias y compromiso con las cuestiones planteadas.

De acuerdo con su perfil y creencias sobre las competencias matemáticas, Escolano, Gairín, Jiménez-Gestal, Murillo y Roncal (2012) estudian tres variables: competencia matemática, dificultad en matemáticas y capacidad para comprender cómo enseñar matemáticas. Sus resultados muestran que el perfil de alumnado que presenta dificultades con las matemáticas manifiesta su capacidad para entender los elementos clave de cómo enseñarlas. Incluso un 10% del alumnado de este perfil, pese a su escasa competencia matemática, afirman no tener inseguridad para explicarlas.

Por otra parte, las experiencias escolares que han tenido los futuros maestros y maestras de primaria en relación a esta disciplina van a influir también en su efectividad a la hora de enseñarla. Una buena preparación docente, promoverá una disposición positiva hacia las matemáticas (Bambico, 2003; Barrantes y Blanco, 2006; Cardetti y Truxaw, 2014).

En esta línea, Polly et al. (2013) citando a Askew, Browon, Rhodes, Johnson y Williams (1997) menciona la importancia que tienen las creencias del profesorado sobre las matemáticas y su forma de enseñarlas distinguiendo tres orientaciones: transmisión, descubrimiento y conectividad. De esta manera, el profesorado vinculado al modelo transmisor cree que las matemáticas son un conjunto de reglas fijas que deben transmitirse o presentarse a los estudiantes. No obstante, aquel vinculado al modelo por descubrimiento concibe las matemáticas como un conjunto de conocimientos que se aprenden mejor a través de la exploración guiada del estudiante. Por su parte, el docente orientado por la teoría de la conectividad concibe las matemáticas como un conjunto de conceptos entrelazados y se basa en las experiencias previas para ayudar a los estudiantes a aprender a hacer relaciones entre los distintos tópicos matemáticos.

En lo referido al proceso de aprendizaje del conocimiento de la disciplina, los resultados en PISA concluyen que la memorización en matemáticas es importante para resolver problemas sencillos, pero si se trata de asuntos complejos, el alumnado español tiene cuatro veces menos probabilidad de éxito que los estudiantes de Shanghái o Hong-Kong (Hsieh et al., 2011). Sin embargo, un alto porcentaje de futuros maestros y maestras creen que necesitan explicar matemáticas a los estudiantes con procedimiento matemáticos. Vienen de aprender matemáticas con modelos transmisivos, centrados en el profesorado y en donde los errores se traducen en una falta de interés del que aprende.

El estudio de Escolano et al. (2012) revela el predominio de la Aritmética sobre la Geometría en los procesos de aprendizaje de competencia matemática de los futuros docentes. En Geometría presentan una mayor dificultad para la comprensión de conceptos. Asimismo, evidencia que la competencia matemática de los futuros maestros y maestras es un elemento que vertebra sus creencias sobre la Educación Matemática y sobre el desarrollo profesional docente. En consecuencia, si no se cambia el modelo formativo es muy probable que opten por la reproducción del modelo aprendido.

Paradójicamente, Sellers (2004), explica que investigaciones sobre la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas nos informan que los niños y las niñas no entienden las matemáticas cuando sólo se les da instrucciones para hacer un problema o memorizar un procedimiento. El método del libro de texto, "mostrar, contar y demostrar" parece no ser suficiente. Una enseñanza de las matemáticas efectiva exige que los estudiantes de primaria piensen y razonen, que investiguen y exploren diferentes métodos.

Por ello, estudiar las relaciones entre el perfil de profesor de matemáticas de primaria, la calidad de la enseñanza de las matemáticas y las relaciones entre el MCK y el PCK, se convierte en una prioridad política y social. Sin embargo, todavía no existe consenso sobre qué contenidos o conocimientos en educación matemática son necesarios para la formación de un maestro/a (Copur-Gencturk y Lubienski, 2013). De esta manera, se hace necesario repensar la formación inicial y el peso que en ella tiene el PCK al entender que este tipo de conocimiento es clave para que el conocimiento de las matemáticas se transforme en una buena enseñanza. Norton (2020) o Cardetti y Truxaw (2014) señalan que lo que no se ha descubierto claramente es cómo el profesorado adquiere el conocimiento matemático para enseñar, destacando insuficiencias en la formación universitaria en este sentido.

La necesidad de confluir hacia una formación común del profesorado de Primaria en el conjunto de los países europeos impone que los programas de formación del profesorado deberán capacitar al profesorado para desempeñar su trabajo en cualquier estado de la Unión Europea, además de facilitar la movilidad del estudiantado durante la realización de sus estudios superiores. De ahí que todas las titulaciones de la Unión Europea tengan la necesidad de cuantificar sus materias de la misma forma, y surge por ello el crédito ECTS (European Credit Transfer and Accumulation System). Se pretende no sólo reformar los títulos, sino lograr un modelo atractivo y exportable, una educación de calidad y universal. La nueva estructura de educación superior se organiza en tres ciclos: Grado (240 ECTS), Máster (60 ECTS) y Doctorado (60 ECTS de formación y tesis doctoral).

Para configurar estos planes de estudios se crea en España en el año 2003 la llamada "red de Magisterio" establecida como consecuencia de una convocatoria de la Agencia Nacional de Evaluación de la Calidad y Acreditación (ANECA), para incorporar los estudios de Magisterio a la normativa de Bolonia. Esta red, de la que formaban parte prácticamente todos los directores y directoras de las Escuelas de Magisterio y los decanatos de las Facultades de Educación (en total eran 44 participantes) publica el Libro Blanco de la Titulación de Magisterio (ANECA, 2005), donde se proponen dos titulaciones. Una de Maestro/a de Educación Infantil y otra de Maestro/a de Educación Primaria (con carácter generalista y al mismo tiempo especializado) con una duración de 240 ECTS (distribuidos en cuatro cursos). Se establece un bloque de materias troncales (en torno al 70% de la titulación) y cuatro itinerarios formativos (Lengua Extranjera, Educación Física, Educación Musical y Educación Especial) especializados en el caso de Educación Primaria. La formación práctica recibe 42 ECTS y las materias básicas del currículo pasan a tener un peso de 102 ECTS.

En cuanto a las materias, se organizaron en distintos bloques: materias comunes (psico-socio-pedagógicas), materias comunes de áreas del currículo (Matemáticas, Lengua, Ciencias, Geografía e Historia y Educación Artística-plástica), materias específicas de cada itinerario (Educación Física, Educación Musical, Educación Especial o Lengua Extranjera), prácticas docentes (Prácticum) y créditos de libre disposición.

La distribución de asignaturas y créditos en estos títulos sería de 240 ECTS totales, distribuidos en 180 correspondientes a la formación básica y 60 destinados a la formación adicional de orientación académica o profesional (Tabla I).

TABLA I

Contenidos formativos comunes recogidos en el Libro Blanco de Magisterio

Denominación de las materias de Maestro Educación Primaria	*Nº mínimo de ECTS*
Enseñanza y aprendizaje de las Ciencias Experimentales	14
Enseñanza y aprendizaje de las Ciencias Sociales	14
Enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas	20
Enseñanza y aprendizaje de las Lenguas	22
Enseñanza y aprendizaje de los ámbitos musical, plástico y visual	10
Enseñanza y aprendizaje de la Educación Física	8
Procesos y contextos educativos	14
Aprendizaje y desarrollo de la personalidad (6-12 años)	10
Familia y escuela	8

Fuente: Agencia Nacional de Evaluación de la Calidad y Acreditación (2005)

La Ley Orgánica 4/2007, de 12 de abril, por la que se modifica la Ley Orgánica 6/2001, de 21 de diciembre de Universidades, facilita a las propias universidades la creación de las enseñanzas y títulos que se hayan de impartir y expedir, sin sujeción a la existencia de un catálogo previo establecido por el Gobierno, como hasta ahora era obligado. También se flexibiliza la organización de las enseñanzas universitarias, promoviendo la diversificación curricular y permitiendo que las universidades aprovechen su capacidad de innovación, sus fortalezas y oportunidades.

Por otra parte, la nueva organización de las enseñanzas universitarias responde no sólo a un cambio estructural, sino que además impulsa un cambio en las metodologías docentes centrando, el objetivo en el proceso de aprendizaje del estudiante, en un contexto que se extiende a lo largo de la vida. En particular, la principal característica de este nuevo modelo radica en la pretensión de promover el trabajo autónomo del alumnado, al que se quiere implicar de forma más activa en el proceso de aprendizaje; y en una atención más individualizada a los estudiantes. En este sentido, las clases expositivas son complementadas por otras de carácter interactivo y, en caso de existir capacidad docente suficiente, por clases tutorizadas. Otras novedades consisten en la obligatoriedad de realizar y defender un trabajo de fin de grado y en la potenciación de prácticas externas orientadas a familiarizar al estudiantado con el mundo profesional.

Para conseguir estos objetivos, en el plan de estudios de una titulación de Grado deben reflejarse más elementos que la mera descripción de los contenidos formativos. Este nuevo modelo concibe el plan de estudios como un proyecto de implantación de una enseñanza universitaria. Como tal proyecto, para su aprobación se requiere la aportación de nuevos elementos como: justificación, objetivos, admisión de estudiantes, contenidos, planificación, recursos, resultados previstos y sistema de garantía de calidad. Los planes de estudio conducentes a la obtención de un título deberán, por tanto, tener en el centro de sus objetivos la adquisición de competencias por parte de los estudiantes, ampliando, sin excluir, el tradicional enfoque basado en contenidos y horas lectivas. Se debe hacer énfasis en los métodos de aprendizaje de dichas competencias, así como en los procedimientos para evaluar su adquisición.

La ORDEN ECI/3857/2007, de 27 de diciembre, establecen los requisitos para la verificación de los títulos universitarios oficiales que habiliten para el ejercicio de la profesión de Maestro/a en Educación Primaria:

1. Conocer las áreas curriculares de la Educación Primaria, la relación interdisciplinar entre ellas, los criterios de evaluación y el cuerpo de

conocimientos didácticos en torno a los procedimientos de enseñanza y aprendizaje respectivos.

2. Diseñar, planificar y evaluar procesos de enseñanza y aprendizaje, tanto individualmente como en colaboración con otros docentes y profesionales del centro.
3. Abordar con eficacia situaciones de aprendizaje de lenguas en contextos multiculturales y plurilingües. Fomentar la lectura y el comentario crítico de textos de los diversos dominios científicos y culturales contenidos en el currículo escolar.
4. Diseñar y regular espacios de aprendizaje en contextos de diversidad y que atiendan a la igualdad de género, a la equidad y al respeto a los derechos humanos que conformen los valores de la formación ciudadana.
5. Fomentar la convivencia en el aula y fuera de ella, resolver problemas de disciplina y contribuir a la resolución pacífica de conflictos. Estimular y valorar el esfuerzo, la constancia y la disciplina personal en los estudiantes.
6. Conocer la organización de los colegios de Educación Primaria y la diversidad de acciones que comprende su funcionamiento. Desempeñar las funciones de tutoría y de orientación con los estudiantes y sus familias, atendiendo las singulares necesidades educativas de los estudiantes. Asumir que el ejercicio de la función docente ha de ir perfeccionándose y adaptándose a los cambios científicos, pedagógicos y sociales a lo largo de la vida.
7. Colaborar con los distintos sectores de la comunidad educativa y del entorno social. Asumir la dimensión educadora de la función docente y fomentar la educación democrática para una ciudadanía activa.
8. Mantener una relación crítica y autónoma respecto de los saberes, los valores y las instituciones sociales públicas y privadas.
9. Valorar la responsabilidad individual y colectiva en la consecución de un futuro sostenible.
10. Reflexionar sobre las prácticas de aula para innovar y mejorar la labor docente. Adquirir hábitos y destrezas para el aprendizaje autónomo y cooperativo y promoverlo entre los estudiantes.
11. Conocer y aplicar en las aulas las tecnologías de la información y de la comunicación. Discernir selectivamente la información audiovisual que contribuya a los aprendizajes, a la formación cívica y a la riqueza cultural.
12. Comprender la función, las posibilidades y los límites de la educación en la sociedad actual y las competencias fundamentales que afectan a los colegios de Educación Primaria y a sus profesionales. Conocer modelos de mejora de la calidad con aplicación a los centros educativos.

3. Metodología

Con el fin de conocer en mayor profundidad la literatura científica sobre la temática abordada, se ha realizado una revisión bibliográfica con las siguientes palabras clave: “Preservice Teacher Education”, “Mathematics Education” y “Primary Education”. Se ha indagado en cuatro bases de datos de relevancia en el ámbito educativo, tres internacionales (APA PsycInfo, ERIC y Psychology Database) y en una nacional (DIALNET). Como filtros se ha aplicado un límite temporal de los últimos diez años y se han incluido los artículos evaluados por expertos y publicados en revistas científicas. Como resultado se han obtenido 19 artículos, de los cuales por su pertinencia en relación con este estudio se han seleccionado dos, que hemos complementado con otros trabajos que sustentan teóricamente nuestra propuesta.

La revisión bibliográfica llevada a cabo ha evidenciado la demanda de seguir investigando sobre educación matemática y la formación docente (Blanco, 1996; Anderson y Kim, 2003; Palarea, 2011; Shain y Soylu, 2017; Da Silva y Zeichner, 2021). Esta necesidad ha sido corroborada por distintos trabajos como el de Norton (2020), Muñiz-Rodríguez, Aguilar-González, Rodríguez-Muñiz (2020) y González y Sánchez (2020).

Se ha realizado un análisis exploratorio descriptivo comparado con el objetivo de extraer toda la información que hiciera referencia a las materias relacionadas con la Educación Matemática (Matemáticas y Didáctica de las Matemáticas) de los planes de estudio de la titulación del Grado en Educación Primaria, siguiendo el modelo de Clasificación Internacional Normalizada de la Educación (CINE 1) (UNESCO, 2013).

La aproximación metodológica comparada se ha planteado utilizando fuentes primarias de 39 universidades públicas españolas. Las fases de investigación han sido: selección y definición del problema, formulación de la hipótesis de partida y elección de la unidad de análisis (Rasmussen y Zou, 2014; Caballero, Manso, Matarranz y Valle, 2016; Egido y Martínez-Usarralde, 2019). El acceso a estas fuentes se ha realizado a través de las páginas web oficiales de cada una de estas universidades.

El parámetro de comparación y los indicadores se han establecido a partir del marco recogido en el informe TEDS-M International (2012). El primer parámetro es el conocimiento del contenido matemático (MCK) con dos dominios: el dominio de contenido con cuatro subdominios: Números y operaciones, Geometría y medida, Álgebra y funciones y Estadística y probabilidad; y el dominio cognitivo con tres subdominios: Conocimiento, Aplicación y Razonamiento.

El segundo parámetro es el conocimiento del contenido pedagógico de matemáticas (PCK), en el que se diferencian tres subdominios: Conocimiento del curriculum de matemáticas, Conocimiento para la planificación del proceso de enseñanza-aprendizaje en matemáticas y Promoción de las matemáticas para la enseñanza y aprendizaje.

Se ha utilizado como indicadores del estudio comparado el curso, el número de créditos y el carácter (formación básica, obligatoria y optativa). Para la recogida de la información, se ha confeccionado una base de datos ad hoc, asignando el valor de 0 a la ausencia de los parámetros con sus subdominios y el valor de 1 a su presencia en los planes de estudio.

Se han establecido las siguientes preguntas de investigación:

- P1. En la formación de la educación matemática, ¿el MCK predomina sobre el PCK? ¿Predomina del mismo modo tanto en la formación obligatoria, como en la formación optativa?
- P2. En los planes de estudio, ¿dentro del MCK cómo se trabajan los dominios de contenido y cognitivo? ¿qué subdominios predominan?
- P3. En los planes de estudio donde se trabaja el PCK, ¿qué subdominio predomina?

4. Resultados

Teniendo en cuenta los objetivos propuestos de investigación se inicia el análisis de los resultados, presentando los ECTS obligatorios y optativos que ofrecen las distintas universidades públicas españolas en formación de Educación Matemática (se puede consultar en la Tabla II). Se puede observar que la oferta difiere tanto entre comunidades autónomas, como entre las propias universidades dentro de una misma comunidad autónoma. Tampoco hay una tendencia homogénea en el número de créditos. Más bien podemos observar una gran diversidad y heterogeneidad, ya que tenemos universidades con planes de estudio que recogen únicamente 12 créditos obligatorios en formación matemática, mientras otras ofrecen 24 créditos. De forma similar ocurre con los créditos optativos, nos podemos encontrar con universidades que no ofrecen ningún crédito optativo en formación matemática y otras que ofrecen hasta 33 créditos.

Sólo hemos encontrado dos comunidades autónomas, Canarias y Comunidad Valenciana, que ofrecen en todas sus universidades tanto formación obligatoria, como optativa; aunque la oferta de la primera es más uniforme que la de la segunda.

TABLA II
Distribución de obligatoriedad y optatividad de los ECTS de las universidades españolas

Comunidad Autónoma	*ECTS obligatorios*	*ECTS optativos*	*Total de ECTS*
Andalucía	*166*	*12*	*178*
Universidad de Almería	24		24
Universidad de Cádiz	24	6	30
Universidad de Córdoba	18		18
Universidad de Granada	22	6	28
Universidad de Huelva	21		21
Universidad de Jaén	18		18
Universidad de Málaga	21		21
Universidad de Sevilla	18		18
Asturias (Universidad de Oviedo)	*18*		*18*
Canarias	*39*	*15*	*54*
Universidad de La Laguna	20	9	29
Universidad de Las Palmas de Gran Canaria	19	6	25
Cantabria (Universidad de Cantabria)	*18*	*6*	*24*
Castilla la Mancha (Universidad de Castilla-La Mancha)	*18*		*18*
Castilla y León	*65*	*32*	*97*
Universidad de Burgos	18		18
Universidad de León	12	8	20
Universidad de Salamanca	17	12	29
Universidad de Valladolid	18	12	30
Cataluña	*89*	*63*	*152*
Universidad Autónoma de Barcelona	17	30	47
Universidad de Barcelona	18	12	30
Universidad de Girona	16	21	37
Universidad Rovira i Virgili	18		18
Universitat de Lleida	20		20
Comunidad de Madrid	*72*	*57*	*129*
Universidad Autónoma de Madrid	18	33	51
Universidad Complutense de Madrid	18	24	42
Universidad de Alcalá	18		18
Universidad Rey Juan Carlos	18		18

Extremadura (Universidad de Extremadura)	*18*		*18*
Galicia	*48*	*10,5*	*58,5*
Universidad de A Coruña	18	4,5	22,5
Universidad de Santiago de Compostela	18		18
Universidade de Vigo	12	6	18
Islas Baleares (Universitat de las Illes Balears)	*18*		*18*
La Rioja (Universidad de La Rioja)	*18*	*4,5*	*22,5*
Murcia (Universidad de Murcia)	*21*	*3*	*24*
Navarra (Universidad Pública de Navarra)	*18*		*18*
País Vasco (Universidad del País Vasco)	*15*	*6*	*21*
Valencia	*57*	*42*	*99*
Universidad de Alicante	18	6	24
Universitat de València	21	30	51
Universitat Jaume I de Castellón	18	6	24
Aragón (Universidad de Zaragoza)	*18*	*6*	*18*
Total general	*716*	*257*	*973*

Fuente: Elaboración propia

En cuanto a la distribución de créditos por curso y carácter de la materia (Figura 1), teniendo en cuenta el diseño de los planes de estudio, la mayor carga de créditos obligatorios está en los dos primeros cursos (1º y 2º), concentrándose mayoritariamente la oferta optativa en 3º y 4º curso. Si bien, hay universidades que ofrecen esta formación ya desde 2º curso, y la obligatoriedad se extiende entre los cuatro cursos, siendo su concentración mayor en 1º, 2º y 3º.

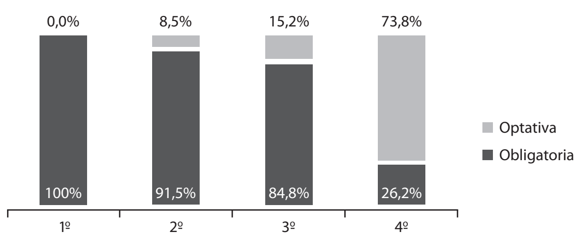


Figura 1. Distribución de ECTS por curso y por carácter de la materia

En general, se puede observar una tendencia en la formación de mantener un cierto equilibrio entre el parámetro del MCK con el parámetro del PCK, si bien con un relativo predominio del primero sobre el segundo en dos comunidades autónomas (País Vasco y la Rioja, Figura 2).

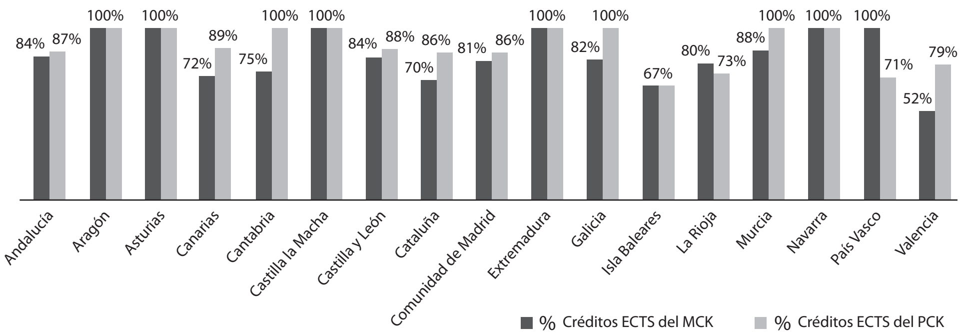


Figura 2. Porcentaje de la distribución de ECTS por parámetros: MCK y PCK

En particular, si analizamos esta situación comparando la oferta obligatoria de créditos y la optativa se puede observar que en seis comunidades autónomas los conocimientos PCK y MCK están igualmente presentes en la oferta obligatoria, y cuando esta situación de igualdad no se da, predomina el MCK (Figura 3).

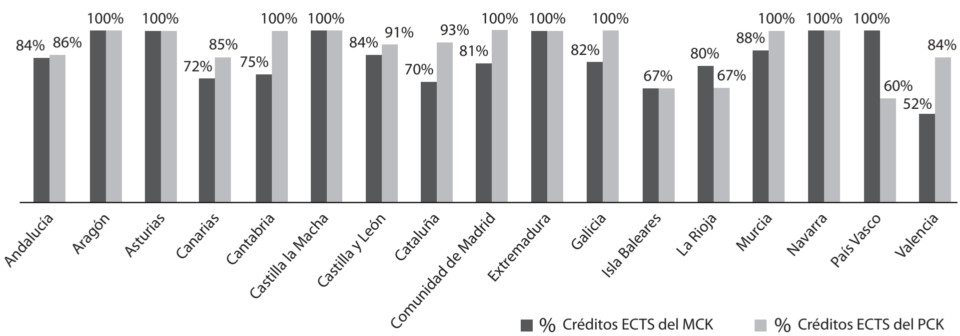


Figura 3. Porcentaje de la distribución de ECTS por parámetro en la obligatoriedad: MCK y PCK

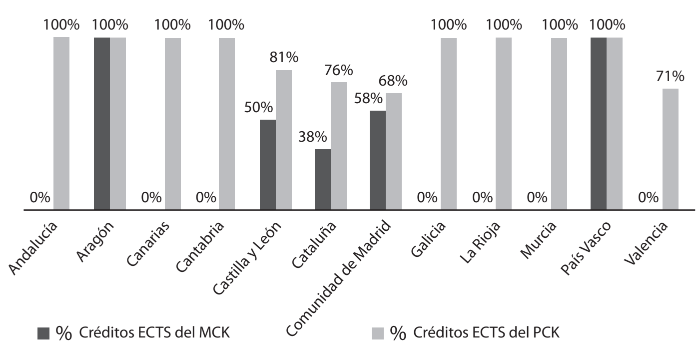


Figura 4. Porcentaje de la distribución de ECTS por parámetro en la optatividad: MCK y PCK

Mientras, en la oferta optativa (Figura 4), el conocimiento que más presencia tiene es el PCK, estando exclusivamente presente en siete comunidades autónomas.

En relación al curso, podemos comprobar una tendencia opuesta en el comportamiento de ambos parámetros. Así, mientras que el MCK va disminuyendo su presencia a medida que avanzamos en el curso, el PCK va aumentando progresivamente hasta decaer levemente en cuarto curso (Figura 5).

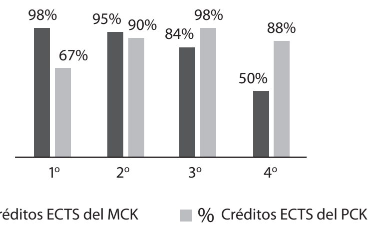


Figura 5. Distribución en porcentaje del parámetro MCK o PCK por curso

Como podemos ver en la Tabla II hay nueve universidades con una oferta de formación matemática obligatoria con un número mayor o igual a veinte ECTS. Se puede observar que el MCK es igual o predominante con respecto al PCK, excepto en un caso (Figura 6).

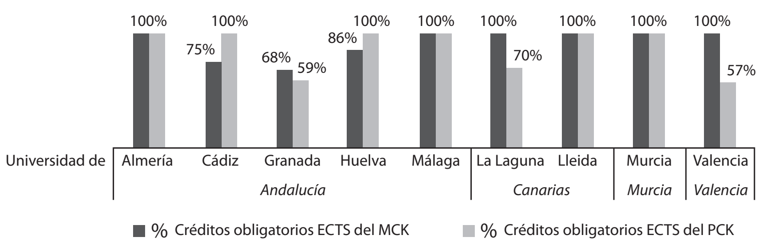


Figura 6. Porcentaje de la distribución de ECTS por parámetro: MCK y PCK en las comunidades autónomas que tienen universidades con una formación matemática mayor o igual a 20 créditos

Con respecto a la segunda pregunta de investigación, si estudiamos los dominios del MCK, podemos ver en la Figura 7 como en siete comunidades autónomas (Aragón, Asturias, Canarias, Castilla la Mancha, Comunidad de Madrid, Extremadura y Galicia) el *Dominio Cognitivo* del MCK prevalece (su presencia es más del doble) sobre el *Dominio de Contenido,* siendo esta presencia en el resto de comunidades mayor, pero no tan acusada, excepto en el País Vasco que su presencia es igual (67%).

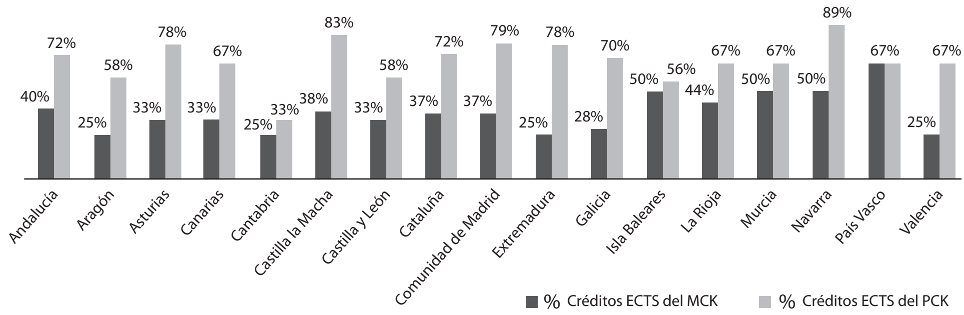


Figura 7. Porcentaje de la distribución de ECTS por domino del MCK

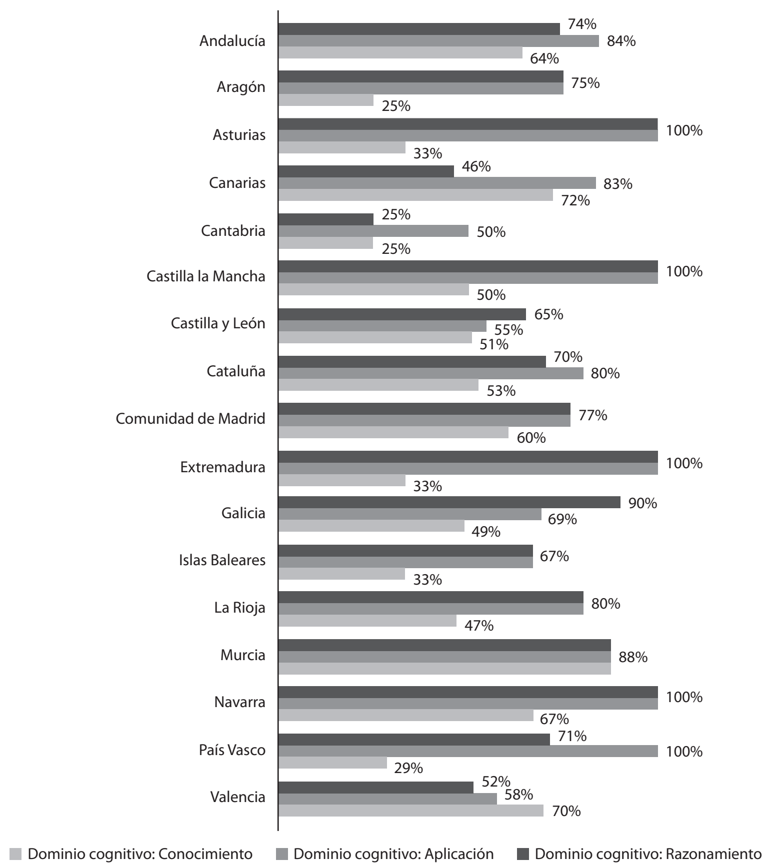


Figura 8. Porcentaje de la distribución de subdominios del dominio cognitivo del MCK

En cuanto al *Dominio Cognitivo* del MCK, se puede observar una tendencia en la distribución de sus subdominos (Figura 8), evidenciándose una menor presencia del subdominio *cognitivo de razonamiento* frente a los *subdominios de conocimiento y de aplicación*.

Si analizamos los subdominios del dominio del contenido del MCK se puede observar que el de *Números y operaciones* es el dominante en Aragón, Galicia y País Vasco; mientras que el de *Geometría y medida* tiene mayor presencia en Andalucía, Asturias, Castilla y León, Cataluña y Comunidad de Madrid. Es destacable también que Canarias presente el subdominio de *Algebra y funciones* como el predominante, siendo éste el minoritario en el resto de las comunidades autónomas. También se puede observar que Castilla la Mancha, Extremadura, Islas Baleares y Murcia, presentan el mismo peso porcentual en los tres subdominios que tienen y Cantabria en sus dos subdominos (Figura 9).

En lo que respecta a la tercera pregunta que nos hemos planteado, seis comunidades autónomas no desarrollan el subdominio *Promoción de las matemáticas para la enseñanza y el aprendizaje,* siendo únicamente en la comunidad autónoma de las Islas Baleares donde existe un equilibrio entre los tres subdominios. Es destacable una cierta variabilidad en el porcentaje de los otros dos subdominios (*Conocimiento matemático curricular* y *Conocimientos de planificación para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas*), siendo el segundo el de mayor presencia en la mayoría de las comunidades autónomas (Figura 10).

5. Discusión y conclusiones

Considerando los objetivos de investigación, los primeros resultados obtenidos apuntan a una formación matemática en el estado español muy dispar, tanto por comunidades autónomas con competencias en materia educativa, como por universidades dentro de cada comunidad. Esto se refleja por un lado en las materias obligatorias que deben cursar, cuya configuración en el número de créditos puede variar desde los 12 hasta 24, con una media de 18,36 créditos obligatorios y una desviación típica de 2,38. Esta formación obligatoria se puede complementar con una formación optativa en universidades donde ofrecen un mínimo de 4,5 créditos y un máximo de 33 créditos, con una media de 6,43 y desviación típica de 9,18. También es reseñable que las universidades que tienen un mayor número de créditos obligatorios, no son las que ofrecen un mayor número de créditos

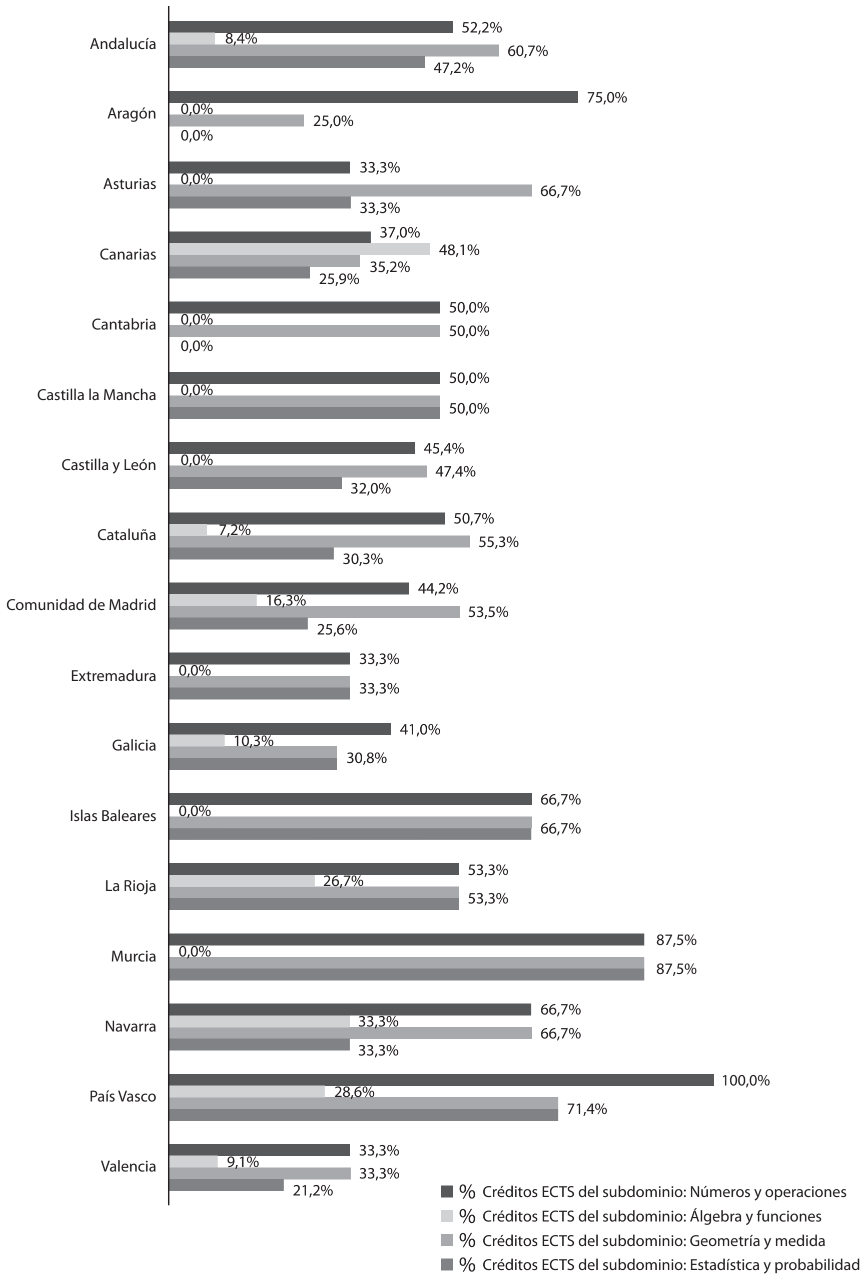


Figura 9. Porcentaje de la distribución de subdominios del contenido curricular del MCK

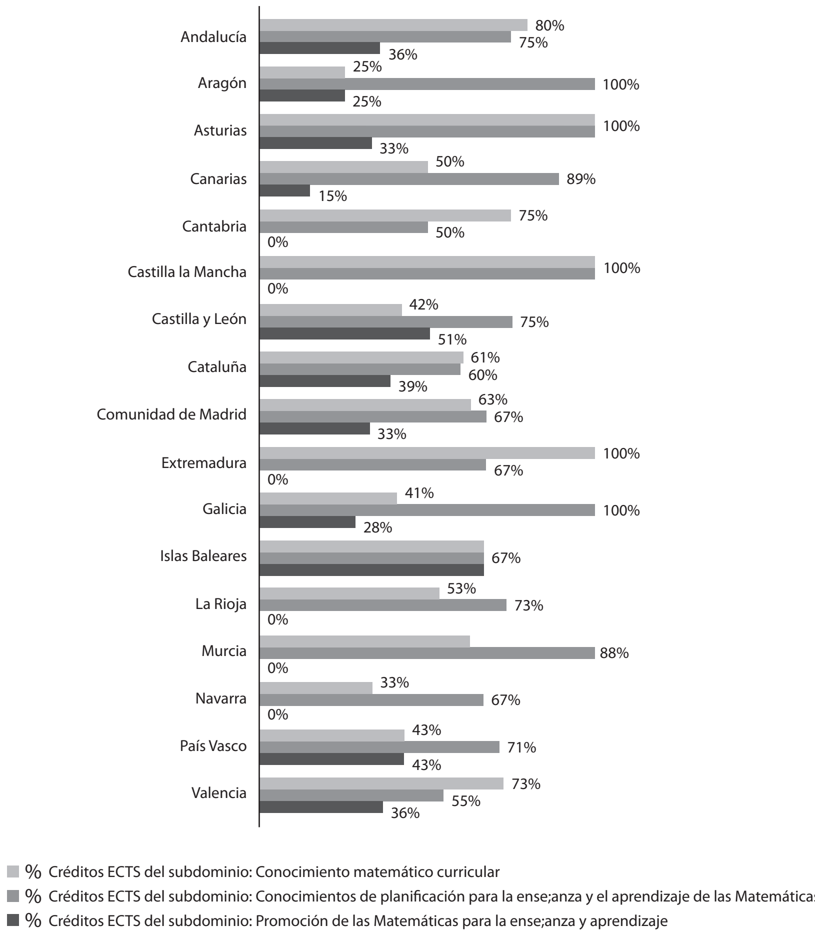


Figura 10. Porcentaje de la distribución de subdominios del PCK

optativos. Ni tampoco, las que tienen mayor número de créditos optativos, son las que mayor número de créditos obligatorios tienen.

Esta conclusión se evidencia en la Tabla II, recogida en los resultados, y reafirma las conclusiones de Rico, Gómez y Cañadas (2014), que manifiestan "una incipiente diversificación de las materias orientadas hacia la formación del maestro como profesor de matemáticas" (p.55). Sin embargo, no se puede constatar que se mantengan las recomendaciones nacionales como evidenciaban estos autores en el citado trabajo. Si se tienen en cuenta las recomendaciones recogidas en el Libro Blanco (ANECA, 2015), la formación en Educación

Matemática de un futuro docente debería tener al menos 20 ECTS obligatorios. No obstante, la media de créditos no cumple esta recomendación ya que sólo 9 de las 39 universidades ofrecen como mínimo ese número de créditos, es decir aproximadamente el 23,1%.

En este sentido, coincidiendo con los resultados de otros estudios (Palarea, 2011; Copur-Gencturk y Lubienski, 2013; Rico, Gómez y Cañadas, 2014), no se ha identificado una tendencia, pudiéndose observar divergencias en la oferta de formación inicial en cuanto al número de créditos. Por el contrario, sí parece haber una tendencia más homogénea en cuanto al carácter de las materias ofertadas y su distribución por cursos en la formación optativa y obligatoria. En los primeros cursos tiene lugar la formación obligatoria y en los últimos cursos la optativa.

Esta cuestión que puede parecer a simple vista una obviedad, por ser un consenso entre universidades, puede tener efectos en la distribución del peso otorgado al PCK y al MCK en la formación. De esta manera, en relación a la primera pregunta de nuestra investigación, nuestros resultados afirman que el MCK domina en la formación obligatoria, mientras que el PCK tiene una mayor presencia en la optatividad. Esta realidad puede inferir lo expuesto en el estudio de Anderson y Kim (2003), previamente es necesario afianzar el dominio de la disciplina para poder enseñarla posteriormente, y, por tanto, podría decirse que los planes de estudio se elaboran desde este supuesto.

La respuesta a la segunda pregunta de la investigación con respecto a los dominios del MCK que predominan en los planes de estudio del futuro docente de primaria, los resultados obtenidos evidencian que, mayoritariamente, el dominio cognitivo prevalece sobre el dominio de contenido. Particularmente, en el Dominio Cognitivo del MCK, los subdominios más trabajados son los que potencian un pensamiento más concreto: el de Conocimiento y Aplicación; frente al subdominio más abstracto de Razonamiento, que es significativamente el menos empleado en la formación de los futuros maestros y maestras de Educación Primaria. En la línea de los estudios de Polly et al. (2013), este resultado puede corroborar la presencia aun dominante del modelo de formación transmisor que concibe las matemáticas como un conjunto de reglas fijas que deben transmitirse a los estudiantes. Como afirman Bosch y Gascón (2005) se observa una influencia creciente del tecnicismo que identifica implícitamente “enseñar y aprender matemáticas” con “enseñar y aprender técnicas simples”.

Cabe preguntarse si un modelo de formación inicial con estas características responde a la propuesta planteada por Sellers (2004) en el que asocia una enseñanza de las matemáticas efectiva con el pensamiento y el razonamiento lo que conlleva necesariamente a explorar nuevos modelos de formación docente más vinculados con el modelo de aprendizaje por descubrimiento y de una enseñanza interdisciplinar que conecte los nuevos conocimientos con los conocimientos previos, que contextualice el aprendizaje y enseñe a establecer relaciones entre los distintos subdominios matemáticos.

Esta conclusión, podría estar relacionada con el estudio de Hsieh et al. (2011) y presenta una línea de investigación futura, donde se asocian los dominios cognitivos, el rendimiento de los estudiantes y la preparación docente, ya que, si la formación inicial del profesorado muestra una menor presencia del subdominio de Razonamiento, quizás podría darse una menor preparación de nuestro alumnado de Educación Primaria en este sentido.

Por otra parte, teniendo en cuenta el domino de contenido del MCK, podemos concluir que el subdomino de Álgebra y Funciones casi no está presente, al no ser un conocimiento curricular propio de la etapa de Educación Primaria. También se puede destacar que el subdominio de Estadística y Probabilidad es de los menos trabajados en consonancia con el desarrollo curricular actual de esta etapa educativa (Educación Primaria). Tal vez esto sucede porque como se demuestra en el estudio de Escolano et al. (2012), la dificultad para la comprensión de determinados conceptos matemáticos por parte de los futuros maestros y maestras puede estar condicionando el predominio de un subdominio sobre otro a la hora de elaborar los planes de estudio de las respectivas universidades. Así, tal y como apuntan Bosch y Gascón (2004) se mantiene la tendencia en los planes de estudios a "atomizar" los contenidos matemáticos, ya que no existe un consenso sobre qué contenidos son necesarios para la formación de un/a maestro/a como ya afirmaban Copur-Gencturk y Lubienski (2013).

Por lo que respecta a la tercera pregunta de investigación que nos hemos planteado, en lo relativo al segundo parámetro, el PCK*,* el subdominio de *Promoción de las matemáticas para la enseñanza y el aprendizaje* es el menos enseñado en la formación de los futuros docentes. De esta forma, se explicita la necesidad de explorar nuevos métodos que enseñen a los/as futuros/as maestros/as a conectar el MCK con el PCK y conseguir así mejores resultados en los futuros estudiantes de primaria. El modelo de formación debería enseñar a los futuros docentes a aprender a aprender matemáticas desde un modelo que integre reflexión-conocimiento-acción (Schön, 1992), porque no se trata sólo de saber lo qué el profesorado sabe de matemáticas, sino cómo lo saben y qué pueden movilizar matemáticamente durante su proceso de enseñanza (Chick y Harris, 2007). Como señala Reyes-Gasperini y Cantoral (2014) el problema de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas va más allá de las explicaciones didácticas o a rellenar los agujeros de contenidos matemáticos entre estudiantes y profesores, se trata del cuestionamiento del saber matemático escolar inmerso en la vida del sistema didáctico.

Desde la perspectiva de la educación matemática y ante la necesidad manifestada por Cardetti y Truxaw (2014) este trabajo pretende situar como parte de la discusión científica una revisión de la formación para que los futuros docentes sean capaces de ver el valor de la educación matemática desde un modelo integrador de las diferentes dimensiones de los conocimientos matemáticos abordados (Hsieh et al., 2011). En este sentido, nuestro estudio de carácter institucional sigue la línea propuesta por la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM) al plantear la necesidad de repensar una nueva organización curricular en la formación de los/as docentes de Educación Primaria más homogénea y con una mayor articulación entre el MCK y el PCK capaz de satisfacer las nuevas exigencias globales y altamente tecnologizadas de la sociedad del conocimiento.

En cualquier caso, se sugiere la necesidad de completar estos resultados con estudios de corte más cualitativo que nos permitan analizar las propuestas pedagógicas de la educación matemática dentro del aula universitaria mediante técnicas de observación directa y triángulación de perspectivas docentes, discentes e investigadoras.

Referencias bibliográficas

ANECA (2005) *Libro Blanco. Título de Grado en Magisterio, Vol.1* España: Madrid. http://www.aneca.es/var/media/150404/libroblanco_jun05_magisterio1.pdf

Anderson, H. y Kim, S. (2003). A missing piece in an elementary school mathematics teacher's knowledge base. *Issues in Teacher Education, 12*(2), 17-23.

Appova, A. y Taylor, C. E. (2020). Providing opportunities to develop prospective teachers' pedagogical content knowledge. In A. Appova, R. M. Welder, and Z. Feldman, (Eds.), Supporting Mathematics Teacher Educators' Knowledge and Practices for Teaching Content to Prospective (Grades K-8) Teachers. Special Issue: The Mathematics Enthusiast, ISSN 1551-3440, vol. 17, nos. 2 & 3, pp. 673–724.

Ball, D. L. (2000). Bridging Practices: Intertwining Content and Pedagogy in teaching and learning to teach. *Journal of teacher education, 51*(3), 24-247.

Bambico, T. (2003). Intervention program on the use of practical work as a teaching strategy in elementary school mathematics: Its eff ECTS on the teachers' instructional skills and mathematical ability. *Asia Pacific Education Review, 4*(2), 199-207.

Barrantes, M. y Blanco, L. J. (2006). A study of prospective primary teachers' conceptions of teaching and learning school geometry. *Journal of Mathematics Teacher Education, 9*(5), 411-436. https://doi.org/10.1007/s10857-006-9016-6

Blanco, L. J. (1996). Formación inicial del profesorado de primaria en el área de matemáticas. *Enseñanza y Teaching: Revista Interuniversitaria De Didáctica,14*, 99-117.

Bosch, M. y Gascón, J. (2005). La praxeología local como unidad de análisis de los procesos didácticos. En C. Castro y M. Gómez (Eds). *Análisis del curriculo actual de matemáticas y posibles alternativas* (pp. 135-157). Edebé: Barcelona.

Caballero, A., Manso, J., Matarranz, M., y Valle, J. M. (2016). Investigación en Educación Comparada: Pistas para investigadores noveles. *Revista Latinoamericana de Educación Comparada*, *7*(9), 39-56.

Cardetti, F. y Truxaw, M. P. (2014). Toward improving the mathematics preparation of elementary preservice teachers. *School Science and Mathematics, 114*(1), 1-9. https://doi.org/10.1111/ssm.12047

Carrillo, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, A., Ribero, M. y Muñoz-Catalán, M. C. (2018). The Mathematics Teacher's specialised Knowledge (MTSK) model*. *Research in Mathematics Education*, *20*(3), 236–253. https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981

Chick, H. L. y Harris, K. (2007). Pedagogical content knowledge and the use of examples for teaching ratio. In *Proceedings of the 2007 AARE International Educational Research Conference*, *1,* 1-15.

Copur-Gencturk, Y., y Lubienski, S. T. (2013). Measuring mathematical knowledge for teaching: A longitudinal study using two measures. *Journal of Mathematics Teacher Education, 16*(3), 211-236. https://doi.org/10.1007/s10857-012-9233-0

Cortes Generales de España (2013, 10 de diciembre) Ley Orgánica 8/2013, de 9 de diciembre, para la mejora de la calidad educativa. *Boletín Oficial del Estado,* 295. https://www.boe.es/buscar/doc.php?id=BOE-A-2013-12886

Cortes Generales de España (2007, 13 de abril) Ley Orgánica 4/2007, de 12 de abril, por la que se modifica la Ley Orgánica 6/2001, de 21 de diciembre, de Universidades. *Boletín Oficial del Estado,* 89. https://www.boe.es/buscar/doc.php?id=BOE-A-2007-7786

Da Silva Reis, F. y Zeichner, K. (2021). Los desafíos de la formación inicial de profesores de matemáticas como profesionales democráticos. *PARADIGMA*, *42*(e2), 18-39. https://doi.org/10.37618/PARADIGMA.1011-2251.2021.p18-39.id1029

Díaz, M., de la Torre, E., y Guerrero, S. (2006). Formación inicial y continua del profesorado de primaria y secundaria. *Uno: Revista de didáctica de las matematicas, 41.* Recuperado desde: https://www-grao-com.accedys.udc.es/es/producto/formacion-inicial-y-continua-del-profesorado-de-primaria-y-secundaria

Egido, I. y Martínez-Usarralde, M. J. (2019). *La educación comparada, hoy. Enfoques para una sociedad globalizada*. Madrid: España.

Escolano, R., Gairín, J. M., Jiménez-Gestal, C., Murillo, J. y Roncal (2012). Perfil emocional y competencias matemáticas de los estudiantes del grado de educación primaria. *Contextos educativos: Revista de educación*, *15*, 107-134.

González, A. G. y Sánchez, M. (2020). Conocimientos de docentes de primaria en formación respecto a perímetro y área de polígonos. *Perfiles educativos*, *42*(169). https://doi.org/10.22201/iisue.24486167e.2020.169.59328

Guerrero, O. (2021). Construcción de conocimiento sobre la enseñanza de la matemática en estudiantes para profesores de matemática a través de vídeos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *24*(1), 61-82. https://doi.org/10.12802/relime.21.2413

Hill, H., Ball, D. L. y Schilling, S. G. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education*, *39*(4), 372-400. Recuperado desde: http://www.jstor.org/stable/40539304

Hsieh, F.-J., Law, C.-K., Shy, H.-Y., Wang, T.-Y., Hsieh, C.-J., y Tang, S.-J. (2011). Mathematics Teacher Education Quality in TEDS-M: Globalizing the Views of Future Teachers and Teacher Educators. *Journal of Teacher Education*, *62*(2), 172–187. https://doi.org/10.1177/0022487110390819

Latorre, M. J. y Pérez, P. (2005). El perfil del estudiante de Magisterio y su formación práctica universitaria *Revista Qurriculum*, *18*, 255-274.

López, V., Couso, D. y Simarro, C. (2020). Educación STEM en y para el mundo digital: El papel de las herramientas digitales en el desempeño de prácticas científicas, ingenieriles y matemáticas. *Revista De Educación a Distancia (RED)*, *20*(62). https://doi.org/10.6018/red.410011

Lyn, D. y Kishmer, D. (2016). Changing Agendas in International Research in Mathematics Education (pp.3-18). En D. E. Lyn y D. Kirshmer (Eds.). *Handbook of International Research in Mathematics* (3ª ed.). Routledge: N. York.

Ministerio de Educación y Ciencia (2007, 29 de diciembre) *Orden ECI/3857/2007, de 27 de diciembre, por la que se establecen los requisitos para la verificación de los títulos universitarios oficiales que habiliten para el ejercicio de la profesión de Maestro en Educación Primaria*. Boletín Oficial del Estado, 312. https://www.boe.es/diario_boe/txt.php?id=BOE-A-2007-22449

Monge, J. J. (1993). Actitud de los alumnos de magisterio de la Universidad de Cantabria hacia la profesión docente al comienzo y final de la carrera. *Revista interuniversitaria de formación del profesorado, 16*, 87-96.

Morales, R. V., Anderson, H. y McGowan, J. (2003). Mathematics pedagogy and content in a blended teacher education program. *Teacher Education Quarterly, 30*(4), 39-50.

Muñiz-Rodríguez, L., Aguilar-González, Á., y Rodríguez-Muñiz, L. J. (2020). Perfiles del futuro profesorado de matemáticas a partir de sus competencias profesionales. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*, *38*(2), 141-161. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.3161

Muñiz-Rodríguez, L., Alonso, P., Rodríguez-Muñiz, L. J. y Valcke, M. (2016). ¿Hay un vacío en la formación inicial del profesorado de matemáticas de Secundaria en España respecto a otros países? *Revista de Educación, 372*, 111-140.

Norton, S. (2020). Australian primary mathematics teacher preparation: On-campus or online? who? why? so what? *Mathematics Teacher Education and Development, 22*(1), 91-114. Recuperado desde: https://mted.merga.net.au/index.php/mted/article/view/588

Palarea, M. M. (2011). La formación inicial del profesorado de matemáticas ante la implantación de los nuevos grados en infantil, primaria y máster de secundaria: Informe del seminario. *Educatio Siglo XXI: Revista De La Facultad De Educación, 29*(2), 225-234.

Polly, D., McGee, J. R., Wang, C., Lambert, R. G., Pugalee, D. K. y Johnson, S. (2013). The association between teachers' beliefs, enacted practices, and student learning in mathematics. *Mathematics Educator, 22*(2), 11-30.

Rasmussen, P. y Zou, Y. (2014). The development of educational accountability in China and Denmark. *Education policy analysis archives*, *22*, 121.

Rico, L., Gómez, P., y Cañadas, M. C. (2014). Formación inicial en Educación Matemática de los maestros de primaria en españa, 1991-2010. *Revista De Educación, (363)*, 35-59.

Ruiz, J., García, J. y Sarasua, J. (2013). Perspectiva de los alumnos de Grado de Educación Primaria sobre las Matemáticas y su enseñanza. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, *82*, 5-15.

Sánchez, E. (2009). Mitos y realidades en la carrera docente. *Revista de educación, 348,* 465-488.

Sellers, P. A. (2004). Why university teacher preparation programs should provide a new set of personal constructions of mathematics through math content courses for elementary teachers. *Journal of College Teachingy Learning, 11*(1)*,* 49-60.

Schön, D. (1992) *La formación de profesionales reflexivos: hacia un nuevo diseño de la enseñanza y el aprendizaje en las profesiones* Madrid, Centro de Publicaciones del MEC; Barcelona: Paidós Ibérica.

Shain, Ö. y Soylu, Y. (2017). Examining development of curriculum knowledge of prospective mathematics teachers. *Journal of Education and Practice*, *8*(2), 142-152. Recuperado desde: https://www.researchgate.net/publication/330684621

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15, 4-14. https://doi.org/10.3102/0013189X015002004.

Shulman, L. S. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review*, 57, 1-22. https://doi.org/10.17763/haer.57.1.j463w79r56455411.

Socas, M. M. (2011). Aprendizaje y enseñanza de las matemáticas en educación primaria: Buenas prácticas. *Educatio Siglo XXI: Revista De La Facultad De Educación*, *29*(2), 199-224.

Reyes-Gasperini, D. y Cantoral, R. (2014). Socioepistemología y empoderamiento: la profesionalización docente desde la problematización del saber matemático. *Bolema, 28*(48). https://doi.org/10.1590/1980-4415v28n48a18

Tatto, M., Schwille, J., Senk, S., Ingvarson, L., Peck, R. y Rowley, G. (2012). T*eacher Education and Development Study in Mathematics (TEDS-M): Policy, Practice, and Readiness to Teach Primary and Secondary Mathematics. Conceptual Framework*. East Lansing (Míchigan): Teacher Education and Development International Study Center, College of Education, Michigan State University.

UNESCO (2013). *Clasificación Internacional Normalizada de la Educación. CINE 2011.* Canadá: Instituto de Estadística de la UNESCO.

Valero-Matas, J. A. y Coca, P. (2021). La percepción de las materias STEM en estudiantes de Primaria y Secundaria. *Sociología y tecnociencia: Revista digital de sociología del sistema tecnocientífico*, *11*(e1), 116-138. https://doi.org/10.24197/st.Extra_1.2021.116-138.

Autoras

Mª Cristina Naya-Rivero. Universidad de Coruña. España. cristina.naya@udc.es

Tania F. Gómez-Sánchez. Universidad de Coruña. España. tania.fatima.gomez.sanchez@udc.es

Mª Begoña Rumbo-Arcas. Universidad de Coruña. España. begona.rumbo@udc.es

Mª Elena Segade-Pampín. Instituto de Educación Secundaria de la Comunidad Autónoma de Galicia. España. elena.segade.pampin@udc.es

La Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (*Relime*) es la publicación oficial de investigación del Comité Latinoamericano de Matemática Educativa (Clame AC). Se edita tres veces por año. Acepta artículos en español, portugués, inglés y francés. Está dirigida a investigadores en Matemática Educativa, a profesores de matemáticas y ciencias, y estudiantes de licenciatura y posgrado interesados en conocer los resultados recientes de las investigaciones y en profundizar en el conocimiento de un tema en particular.

Objetivos:

1. *Relime* pretende ser un foro abierto a las diversas escuelas del pensamiento (paradigmas, teorías, metodologías, métodos, enfoques) en nuestra disciplina, la Matemática Educativa, sin definir perspectivas únicas y con un profundo respeto a las tradiciones educativas y los contextos de los diversos sistemas educativos de nuestra región.
2. Dar a conocer resultados de investigación original en Matemática Educativa que se realizan en América Latina y el Caribe y en el resto del mundo.
3. Contribuir al proceso de profesionalización de la Matemática Educativa en nuestra región.
4. Fomentar una cultura de divulgación e investigación entre los distintos grupos de investigación en nuestra región.
5. Propiciar el debate y la reflexión profunda sobre problemas de investigación que fortalezca la disciplina en nuestra área geográfica.
6. Fortalecer la calidad de la investigación en Matemática Educativa y la vinculación entre comunidades nacionales e internacionales.

INSTRUCCIONES TÉCNICAS PARA AUTORES

Las contribuciones

Toda contribución propuesta a Relime se somete a un estricto proceso de arbitraje. Las contribuciones deberán ser resultado de investigaciones teóricas o experimentales, estudios de caso, etnográficos, etc., en formato de artículo. Estas contribuciones deberán ser trabajos inéditos de investigación, no estar en arbitraje en otra revista ni tratarse de traducciones previamente publicadas en su lengua original.

Características de los manuscritos

Relime publica artículos en castellano, portugués, inglés y francés. Acepta ensayos teóricos originales así como propuestas que sean resultado de estudios experimentales, de casos, de observación, etnográficos, etc.

Los artículos deberán tener un máximo de nueve mil palabras, incluyendo referencias, figuras, cuadros y anexos. En caso de que su propuesta exceda esta extensión, el Comité de Redacción decide si considera la posibilidad de publicarlo siempre que tal propuesta no ocupe todo el espacio disponible en un número de la revista.

En el caso de reportes de estudios experimentales, de casos, de observación, etnográficos, etcétera, recomendamos que los escritos contengan:

1) Resumen del trabajo, deberá tener un máximo de 10 renglones escrito en español, portugués, inglés y francés y de 5 palabras clave en las cuatro lenguas. Resumen, título y palabras clave deben ser escritos en los cuatro idiomas.
2) Una exposición del problema de investigación (su pertinencia y relevancia en el tema que se aborda).
3) Indicaciones globales acerca de la estructura teórica del reporte.
4) Justificación de la metodología usada.
5) Desarrollo de algunos ejemplos y análisis de resultados.
6) Referencias bibliográficas.

Si se trata de ensayos teóricos y filosóficos, nuestra recomendación es la siguiente:

1) Iniciar con una exposición del problema de investigación (su pertinencia y relevancia en el tema que se aborda).
2) Revisión de la literatura que incluya trabajos importantes que sustenten la investigación, en el que se refleje una variedad de resultados actuales. Esta revisión debe incluir investigaciones internacionales pertinentes y no limitarse a estudios de un solo país.
3) Ofrecer indicaciones sobre la estructura teórica o filosófica en la cual se desarrolla el tema del artículo.
4) Exposición detallada de la posición del autor dentro del tema o los temas de exposición. Esto debe reflejarse a través del desarrollo de ideas, más que de una lista de reflexiones.

5) Implicaciones o consecuencias de la investigación en el área.
6) Referencias bibliográficas.

Proceso de evaluación en relime

Los artículos propuestos a Relime serán leídos por dos miembros del Comité de Redacción, y si el contenido atiende a la originalidad y satisface los criterios anteriores, así como a la claridad de la presentación e interés para la comunidad de matemática educativa, serán evaluados en forma "ciega" por dos investigadores reconocidos y con experiencia dentro del área. En el proceso de evaluación se garantizará el anonimato de autores y evaluadores.

El resultado del dictamen puede ser:

A. Sugerencia de publicar el artículo sin modificaciones.
B. Sugerencia de publicar el artículo bajo reserva de hacer ligeras modificaciones.
C. Sugerencia de reestructurar el artículo atendiendo a los comentarios, lo que precisaría una nueva revisión.
D. Sugerencia de rechazo del artículo.

Formato de las contribuciones

Todas las contribuciones deberán estar escritas en procesador de texto Word 6.0 o superior, tipo de letra Times New Roman, tamaño 11 y utilizar un espacio anterior y posterior de 4 pt, lo que significa que no se requiere dar espacio entre un párrafo y otro. Los cuatro márgenes de la página deberán ser de 2.5 cm. Para las expresiones matemáticas debe usarse el editor de ecuaciones.

Encabezados principales

El estilo de letra para los encabezados principales es tipo VERSALES en formato minúsculas, utilizando un espacio anterior de 36pt y el posterior de 12pt, lo que significa que no se requiere dar espacio entre un encabezado y los párrafos subsecuentes. Enumerar las secciones de los encabezados principales (usando 1, 2, 3, etc.) y utilizar el estilo de alineación centrada.

Subtítulos

El estilo de letra para los subtítulos del artículo es tipo Times New Roman, tamaño 11 y cursiva. La primera letra debe escribirse con mayúsculas. Utilizar un espacio anterior de 24 pt y el posterior de 10 pt, lo que significa que no se requiere dar espacio entre un subtítulo y los párrafos subsecuentes. Los subtítulos deberán enumerarse 1.1., 1.2, 1.3, etc., según corresponda en estilo tipo Normal. Los subtítulos posteriores a un encabezado principal deben tener un espacio anterior y posterior de 6 pts.

Estilo para las tablas

Las tablas deben tener una alineación centrada. El estilo de letra del texto en el interior de la tabla debe ser tipo Times New Roman, Normal, tamaño 10 y con un espacio anterior y posterior de 2 pto. Enumerar las tablas, usando tipo de letra VERSALES tamaño 10, en formato minúscula: TABLA I, TABLA II, TABLA III, etc., utilizando un espacio anterior de 6 pto y posterior de 0 pto. El número de la tabla debe escribirse en la parte superior y su título debajo, utilizando un estilo de alineación centrada y tipo de letra normal tamaño 10.

Estilo para las figuras e imágenes

Las figuras e imágenes deben tener una alineación centrada. El estilo de letra debe ser tipo Times New Roman, tamaño 10 y tipo Cursiva y Normal. Escribir el número de la figura o imagen en formato tipo cursiva y el título en formato tipo normal. Utilizar un espacio anterior de 2 pt y el posterior de 4 pt. Las imágenes y figuras deberán adjuntarse en un archivo independiente al manuscrito en formato de alta resolución.

Transcripciones

Para las transcripciones usar el estilo de letra normal, tipo Times New Roman tamaño 10. Utilizar un interlineado sencillo.

Usar estilos de transcripción como los siguientes:

Estudiante: Para graficar utilicé uno de los métodos que vimos en clase. Me pareció que era el más simple para resolverlo
Profesor: ¿Por qué consideras que ese método es más simple?

Si las líneas de la transcripción requieren ser numerados, entonces usar el estilo de transcripción enumerada como sigue:

[122] Entrevistador: En la primera actividad se te propuso determinar la función velocidad ¿Podrías explicar cómo la hallaste?
[123] Alumno: Hum... pues...

En el caso de que no se requiera hacer referencia a los números, se sugiere usar el primer estilo de transcripción (indicada párrafos arriba).

Reconocimientos

Los reconocimientos a personas, fondos, asociaciones, etc. deberán colocarse en una sección separada antes de las referencias bibliográficas. Los nombres de organizaciones financieras deberán escribirse completos.

Bibliografía, referencias y notas

Solicitamos emplear el estilo de la APA (Publication Manual of the American Psychological Association, 6th ed., 2009) para las citas de pie, notas, referencias textuales y bibliografía. (Pueden apoyarse en el siguiente link: http://www.apastyle.org/learn/tutorials/basics-tutorial.aspx; o bien, consultar el Manual).

La bibliografía deberá escribirse en forma de lista sin enumerar y en orden cronológico. El estilo de letra debe ser Times New Roman 9. Para escribir una referencia debe usarse alineación justificada para el primer renglón. A partir del segundo renglón deberán establecer una sangría especial de 0.63 cm.

Las notas deberán escribirse al final de cada página del documento. El estilo de letra que deberá usarse es Times New Roman 9 en formato normal.

Información complementaria

1) No se devolverán los artículos originales.
2) El editor se reserva el derecho de hacer algunas modificaciones necesarias para mantener el estilo de la publicación.
3) Los textos pueden ser publicados en otro órgano editorial previo permiso expreso, por escrito, y haciendo referencia explícita de la fuente.
4) Los autores recibirán gratuitamente dos ejemplares del número en que se haya publicado su artículo.
5) No se realizarán pagos a los autores por los artículos que se publiquen en *RELIME*. Para mayores informes, puede visitar la página web: http://www.clame.org.mx/relime.htm o bien el correo electrónico:

relime@clame.org.mx

Suscripción a Relime

Costo del volumen 24 (tres números)

Suscripción Institucional:
Volumen US$ 120
Cada número US$ 50

Suscripción Individual:
Volumen US$ 50
Cada número US$ 20

Suscripción Miembros Clame:
Volumen US$ 20
Cada número US$ 10

Estos costos NO aplican a *números especiales*,
NO incluyen gastos de envío, NI comisión bancaria por transferencias
o depósitos de cheques emitidos fuera de México

Las suscripciones deberán solicitarse al correo electrónico
suscripcion@relime.org

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa

Volumen 24, Número 2

Diseño digital:
LDG. Emilio Serna Hernández
Recrea. Soluciones infinitas
sernandem@yahoo.com.mx

Se imprimió en los talleres de
Editorial Progreso S.A. de C.V.
Sabino # 275
Col. Santa María la Ribera
Alcaldía Cuauhtémoc
06400, CDMX, México

Julio de 2021
Tiraje: 1000 ejemplares más sobrantes