EDITORIAL

ARTÍCULOS

RELIME 24-3
02403
9 771665 243002

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa
Vol. 24, Núm. 3, noviembre 2021

ISSN 1665-2436

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa

RELIME

Vol. 24, Núm. 3, 2021

Clame Comité Latinoamericano de Matemática Educativa

Publicación oficial de investigación del Comité Latinoamericano de Matemática Educativa

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa

Directora Fundadora: ROSA MARÍA FARFÁN

Director Editorial: RICARDO CANTORAL
Editora Asociada: GISELA MONTIEL
Editora: WENDOLYNE RÍOS

Departamento de Matemática Educativa – Cinvestav
AP 14-740, México 07000, CDMX
M É X I C O

Portada: «Opus 1» de Oscar Reutersvärd en 1934. Reproducida con permiso de los herederos del artista.

Publicación oficial de investigación del Comité Latinoamericano de Matemática Educativa, Clame A.C. Consejo Directivo: *Presidente:* Olga Lidia Pérez González – Cuba; *Secretario:* Hugo Parra Sandoval – Venezuela; *Tesorera (encargada):* Rosario del Pilar Gilbert – México; *Vocal Norteamérica:* Rebeca Flores García – México; *Vocal Caribe:* Juan Mazueta Concepción – República Dominicana; *Vocal Centroamérica:* Rodolfo Fallas Soto – Costa Rica*: Vocal Sudamérica:* Marcela Parraguez González – Chile.

Publicación cuatrimestral. Se publica en los meses de marzo, julio y noviembre. Vol. 24, Núm.3, noviembre, 2021. Tiraje 1,000 ejemplares. Suscripciones: suscripcion@relime.org. Contribuciones e información: relime@clame.org.mx, http://www.clame.org.mx.

Relime es una revista indizada en:
ISI Web of Knowledge, SSCI – Social Sciences Citation Index y Journal Citation Reports • ERIH – European Reference Index for the Humanities • Conacyt – Índice de Revistas Mexicanas de Investigación Científica y Tecnológica • Scopus – Elsevier Database • ZDM – Zentralblatt für Didaktik der Mathematik • IBZ – International Bibliography of Periodical Literature in the Humanities and Social Sciences • Clase – Citas Latinoamericanas en Ciencias Sociales y Humanidades • Iresie – Índice de Revistas de Educación Superior e Investigación Educativa • Latindex – Sistema Regional de Información en Línea para Revistas Científicas de América Latina, el Caribe, España y Portugal • Redalyc – Red de Revistas Científicas de América Latina y el Caribe, España y Portugal • EBSCO – Information Services • Dialnet • Scielo-México – Scientific Electronic Library Online • Thomson Gale – Gale Iberoamérica.

2021 Impreso en México

Volumen 24 – Número 3 – 2021

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa

Clame Comité Latinoamericano de Matemática Educativa

Publicación oficial del Comité Latinoamericano de Matemática Educativa

2021

Volumen 24 Número 3 Noviembre de 2021

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa

EDITORIAL

ARTÍCULOS

REVISTA LATINOAMERICANA DE INVESTIGACIÓN EN MATEMÁTICA EDUCATIVA, RELIME, es la publicación de investigación oficial del Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C. Editada por el Colegio Mexicano de Matemática Educativa, A. C., Av. Instituto Politécnico Nacional, 2508, Col. San Pedro Zacatenco, C.P. 07360, Alcaldía Gustavo A. Madero, CDMX, México. Tel. (55) 57473819, www.relime.org, relime@clame.org.mx. Director responsable: Ricardo Cantoral.

Reservas de Derechos al Uso Exclusivo, No. 04-2016-110914351000-102, con ISSN: 1665-2436, para el formato impreso; y No. 04-2016-110413025500-203, con e-ISSN: 2007-6819, para el formato digital; otorgados por el Instituto Nacional del Derecho de Autor. Derechos Reservados © Colegio Mexicano de Matemática Educativa, A. C. RFC: CMM 040505 IC7. Publicación cuatrimestral. Se publica en los meses de marzo, julio y noviembre, con el financiamiento del Clame. El Volumen 24, Número 3, se terminó de imprimir en noviembre de 2021, con un tiraje de 1,000 ejemplares más sobrantes.

Impresa por Editorial Progreso, S. A. de C. V., Sabino No. 275, Col. Sta. María la Ribera, C.P. 06400, Alcaldía Cuauhtémoc, CDMX, México.

EDITORIAL

REVISTAS DE CORRIENTE PRINCIPAL: RELIME Y JCR – JOURNAL CITATION REPORTS

MAINSTREAM JOURNALS: RELIME AND JCR

RICARDO CANTORAL
Cinvestav-IPN México

Cerca de 40 años tiene de existencia el *Journal Citation Reports* (JCR) de *Web of Science* (WoS), cuyo fin es identificar a las revistas de corriente principal al nivel mundial analizando sus tendencias en el factor de impacto de sus citas y coadyuvando en su estrategia de publicación.

El JCR es un recurso dinámico que sitúa su objetividad en aspectos bibliométricos, en los que se confía (aun con una mirada crítica) en el ámbito científico internacional, se trata del único recurso desarrollado por expertos indepenientes de editoriales. La Relime – *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Eduativa* ingresó a la lista de revistas de corriente principal en el año 2008 y se ha mantendio por 13 años.

El índice contiene, en este año, 12,171 revistas de 83 paises ubicadas en 286 categorías de investigación. Se agregaron 351 nuevas revistas y salieron algunas otras en 2020. Incluye a 9370 revistas científicas y 3486 revistas en ciencias sociales donde incluye a las de *matemática educativa*, *educación de las ciencias* y *las matemáticas* entre otras.

Dicho índice se mantiene por expertos quienes vigilan los 28 criterios de evaluación de revistas y vigilan el cumplimiento de estándares de impacto y calidad. Sin embargo, para disponer de una visión multidimensional del impacto se necesita de algo más que una mera cifra. Se observan las relaciones entre las citas con artículos, revistas y visualizaciones, así como datos enlazados junto a estadísticas descriptivas. Esto explica que revistas en un diferentes categoría del conocimiento tengan alto o bajo impacto si se les compara con otras áreas del conocimiento, se debe por tanto ubicar a la revista en su comunidad de referencia.

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (2021) *24* (3): 243-244.
DOI: 10.12802/relime.21.2430

En ese sentido, se evalúa el perfil de cada revista con diversas métricas que llaman "inteligentes", en las que se incluyen: Journal Impact Factor (JIF), percentil promedio de JIF, artículos y citas de acceso abierto, aportaciones por región y afiliación de los autores, puntuación Eigenfactor y vida media de citaciones.

Referencias bibliográficas

Cantoral, R.(2019). Formas de difusión institucional del conocimiento: un papel para Relime. En *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *22*(3), 255-260. Obtenido de https://doi.org/10.12802/relime.19.2230

Journal Citation Report (JCR). Obtenido de https://clarivate.com

Huitzilac, Morelos – México

Alexander Betancur Sánchez, Solange Roa Fuentes, Silvia Juliana Ballesteros

UNA DESCOMPOSICIÓN GENÉTICA PRELIMINAR DEL CONCEPTO DE EIGENVALOR Y EIGENVECTOR: EL ANÁLISIS DE LIBROS DE TEXTO COMO SUSTRATO EN LA CONSTRUCCIÓN DE MODELOS COGNITIVOS

A preliminary genetic decomposition of the concept of eigenvalue and eigenvector: the analysis of textbooks as a substrate in the construction of cognitive models

RESUMEN

En la teoría APOE (Acción, Proceso, Objeto, Esquema) el diseño de una descomposición genética es resultado del Análisis Teórico (primer componente del ciclo de investigación de la teoría) donde el análisis de libros de texto es uno de los elementos a considerar. Sin embargo, a la fecha de este reporte no se encuentran publicaciones que den cuenta de cómo realizar el análisis de libros de texto y el proceso detrás de la construcción de una descomposición genética. En este escrito se usan los criterios propuestos por Campos (2017) para analizar tres libros de texto de álgebra lineal, específicamente en relación al concepto de eigenvalor y eigenvector junto con una metodología que da cuenta del diseño de una descomposición genética preliminar para el concepto de eigenvalor y eigenvector sobre operadores lineales considerando: el insumo del análisis de libros de texto, los reportes de investigación existentes y la experiencia de los investigadores como profesores y estudiantes.

PALABRAS CLAVE:

- *Eigenvalores y Eigenvectores*
- *Teoría APOE*
- *Descomposición genética*
- *Libros de texto*

ABSTRACT

In APOS theory (Action, Process, Object, Scheme), the design of a genetic decomposition is the result of Theoretical Analysis (first component of the theory's research cycle) where textbook analysis is one of the elements to be considered. However, as of the date of this report, there are no publications on how to perform textbook analysis and the process behind the construction of a genetic decomposition. In this writing, the criteria proposed by Campos (2017) are used to analyze three

KEY WORDS:

- *Eigenvalues and Eigenvectors*
- *APOS Theory*
- *Genetic decomposition*
- *Textbook*

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (2021) *24* (3): 245-276.
Recepción: Noviembre 1, 2019 / Aceptación: Julio 15, 2021. DOI: 10.12802/relime.21.2431

linear algebra textbooks, specifically in relation to the concept of eigenvalue and eigenvector along with a methodology that accounts for the design of a preliminary genetic decomposition for the concept of eigenvalue and eigenvector on linear operators considering: the input of textbook analysis, existing research reports and the experience of researchers as teachers and students.

RESUMO

Na teoria APOE (Action, Process, Object, Scheme), a concepção de uma decomposição genética é resultado da Análise Teórica (o primeiro componente do ciclo de investigação da teoria) onde a análise de livros de texto é um dos elementos a ser considerado. No entanto, à data deste relatório, não existem publicações que dêem conta de como realizar a análise dos livros escolares e do processo por detrás da construção de uma decomposição genética. Neste artigo utilizamos os critérios propostos por Campos (2017) para analisar três manuais de álgebra linear, especificamente em relação ao conceito de autovalor e autovector, juntamente com uma metodologia que dá conta da concepção de uma decomposição genética preliminar para o conceito de autovalor e autovector em operadores lineares considerando: o contributo da análise de manuais escolares, relatórios de investigação existentes e a experiência de investigadores como professores e estudantes.

PALAVRAS CHAVE:

- *Autovalores e Autovetores*
- *Teoria da APOE*
- *Decomposição genética*
- *Livros didáticos*

RÉSUMÉ

Dans la théorie APOS (Action, Process, Object, Scheme), la conception d'une décomposition génétique est le résultat d'une analyse théorique (première composante du cycle de recherche de la théorie) où l'analyse des manuels est l'un des éléments à prendre en compte. Cependant, à la date de ce rapport, il n'existe aucune publication qui rende compte de la manière de réaliser l'analyse des manuels scolaires et du processus de construction d'une décomposition génétique. Dans cet article, nous utilisons les critères proposés par Campos (2017) pour analyser trois manuels d'algèbre linéaire, spécifiquement en relation avec le concept de valeur propre et de vecteur propre ainsi qu'une méthodologie qui rend compte de la conception d'une décomposition génétique préliminaire pour le concept de valeur propre et de vecteur propre sur les opérateurs linéaires en considérant : l'apport de l'analyse des manuels, les rapports de recherche existants et l'expérience des chercheurs en tant qu'enseignants et étudiants.

MOTS CLÉS:

- *Valeurs propres et de Vecteurs propres*
- *Théorie APOS*
- *Décomposition génétique*
- *Manuels scolaires*

1. Introducción

El objetivo principal de este estudio es dar cuenta del desarrollo de la primera componente del ciclo de investigación que propone la teoría APOE (Acrónimo de Acción, Proceso, Objeto, Esquema), Análisis Teórico (Arnon et al., 2014). Principalmente mostrar cómo el análisis de tres libros de texto (Poole, 2011; Del Valle, 2011; Hoffman y Kunze, 1973), contribuye en la formulación de una descomposición genética (DG) preliminar del concepto de eigenvalor y eigenvector. Dada la naturaleza cognitiva de la teoría APOE, las investigaciones que la toman como fundamento parten de las definiciones matemáticas de los conceptos. Por tanto, resulta de gran interés señalar la relevancia del análisis de libros de texto como punto de partida, que promueve la articulación de resultados de otras investigaciones y la experiencia de los investigadores para ponerlos todos juntos en un modelo cognitivo (DG).

En Matemática Educativa los libros de texto juegan un rol fundamental en la comunicación y preservación del conocimiento que se actualiza en procesos educativos. Expresan el producto de una red de conexiones culturales, económicas, políticas e históricas, en donde se destacan como repositorios válidos de conocimiento y recursos culturales importantes de comunicación. Los libros de texto se han utilizado como un recurso para la presentación de problemas, como un medio para apoyar la instrucción en el aula por parte del docente y para el estudiante como un medio para orientar el autoaprendizaje (Occelli y Valeiras, 2013; Fan, 2013).

A pesar de la relevancia de los libros de texto en la formulación de una DG, la teoría APOE no propone qué criterios utilizar para su análisis, ni una metodología a seguir para tenerlos en cuenta, por tanto, en este artículo buscamos visibilizar su papel. A continuación, se muestra una visión general de investigaciones realizadas sobre los libros de texto en nuestra disciplina, que permite ubicar el estudio que se reporta en este escrito.

2. *Los libros de texto y la investigación en Matemática Educativa*

La investigación sobre los libros de texto en Matemática Educativa se ha venido consolidando en los últimos años. Una evidencia de esto es el desarrollo de la *International Conference on Mathematics Textbook Research and Development* (ICMT, por sus siglas en inglés, 2014). Los libros de texto han ocupado a grupos de discusión en sesiones consecutivas del *International Congress on Mathematical Education* (ICME, por sus siglas en inglés), ICME-10, ICME-11 e ICME-13.

Fan (2013) y Fan, Zhu y Miao (2013) dan cuenta de la dinámica que sigue la investigación sobre libros de texto. Estos autores se refieren a cuatro categorías en los temas de investigación: (1) papel de los libros de texto, (2) análisis y comparación de libros de texto, (3) uso de los libros de texto y otras áreas (por ejemplo, la relación entre el libro de texto y el aprendizaje de los estudiantes) y (4) otros que no corresponden a las categorías anteriores. Como mostramos a continuación, en el contexto Latinoamericano se identifican algunas de las categorías mencionadas entre otras que permiten ampliar el panorama.

El Comité Latinoamericano de Matemática Educativa (CLAME) ha publicado en el Acta Latinoamericana de Matemática Educativa (ALME) investigaciones relacionadas con libros de texto; sin embargo, estas son escasas. En ALME 31, por ejemplo, se presentan estudios que involucran análisis de libros de texto para: estudiar el pensamiento crítico de los docentes en relación a los problemas presentados en los libros de texto (Ruiz-Estrada, Slisko y Nieto-Frausto, 2018), discutir las reformas educativas que ha sufrido el país de México (Ibarra, 2018) e identificar los significados y representaciones que son promovidos o no por los libros de texto en relación a un concepto (Osorio y Díaz-Levicoy, 2018).

En ALME 32 los estudios reportados destacan el análisis de libros de texto para: reconocer cómo se presenta y caracteriza un concepto, el tipo de problemas y sus representaciones (Amaro, Hernandez y Slisko, 2019); también se identifican estudios con una intención epistemológica, encaminada en identificar significados (Pérez y Cantoral, 2019; Paz-Corrales y Cantoral, 2019; Giacoleti-Castillo y Cordero, 2019).

Investigadores como Cook y Stewart (2014), Cook, Zaskis y Estrup (2018) y Campos (2017) han tomado algunos aspectos presentados en 1987 por Harel para analizar libros de texto, específicamente de Álgebra Lineal (AL). Cook, Zaskis y Estrup (2018), por ejemplo, usan dos criterios: la secuenciación de contenido y el material introductorio, para estudiar la presentación y desarrollo del producto de matrices en 24 libros de texto de AL. Como secuencias principales del contenido se destacan tres: 1. Iniciar con el producto Matriz-vector Ax como una combinación de las columnas de A, 2. Iniciar con Ax como un producto punto de los renglones de A por el vector columna x, y 3. Iniciar con AB como el producto punto entre los renglones de A con las columnas de B. La discusión desarrollada en Cook, Zaskis y Estrup (2018) se ocupa principalmente de las secuencias 1 y 3. Los autores categorizan estas secuencias en dos enfoques, para la primera secuencia el concepto puede entenderse utilizando otros conceptos y elementos conocidos, enfoque denominado isomorfización; y para la tercera secuencia, el concepto puede entenderse más adelante una vez se reconozcan otros conceptos más avanzados, enfoque denominado aplazamiento. Aunque estos dos enfoques parecen distantes o se muestran en aparente contradicción, los investigadores enfatizan en la importancia de indagar a fondo sobre tales secuencias para contar con evidencia empírica que muestre las implicaciones en el aprendizaje de los estudiantes. Además, se propone la necesidad de investigar sobre aspectos que podrían articularse y ser complementarios en las dos secuencias, así como de qué manera podrían incorporarse en la enseñanza.

Desde nuestra perspectiva, Cook, Zaskis y Estrup (2018) muestran la necesidad de precisar a partir de la secuencia presentada por los libros de texto, sus implicaciones en la comprensión que los estudiantes pueden lograr de un concepto determinado. Postulamos que la necesidad de esta mirada cognitiva puede ser suplida a través del uso de la teoría APOE, dado que es posible reconocer las estructuras y mecanismos mentales involucrados en las secuencias de instrucción para un concepto. Asimismo, dar cuenta de las relaciones, conexiones y transformaciones que un estudiante puede realizar sobre el concepto y cómo esto puede dar cuenta de una comprensión más profunda.

A continuación, destacamos algunos elementos de la teoría APOE, que en adelante nos permiten comunicar con precisión no solo las secuencias en la presentación del concepto de eigenvalor y eigenvector en tres libros de texto, sino, plantear hipótesis sobre sus implicaciones en la comprensión que pueden lograr los estudiantes a partir de alimentar un modelo cognitivo hipotético.

3. La teoría APOE

La teoría APOE permite describir cómo puede construir los conceptos matemáticos un estudiante y aporta orientaciones para su enseñanza. Desde APOE se propone que los estudiantes comprenden (aprenden) los conceptos y/o nociones matemáticas cuando construyen y usan ciertas estructuras mentales a partir de un mecanismo general denominado por Piaget como *abstracción reflexiva*. Como casos particulares del mecanismo de abstracción reflexiva Dubinsky define los mecanismos de interiorización, coordinación, encapsulación y reversión, entre otros, que permite la aplicación de Acciones sobre Objetos construidos previamente e iniciar la estructuración de nuevos Objetos (Arnon et al., 2014).

A continuación, se describe cómo evoluciona en la mente de un estudiante sus concepciones sobre un concepto K según Arnon et al., (2014). Para un concepto matemático K, un estudiante tiene una concepción Acción de K, si depende de indicaciones externas para aplicar transformaciones sobre Objetos previos (elementos necesarios para iniciar la construcción de K). Al reflexionar sobre las Acciones que realiza puede hacer modificaciones en la mente sin seguir un paso a paso, se dice que ha interiorizado la Acción en un Proceso. El tránsito de una estructura Proceso del concepto K a una estructura Objeto está determinado por el mecanismo de encapsulación. Este mecanismo es motivado por una actividad matemática que requiere concebir el Proceso como un todo y determinar el tipo de Acciones que puede aplicarle al Objeto. Con respecto al concepto K el conjunto de Acciones, Procesos, Objetos y otras estructuras subyacentes que se relacionan coherentemente forman un Esquema del concepto K (Arnon et al., 2014). En la teoría se entiende que el aprendizaje es dinámico y en la medida que se construyan relaciones y transformaciones de forma consciente o inconsciente entre Acciones, Procesos, Objetos y otros Esquemas evoluciona el Esquema. La triada intra, inter y trans permite caracterizar las relaciones construidas entre las estructuras del Esquema ya sea por asimilación o acomodación y dar cuenta de su desarrollo (Trigueros, 2018).

La descripción de las estructuras y mecanismos mentales asociados a un concepto particular se denomina en APOE como descomposición genética (DG); esta corresponde a un modelo cognitivo sobre cómo un estudiante puede llegar a comprender una porción de conocimiento matemático y es considerada el corazón de la teoría.

En lo que sigue se precisa el ciclo de investigación en el marco de la teoría APOE y cómo lo usamos en este reporte. También se destaca el análisis de libros de texto como un elemento clave en la formulación de una DG preliminar.

4. Método de la investigación

El método de investigación de la teoría APOE se define a través de tres componentes que interactúan entre si: Análisis teórico, Diseño e implementación de la enseñanza y Recolección y análisis de datos (Arnon et al., 2014). Algunos estudios han publicado el desarrollo de las tres componentes (Salgado y Trigueros, 2014; 2015; Parraguez y Oktaç, 2010; Roa-Fuentes y Parraguez, 2017), otros consideran detenerse a profundidad en diseño y desarrollo del Análisis teórico (González y Roa-Fuentes, 2017; Roa-Fuentes y Oktaç, 2010, Campos, 2017); estos generalmente proponen una DG preliminar que funge de hipótesis sobre cómo puede ocurrir el aprendizaje de un concepto. En este reporte nos centramos en el Análisis teórico, entendiendo que es la base para la aplicación del ciclo y el desarrollo de futuros estudios (Roa-Fuentes y Oktaç, 2010). Como ya mencionamos, interesa examinar cómo los libros de texto contribuyen en la formulación de una DG preliminar, discusión que continuamos en la siguiente sección a partir de resultados de otras investigaciones en Matemática Educativa sobre el concepto de interés, eigenvalor y eigenvector.

4.1. *El análisis de libros de texto como elemento clave en la formulación de una descomposición genética preliminar*

En Arnon et al., (2014) se reconoce el estudio de libros de texto como un insumo para el análisis teórico, así como los reportes de investigación, estudios epistemológicos y la experiencia de los investigadores sobre una noción o concepto matemático. En particular, el análisis de libros de texto entorno a un concepto permite identificar estrategias pedagógicas para su enseñanza, aspectos clave para el análisis de los datos y otras consideraciones para explicar cómo sucede el aprendizaje. Como destacan Cook y Stewart (2014) y Cook, Zaskis y Estrup (2018) es fundamental analizar varios libros de texto para reconocer encuentros y tensiones en las orientaciones pedagógicas motivando la reflexión y el diseño de investigaciones que den cuenta de su pertinencia o complementariedad.

La construcción de un concepto matemático no sigue un camino único. Arnon et al., (2014) aclaran que pueden considerarse diferentes descomposiciones genéticas para un concepto. Por ejemplo, para la TL Roa-Fuentes y Oktaç (2010; 2012) proponen dos DG's: la primera parte de la aplicación de Acciones sobre vectores específicos y la segunda de una estructura Objeto de funciones definidas entre espacios vectoriales de dimensión finita (Transformaciones). Tales modelos obedecen en parte a la presentación que los libros de texto realizan del concepto, sus implicaciones sobre las estructuras y los problemas propuestos. En concordancia con Kilpatrick (2014) sabemos que el aprendizaje de los estudiantes está condicionado en parte, tanto por materiales físicos, por ejemplo, los libros de texto, como por el uso y/o interpretación que el profesor hace de ellos.

Desde la perspectiva de esta investigación, considerando los criterios propuestos por Campos (2017) se analiza tres libros de texto, específicamente, identificando el desarrollo de los conceptos de eigenvalor y eigenvector. A través de tales criterios, los cuales describimos más adelante, buscamos rastrear e identificar conocimientos previos, qué avances son requeridos y cómo podrían promoverse de manera que tengan lugar nuevas estructuras mentales y se progrese en la comprensión del concepto de eigenvalor y eigenvector. Tal análisis permite integrar a la reflexión sobre la construcción de conocimiento matemático otro "interlocutor" al diálogo, de tal manera que la DG preliminar sea el resultado de una deliberación profunda desde diferentes perspectivas.

En relación a las estructuras sobre el concepto de eigenvalor y eigenvector en matrices, Salgado y Trigueros (2014) reportan características de las estructuras Acción, Proceso y Objeto para el concepto, lo cual es un antecedente importante en el presente reporte; a continuación, se describen tales estructuras.

4.2. *Acción, Proceso y Objeto: eigenvalores y eigenvectores a partir de matrices*

En esta sección se presenta de manera sintética una DG previa presentada por Salgado y Trigueros (2014) que propone la construcción de los eigenvalores y eigenvectores a partir del concepto de matriz. La descripción de las estructuras que se muestra a continuación son el filtro inicial con el cual se da paso al análisis de los libros de texto.

Acción: se reconocen los eigenvalores y eigenvectores en algunos contextos, pero en otros se realizan solo procedimientos sin llegar a conclusiones correctas; no es posible explicar si un escalar o vector es un eigenvalor o eigenvector de una matriz dada. Existe una dependencia de alguna indicación externa, por ejemplo, en R^2 o R^3 para la cual es posible graficar los vectores v y Av para determinar si son paralelos. Por otra parte, al realizar un procedimiento sobre la ecuación característica $(A-\lambda I)\,v=0$ se dan conclusiones equivocadas como: "el vector cero es un eigenvector de la matriz A" (Salgado y Trigueros, 2014).

Proceso: es característico reconocer eigenvalores y eigenvectores de una matriz sin necesidad de recurrir necesariamente a un procedimiento sobre la ecuación característica $(A-\lambda I)\,v=0$, es decir, el estudiante puede reconocer propiedades de la matriz o sus relaciones con otros conceptos del AL que le permiten explicar y justificar situaciones que involucran los eigenvalores y eigenvectores. También, se entiende claramente que un efecto de transformación de un vector bajo una matriz donde los vectores Av y v sean paralelos determina que v es un eigenvector y el escalar que los iguala es el eigenvalor. Así, el signo del escalar se asocia e interpreta en relación con la dirección del eigenvector (Salgado y Trigueros, 2014).

Objeto: se reconocen claramente propiedades de los eigenvalores y eigenvectores de una matriz. Hay conciencia de ciertas relaciones con otros conceptos y se actúa sobre los eigenvalores y eigenvectores para explicar o justificar alguna situación, por ejemplo, diagonalizar una matriz. También, se reconocen los espacios propios o eigenespacios asociados a un eigenvalor, se pueden realizar comparaciones entre eigenespacios e identificar propiedades, por ejemplo, la dimensión asociada a cada eigenespacio (Salgado y Trigueros, 2014).

En lo que sigue, describimos los criterios propuestos por Campos (2017) específicamente en términos del concepto de eigenvalor y eigenvector dando cuenta de la manera en que son usados en este estudio.

4.3. *Criterios para el análisis de los libros de texto y elaboración de una descomposición genética preliminar*

El primer criterio, Estructura General del texto, busca identificar la secuencia de los conceptos, su dependencia, conocimientos previos y las orientaciones propuestas con el fin de reconocer parte de la intención pedagógica del libro para el concepto de eigenvalor y eigenvector. El segundo, Presentación y definición de los conceptos, se enfoca en analizar cómo tiene lugar el concepto, lo que impulsa su definición y el reconocimiento de las estructuras y mecanismos mentales que podrían estar presentes. Los Ejemplos y ejercicios corresponden al tercer criterio que busca rastrear y descifrar cómo pueden estar siendo promovidas las estructuras mentales Acción, Proceso, Objeto y Esquema para el concepto de eigenvalor y eigenvector por el texto. Finalmente, el criterio Lector modelo, busca identificar cuáles estructuras, aunque no fueron promovidas explícitamente, son asumidas por el texto para abordar problemas o nuevos aprendizajes. Tal reconocimiento de las estructuras y mecanismos ayuda a completar el panorama en relación a la estrategia que sigue el libro de texto para que el lector alcance una comprensión profunda del concepto. En el desarrollado de los criterios se usan como referentes: las definiciones generales de las estructuras y mecanismos mentales (Arnon et al., 2014), la descripción de las estructuras para el concepto de eigenvalor y eigenvector por Salgado y Trigueros (2014), además, de los insumos de otras investigaciones relacionadas con el concepto, así como de la experiencia de los investigadores como profesores y estudiantes.

En Campos (2017) se usan los criterios para analizar el libro *Linear Algebra* (Friedberg y otros, 2003) e identificar una aproximación al camino cognitivo sigue libro para el aprendizaje del concepto de eigenvalor y eigenvector. La diferencia principal del presente estudio con Campos (2017) es que usamos los criterios para analizar tres libros de texto de AL: Poole (2011), Del Valle (2011) y Hoffman y Kunze (1973), con el propósito de tener un insumo de tal manera que el diálogo entre los investigadores y los reportes de investigación al respecto, abran paso al diseño de una DG preliminar para eigenvalores y eigenvectores sobre operadores lineales. El interés del estudio no es reconocer la posible DG que sigue cada libro de texto para el aprendizaje del concepto.

En el contexto de una universidad pública en Colombia dichos libros de textos son usados en diferentes niveles de escolaridad, en particular el Hoffman y Kunze (1973) es implementado para cursos de postgrado en matemáticas.

Los momentos desarrollados en el análisis en los libros de texto fueron seis: 1. Revisar tabla de contenido, prefacio y recomendaciones para el estudiante y /o profesor. 2. Estudiar secciones anteriores al concepto de interés. 3. Identificar formas de introducir y definir los conceptos, posibles estructuras y mecanismos mentales requeridos. 4. Revisar ejemplos e identificar posibles estructuras y mecanismos mentales requeridos y cómo se promueven. 5. Analizar ejercicios y/o problemas e identificar posibles estructuras y mecanismos mentales requeridos y cómo se promueven. 6. Reflexionar de forma global sobre las estructuras necesarias y los mecanismos mentales involucrados para el aprendizaje del concepto. Tales momentos destacan la operatividad de los criterios de análisis de los libros de texto.

Con el insumo obtenido del análisis de los tres libros textos los investigadores discutieron los puntos de encuentro, complementariedad y de tensión involucrando en el diálogo reflexivo los reportes de la literatura. En la Figura 1 se precisa la dinámica de las reflexiones dirigidas hacia la constitución de la DG preliminar, ciclos entre las estructuras y mecanismos mentales relativos a conocimientos previos y presentación de la definición, estructuras y mecanismos promovidas en los ejemplos y ejercicios, por otra parte, las estructuras y mecanismos mentales descuidados y las observaciones identificadas en los reportes de investigación sobre el concepto en cuestión. La interacción en diferentes direcciones entre los elementos destacados en la Figura 1 da paso en la reflexión de los investigadores a una hipótesis sobre cómo puede ocurrir el aprendizaje y tiene lugar entonces la propuesta de una DG preliminar.

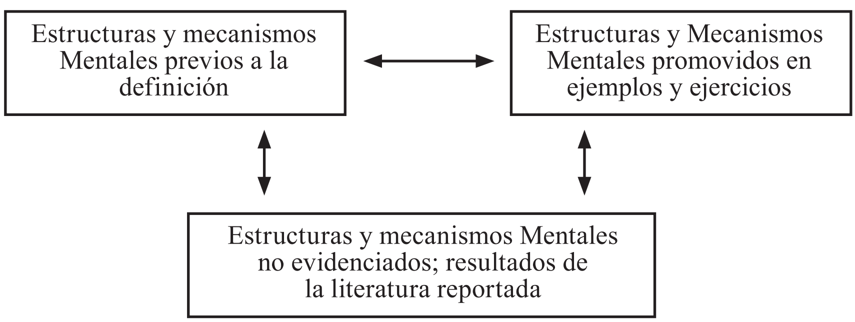

Figura 1. Ciclo para la elaboración de una descomposición genética preliminar teniendo como insumo principal el análisis de libros de texto

5. Análisis de libros de texto y descomposición genética preliminar para eigenvalor y eigenvector

En lo que sigue se exponen aspectos relevantes en relación con los primeros tres criterios de análisis para los libros de texto de Poole (2011), Del Valle (2011) y Hoffman y Kunze (1973). El criterio Lector Modelo y las reflexiones sobre los reportes de investigación en Matemática Educativa se articulan a la discusión para luego dar paso a la presentación de una DG preliminar para el concepto de eigenvalor y eigenvector sobre operadores lineales.

Capítulo 1	1.0 Introducción: el juego de la pista de carreras
	1.1 Geometría y álgebra de vectores
	1.2 Longitud y ángulo: el producto punto
	1.3 Rectas y planos
	1.4 Aplicaciones
Capítulo 2	2.0 Introducción: trivialidad
	2.1 Introducción a los sistemas de ecuaciones lineales
	2.2 Métodos directos para resolver sistemas lineales
	2.3 conjuntos generadores e independencia lineal
	2.4 Aplicaciones
	2.5 Métodos iterativos para resolver sistemas lineales

Capítulo 3	3.0 Introducción: matrices en acción
	31. Operaciones con matrices
	3.2 Álgebra matricial
	3.3 La inversa de una matriz
	3.4 La factorización LU
	3.5 Subespacios, bases, dimensión y Rank
	3.6 Introducción a las transformaciones lineales
	3.7 Aplicaciones
Capítulo 4	4.0 Introducción: un sistema dinámico de grafos
	4.1 Introducción a eigenvalores y eigenvectores
	4.2 Determinantes
	4.3 Eigenvalores y Eigenvectores de matrices $n \times n$
	4.4 Semejanza y diagonalización
	4.5 Métodos iterativos para calcular eigenvectores
	4.6 Aplicaciones y el teorema de Perron-Frobenius

Figura 2. Contenido de los primeros cuatro capítulos en Poole (2011)

5.1. *Estructura general de los libros de texto*

Álgebra lineal una introducción moderna (Poole, 2011) inicia con el trabajo sobre vectores en R^2 y R^3, para luego desarrollar definiciones generales de operaciones para vectores en R^n. En los cinco primeros capítulos no hay referencia explícita a la definición de espacio vectorial, sin embargo, conceptos como: combinación lineal, dependencia e independencia lineal, conjunto generador, espacio generado y base se definen en R^n y matrices, antes del capítulo de espacios vectoriales. En la sección 3.6 (ver Figura 2, tabla de contenido) se presenta la definición de TL como una función $T{:}R^n \rightarrow R^m$ que preserva combinaciones lineales, para rápidamente centrar la discusión en su representación matricial. El capítulo 4 da paso a la presentación del concepto de eigenvalor y eigenvector, iniciando con una discusión centrada en un "Sistema dinámico de grafos". En el capítulo 6 se expone con mayor profundidad el concepto de TL gracias a la formulación general del concepto de Espacio Vectorial. Ahora bien, en este texto no se encontró referencia a eigenvalores y eigenvectores en operadores lineales, aún más, el término operador lineal solo es referido dos veces y no es en relación con el concepto de interés.

Por su parte, *Álgebra lineal para estudiantes de ingenierías y ciencias* (Del Valle, 2011) se refiere a matrices y sistemas lineales en los dos primeros capítulos. Los espacios vectoriales corresponden al capítulo tres donde se hace mención sobre vectores en R^2 y R^3, luego la atención se concentra en R^n, el espacio de polinomios y el espacio de funciones. Así, la exposición sobre TL cubre un panorama amplio y denso, es en este contexto donde tiene lugar la definición de operador lineal (Figura 3) y eigenvalor y eigenvector.

Definición 5.7 *Si $T \in \mathscr{L}(\mathbf{E},\mathbf{E})$; es decir, T es una transformación lineal de un espacio* $\mathbf{E}$ *en sí mismo, se acostumbra decir que T es un* ***operador lineal*** *en el espacio* $\mathbf{E}$.

Figura 3. Definición de operador lineal (Del Valle, 2011, p. 426)

El libro *Álgebra Lineal* de Hoffman y Kunze (1973) inicia con la definición de ecuaciones lineales y el concepto de cuerpo; de esta manera, toda la presentación del texto se hace sobre un cuerpo arbitrario F. Los capítulos 2 y 3 son dedicados a espacios vectoriales y TL respectivamente, en estos se refieren a operadores lineales como un Grupo con la operación de composición. La mirada estructural de los conceptos permea todo el texto, en particular, el capítulo 4 se dedica al álgebra de polinomios y su factorización sobre un cuerpo F. Así, el concepto de eigenvalor y eigenvector es presentado en el contexto de formas canónicas elementales del AL.

En la Tabla I destacamos elementos clave en relación con la Estructura general de los tres libros, al analizar la secuencia y/o dependencia de los conceptos se consideran puntos de tensión, complementariedad y encuentro. Particularmente, un elemento de tensión identificado se refiere a los conocimientos previos para la presentación del concepto de eigenvalor y eigenvector. Al respecto los investigadores fueron discutiendo tal tensión y sus implicaciones en la comprensión de estudiantes y profesores, sus intereses, los alcances y limitaciones del primer acercamiento con el concepto y la manera en que evoluciona o no.

5.2. *Presentación de eigenvalores y eigenvectores en los libros de texto*

El segundo criterio de análisis permite evidenciar cómo la estructura del texto y la visión de los autores sobre el AL es determinante en la motivación e introducción del concepto de eigenvalor y eigenvector.

TABLA I

Elementos a destacar sobre la estructura general de los textos Poole (2011), Del Valle (2011) y Hoffman y Kunze (1973)

Poole (2011)	*Del Valle (2011)*	*Hoffman y Kunze (1973)*
Inicia con la representación geométrica de vectores en R^2 y R^3 predomia el trabajo sobre casos particulares. Los SEL y matrices se relacionan con vectores en R^2 y R^3. Un primer curso de AL en pregrado debe incluir los conceptos de eigenvalor y eigenvector, además, el concepto de proyección ortogonal. Antes del capítulo de eigenvalores y eigenvectores a una sección (3.6) a una introducción sobre las TL. En el capítulo 6 se desarrolla a mayor profundidad espacios vectoriales y TL	Predomina una estructura aritmética y algebraica generalizada. Se incluyen espacios vectoriales de dimensión finita e infinita, para continuar con producto interior, norma, valores y vectores propios considerados como el cuerpo del AL. El concepto de vector se centra en la generalidad del espacio vectorial. Eigenvalores y Eigenvectores son presentados después de los capítulos de espacios vectoriales y TL.	Introduce sistemas algebraicos arbitrarios y el concepto de Cuerpo como estructura. Formas elementales (valores y vectores propios) y espacios con producto interno considerados necesarios para un primer curso de AL. El concepto de Eigenvalor y Eigenvector se introduce después de TL y el álgebra de polinomios. El concepto de eigenvalor y Eigenvector aparece como introducción a la teoría de formas canónicas.

TABLA II

Motivación al introducir el concepto de eigenvalor y eigenvector

Poole (2011)	*Del Valle (2011)*	*Hoffman y Kunze (1973)*
Sistemas dinámicos de grafos; estados estacionarios de vectores. Introducción mediante problemas de grafos. Contexto de matrices cuadradas.	Diagonalizar un operador lineal; encontrar representaciones matriciales sencillas (diagonales) que faciliten estudiar propiedades intrínsecas (determinante, eigenvalores).	Diagonalizar un operador lineal. ¿Todo operador lineal T se puede representar por medio de una matriz diagonal con respecto a alguna base ordenada?

En la Tabla II se presenta la manera en que cada libro de texto introduce o motiva el estudio de los eigenvalores y eigenvectores. El concepto en Poole (2011) tiene lugar en el contexto de cadenas de Markov y el Modelo de Leslie de crecimiento poblacional. Se invita al lector a estudiar algunas matrices y vectores particulares donde se puede reconocer que al hacer el producto matriz – vector (Ax), el resultado corresponde a un vector múltiplo escalar del vector x.

Definición Sea A una matriz de $n \times n$. Un escalar λ se llama ***eigenvalor*** de A si existe un vector $\mathbf{x}$ distinto de cero tal que $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$. Tal vector $\mathbf{x}$ se llama ***eigenvector*** de A correspondiente a λ.

Figura 4. Definición de Eigenvalor y Eigenvector (Poole, 2011, p.265)

Después de la definición de eigenvalor y eigenvector (Figura 4) aparecen los ejemplos presentados en la Figura 5 (En el libro de texto se presenta la respectiva solución). Ahora se busca determinar cuándo es cierto que un escalar sea un eigenvalor o que un vector sea un eigenvector de una matriz.

Ejemplo 4.1

Demuestre que $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ es un eigenvector de $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ y encuentre el eigenvalor correspondiente.

Ejemplo 4.2

Demuestre que 5 es un eigenvalor de $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ y determine todos los eigenvectores correspondientes a este eigenvalor.

Figura 5. Primeros ejemplos (Poole, 2011, p. 266)

Con relación a la definición en Poole (2011) reconocer que el vector Ax es múltiplo escalar de x podría demandar en una concepción Proceso de múltiplo escalar y una concepción Objeto de Matriz y vector. El mecanismo de coordinación puede ser clave para que un lector reconozca la igualdad entre los vectores Ax y λx e identifique a λ como eigenvalor y x como eigenvector de la matriz A. Después de los ejemplos mencionados en la Figura 5 un lector requiere traer varios elementos geométricos, matriciales y algebraicos para comprender y dar cuenta de cuáles son los eigenvalores y eigenvectores en situaciones donde no se cuestione por un escalar o vector como se hizo en los ejemplos de la Figura 5. Así, se presenta el concepto de determinante y discute en relación con los eigenvalores y eigenvectores (ver Figura 2).

Los textos Del valle (2011) y Hoffman y Kunze (1973) presentan el concepto de eigenvalor y eigenvector en un contexto matemático motivado por la tarea de diagonalizar un operador lineal. Los autores coinciden en interpretar dicho problema como encontrar una representación matricial diagonal respecto a cierta base. Del valle (2011) destaca que esto facilita el estudio de propiedades intrínsecas, es decir, invariantes respecto a la base escogida, ejemplo, el determinante. Por su parte, Hoffman y Kunze (1973), resaltan que esto aporta al reconocimiento de subespacios invariantes; separar el espacio vectorial y ver qué es lo importante que hace el operador lineal al espacio vectorial.

Previo a la definición de eigenvalor y eigenvector, Del valle (2011) guía al lector en reflexionar sobre cómo una representación matricial diagonal implica que los vectores de la base seleccionada son transformados de manera especial, esto es, en múltiplos escalares. Tal reflexión se presenta considerando un operador lineal arbitrario sobre un espacio vectorial de dimensión *n*. Por lo tanto, reconocemos que la definición tiene lugar al caracterizar el efecto de transformación que deben sufrir los vectores de la base bajo el operador lineal para que exista una representación matricial diagonal.

Definición 5.17 ***(Valores propios de operadores lineales)*** *Sean* $\mathbf{E}$ *un espacio vectorial (no necesariamente de dimensión finita) y* $T:\mathbf{E}\to\mathbf{E}$ *un operador lineal.*

1. *Se dice que* $\lambda\in\mathbb{R}$ *es un* ***valor propio*** (valor característico, eigenvalor, autovalor) *de* T *si existe un vector* $\vec{u}\in\mathbf{E}$*, con* $\vec{u}\neq\vec{0}_{\mathbf{E}}$*, tal que*

$$T(\vec{u})=\lambda\vec{u} \tag{5.20}$$

2. *Si* λ *es un valor propio de* T *y* $\vec{u}\in\mathbf{E}$ *es un vector no nulo que satisface (5.20), entonces se dice que* $\vec{u}$ *es un* ***vector propio*** (vector característico, eigenvector, autovector) *del operador* T *correspondiente al valor propio* λ*.*

Figura 6. Definición de Eigenvalor y Eigenvector (Del Valle, 2011, p. 458)

En la figura 6 se muestra la definición del concepto de eigenvalor y eigenvector por Del Valle (2011). El autor precisa que tal definición se cumple para espacios vectoriales de dimensión infinita, en este sentido se consideran ejemplos que corresponden a operadores lineales sobre el espacio de funciones infinitamente diferenciables. En particular, el primer ejemplo requiere pensar en un escalar arbitrario sobre *R* y establecer un análisis en los casos cuando el escalar es cero y/o distinto de cero. En seguida Del Valle (2011) invita al lector a considerar relaciones y equivalencias con conceptos destacados en capítulos anteriores. Tal referencia involucra representaciones matriciales relativas a una base y posteriormente, tal como se muestra en la Figura 7, se presenta una cadena de equivalencias dadas por el operador lógico bicondicional. En términos cognitivos esto podría requerir al lector coordinar ciertos Procesos, a la vez que darse la interacción entre elementos del Esquema de TL y espacio vectorial.

Sea A una matriz cuadrada de orden n: dado que un sistema cuadrado homogéneo tiene soluciones no triviales si y sólo si la matriz de coeficientes del mismo tiene determinante cero, tenemos:

$$\begin{aligned}\lambda \text{ es valor propio de } A &\Leftrightarrow \text{existe } \vec{u}\in\mathbb{R}^n - \{\vec{0}_{\mathbb{R}^n}\} \text{ tal que } A\vec{u} = \lambda\vec{u}\\ &\Leftrightarrow \text{el sistema homogéneo } (A-\lambda I_n)\vec{x} = \vec{0}_{\mathbb{R}^n}\\ &\quad\ \text{tiene soluciones no triviales}\\ &\Leftrightarrow \det(A-\lambda I_n) = 0\end{aligned}$$

donde I_n es la matriz identidad de orden n. Ahora, si $\lambda\in\mathbb{R}$ es un valor propio de la matriz A, entonces debe existir una solución no trivial del sistema homogéneo

$$(A-\lambda I_n)\vec{x} = \vec{0}_{\mathbb{R}^n}$$

Así, los vectores propios correspondientes a λ son las soluciones no triviales de este sistema homogéneo.

Figura 7. Relación bicondicional de existencia con relación al concepto de eigenvalor y eigenvector (Del Valle, 2011, p. 464)

Destacamos la presencia del operador lógico bicondicional para referirse a los eigenvalores y eigenvectores, Figura 7, (Del Valle, 2011); este aspecto que está presente en definiciones y algunos teoremas, pero puede ser descuidado tanto por profesores como estudiantes. Campos (2017) considera que los libros de texto acostumbran a presentar la implicación en una dirección, asumiendo que la otra no produce dificultades al lector.

Finalmente, destacamos que, aunque la motivación en Del Valle (2011) es en esencia la misma que la planteada por Hoffman y Kunze (1973), según se describe en tabla II, las definiciones marcan diferencias en los dos textos. Por un lado, la definición en Hoffman y Kunze (1973) se enmarca en espacios vectoriales sobre un cuerpo arbitrario F y en ésta se define a la vez el espacio propio o eigenespacio como se muestra en la Figura 8.

Definición. Sea V un espacio vectorial sobre el cuerpo F y sea T un operador lineal sobre V. Un *valor propio* de T es un escalar c de F tal que existe un vector no nulo α con $T\alpha = c\alpha$. Si c es un valor propio de T, entonces

(a) cualquier α tal que $T\alpha = c\alpha$ se llama un *vector propio* de T asociado al valor propio c;
(b) la colección de todos los α tales que $T\alpha = c\alpha$ se llama espacio *propio asociado* a c.

Figura 8. Definición de Eigenvalor y Eigenvector (Hoffman y Kunze, 1973, p.181)

Por otra parte, el enfoque estructural del texto de Hoffman y Kunze (1973) marca un discurso posterior a la definición que podría exigir al lector una demanda cognitiva mayor a la requerida por el texto de Del Valle (2011). Un aspecto que se reitera en este libro de texto es poder articular varias relaciones y conocimientos de secciones anteriores del libro para avanzar en la búsqueda de características, equivalencias y estrategias que permitan describir los eigenvalores y eigenvectores de un operador lineal recurriendo a alguna representación matricial. En la Figura 9, en el párrafo antes de la definición, se destaca una parte de una cadena de conexiones que los autores bosquejan para referirse a los eigenvalores y eigenvectores en representaciones matriciales.

> Si β es cualquier base ordenada de V y $A = [T]_\beta$, entonces (T–cI) es inversible si, y solo si, la matriz (A–cI) es inversible. En consecuencia, se tiene la siguiente definición.
>
> *Definición.* Si A es una matriz $m \times n$ sobre el cuerpo F, un *valor propio* de A en F es un escalar c de F tal que la matriz (A–cl) es singular (no inversible).

Figura 9. Referencia a eigenvalor en matrices en Hoffman y Kunze (1973, p.181)

Consideramos que, en los tres textos, aunque se muestra una dependencia diferente entre los conceptos y un abordaje teórico en distintas profundidades, se reconoce la necesidad de ciertas estructuras y mecanismos mentales, que pueden ser capturados en una interacción entre el Esquema de TL y Esquema de espacio vectorial. De manera que es posible entender la definición y avanzar en el estudio de eigenvalores y eigenvectores. Al referirnos a los Esquemas queremos destacar la importancia de las conexiones, relaciones y transformaciones entre elementos o conceptos que evolucionan; por ejemplo, reconocer los polinomios, funciones o matrices como vectores, de esta manera se pueden ir dinamizando tales Esquemas referidos.

A continuación, se destacan algunas consideraciones sobre los ejemplos y ejercicios propuestos por los libros de texto centrando la atención en las estructuras y mecanismos mentales que podría ser promovidas por los autores para el aprendizaje de eigenvalores y eigenvectores.

5.3. *Sobre ejemplos y ejercicios propuestos en los libros de texto*

Después de estudiar y revisar los ejemplos y ejercicios ofrecidos por los libros de texto, se desarrolló un plan para caracterizar los ejemplos y ejercicios y dar cuenta de cómo se promueve el aprendizaje del concepto de eigenvalor y eigenvector. Las categorías básicas consideradas con sus respectivas etiquetas se describen a continuación. Éstas toman como base las descripciones referentes a las estructuras mentales presentadas por Salgado y Trigueros (2014) que fueron sintetizadas en este escrito en la sección 4.2.

A: ejemplos y/o ejercicios que se remiten a ilustrar o seguir un procedimiento o usar directamente un teorema.

P: ejemplos y/o ejercicios que requieren considerar acercamientos diferentes a un procedimiento mecanizado y reflexionar sobre el mismo. Implica explicar, analizar y desarrollar nuevas estrategias.

O: ejemplos y/o ejercicios que requieren usar de manera consistente y coherente los eigenvalores y/o eigenvectores y/o sus implicaciones con el fin de analizar, demostrar y/o resolver situaciones más complejas que pueden involucrar otros conceptos.

Las categorías con etiqueta A-P y P-O fueron consideradas dado que se reconocieron ejemplos y/o ejercicios que podrían involucrar aspectos simultáneamente más de una categoría. Por ejemplo, la categoría A-P describe ejemplos y/o ejercicios que involucra aplicar un procedimiento o teorema y, además, explicar o justificar situaciones que confrontan las ideas que va desarrollando el lector. La configuración de dichas categorías ayuda a fijar la atención en cómo cada libro de texto parece motivar las concepciones Acción, Proceso u Objeto para el lector sobre el concepto de eigenvalor y eigenvector. En cada libro de texto se identificó la secuencia con relación a las categorías A, P y O. El símbolo → hace referencia al orden en que se presentan en el texto los ejemplos y/o ejercicios según las categorías establecidas. De esta manera, P ↔ O, indica que en el libro los ejemplos y/o ejercicios siguen entre algunos de la categoría P, otros de la categoría O y continua el orden de presentación de esa manera. Así, en la Tabla III se presenta la clasificación de los ejemplos y ejercicios según las categorías mencionadas.

En los libros analizados los ejemplos ubicados en la categoría A tiene un mayor porcentaje; en los libros de Poole (2011) y Del Valle (2011) el mayor porcentaje de los ejercicios propuestos se ubica en la categoría A. Solo el libro de Del Valle (2011) presenta Ejercicios Resueltos y como se muestra en la Tabla III, el 100% se encuentran en la categoría O. Como se puede ver en las columnas de la Tabla III, las categorías no son lineales y en el caso de Del Valle (2011) los ejemplos inician en la categoría O.

Respecto a la categoría A-P, en Poole (2011) el porcentaje es mayor mientras que en Del Valle (2011) es el más bajo. Este aspecto fue de interés para los investigadores, pues tales ejemplos y ejercicios se reconocieron como situaciones donde el lector necesitaba reflexionar y reconocer significados o características de los eigenvalores y eigenvectores. Desde una mirada cognitiva y considerando la teoría APOE, tales situaciones podrían promover el desarrollo de una concepción Proceso de eigenvalor y eigenvector en un lector, sin embargo, en los libros de texto revisados estos son muy pocos.

TABLA III
Clasificación de ejemplos y ejercicios según categorías definidas

Poole (2011)	*Del Valle (2011)*	*Hoffman y Kunze (1973)*
Ejemplos: A: 6 (55%); P: 3 (27%); A-P: 2 (18%). Secuencia: A → P. *Ejercicios propuestos:* A: 25 (31%); A-P:10 (13%); P:23 (29%); P-O:4 (5%); O:18 (22%). Total: 80 *Secuencia:* A → P ↔ O.	*Ejemplos:* A: 3 (42%); P: 2(29%); O: 2 (29%) Secuencia: O → A → P Ejercicios Propuestos: A: 38(33%); A-P:4(3%); P: 32(28%); P-O:8(6%); O:36 (32%). Ejercicios Resueltos. O: 11 (100%) Total: 117 *Secuencia:* P → A ↔ P ↔ O.	*Ejemplos:* A: 2 (75%); P: 1 (25%). Secuencia: A → P *Ejercicios propuestos:* A–P: 2(13%); P:5(34%); O:8 (53%); Total:15 *Secuencia:* A-P → P ↔ O.

Al considerar un lector que inicia el estudio del concepto de eigenvalor y eigenvalor con el texto de Del Valle (2011) podría enfrentar grandes retos cognitivos por la secuencia que sigue la presentación de los ejemplos y ejercicios. Posiblemente, un lector más experimentado pueda lidiar mejor con la secuencia presentada en Del Valle (2011), no obstante, tal problema no nos ocupa en este reporte y es necesario investigar a profundidad sobre tal asunto. Por otra parte, la categoría P-O se dio solamente en los ejercicios propuestos y para los textos de Poole (2011) y Del Valle (2011). Vale la pena destacar que tales ejercicios se encuentran muy poco en los libros revisados y fueron también reconocidos como situaciones que podría impulsar una comprensión más profunda del lector sobre los eigenvalores y eigenvectores.

En lo que sigue se presentan algunos ejemplos y ejercicios de los libros de texto acompañados de reflexiones sobre cómo pueden favorecer el aprendizaje del concepto de eigenvalor y eigenvector.

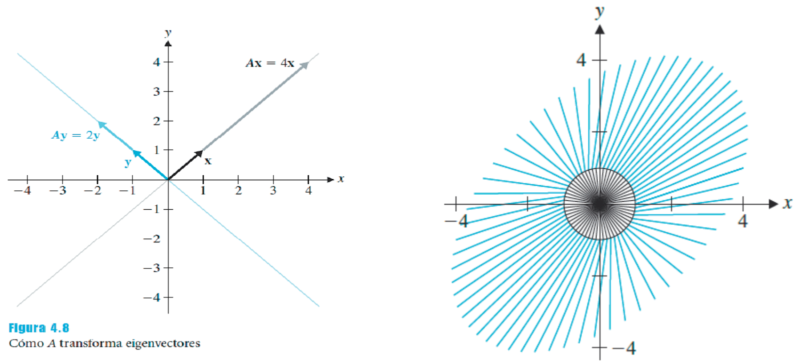

Figura 10. Ejemplos y ejercicios que involucran la interpretación geométrica de eigenvalores y eigenvectores en Poole (2011) p. 268-269

Los ejemplos y ejercicios en Poole (2011) se caracterizan por involucrar representaciones geométricas del concepto. En la Figura 10, la imagen izquierda ilustra cómo la matriz transforma a dos vectores que son eigenvectores. Otras situaciones involucran analizar más de un vector y su respectiva imagen; parte derecha de la Figura 10. Desde la perspectiva de la teoría APOE, este tipo de situaciones podría favorecer una concepción Proceso del concepto dado que un lector no requiere actuar directamente sobre un vector específico mediante la matriz de transformación; necesita argumentar la existencia de eigenvalores y eigenvectores, en este caso debe reconocer la relación de colinealidad entre los vectores.

En la sección anterior se indicó que la relación bicondicional suele presentarse en los libros de texto en un solo sentido. Particularmente, el concepto de eigenvalor y eigenvector involucra una relación bicondicional de existencia: si λ es un eigenvalor de T debe existir un eigenvector y, por otra parte, si v es un eigevector de T debe existir un eigenvalor. Por su parte, Poole (2011) no se refiere explícitamente a tal relación, sin embargo, parece asumirla, pero descuida enfatizarle al lector respecto a esto. En enunciado del ejemplo de la figura 11 se refiere a los eigenvalores, pero no hay ninguna observación respecto a los eigenvectores, consideramos que podría ser importante acompañar los comentarios de las respuestas con reflexiones sobre los eigenvectores.

En la Figura 12 se presenta un ejercicio de Del Valle (2011) que corresponde a la categoría A-P. Es importante destacar que este ejercicio involucra los eigenvalores de las matrices AB y BA, en el enunciado aparece una afirmación de validación o verificación seguida de la pregunta: ¿tienen los mismos vectores propios correspondientes? La cual involucra los eigenvectores e invita a la reflexión acerca de si son los mismos eigenvectores. Esta situación puede promover un mejor entendimiento de los eigenvalores y eigenvectores en relación a la terna $\{T, \lambda, v\}$ involucrada, es decir, representación matricial u operador lineal, escalar y vector; también aporta a la comprensión de la relación de existencia entre eigenvalor y eigenvector bajo el operador lineal o su representación matricial.

Ejemplo 4.7 Encuentre los eigenvalores de $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ (a) sobre $\mathbb{R}$ y (b) sobre los números complejos $\mathbb{C}$.

Solución Debe resolver la ecuación

$$0 = \det(A - \lambda I) = \det\begin{bmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 + 1$$

a + bi

(a) Sobre $\mathbb{R}$ no hay soluciones, de modo que A no tiene eigenvalores reales.

(b) Sobre $\mathbb{C}$ las soluciones son $\lambda = i$ y $\lambda = -i$. (Vea el Apéndice C.)

Figura 11. Ejemplo que involucra la existencia de eigenvalores sobre diferentes cuerpos en Poole (2011, p. 271)

421 Si $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, calcular los valores propios de AB y BA. Por el ejercicio precedente estos productos deben tener los mismos valores propios, ¿tienen los mismos vectores propios correspondientes?

Figura 12. Ejercicio de la categoría A-P de Del Valle (2011, p. 571)

Los libros de texto Del Valle (2011) y Hoffman y Kunze (1973) son los que definen el concepto de eigenvalor y eigenvector sobre operadores lineales. Dichos textos se refieren a representaciones matriciales asociadas a TL en espacios vectoriales de dimensión finita relativas a una base, particularmente, para operadores lineales tales representaciones son matrices cuadradas. En la figura 13 se muestra un ejercicio del Hoffman y Kunze (1973) donde se cuestiona sobre el polinomio característico del operador identidad y el operador cero. En ambas preguntas se debe reconocer una representación matricial del operador lineal asociada a alguna base β, en particular se puede elegir la base canónica y encontrar el polinomio característico para la matriz $I - \lambda I$, con λ en F. No obstante, lo anterior puede implicar reconocer la invariancia de los eigenvalores a representaciones matriciales y ser entendida ahora sobre las raíces del polinomio característico.

2. Sea V un espacio vectorial de dimensión n sobre F. ¿Cuál es el polinomio característico del operador identidad sobre V? ¿Cuál es el polinomio característico para el operador cero?

Figura 13. Ejercicio sobre polinomio característico de un operador lineal (Hoffman y Kunze, 1973, p. 188)

Algunos ejercicios presentados en Hoffman y Kunze (1973) hacen referencia a operadores lineales sobre R^3 a partir de una representación matricial asociada a la base canónica. Por ejemplo, en un ejercicio se pide determinar si el operador lineal es diagonalizable mostrando que existe una base para R^3 formada por eigenvectores. La manera de referirse al operador lineal es usando una matriz 3×3 e indicando que es la representación matricial relativa a la base canónica. En relación con lo anterior, en el análisis de los textos de Del Valle (2011) y Hoffman y Kunze (1973) no se reconocieron ejercicios que promovieran un entendimiento de los eigenvalores como un invariante a representaciones matriciales. Rápidamente se considera el polinomio característico y la atención se concentra en este como una manera que referirse y caracterizar los eigenvalores de un operador lineal. Cognitivamente y desde la teoría APOE lo anterior puede involucrar un tránsito importante; totalizar el Proceso de eigenvalor y eigenvector y avanzar hacia la concepción Objeto.

En los libros de texto revisados en relación con el concepto de eigenvalor y eigenvector identificamos que se ocupan más en presentar ejemplos que consiste en seguir un procedimiento o usar un teorema. Las situaciones que invitan al lector a explorar, reflexionar, relacionar y cuestionar aspectos sobre el concepto son escasas. Rápidamente se enfrenta al lector con ejercicios que implican hacer una demostración o resolver una situación que demandan un alto entendimiento del concepto, lo que en términos de la teoría APOE podría requerir tal vez una concepción Objeto.

A continuación, conectamos y complementamos las reflexiones con los reportes de investigación sobre el concepto de eigenvalor y eigenvectores en el campo de la Matemática Educativa.

5.4. *Reflexiones sobre eigenvalores y eigenvectores desde la Matemática Educativa*

Reportes de investigación en Matemática Educativa sobre el concepto de eigenvalor y eigenvector señalan que el componente procedimental y algorítmico suele ser privilegiado por los profesores y estudiantes, descuidando la comprensión conceptual (Bouhjar, Andrews-Larson, Haider y Zandieh, 2018). Asimismo, los libros de texto hacen transiciones rápidas, omitiendo aclaraciones pertinentes para dar paso a la parte procedimental; aspecto que fue posible evidenciar en los libros de texto analizados. Algunas consecuencias de lo anterior es la incapacidad de los estudiantes para reconocer la naturaleza matemática de los objetos implicados en la igualdad $Av=\lambda v$ y cómo es transformada en $(A-\lambda I)v=0$ (Stewart y Thomas, 2011). Los estudios publicados también destacan la importancia y necesidad de diseñar una instrucción del concepto de eigenvalor y eigenvector usando programas de tecnología computacional e involucrando situaciones de modelación o aplicación (Klasa, 2010; Beltrán, Murillo y Jordán, 2017; Beltrán-Meneu, Murillo-Arcila y Albarracín, 2017), esto con el propósito de introducir el concepto en un contexto concreto para los estudiantes y favorecer la construcción de conocimiento más allá de desarrollar destrezas procedimentales.

Por otra parte, en relación con los modos de pensamiento y formas de representación (Sierpinska, 2000; Hillel, 2000) característicos del AL, Caglayan (2015) destaca la importancia de establecer relaciones y conexiones entre las formas de representación para el concepto de eigenvalor y eigenvector con el fin de favorecer la comprensión y el desarrollo de significados más robustos. Algunos estudios como Plaxco, Zandieh y Wawro (2018), Zandieh, Wawro y Rasmussen (2016) y otros de los referidos anteriormente coinciden en iniciar la instrucción del concepto de eigenvalor y eigenvector considerando un contexto más concreto para el estudiante, que promueva significados y representaciones, incluyendo los ambientes de geometría dinámica. Pero, ¿cómo guiar el diseño de tal instrucción para los eigenvalores y eigenvectores? Al respecto Klasa (2010) menciona que puede considerarse la teoría APOE para diseñar la instrucción a la luz de una descomposición genética desde la TL; involucrando de esta manera los operadores lineales.

Estudios desde la perspectiva de la teoría APOE (Salgado y Trigueros, 2014; 2015; Yáñez, 2015; Campos, 2017) destacan estructuras y mecanismos mentales en la construcción de eigenvalor y eigenvector, articuladores geométricos en R^2 y R^3 y recomendaciones para la enseñanza. En particular, Salgado y Trigueros (2014) presentan una DG para el concepto de eigenvalor y eigenvector con matrices. De la DG se destacan como estructuras previas la matriz y vector como Objetos, el conjunto solución de un sistema de ecuaciones lineales, espacio nulo, conjunto generador y espacio generado como Procesos. Como aspecto clave en la DG destacamos la construcción como Objeto de la ecuación $Av = \lambda v$. Así, se realizan acciones sobre la ecuación para determinar condiciones que garanticen solución no trivial. Esta manera de construcción del concepto difiere con el modelo que se propone en la siguiente sección.

Por otra parte, es importante señalar que el modelo de Salgado y Trigueros (2014) involucra coordinar varios Procesos, lo que guarda congruencia con las reflexiones recogidas del análisis de libros de texto. Desde la reflexión y la deliberación entre los investigadores, proponemos la interacción entre los Esquemas de TL y espacio vectorial y Proceso de factorización de un polinomio sobre un cuerpo, como estructuras previas para el concepto de eigenvalor y eigenvector dado que captura la importancia del nivel de relaciones y conexiones entre los conceptos; otro aspecto diferenciador del modelo propuesto en Salgado y Trigueros (2014). En este sentido los articuladores geométricos como la rotación respecto al origen de 180° y 0° y la colinealidad referidos por Yáñez (2015) hacen parte de las relaciones involucradas entre los Esquemas de TL y espacio vectorial. Tales relaciones pueden irse consolidando de manera anticipada a la instrucción directa sobre eigenvalores y eigenvectores.

6. Descomposición genética preliminar para eigenvalores y eigenvectores

La presentación de la DG preliminar que sigue se enmarca en los operadores lineales definidos sobre espacios vectoriales de dimensión finita. Se hace una descripción sobre las estructuras previas, posteriormente se precisan las construcciones consideradas como necesarias para el aprendizaje del concepto de eigenvalor y eigenvector acompañadas por un gráfico que sintetiza aspectos clave.

6.1. *Estructuras previas a la construcción del concepto de eigenvalores y eigenvalores*

Como resultado de todo lo expuesto en las secciones anteriores, a continuación, se parte de las estructuras previas necesarias para iniciar la construcción del concepto de eigenvalor y eigenvector. De manera general se propone el Esquema de TL y el Esquema de espacio vectorial en un nivel *Inter* y la factorización de polinomios sobre un cuerpo como Proceso. En la figura 14, los recuadros con líneas punteadas y conectados por las flechas moradas se refieren a las estructuras previas.

Un nivel *Inter* del Esquema de TL implica establecer relaciones entre TL y otras estructuras básicas como Proceso de base y Objeto de vector (González y Roa-Fuentes, 2017). Tales estructuras son importantes, pues el aprendizaje de eigenvalores y eigenvectores implica trabajar con operadores lineales y sus representaciones matriciales. Otras estructuras involucradas en el Esquema son Proceso de matriz asociada, espacio nulo y determinante. Dado un operador lineal $T{:}V \rightarrow V$ (TL cuyo dominio y codominio es el mismo), las representaciones geométrica, funcional y matricial están relacionas respecto a la base relativa a V. Una estructura Proceso de TL permite expresar cualquier vector $v \in V$ como una combinación lineal de los vectores de la base $\beta = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$; de esta manera, el operador lineal (TL) queda determinado mediante los vectores v_i de la base β (González y Roa-Fuentes, 2017). Así, mediante el Proceso de operador lineal se pueden obtener las imágenes $T(v_i)$ con $i = 1, ..., n$, las cuales están en V y por lo tanto son una combinación lineal de los vectores de la base β. Una representación matricial del operador lineal T será el resultado de la coordinación entre el vector de coordenadas relativo a la base β, $[T(v_i)]_\beta$, y el Proceso de matriz (Trigueros, Maturana, Parraguez y Rodríguez, 2015).

Aunque se mencionan por separado los Esquemas de TL y espacio vectorial estos se encuentran relacionados e interactúan entre sí; un concepto en particular que motiva dicha interacción es el concepto de base. Parraguez y Oktaç (2010) consideran que un nivel *Inter* del Esquema de espacio vectorial implica establecer relaciones entre conceptos como subespacios, TL, bases, entre otros. Se contempla que una concepción previa de espacio vectorial permite acceder a otras estructuras como vector y la operación múltiplo escalar. Una concepción Proceso de múltiplo escalar permite pensar en forma dinámica, esto es, dado un escalar $k \in K$- cuerpo y un vector $v \in V$, la transformación kv produce un nuevo vector que pertenece al espacio vectorial V. La estructura Objeto de vector, permite concebir a un vector como un elemento de un espacio vectorial y según la experiencia con conceptos matemáticos se reconoce que los vectores también pueden ser polinomios, matrices, funciones, entre otros.

Finalmente, una concepción Proceso de factorización de un polinomio sobre un cuerpo K le permite al estudiante determinar sus raíces o justificar por qué no existe raíces sobre dicho cuerpo.

6.2. *Estructuras y mecanismos mentales para construir el concepto de eigenvalor y eigenvector*

En un nivel *Inter* del Esquema de TL se puede reconocer que un operador lineal es una TL definida de un espacio vectorial V en sí mismo. Las líneas punteadas de naranja que se suspenden de las estructuras previas en la figura 14, destacan el inicio de la construcción de los Esquemas a partir de R^n, considerando un momento inicial en R^2 y R^3. Tales Esquemas se dinamizan y actualizan en función de nuevas experiencias que involucren otros espacios de dimensión finita como C^n, P_n (espacio de polinomios de grado menor o igual a n), M_{mn} (espacio vectorial de matrices de tamaño $m \times n$), entre otros, los cuales admiten representaciones matriciales relativas a una base. Los diferentes recuadros y flechas negras en la figura 14 sintetizan los aspectos claves de las construcciones necesarias.

Considerando un espacio vectorial V de dimensión finita sobre un cuerpo K, la construcción comienza con la realización de dos Acciones (Figura 14). La primera Acción es de comparación: Dado un operador lineal $T:V \rightarrow V$, sobre un espacio vectorial V o una representación matricial A_T y un vector especifico $v_0 \in V$ se busca un escalar λ_0 tal que $T(v_0) = \lambda_0 v_0$. Esta Acción puede ser interiorizada en un Proceso (*Proceso 1,* figura 14) para dar cuenta de la existencia de un escalar λ_0. Tal construcción también puede provenir de la coordinación entre el Proceso de operador lineal y el Proceso de múltiplo escalar. Así, se reconoce a $T(v_0)$ o $A_T v_0$ y $\lambda_0 v_0$ como nuevos vectores del espacio vectorial V; bajo el cumplimiento de la relación de igualdad se puede denominar a v_0 y λ_0 como un eigenvector y eigenvalor de T respectivamente. Tal coordinación puede ser motivada en espacios vectoriales como R^2 y R^3 de forma geométrica mediante la colinealidad entre v_0 y $T(v_0)$ o v_0 y $A_T v_0$ (Yáñez, 2015).

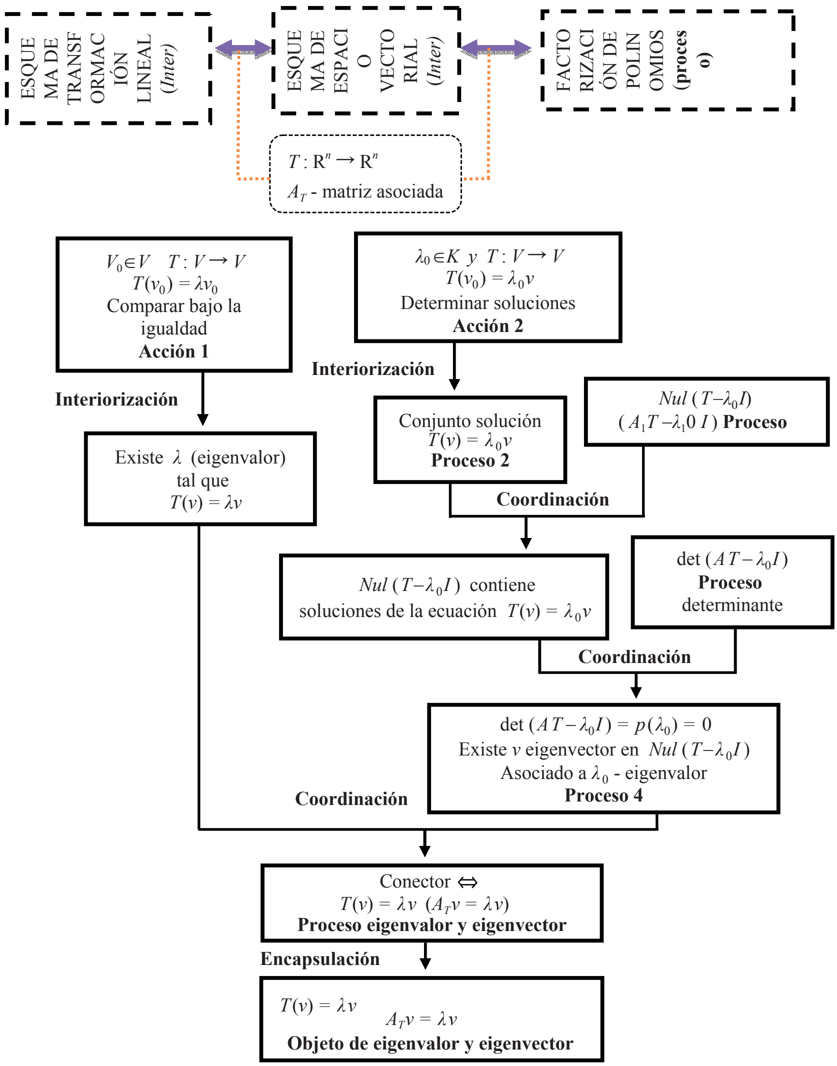

Figura 14. Descomposición genética hipotética del concepto de Eigenvalor y Eigenvector a partir del análisis de libros de texto.

Dado λ_0 en el cuerpo K y un operador lineal T o representación matricial A_T, la segunda Acción consiste en determinar vectores v_0 que verifiquen $T(v)=\lambda_0 v$ o $A_T v=\lambda_0 v$. La interiorización de esta Acción (*Proceso 2,* figura 14) permite reconocer la existencia de vectores v_0 no nulos como eigenvectores del operador T o la matriz A_T con correspondiente eigenvalor λ_0. El Proceso 2 puede coordinarse con el Proceso de espacio nulo mediante la contenencia de eigenvectores del operador lineal T o A_T en el espacio nulo de $T-\lambda_0 I$ $(A_T-\lambda_0 I)$. El Proceso resultante (*Proceso 3,* figura 14) es coordinado con el Proceso de determinante el cual permite identificar que si $(A_T-\lambda_0 I)=0$ entonces, existen vectores diferentes de cero en *Nul* $(T-\lambda_0 I)$ [*Nul* $(A_T-\lambda_0 I)$] (*Proceso 4,* figura 14). Mediante tales construcciones mentales se entiende que encontrar los eigenvalores y eigenvectores de T o A_T equivale a determinar escalares λ_0 y vectores v_0 tal que $v_0 \in$ *Nul* $(T-\lambda_0 I)$ [*Nul* $(A_T-\lambda_0 I)$]. Así, el Proceso de espacio nulo da paso a reconocer que $(A_T-\lambda_0 I)v_0=0$, dotando de sentido la ecuación característica $(A_T-\lambda I)v=0$]. A partir de lo anterior se puede relacionar el det *det* $(A_T-\lambda I)$ como una condición para que existan vectores no nulos en *Nul* $(T-\lambda I)$[*Nul* $(A_T-\lambda I)$] y denominar al det *det* $(A_T-\lambda I)$ como el polinomio característico.

El Proceso 4 y el Proceso 1 se coordinan mediante la relación bicondicional ($\leftrightarrow$) de existencia dando resultado al Proceso de eigenvalor y eigenvector (figura 14). Una concepción Proceso de eigenvalor y eigenvector, por ejemplo, implica reconocer que si v_0 es un eigenvector asociado al eigenvalor λ_0, entonces todo vector diferente de cero del espacio generado por v_0 es un eigenvector de T asociado al mismo eigenvalor λ_0. De esta manera, se acepta al *Nul* $(T-\lambda_0 I)$ como el eigenespacio asociado al eigenvalor λ_0. Lo anterior puede ser motivado mediante la comparación del espacio generado por diferentes eigenvectores (Salgado y Trigueros, 2014; 2015). La coordinación bajo la relación bicondicional de existencia permite entender que: si v es un eigenvector de T (A_T) entonces, existe un escalar λ en el cuerpo K tal que $T(v)=\lambda v$ o $(A_T v=\lambda v)$. Y, si λ es un eigenvalor de T (A_T) entonces, existen vectores $v \in V$ no nulos tal que $T(v)=\lambda v$ o $(A_T v=\lambda v)$.

A partir de la comparación entre diferentes representaciones matriciales del operador lineal es posible reconocer que los valores λ que son raíces del polinomio característico son invariantes a cualquier representación matricial de T. Mediante el mecanismo de encapsulación se da paso a considerar el Proceso eigenvalor y eigenvector como una totalidad, identificando que las raíces del polinomio característico determinan todos los eigenvalores de T o A_T y de esta manera se puede establecer todos los eigenespacios (E_λ); subespacios vectoriales de V donde el operador lineal es invariante (Camacho y Oktaç, 2016). Se puede considerar sumar eigenvalores de un mismo operador lineal y analizar si el escalar resultante es un eigenvector del operador (Wawro, Watson, Zandieh, 2019). En este punto hay plena consciencia que, al hablar por ejemplo de eigenvalor, necesariamente se involucran los eigenvectores o viceversa, es decir, la encapsulación del Proceso de eigenvalor y eigenvector permite reconocerlo como un objeto conformado por parejas (λ, v) que definen una relación funcional, donde $\lambda \in K$ y $v \in E_\lambda$ diferente del vector cero. En este sentido, se pueden aplicar Acciones sobre E_λ como determinar la dimensión y comprarla con otros eigenespacios relativos a otros eigenvalores. Asimismo, es posible aplicar Acciones sobre el Objeto eigenvalor y eigenvector, por ejemplo, para formar una base del espacio V que solo contiene eigenvectores, es decir, una eigenbase. Lo anterior consideramos que da paso al estudio y construcción de conceptos como la diagonalización de operadores lineales.

7. Reflexiones finales

Este escrito contribuye a literatura en tres aspectos importante. La primera corresponde al Análisis Teórico en la teoría APOE, particularmente, al análisis de libros de texto como insumo para el diseño de una DG preliminar. Este reporte aporta una metodología consistente en la que interactúan tres de los aspectos referidos por Arnon et al., (2014) para el diseño de una DG: análisis de libros de texto, reportes de investigación y la experiencia de los investigadores como profesores y estudiante. En este sentido, el presente estudio deja más visible el proceso detrás del Análisis Teórico en APOE. Consideramos que las categorías de clasificación en el análisis de los ejemplos y ejercicios de los libros de texto (ver sección 5.3), pueden ser utilizadas en otras investigaciones y es útil para reconocer el énfasis que desarrolla un libro de texto y la manera en que promueve una comprensión más profunda de un concepto matemático. Por otra parte, destacamos tres aportes principales del análisis de libros al diseñar una DG preliminar: i) fortalece la comprensión matemática del concepto a los investigadores, ii) fomenta la discusión y reflexión entre los investigadores y otras investigaciones reportadas iii) permite identificar acercamientos e intenciones pedagógicas para la instrucción y aspectos que pueden ser descuidados en la enseñanza. Tales aportes están relacionados con consideraciones mencionadas por Dubinsky (1991) sobre aspectos relevantes al diseñar una DG.

La segunda contribución es hacia el aprendizaje de eigenvalor y eigenvector al proponer una DG preliminar a la comunidad de educadores matemáticos que puede ser usada para orientar la instrucción en el aula. La DG preliminar propuesta promueve las tres interpretaciones de la TL: funcional, matricial y geométrica (Maturana, Parraguez y Trigueros, 2015). Dado que el concepto de eigenvalor y eigenvector generalmente se reserva para cursos más avanzados de AL, el estudio presentado en este escrito muestra la importancia de la construcción de Esquemas para la comprensión de las matemáticas. El modelo cognitivo propuesto puede adaptarse a la experiencia de los estudiantes, ya sea en un nivel básico sobre operadores lineales definidos de R^n en R^n, o en otro tipo de espacios vectoriales, cuando esta estructura ha evolucionado. En primer curso de AL iniciando con los espacios vectoriales R^2 y R^3 y según la experiencia con otros espacios vectoriales de dimensión finita como C^n, P_n, M_{mn}, se puede evolucionar el aprendizaje del concepto. Destacamos el énfasis marcado por la DG propuesta sobre las relaciones, conexiones entre los conceptos y la experiencia matemática que dinamiza los Esquemas.

La tercera contribución se relaciona con el uso de los libros de texto por los profesores para realizar la instrucción de un concepto. Considerando los libros analizados en este reporte, destacamos la importancia que los profesores conozcan de los libros de texto la intención pedagógica que sigue, los aspectos más destacados en relación a un concepto matemático y también los que son descuidados antes de usarlos para la instrucción en el aula. Un reconocimiento sobre como un libro de texto promueve la construcción de estructuras mentales clave para el aprendizaje de un concepto permite tomar decisiones más pertinentes sobre recursos de instrucción complementarios para ser incorporados en la enseñanza del concepto.

Las futuras investigaciones pueden considerar determinar el nivel de comprensión que los profesores tienen del concepto de eigenvalor y eigenvector para prever el alcance que pueden lograr en su práctica en el aula; y por tanto determinar qué tan profunda puede llegar a ser la comprensión de los estudiantes. Además, el estudio de eigenvalores y eigenvectores desde cada interpretación de los operadores lineales en un primer curso de AL iniciando con los espacios vectoriales R^2 y R^3. Al respecto, se está desarrollando una investigación con el propósito de tener evidencia empírica sobre cómo podría darse la instrucción del concepto a partir de las tres interpretaciones. Finalmente, también consideramos que la DG propuesta es una hipótesis que motiva el desarrollo de otras investigaciones, en particular, el supuesto sobre la totalidad del Proceso de eigenvalor y eigenvector en relación al polinomio característico.

Agradecimientos

Este proyecto fue parcialmente financiado por el Programa de Movilidad de la Vicerrectoría de Investigación y Extensión de la Universidad Industrial de Santander (VIE-UIS).

Referencias bibliográficas

Amaro, G., Hernández, L., y Slisko, J. (2019). La proporcionalidad en libros texto mexicanos de educación básica. Aspectos conceptuales. *En Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 32*. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C

Arnon, I., Cottril, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Roa-Fuentes, S., Trigueros, M. y Weller, K. (2014). *APOS Theory. A framework for research and curriculum development in mathematics education*. New York: Springer. DOI: 10.1007/978-1-4614-7966-6.

Beltrán-Meneu, M., Murillo-Arcila, M. & Albarracin, L. (2017). Emphasizing visualization and physical applications in the study of eigenvectors and eigenvalues. *Teaching Mathematics and its applications* 36, 123- 135. doi:10.1093/teamat/hrw018.

Beltrán-Meneu, M., Murillo-Arcila, M. & Jordán, E. (2017). A teaching proposal for the study of eigenvectors and eigenvalues. *Journal of Technology and Science Education* 7(1), 100 - 113. doi: 10.3926/jotse.260.

Bouhjar, K., Andrews-Larson, C., Haider, M & Zandieh, M. (2018). Examining Students' Procedural and Conceptual Understanding of Eigenvectors and Eigenvalues in the Context of Inquiry-Oriented Instruction. (pp. 193-216) In: Stewart S., Andrews-Larson C., Berman A., Zandieh M. (eds) *Challenges and Strategies in Teaching Linear Algebra*. ICME-13 Monographs. Springer, Cham.

Caglayan, G. (2015). Making sense of eigenvalue–eigenvector relationships: Math majors' linear algebra – Geometry connections in a dynamic environment, *The Journal of Mathematical Behavior*, 40, 131-153

Camacho., G & Oktaç, A. (2016). Exploración de una transformación lineal de R^2 en R^2. El uso de geometría dinámica para ampliar o adecuar construcciones mentales. En *Actas Quinto Simposio Internacional ETM* (pp. 253-266). Florina, Grecia.

Campos, V. (2017). *Los conceptos valor propio y vector propio en un texto de álgebra lineal: una mirada desde la teoría APOE*. Instituto Politécnico Nacional, Ciudad de México, México. DOI: 10.13140/RG.2.2.33372.08325

Cook, J. P. & Stewart, S. (2014). Presentation of matrix multiplication in introductory linear algebra textbooks. En T. Fukawa-Connolly, G. Karakok, K. Keene y M. Zandieh (Eds.), *Proceedings of the 17th Annual Conference on Research in Undergraduate Mathematics Education* (pp. 518-522). Denver, Colorado. Recuperado de http://sigmaa.maa.org/rume/RUME17.pdf.

Cook, P., Zaskis, D., & Estrup, A. (2018). Rationale for Matrix Multiplication in Linear Algebra Textbooks. (pp. 193-216) In: Stewart S., Andrews-Larson C., Berman A., Zandieh M. (eds) *Challenges and Strategies in Teaching Linear Algebra*. ICME-13 Monographs. Springer, Cham.

Del Valle, J.C. (2011). *Álgebra lineal para estudiantes de ciencias e ingenierías*. México: McGraw-Hill.

Fan, L. (2013). Textbook research as scientific research: towards a common ground on issues and methods of research on mathematics textbooks. *ZDM, The International Journal on Mathematics Education, 45* (5), 765-777. https://doi.org/10.1007/s11858-013-0530-6

Fan, L., Zhu, Y. & Miao, Z. (2013). Textbook research in mathematics education: Development status and directions. ZDM, *The International Journal on Mathematics Education*, 45 (5), 633-646. https://doi.org/10.1007/s11858-013-0539-x

Friedberg, S. H., Insel, A. J. y Spence, L. E. (2003). Álgebra Lineal. México: Pearson Educación.

Giacoleti-Castillo, F.M y Cordero, F. (2019). Usos y significados de la transformada de Laplace en una comunidad de ingenieros electrónicos. *En Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 32* (pp. 429-438). México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C

González-Rojas, D. E., y Roa-Fuentes, S. (2017). Un esquema de transformación lineal: construcción de objetos abstractos a partir de la interiorización de acciones concretas. *Enseñanza de las Ciencias*, 35(2), 0089-107. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2150

Harel, G. (1987). Variations in linear algebra content presentations. *For the Learning of Mathematics*, 7 (3), 29-32.

Hillel, J. (2000). Modes of description and the problem of representation in linear algebra. In J.-L. Dorier (Ed.), *On the teaching of linear Algebra*. (pp. 191–207). Grenoble, France: Kluwer Academic Publishers.

Hoffman, K y Kunze, R. (1973). *Álgebra lineal*. México: *Prentice-Hall Hispanoamericana, S. A.*

Ibarra, S. (2018). Un estudio sobre la educación matemática en el contexto de la reforma integral de la educación media superior en México. *En Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 32* (pp. 1666-1672). México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

Kilpatrick, J. (2014). From clay tablet to computer tablet: the evolution of school mathematics textbooks. In Jones, et al., (Eds) *Proceedings of the International Conference on Mathematics Textbook Research and Development (ICMT-2014) (pp.3-11).* Southampton: University of Southampton.

Klasa, J. (2010). A few pedagogical designs in linear algebra with Cabri and Maple. *Linear algebra and its applications*, 432(8), 2100-2111. doi:10.1016/j.laa.2009.08.039

Maturana, I., Parraguez, M. y Trigueros, M. (2015). El Esquema del Concepto Transformación Lineal. Una Mirada a tres Interpretaciones desde la Teoría APOE. *Educación Matemática en las Américas 2015 Volumen 10: Algebra y Cálculo.* Editores: Comité Interamericano de Educación Matemática.

Occelli, M y Valeiras, N. (2013). Los libros de texto como objeto de investigación: una revisión bibliográfica, *Enseñanza de las ciencias,* 31(2), pp. 133-152.

Osorio, M., y Díaz-Levicoy, D. (2018). Tipos de gráficos estadísticos en libros de texto de matemática para la educación primaria peruana. *En Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 32* (pp. 849-856) México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

Parraguez, M., & Oktac¸, A. (2010). Construction of the vector space concept from the viewpoint of APOS theory. *Linear Algebra and its Applications*, 432, 2112–2124.

Paz-Corrales, L. y Cantoral, R. (2019). Estudio socioepistemológico sobre la confrontación entre la geometría de descartes y la geometría analítica. *En Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 32* (pp. 394-403). México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

Pérez, R. y Cantoral, R. (2019). Estudio sobre el papel de la confrontación en el tratamiento de la física clásica de newton al discurso matemático escolar. *En Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 32* (pp. 55-64). México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

Plaxco, D., Zandieh, M &Wawro, M. (2018) Stretch Directions and Stretch Factors: A Sequence Intended to Support Guided Reinvention of Eigenvector and Eigenvalue. (pp. 175-192) In: Stewart S., Andrews-Larson C., Berman A., Zandieh M. (eds) Challenges and Strategies in Teaching Linear Algebra. ICME-13 Monographs. Springer, ChamPoole, D. (2011). *Álgebra Lineal. Una introducción Moderna* (3º Ed.). México: Thomson.

Romero Félix, C. F., y Oktaç, A. (2015). Coordinación de registros y construcciones mentales en un ambiente dinámico para el aprendizaje de transformaciones lineales. In I. M. Gómez-Chacón et al. (eds.) *Actas Cuarto Simposio Internacional ETM* (pp. 387–400), Madrid, Spain.

Roa-Fuentes, S. y Oktaç, A. (2010). Construcción de una descomposición genética: Análisis teórico del concepto transformación lineal. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 13 (1), 89-112.

Roa-Fuentes, S., & Parraguez, M. (2017). Estructuras mentales que modelan el aprendizaje de un teorema del álgebra lineal: Un estudio de casos en el contexto universitario. *Formación universitaria*, 10(4), 15-32. doi: 10.4067/S0718-50062017000400003

Ruiz-Estrada, H., Slisko, J., y Nieto-Frausto, J. (2018). Detección de errores y contradicciones en un problema de un libro de texto de matemáticas: una exploración inicial del pensamiento crítico de los maestros. *En Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 32* (pp. 106-114) México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

Salgado, H., y Trigueros, M. (2014). Una experiencia de enseñanza de los valores, vectores y espacios propios basada en la teoría APOE. *Educación Matemática*, 26(3), 75-107.

Salgado, H., & Trigueros, M. (2015). Teaching eigenvalues and eigenvectors using models and APOS theory. *The Journal of Mathematical Behavior*, 39, 100-120. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2015.06.005

Sierpinska, A. (2000). On some aspects of students' thinking in linear algebra. In J.-L. a (Ed.), *On the Teaching of Linear Algebra* (pp. 209–246). Grenoble, Francia: Kluwer Academics Publishers.

Thomas, M. & Stewart, S. (2011). Eigenvalues and eigenvectors: embodied, symbolic, and formal thinking. *Mathematics Education Research Group of Austaralasia*. 23, 275 - 296. Versión electronica doi: 10.1007/s13394-011-0016-1.

Trigueros, M., Maturana, I., Parraguez, M. y Rodríguez, M. (2015). Construcciones y mecanismos mentales para el aprendizaje del teorema matriz asociada a una transformación línea. *Educación Matemática*, 27(2), 95-124.

Trigueros, M. (2018). Learning Linear Algebra Using Models and Conceptual Activities. (pp. 29-50) In: Stewart S., Andrews-Larson C., Berman A., Zandieh M. (eds) *Challenges and Strategies in Teaching Linear Algebra*. ICME-13 Monographs. Springer, Cham.

Wawro, M., Watson, K. & Zandieh, M. (2019). Student understanding of linear combinations of eigenvectors. ZDM, *The International Journal on Mathematics Education*. https://doi.org/10.1007/s11858-018-01022-8

Yáñez, A. (2015). Construcción de los conceptos de valores y vectores propios en R^2 y R^3 desde la teoría APOE. Tesis de Maestría no publicada, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. Chile.

Zandieh, M; Wawro, M & Rasmussen, C. (2016) An Example of Inquiry in Linear Algebra: The Roles of Symbolizing and Brokering, PRIMUS, 1-29. DOI:10.1080/10511970.2016.119961.

Autores

Alexander Betancur Sánchez. Universidad Industrial de Santander. Colombia.
alexanderbetancursanchez@gmail.com

Solange Roa Fuentes. Universidad Industrial de Santander. Colombia.
sroa@matematicas.uis.edu.co

Silvia Juliana Ballesteros. Universidad Industrial de Santander. Colombia.
Julianaballesterosg@hotmail.com

María Herlinda Consuelo Martínez de la Mora

LAS RELACIONES ENTRE ENTIDADES COMPONENTES DEL VALOR POSICIONAL Y SU DIDÁCTICA

The relationships between component entities of place value and its didactic

RESUMEN

Se presenta una parte de una investigación referente al valor de posición y su didáctica. En tal investigación se diseñó un estudio para explorar el potencial de un enfoque de relaciones de la estructura del valor de posición. Esta se hizo mediante la aplicación de un curso, el cual posibilita que el estudiante atienda a las relaciones entre componentes de la estructura del valor posicional. La aplicación didáctica se hizo en dos grupos de 3º de primaria. En uno de ellos se usó la ubicación de las unidades de cada orden de magnitud en el espacio dispuesto en la hoja de trabajo, con campos adyacentes. Y en el otro se utilizó la representación de las unidades en el ábaco. El propósito consiste en presentar efectos del curso didáctico respecto a las relaciones que atienden los estudiantes correspondientes a cada orden de magnitud. Ello necesario para que los alumnos evoquen y comprendan dichas relaciones.

PALABRAS CLAVE:

- *Relaciones*
- *Estructura*
- *Valor de posición*
- *Polinomio*

ABSTRACT

A part of an investigation regarding the position value and its didactics is presented. A study was designed to explore the didactic potential of a relation-structure approach to positional value. The research was made by means of the application of a course. This enabled the student to attend the relations between components of positional value structure. The didactic application was made in two groups of 3rd. of elementary school. In one of them the location of the units of each order of magnitude in the space arranged in the work sheet with adjacent fields was used. In the other group the representation of the units in the abacus was used. The research purpose is to present effects of the didactic course respect. To the meaning that the students give to the relations attended to each order of magnitude. This is necessary for students to evoke and understand these relationships.

KEY WORDS:

- *Relation*
- *Structure*
- *Positional value*
- *Polynomial*

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (2021) *24* (3): 277-298.
Recepción: Septiembre 20, 2019 / Aceptación: Agosto 2, 2021. DOI: 10.12802/relime.21.2432

RESUMO

Uma parte de uma investigação sobre o valor da posição e sua didática é apresentada. Nessa pesquisa, um estudo foi projetado para explorar o potencial de uma abordagem de relacionamento e estrutura de valor de posição. Isso foi feito através da aplicação de um curso. Que permite ao aluno atender às relações entre os componentes da estrutura do valor do local. A aplicação didática foi feita em dois grupos do terceiro grau da escola primária. Em um deles, a localização das unidades de cada ordem de magnitude foi utilizada no espaço fornecido na folha de trabalho, com campos adjacentes. E no outro, a representação das unidades no ábaco foi utilizada. O objetivo é apresentar os efeitos do respeito ao curso didático, na imortância que os alunos dão para as relações ligadas a cada ordem de magnitude. Isso é necessário para que os alunos evoquem e compreendam essas relações.

PALAVRAS CHAVE:

- *Relações*
- *Estrutura*
- *Valor de posição*
- *Polinômio*

RÉSUMÉ

Une partie de l'enquête sur la valeur de position et ses didactiques est présentée. Dans cette recherche, une étude a été conçue pour explorer le potentiel d'une approche relationnelle de la structure de valeur de position. Celle s'est faite par l'application d'un cours. Ce qui permet à l'étudiant d'assister aux relations entre les composants de la structure de la valeur de position. L'application didactique a été faite dans deux groupes de CE2. Dans l'un d'eux, l'emplacement des unités de chaque ordre de grandeur était utilisé dans l'espace prévu à cet effet dans la feuille de travail, avec les champs adjacents. Et dans l'autre, la représentation des unités dans l'abaque était utilisée. Le but est de présenter les effets du cours didactique en ce qui concerne les relations auxquelles les étudiants dont face en fonction de chaque ordre de grandeur. Cela est nécessaire pour que les étudiants évoquent et comprennent ces relations.

MOTS CLÉS:

- *Relations*
- *Structure*
- *Valeur de position*
- *Polynôme*

1. Introducción

Una primera aportación de esta investigación consiste en explorar el potencial de un enfoque centrado en las relaciones y estructura, para la enseñanza y comprensión del valor de posición. Esto implica una perspectiva distinta de los enfoques actuales para la enseñanza del valor de posición, ya que generalmente se ha pasado por alto este sentido relacional y se centran; en las agrupaciones, en los tamaños de la magnitud longitudinal o en los tipos de unidades respecto al valor posicional (ej., unidades, decenas, centenas, etc.), también llamado valor relativo del número de acuerdo a la posición.

Este trabajo propone que para comprender la estructura numérica implicada en el valor de posición, el estudiante necesita prepararse enfocándose en las relaciones entre entidades que conforman dicha estructura. Ello motivó un estudio en el que se comparó el desarrollo de tareas didácticas utilizando la técnica de adiciones sucesivas en dos grupos. En un grupo se empleó una hoja de trabajo con campos internos adyacentes, usando colecciones de palitos atados con ligas para presentar de manera no simbólica los coeficientes de los distintos órdenes de magnitud. En otro grupo se realizaron tareas análogas utilizando un ábaco. Con ello se efectuó la investigación exploratoria y cualitativa.

Actualmente, el discurso de la educación matemática, para la enseñanza y el aprendizaje de este tema, oscila entre el Constructivismo (aunado a la solución de problemas) y la Lógica de conjuntos. En ellos no se atiende a las relaciones de la estructura del valor posicional, durante la enseñanza de este tópico. Se plantea entonces la necesidad de trascenderlos enfocándose en las relaciones de la estructura general del polinomio, $z = an\ x\ 10n + an - 1\ x\ 10n - 1 + \ldots + a1\ x\ 101 + a0\ x\ 100$, esto implica que se atienda a la base, el coeficiente y el exponente de cada orden de magnitud, durante el curso didáctico del valor de posición. Con esta perspectiva, concierne a este artículo la pregunta de investigación ¿Cuáles aciertos, errores y dificultades muestran los estudiantes durante el curso del aprendizaje del valor de posición cuyo fundamento está en las relaciones entre entidades de esta estructura?

Todo lo cual motivó la presente aproximación al valor de posición que exibe los componentes de esta estructura. El hecho de poder ostentar ante los ojos de los alumnos cada componente y mostrar como corresponde relacionarlos, tanto par generar las unidades, como para representarlas con la notacon desarrollada es fundamental para que los alumnos puedan otorgar sentido a la "llevada" (esto es, el paso de un orden de magnitud a otro) que se utiliza en los algorimos aritméticos. A partir de dicha pregunta se plantea una propuesta didáctica.

2. Marco de referencia

La investigación que se reporta incluye la presentación de una propuesta teórica que replantea aspectos básicos para la comprensión del valor de posición, es una de las aportaciones de este trabajo. Esta propuesta se denomina Curso de relaciones de la estructura del valor de posición CREVP y se enfoca en las relaciones entre las entidades componentes de la estructura del valor posicional. Cabe enfatizar que se incluye un marco de referencia en vez de una teoría por que de aquí se desprende poder elaborar una teoría a partir de la investigación aquí mostrada. Se parte de dos referentes fundamentales: la estructura general del polinomio y la técnica de adiciones sucesivas.

El enfoque aquí planteado prioriza la enseñanza de la estructura del valor posicional a través de las entidades y relaciones que la conforman. Tal enfoque enfatiza uno de los aspectos centrales de la enseñanza de las matemáticas. Esto consiste en lograr la comprensión de la construcción de patrones, como lo expresa Nickerson (2011): "En el corazón de las Matemáticas está la búsqueda de la regularidad, de la estructura, de los patrones" (p.3). Ubicar a los alumnos en esta perspectiva, les permitirá a los estudiantes situarse en una mejor posición para el aprendizaje subsecuente de la disciplina matemática. Pues, con ello se hace posible que los alumnos puedan generar patrones numéricos, al centrarse en las relaciones implicadas en la estructura general del polinomio, mediante la aplicación de la técnica de adiciones sucesivas. Cabe añadir, que es ampliamente conocido que con el valor posicional se puede representaar cualquier entero positivo. Sin embargo, lo que no es así, es que con el polinomio al que hemos hecho referencia, se pueden visibilizar las relaciones allí implicadas, que le dan estructura. Precisamente, para poder visibilizar estos componentes de la estructura del valor posicional se requiere hacer añadidos sucesivos, de allí la técnica denominada así, que se utiliza aquí.

En la actualidad, el sistema decimal se enfatiza durante la educación básica. A diferencia de ello, en el enfoque de relaciones de la estructura general de un polinomio se necesita utilizar distintas bases. Pues el hecho de utilizar solamente una base (la base diez) impide que el estudiante distinga las relaciones entre los componentes del valor posicional, dado que el alumno se fija únicamente en los factores de diez.

2.1. *Relaciones entre los componentes del polinomio, el orden de magnitud; exponente, coeficiente y base*

Cuando se tiene una cantidad, la representación algebraica de ello reside en un polinomio. Por lo cual, la teorización propone sustentar la enseñanza del valor de posición en las relaciones implicadas en la estructura general del polinomio ya que una expresión numérica anotada con cifras indo-arábigas corresponde a un caso particular de dicha estructura. Es decir, mediante los signos indo-arábigos se puede presentar cualquier entero positivo.

Para ello, se necesita hacer explícitos los componentes de cada término del polinomio. Esto se presenta en base diez. $z = an\ x\ 10n + an - 1\ x\ 10n - 1 + \ldots + a1\ x\ 101 + a0\ x\ 100$. Estos componentes son; la base elevada al exponente, multiplicados por coeficientes que son menores que la base, correspondientes a distintos órdenes de magnitud y la suma de los términos da el valor del entero positivo.

Cabe mencionar que en esta investigación se utilizan los números anotados con cifras indo-arábigas con la base explicita mediante un subíndice, por ejemplo para el número ochocientos setenta y tres: 87310, 800 + 70 + 3 = 8 x 100 + 7 x 10 + 3 x 1. En esta notación, el ocho, el siete y el tres son coeficientes, correspondientes a los primeros tres órdenes de magnitud. En el ejemplo se indica tanto el coeficiente como la base diez elevada al exponente relativo a cada orden de magnitud.

Para que el alumno entienda las relaciones de la estructura del valor posicional se requiere atender a los componentes del valor de cada orden de magnitud; exponente, coeficiente, y base. En ello consiste el sentido que se considera aquí, pues la falta de atención a alguno de estos componentes y sus relaciones repercute en una valoración equívoca del valor de posición. A continuación se describe cada una de dichas relaciones.

2.1.1. *Relación entre coeficiente y orden de magnitud*

El coeficiente determina una cantidad específica de unidades en cualquier orden de magnitud. Así, las colecciones ubicadas en un determinado orden de magnitud corresponden a la cantidad de unidades indicada por el coeficiente, por ejemplo: en el número 217, el coeficiente del orden de magnitud cero indica una unidad, el coeficiente del 1er orden de magnitud indica 2 unidades.

Base 7	1*er orden de magnitud*	*Orden de magnitud* 0
21_7	2	1

2.1.2. *Relación entre coeficiente y base*

La determinación del coeficiente en cualquier orden de magnitud atiende a la restricción base menos uno. Es decir, puede haber tantas unidades en cada orden de magnitud como designe la base menos uno. En el ejemplo 217 los coeficientes allí registrados se ciñen a la regla, esto es, las cifras 2 y 1 son menores a la base especificada. Tal restricción fue planteada en el taller “Reconstruyendo el número” (García, 2006; Garcia, 2009) como la regla de un juego en la cual si el alumno no atiende a esta regla “la fábrica de números explota”. La restricción también la refirieron otros autores (Slovin, 2010-2011; Andrade y Valdemoros, 2015). Se requiere cumplir con tal regla para generar la unidad del siguiente orden de magnitud. En el curso didáctico, ello se atiende durante las producciones no simbólicas, después se necesita atender al valor de esta relación durante la notación desarrollada y la producción simbólica.

Veamos el ejemplo 217, la base se expresa mediante el subíndice. Con esta base se pueden continuar añadiendo unidades en el orden de magnitud 0 y en el 1er orden de magnitud, hasta llegar a seis unidades en cada uno de los campos adyacentes (porque la base es siete). Sin embargo, la misma notación numérica en base tres, es decir, 213, implica que con solo una unidad más que se añada al 1er orden de magnitud, se requerirá formar la unidad del siguiente orden de magnitud.

Base 7 *y* 3	1*er orden de magnitud*	*Orden de magnitud* 0
21_7	2	1
21_3	2	1

2.1.3. *Relación entre orden de magnitud (exponente) y base*

Esta relación indica el tamaño y la estructura de la unidad de cada orden de magnitud, lo cual implica la relación entre la unidad, determinada por la base, correspondiente a cada orden de magnitud y su ubicación precisa en el campo interno adyacente.

Una vez que el alumno tiene cierto dominio de las relaciones entre órdenes de magnitud, que incluye el exponente, la base y el coeficiente. El estudiante podrá distinguir lo siguiente: una misma notación numérica, pero en diferente base implica diferentes valores numéricos, por ejemplo: 2345, es diferente a 2349. También estará en posibilidad de poder establecer valoraciones correspondientes a equivalencias entre diferentes bases, por ejemplo: 107 = 213. Se plantea la necesidad de que los alumnos se ejerciten en este tipo de equivalencias ya que el logro de este dominio les permitirá entender a profundidad las propiedades numéricas de orden (reflexiva, simétrica y tránsitiva) y del cardinal (asociativa, conmutativa y distributiva).

Notación numérica	1*er orden de magnitud*	2*do orden de magnitud*	*Orden de magnitud* 0
21_{10}		2	1
210_3	2	1	0

En el ejemplo se muestra un valor numérico que se expresa en esta notación: 2110, y su equivalente en base 3. Así, se observan las unidades determinadas por la base correspondientes a cada orden de magnitud y su ubicación precisa en el campo interno adyacente.

3. Método

Participaron 59 alumnos de tercer grado de una Escuela Primaria ubicada en la ciudad de México, al comienzo del curso escolar. La edad promedio fue de aproximadamente 8 años, siendo 29 niñas y 30 niños. Con respecto a la enseñanza del sistema decimal, es pertinente mencionar que los alumnos de los dos grupos en sus respectivas clases habían hecho tareas numéricas de notación desarrollada. La escuela está inscrita en el sistema de educación pública, por lo cual era de esperarse que sus conocimientos acerca del valor de posición se apegaran a lo especificado en el currículo oficial. Al inicio del curso escolar los niños tienen como antecedente el haber trabajado con números de tres cifras.

El estudio consistió en una aplicación didáctica durante diez sesiones de aproximadamente una hora y media de duración. Esta investigación es empírica y exploratoria, para ello se hizo un análisis cualitativo de las producciones no simbólicas, notación desarrollada y producciones simbólicas de los alumnos, a través de triangular información de los datos recabados, mediante un cuestionario inicial y uno final y las producciones de los estudiantes durante la aplicación didáctica. Con ello se hace posible observar las relaciones que el estudiante genera a través de sus producciones. Los alumnos exhiben tales relaciones con la notación desarrollada solicitada por el docente y a través de las producciones no simbólicas. Aunado a ello, la comparación entre los dos grupos con materiales distintos permite mostrar que la técnica de adiciones sucesivas con los palitos, ligas y la hoja de trabajo exhibe las unidades y estructura de cada orden de magnitud, de una forma que con el ábaco no se ostenta, ya que únicamente se observa la bolita desplazada, no su contenido.

3.1. *Propuesta didáctica basada en las relaciones de la estructura del valor posicional*

La propuesta didáctica del CREVP se divide en tres actividades para propiciar que los alumnos logren atender a los componentes del valor posicional y después a las relaciones pertinentes. La primera de ellas consiste en solicitar al estudiante producciones no simbólicas con materiales manipulables, en un grupo utlizan palitos que colocan los alumnos en un tablero con columnas, en el otro grupo utilizan el ábaco, en este emplean el desplazamiento de las bolitas.

Figura 1. Empleo del ábaco con la técnica de adiciones sucesivas, con error. Número a formar 2114

Esta actividad está basada en una técnica que se presenta como un juego numérico en el taller “Reconstruyendo el número” (García, 2006; García, 2009; García, V. R. y Cardoso, S. G., 2011). Se muestra en la Figura 2.

Una técnica similar ha sido usada por Pengelly, (1991, citado en A. Broadbent. 2004), también como juego didáctico, él la denomina adiciones continuas y utiliza únicamente la base diez y el tablero con columnas con los nombres anotados en la parte superior de cada columna para indicar unidades, decenas y centenas. Este tablero ha sido utilizado en muchas investigaciones sobre el valor de posición: Baroody (1990), Fuson (1990), Vergnaud (2003), por mencionar algunas.

Figura 2. Materiales empleados en el taller “Reconstruyendo el número”

A diferencia de la técnica de adiciones continuas usada por Pengelly (1991, citado en A. Broadbent. 2004), García (2006; García, 2009; García, V. R. y Cardoso, S. G., 2011), en su taller "Reconstruyendo el número" utiliza el tablero con columnas sin los nombres aludidos para las unidades, decenas y centenas. Incluye diferentes bases numéricas, y anota en el pizarrón el número a formar por los alumnos con los materiales manipulables. Este número se anota con cifras indo arábigas y la base explicita como subíndice, por ejemplo: 1213.

La comparación entre los dos grupos que usan disitntos materiales con la misma técnica de adiciones sucesivas, es para mostrar como los alumnos que usan el material de palitos, ligas y la hoja de trabajo con columnas (tablero), pueden observar directamente, y por lo tanto están en posibilidad de discernir, las relaciones implicadas en los distintos ordenes de magnitud, mientras que los del grupo que utilizó el ábaco no pueden ver dicha estructura, lo que observa el estudiante es una bolita desplazada en cada barra. Para mostrar este desempeño, el curso que aquí se propone se desarrolla con las actividades siguientes.

3.1.1. *Producción no simbólica*

En este trabajo, a la técnica empleada en el taller "Reconstruyendo el número" con las características especificadas anteriormente, la denominamos técnica de adiciones sucesivas, pues este término describe mejor los añadidos que se hacen sucesivamente. Aunado a que el referente conceptual es distinto, ya que aquí usamos esta técnica vinculada a las relaciones y estructura que contiene el valor de posición. El nombre que damos a la técnica importa y mucho, porque es a partir de la aplicación de la técnica de adiciones sucesivas que se posibilita distinguir los componentes y mostrar como relacionarlos, y a partir de ello observar directamente como las unidades se generan. Especificamente porque son añadidos sucesivos los que se realizan. No son continuos como lo anota Pengelly, (1991, citado en A. Broadbent. 2004). También se distingue del planteamiento de Garcia (2006; García, 2009; García, V. R. y Cardoso, S. G., 2011), respecto a la descripción que presentan concerniente a esta técnica. Las autoras se refieren a su técnica como la parte fundamental del Taller Reconstruyendo el número, y lo explican a partir de planteamientos de Gérard Vergnaud, (2000) destacan que es a través de la abstracción reflexionante: que se establecen dos tipos de relaciones: una es el orden y la otra la inclusión jerárquica.

En la presente investigación el foco esta colocado en las distintas relaciones entre entidades que conforman el valor de posición. La técnica con las características mencionadas permite atender a dichas relaciones. Esto es lo que propicia que los alumnos distinguian las diferentes unidades correspondientes a los diferentes órdenes de magnitud.

A los alumnos se les da primero la instrucción de fijarse en un número escrito en el pizarrón, con cifras indo arábigas, y la base señalada con un subíndice, por ejemplo1213. Este número cada estudiante lo formará con sus respectivos materiales. Como docente indico a los alumnos que tomen una tarjeta. Para ello, los alumnos colocan previamente un mazo de tarjetas boca abajo en su mesa de trabajo, estas tarjetas tienen anotada una cifra indo arábiga (en sesiones posteriores se usan dados). El número que aparece allí es la cantidad de palitos a tomar para añadir a su hoja de trabajo (tablero), en el caso del grupo con el ábaco son las bolitas que desplazan, según los coeficientes de cada orden de magnitud, concernientes a cada barra. Este desplazamiento corresponde a los añadidos sucesivos. Se detalla a continuación ejemplificando con el grupo que usa palitos. Con el número indicado en la tarjeta, se pide a los alumnos que añadan ese número de palitos en la columna de la derecha. Los alumnos añadieron palitos en la columna señalada hasta reunir tantas unidades como indicaba la base.

Una vez que reunieron tantos palitos como indicaba la base en esa columna. Se les dio la instrucción - Ata con la liga chica, el número de palitos indicado por la base y coloca, la unidad así formada, en la columna siguiente a la izquierda -. Esto es, la unidad del siguiente orden de magnitud. El mismo proceder para el siguiente orden de magnitud, para ello se utilizó la siguiente columna, y la liga grande. Asimismo se atendió a la restricción, en cada columna puede haber tantas unidades como indica la base menos uno. La instrucción fue – No puedes dejar más palitos de los que dice la base – De igual forma se mencionó que no podían dejar tantos palitos como indicaba la base. (En el transcurso también respecto a las unidades de 1er y 2do orden). Esta se señaló en el campo adyacente correspondiente. Se continúa así, se toman tarjetas para seguir añadiendo unidades hasta formar el número solicitado en el pizarrón. Para ilustrar la sucesión seguida se muestra el siguiente ejemplo, en la Tabla 1, (en el cual los palitos se representan con las pequeñas rayas verticales, las ligas chicas con el trazo que cruza estas rayas y las ligas grandes se representan con el subrayado que indica que todas esas rayas forman una unidad), el número a formar es 1013, se toma el ejemplo en curso, cuando el alumno ya ha añadido 213.

Esta actividad tiene como propósito que el estudiante se fije en que no haya más o igual unidades que las indicadas por la base en cada orden de magnitud. En ello reside atender a la restricción, base menos uno, b-1. Aquí se pueden presentar dos casos. El primero consiste en que al añadir más palitos se rebase la cantidad especificada por la base en un orden de magnitud, en cuyo caso se indica que es necesario formar la unidad del siguiente orden de magnitud, esto es, atar con la liga tres unidades, y colocar esta nueva unidad en el siguiente campo adyacente de la hoja de trabajo, al respecto el ejemplo 1003. El otro caso es que obtenga un número mayor a la base al sacar una tarjeta o con el dado, entonces se muestra que es el momento de formar la unidad que corresponde al siguiente orden de magnitud, (o las unidades que se requiera dependiendo del número que se saque en las tarjetas o con los dados). Se espera también que el alumno reconozca la estructura de la unidad de cada orden de magnitud y se dé cuenta de la cantidad requerida por el coeficiente para cada orden de magnitud en el campo adyacente correspondiente.

En síntesis esta tarea inicia con dos instrucciones. Una consiste en añadir la cantidad suficiente para formar el número anotado en el pizarrón, con la orientación necesaria para formar las unidades de los distintos órdenes de magnitud. La otra corresponde a mantener la restricción base menos uno, para las unidades contenidas en cada orden de magnitud. Cabe resaltar que cada una de las unidades de los diferentes órdenes de magnitud se obtiene al añadir sucesivamente los palitos, el alumno añadirá tantos como lo especifique cada uno de los coeficientes. Posteriormente la misma tarea se efectúa con un sentido de ejercitación. Hay necesidad de enfatizar que durante estas ejercitaciones aparecen errores correspondientes a las relaciones evocadas por los alumnos.

3.1.2. *Notación desarrollada*

Después de la producción no simbólica se solicita a los estudiantes el registro en notación indo-arábiga de los valores relativos a cada uno de los órdenes de magnitud. Esta actividad implica que cada alumno registre en las tarjetas con notación indo-arábiga los valores de cada una de las cifras que componen un número, para ello se requiere atender a los componentes exhibidos, por ejemplo:

1235 = 1 *x* 52 + 2 *x* 51 + 3 *x* 50

1235 = 1 x (5 x 5) + 2 x 5 + 3 x 1

1235 = 1 x 25 + 2 x 5 + 3 x 1

1235 = 25 + 10 + 3

Cabe mencionar que la notación del exponente no se emplea ya que el exponente se atiende mediante la aplicación de la técnica de adiciones sucesivas, por ello la notación que se espera efectúen los alumnos corresponde en el ejemplo a la que se muestra en la última expresión, cuyo uso indica implícitamente el exponente.

TABLA I
Ejemplo de producción no simbólica

Base 3	2*do orden de magnitud*	1*er orden de magnitud*	*Orden de magnitud* 0
Se tiene el número 21_3		 Dos unidades de 1er orden	$\vert$ Una unidad en el orden cero
Si se añaden 2_3 unidades al número registrado en las columnas de la derecha			$+ \Vert$ Más dos unidades de orden cero
El número resultante es	 Una unidad de 2do orden	Cero unidades de 1er orden	Cero unidades de orden cero
Con cifras indoarábigas el número resultante es 100_3	1	0	0_3

El propósito de esta actividad consiste en exponer las relaciones entre componentes de la estructura del valor de posición, comprendidas por los estudiantes. Cuando los alumnos emplean las cifras indoarábigas en la notación desarrollada, se esta presentando las relaciones que ellos van entendiendo, esto es un proceso muy lento, y visibiliza los errores al relacionar los componentes de la estructura del valor posicional. Estas relaciones el alumno las comprende paulatinamente porque el mismo las genera, a partir de atender a los componentes de dicha estructura. A esta actividad se le denomina notación desarrollada. Cabe, resaltar que este proceso es muy lento para algunos alumnos, los errores que se muestran en los resultados dan cuenta de las dificultades que enfrentan los estudiantes. El CREVP permite visibilizar y atender estas dificulatades durante el curso.

3.1.3. *Producción simbólica*

Para alcanzar un suficiente dominio de producción simbólica, implica que el alumno con antelación, de sentido al número anotado en el pizarrón y lo reproduzca con el material manipulativo, y también que una numerosidad expuesta con material manipulativo la pueda describir anotando con cifras indoarábigas, lo que aquí denominamos notación desarrollada, para que finalmente la producción simbólica tenga sentido. La síntesis de ello aparece en la producción simbólica, los alumnos pueden dar sentido a un número del tipo 1245 y operar con él.

Esta actividad se desarrolla básicamente con tres tareas. La primera consiste en solicitar a los niños formar con los materiales un número al que le añaden o sustraen un monto que como docente les pido. El número resultante corresponde al que registran en sus tarjetas.

Para la siguiente tarea se requiere partir de un número anotado en el pizarrón. Esta vez se solicita a los alumnos formen el valor mediante producción no simbólica en tres bases diferentes y después se les pide que registren en sus tarjetas los números correspondientes a esas bases con notación indo-arábiga. Por ejemplo: 1547 en base 3, 6, 8.

La tercera tarea consiste en solicitar a los alumnos hacer equivalencias numéricas entre bases, con cifras indo-arábigas. Por ejemplo: 1235 = 537. Respecto a la producción simbólica se efectúa en las últimas sesiones, pues se requiere una preparación preliminar antes de llegar a este punto. El propósito de estas tareas reside en que los estudiantes evoquen las relaciones pertinentes entre las entidades componentes del valor posicional.

Es necesario mencionar que con respecto a esta actividad, se alcanzó a aplicar únicamente la 1er tarea. El desarrollo del curso fue insuficiente para que los alumnos lograran resolver las siguientes tareas, pues aún no tenían el suficiente dominio entre la estructura del valor posicional y su relación con los signos indo-arábigos como para enfrentarse a las tareas de producción simbólica en diferentes bases y las equivalencias entre bases.

Con la producción no simbólica y la notación desarrollada que los alumnos realizan, se observa qué componentes del valor posicional atienden y como los relacionan. Con respecto a la producción simbólica, los estudiantes requieren evocar las entidades componentes y relacionarlas como corresponde para el valor indicado por las cifras de los diferentes órdenes de magnitud, para operar con ellas. Cabe reiterar que, se propusieron estas tres tareas respecto a la producción simbólica, pero el tiempo que se destinó en este curso fue claramente limitado para lograr que los estudiantes desarrollaran estos grados de comprensión que permitiesen hacer equivalencias entre diferentes bases. Como se muestra a continuación en los resultados. Motivo por el cual esta producción simbólica se desarrollará en una investigación y artículo posterior.

4. Resultados

En el cuestionario inicial se observó que alrededor de dos terceras partes de los dos grupos de estudiantes podían resolver adiciones de dos y tres dígitos sin inconveniente, ello aparentemente implicaría que dominan el sentido del valor de posición, pues para dar solución a esta tarea ello se requiere. Sin embargo al parecer estas soluciones correctas se muestran como una aplicación mecánica de las reglas para operar los algoritmos, pues en el transcurso didáctico se exhiben diferentes dificultades y errores de los estudiantes al operar con las entidades y relaciones de la estructura del valor posicional.

A diferencia de esos aprendizajes mecánicos, en el CREVP los alumnos logran, mediante la ejercitación, observar y entender pulatinamente de donde y como surge cada una de las unidades de cada orden de magnitud, al atender a las relaciones pertinentes entre entidades y además distinguir la estructura de cada una de dichas unidades, tanto en la producción no simbolica como en la notación desarrollada. Esto ocurre en el grupo que utilizó los palitos, ligas y la hoja de trabajo.

Cabe resaltar que esta investigación tuvo una duración de tres semanas para su aplicación, en esas tres semanas los logros se observan en los siguientes resultados, asi como las dificultades que registraron los alumnos se muestran en las taxonomías de errores.

Se reportan aquí tres ítems respecto al cuestionario final, ilustrativos de los desempeños logrados por los estudiantes después del curso. Respecto al grupo que uso la hoja de trabajo, palitos y ligas. Grupo formado por 30 alumnos.

- Forma con los materiales el número 1023. Fueron 19 alumnos los que respondieron correctamente.
- Añade 5 a 1324. Fueron 14 los alumnos que respondieron como corresponde, 2034, incorrectas 6, no contestó 3, sin tarjeta 7.

Cabe mencionar algunos errores que se presentaron;

- un niño anotó 2035, es decir, en la notación marcó otra base,
- un alumno anotó 2034. La notación no corresponde, pues no se diferencia la base del número.
  Sustrae 8 a 1104. las respuestas correctas fueron dadas por una tercera parte del grupo, anotaron 304, cuya respuesta fue la que corresponde.

Los siguientes tres casos atañen a notación inadecuada;

- un niño anotó 34,
- Estos alumnos anotaron 3 (al parecer olvidaron registrar el cero),
- fueron dos estudiantes que escribieron 304.

Grupo B, empleó el ábaco.

Dado que en este grupo la solicitud de formar un número con el ábaco puede arrojar datos insuficientes porque la naturaleza del material permite atender únicamente a los coeficientes y aparentemente estar bien. En el ejemplo expuesto en la Figura1, se observa que el número de bolitas desplazadas en cada una de las barras corresponde al número solicitado, sin embargo, se atiende allí únicamente al coeficiente, ya que la suma de los números de las tarjetas expuestas no corresponde a 2114.

Se solicitó a los alumnos de este grupo operar adiciiones. Se reportan aquí los ítems:

- Añade 5 a 1324 Los alumnos que respondieron correctamente fueron 12, incorrecto 5, no contestó 9.
- Sustrae 8 a 1104, las respuestas correctas fueron dadas por 4 alumnos, incorrectos 17, no contestó 4.

A continuación se presentan dos taxonomías de errores que presentan los alumnos al efectuar producciones no simbólicas y la notación desarrollada respectivamente.

En la Tabla II se refieren 3 categorías correspondientes a la taxonomía de errores de las producciones no simbólicas en el grupo A, que trabajó con el espacio dispuesto en la hoja de trabajo con campos internos adyacentes. En lo que concierne al grupo B que trabajó con el ábaco, no se incluyen tablas de la producción no simbólica, dado que las características del propio material didáctico muestran sólo como unidad las bolitas de cada barra.

Durante la producción no simbólica los alumnos presentan errores que conciernen a las siguientes categorías: (El número correspondiente a cada una de estas categorias C, aparece en la Tabla II en la primera columna, las siguientes columnas conciernen a errores respecto a cada orden de magnitud).

1) omisión de entidades; esto específicamente a la omisión del valor del coeficiente (c).
2) las relaciones entre entidades; particularmente respecto a la aplicación de relaciones inapropiadas entre base (b) y coeficiente (c).
3) estructura de la unidad de cada orden de magnitud.

Al inicio de la producción no simbólica los alumnos requieren prestar atención a aspectos de procedimiento que les permitirá generar las relaciones pertinentes. Durante el procedimiento los alumnos paulatinamente distinguen cual es la base y el coeficinte, en que campo adyacente corresponde colocar las unidades, también requiren atender a que las unidades que están en cada orden de magnitud correspondan a la estructura según el exponente. Esto es una preparación necesaria para que los niños puedan atender posteriormente a las relaciones entre las entidades del valor posicional. El procedimiento con material manipulativo involucra que el estudiante comience a generar lentamente las relaciones entre entidades del valor posicional. Es decir, el procedimiento permite que los niños atiendan a cada componente, en la medida que los discierne, durante tal procedimiento comienzan a generar ellos mimos las relaciones que corresponden a esta estructura.

TABLA II
Taxonomia de errores de las producciones no simbólicas. Grupo A

c	2*do orden de magnitud*	1*er orden de magnitud*	*Orden de magnitud* 0
1	Colocan una unidad sin considerar las unidades que solicita el coeficiente	No atienden al coeficiente. Colocan sólo una unidad	No atienden al coeficiente, al formar otros órdenes de magnitud
2	Hacen la unidad multiplicando la base por el número marcado en el coeficiente del 1er orden No atienden a la relación base coeficiente. Forman la unidad con agrupaciones de diferente tamaño. Cuando en este orden se requiere c(bxb)	Forman la unidad compuesta por coeficiente por coeficiente. Esta unidad se compone de coeficiente por base. Dejan más unidades o igual que la base, en el campo correspondiente al 1er de magnitud	Dejan más palitos o igual que la base, así no se atiende a la restricción, b-1
3	Forman la unidad multiplicativa (sin ligas chicas), contiene el equivalente aditivo correspondiente. Duplican el valor de la base para formar la unidad. Así, no consideran el exponente. No forman la unidad cuyo valor relativo consiste en (bxb). En este caso los alumnos, dejan sueltas las unidades que reunieron del 1er orden. Colocan una unidad aditiva Colocan una unidad multiplicativa cxb	Colocan la unidad cuyo valor relativo corresponde al 2do orden de magnitud o palitos sueltos	Colocan una unidad multiplicativa

Aunado a ello, que el alumno haga el registro correspondiente con notación desarrollada de los valores relativos implicados en las cifras de cada orden de magnitud, obliga al alumno a atender a todas las relaciones y entidades presentes en el valor posicional. Con respecto a ello, se presenta en la Tabla III, Cuatro categorías de errores respecto a la taxonomía de notación desarrollada, estas corresponden a que los alumnos:

1) sustituyen u omiten de entidades.
2) establecen relaciones no apropiadas entre el coeficiente (c) y la base (b).
3) estructuran la unidad: aditiva, multiplicativa, c x b; multiplicativa iterada, c (b x b); sin correspondencia con el orden de magnitud.
4) con respecto a la estructura del valor posicional, insuficiente o equivocada respecto a los 3 primeros órdenes de magnitud.

5. Conclusiones

Se devela en el transcurso de la aplicación didáctica, durante la producción no simbólica y notación desarrollada, que el alumno se fija sólo en algunas entidades y relaciones del valor de posición y otras las deja sin atender. Durante el curso, los alumnos logran emplear la unidad multiplicativa. Sin embargo, la unidad de 2do orden de magnitud está aún sujeta a algunos olvidos o relaciones inconvenientes. Es pertinente destacar que muchos alumnos todavía no generan, por lo tanto, no pueden observar la unidad del segundo orden, es decir, unidades multiplicativas iteradas 1 (b x b). Dadas las relaciones allí implicadas, esto reside en el solo hecho de multiplicar la base por sí misma (pues el exponente es dos) y después por el coeficiente del 2do orden de magnitud. Lo cual plantea una mayor dificultad al estudiante.

Un aspecto didáctico relevante es que durante la enseñanza se puede ostentar cada uno de los componentes del valor posicional y mostrar como se vincula con los otros componentes, Así el docente o los pares pueden aludir a cada no de ellos durante el curso, y mostrar por ejemplo: que el numero contenido en las ligas corresponde a la base.

En lo concerniente al grupo ábaco, a los alumnos les resulta muy complicado aprehender la estructura básica completa del valor posicional respecto al referente numérico a formar. El empleo de este material provoca que esta estructura se le escape al estudiante. Influye, que la estructura de las unidades de cada orden no son evidentes. Tampoco la relación entre órdenes de magnitud y base, requerimiento para dar significado a esta estructura. Como ejemplo se puede observar la figura 1, allí los alumnos formaron el número solicitado, 2114, en sus ábacos, pero hay inconsistencia entre la suma de las tarjetas y el número representado en el ábaco. Por los resultados se considera que el empleo del ábaco con fines de enseñanza funciona para otros aspectos, podría seguirse después de que el alumno consiga cierto dominio del valor relativo a cada orden de magnitud.

El uso de la notación desarrollada, para anotar valores de los distintos órdenes de magnitud, obliga al estudiante a centrarse en los aspectos relacionales de las entidades y ya no tanto en los procedimentales (sobre todo implicados en el inicio de las producciones no simbólicas). Como se mencionó con antelación durante el procedimiento en la producción no simbólica, el alumno está atento a distinguir cual es la base, cual es el coeficinte, que estructura tiene cada unidad, en dónde la coloca, etc. Durante la notación desarrollada el alumno necesita atender a estas entidades y a las relaciones pertinentes para adjudicar valores. A diferencia del inicio de la producción no simbólica en donde el alumno atiende a componentes, durante la notación desarrollada estos componentes no solo los observa en el material concreto, necesita evocar a que entidad corresponden y determinar las relaciones pertinentes.

Aquí es importante hacer una distinción entre los componentes del valor posicional y las entidades que lo conforman, esta distinción atiende a diferentes momentos del aprendizaje del valor posicional. El primero corresponde a los procedimientos durante la producción no simbólica, y el otro momento cuando el propio estudiante al operar con las cifras indoarabigas evoca las entidades. El primer momento es respecto a los preocedimientos, el alumno atiende a los componentes cuando recién inicia con las producciones no simbólicas, a partir de un referente expuesto con cifras indoarabigas que con el material manipulativo, se presenta ante los ojos de los alumnos como una numerosidad en la cual puede observar los distintos componentes. Estos corresponden a los ceoeficientes de cada orden de magnitud y a la base.

El segundo momento sucede cuando el alumno evoca las relaciones entre esas entidades; coeficientes de cada orden de magnitud y la base, para registrar con notación desarrollada, o simplemente registrar un número con su base explicita u opera algún algoritmo con las cifras indoarabigas. Hemos denominado entidades a la evocación que hace el estudiante de dichos componentes y sus relaciones. Cabe señalar que el sentido relacional atañe también a las producciones no simbólicas del estudiante cuando corresponden a la evocación de las relaciones requeridas por esta estructura, si bien este tránsito entre lo procedural y lo relacional es paulatino.

También es pertinente aclarar que durante las producciones simbólicas y notación desarrollada hay un contenido procedimental, sin embargo, estos procedimientos incluyen la evocación de entidades y sus relaciones que el alumno generó a partir de las producciones no simbólicas, En las producciones no simbólicas es central seguir un procedimiento, fijarse en cada componente. Cabe añadir que para emplear y valorar estructuras aritméticas con sentido es imprescindible reconocer como se generan las distintas unidades de los diferentes órdenes de magnitud. Y las relaciones que están implicadas en dicha estructura. Así mismo cabe destacar que actualmente durante la enseñanza del valor posicional, se omite este sentido relacional y estrctural del valor de posición, se enseña una síntesis, o más bien dicho se enseña parcialmente esta estructura, lo que provoca muchos problemas con el aprendizaje de la aritmética.

La investigación permitió presentar un planteamiento didáctico, para que el alumno tenga posibilidades de atender a las relaciones entre entidades de la estructura del valor posicional. También permitió, conjeturar cómo emerge la estructura del valor posicional para su comprensión, misma que el alumno necesita generar, de allí la necesidad de habilitar cierta comprensión mediante las ejercitaciones constantes, que permitan a los alumnos discernir las entidades, y generar las relaciones pertinentes para dar significado al valor posicional. Sobre todo, porque precisamente lo que se omite durante la enseñanza del valor de posición cotidianamente en las escuelas son las relaciones implicadas en esta estructura. Los errores que se muestran en las taxonomías, permiten identificar que es lo que hay que atender cuando se está enseñando el valor de posición, respecto a las producciones no simbólicas y la notación desarrollada.

Por lo anterior, el planteamiento didáctico aquí expuesto: La ejercitación en producción no simbólica, notación desarrollada y producción simbolica que efectúan los estudiantes. Especificamente, la producción no simbolica que emplea la técnica de adiciones sucesivas con el soporte material, que usa campos internos adyacentes en la hoja de trabajo, en relación con palitos y ligas, concierne a una estrategia de enseñanza que propicia una posibilidad sólida para la comprensión del valor posicional basado en las relaciones de su estructura.

Cabe mencionar que el tiempo requerido para un cabal dominio del valor posicional es aún una incógnita. Se necesita considerar aspectos intermedios, desde que el alumno logra anotar como corresponde la notación desrrollada hasta el momento en que pueda operar con distintas bases para hacer equivalencias entre ellas. Lo cual, es importante porque implica un dominio de las propiedades del orden y el cardinal. Por ello se destaca que es un curso de largo aliento, se requiere más tiempo para lograr que los alumnos operen las cifras indoarabigas con distintas bases, esto es imprescindible porque, por un lado contribuye de forma nodal a la comprensión y formación de un pensmiento flexible con entidades matemáticas y por otro requiere preguntarse que se comprende por cardinal.

TABLA III

Taxonomía de errores respecto a la notación desarrollada. Grupo A y B

	Orden de magnitud 0		*1er Orden de magnitud*		*2d Orden de magnitud*	
	Grupo A	*Grupo B*	*Grupo A*	*Grupo B*	*Grupo A*	*Grupo B*
1	134_5 Anotan el valor de la base en vez de anotar el correspondiente al coeficiente. 25+15+5 = 35 Respuesta esperada: 25+15+4 = 34	43_5 Confunden el valor del coeficiente con el de la base. 43 base 5 20+5 Respuesta esperada: 20+3 = 23	162_{10} La notación sin considerar el coeficiente. 100+10+2 = 102 Respuesta esperada: 100+60+2 = 162		211_4 No consideran el coeficiente. 16+4+1 = 21 Respuesta esperada: 32+4+1 = 37	212_4 No atienden al coeficiente. 1 10 100 Respuesta esperada: 32+4+2 = 38
2	43_5 Reiteran el coeficiente tantas veces como dice el coeficiente. 4+4+4+4+4+ 3+3+3 = 29 Respuesta esperada: 20+3 = 23	111_2 Otorgan el valor relativo, dado por la adición reiterada de 2 y tratamiento aditivo. 2+4+6 1+1+1 = 3 Respuesta esperada: 4+2+1 = 7	43_5 Presentan un valor que se basa en bxb y no en bxc. 25+3 = 28 Respuesta esperada: 20+3 = 7 (4x5) = 20	111_2 Presentan un valor que no corresponde a cxb. 2+3+6 = 11 Respuesta esperada: 4+2+1 = 7	124_5 Duplican el valor de la base para el valor del 2do orden de m. Anotan 16. Respuesta esperada: 64+16+4 = 84	312_4 Para asignar el valor de la unidad del segundo orden, duplican el valor de la base. 3+1+2 8 4 1 Respuesta esperada: 48+4+2 = 54

3	43_5 El valor lo designa como unidad de 1er orden. 20+15 = 35 Respuesta esperada: 20+3 = 23	365_{10} Dan un valor de unidad de 1er orden de m. a todos los órdenes de magnitud. 3+6+5 30 60 50 Respuesta esperada: 300+60+5 = 365	43_5 Otorgan un valor de unidad aditiva. 4+3 = 7 30 60 50 Respuesta esperada: 20+3 = 23	110_2 Valor aditivo unitario en todos los órdenes de magnitud. 1+1+0 = 2 Respuesta esperada: 4+2+0 = 6	123_5 Una agrupación compuesta por 1x6+1x10+2x5 Respuesta esperada: 25+10+3 = 38 Dado que 1(5x5)+2x5+ 1x3 = 38	111_3 El valor consiste en la suma reiterada de 3 111 369 Respuesta esperada: 9+3+1 = 13
4	43_9 Suma basada en la adición de coeficientes, es decir, tantas veces se añade la base como el número resultante de la suma unitaria de los coeficientes. 9+9+9+9+9+9+9 = 63 Respuesta esperada: 36+3 = 39 4x9+3x1 = 39	211_4 Los valores de cada orden no corresponden. 1+1+2 16 16 4 Respuesta esperada: 32+4+1 = 37 2x16+1x4+1x1 = 37	211_4 Se reitera la cifra, tantas veces como órdenes de magnitud dispone. La cifra reiterada consiste en la indicada por la base. 444 Respuesta esperada: 32+4+1 = 37 Otro caso, 365_{10} “365 +10 375” Respuesta esperada: 300+60+5 = 365	211_4 Anotaron los números sucesivos que añadieron ninguno de los cuales corresponde al valor. Respuesta esperada: 32+4+1 = 37	134_5 El sentido de la estructura del valor de posición no se recupera en esta expresión. 5+5+5+5+5 = 34 Respuesta esperada: 25+15+4 = 44	212_4 Replican el número escrito en el pizarrón. Respuesta esperada: 32+4+2 = 38 Otro caso, 111_2 El valor corresponde a la suma reiterada de dos. 2+4+6 1+1+1 = 3 Respuesta esperada: 4+2+1 = 7

6. Reconocimientos

Se agradecen las aportaciones dadas por el Consejo Nacional para la Ciencia y Tecnología, CONACYT, mi madre y mi hermana para la consecución y logro de esta investigación.

Referencias bibliográficas

Andrade, S. y Valdemoros, M. (2015). Understanding of Place Value Explored Through Numerical Comparison. Proceedings of the Thirty-Seventh Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, EUA. Retrieved from: http://msu.edu/~brakoni1/PMENA-2015-PROCEEDINGS-2015-11-04.pdf

Baroody, A. J. (1990). How and When Should Place-Value Concepts and Skill Be Taught? *Journal for Research in Mathematics Education*. 21(4), 281-286.

Broadbent, A. (2004). Understanding Place Value. A case study of the base ten game. *Australian Primary Mathematics Classroom,* 9(4), 45-46.

Fuson, K.C. (july, 1990). Issues in Place-Value and Multidigit Addition and Subtraction. Learning and Teaching. *Journal for Research in Mathematics Education.* 21(4), 273-280.

García, V. (2006). *La construcción del número en el niño de primaria. Aplicación de un taller de Matemáticas.* (Tesis de maestría no publicada), Universidad de las Américas, A.C. México, D.F.

García, V. (2009). *1° Nivel del Taller de Matemáticas "Redescubriendo el número",* (Comunicación interna no publicada). México, D.F.

García, V. R. y Cardoso, S. G. (2011). La reconstrucción del número en el niño de primaria. XIII Conferencia Interamericana de Educación Matemática. XIII CIAEM-IACME, Brasil. Recuperado de: https://xiii.ciaem-redumate.org/index.php/xiii_ciaem/xiii_ciaem/paper/viewFile/721/170

Nickerson, Raymond S. (2011). *Mathematical Reasoning. Patterns, Problems, Conjectures, and Proofs.* New York, EUA, Londres, Inglaterra: Taylor & Francis.

Slovin, H. (2010-2011). Revelations from counting: a window to conceptual understanding. *Investigations in Mathematics Learning. Official Journal of the Research Council on Mathematics Learning.* (3)2, 35-51.

Vergnaud G. (2003). *El niño, las matemáticas y la realidad. Problemas de la enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria*. (L. O. Segura, Trans.). D.F., México: Trillas.

Autora

María Herlinda Consuelo Martínez de la Mora. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, CINVESTAV. México. he17r@yahoo.com.mx

Christian Peake, Valentina Alarcón, Viviana Herrera, Karina Morales

DESARROLLO DE LA HABILIDAD NUMÉRICA INICIAL: APORTES DESDE LA PSICOLOGÍA COGNITIVA A LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA INICIAL

Development of early numerical ability: contributions from cognitive psychology to initial mathematics education

RESUMEN

La habilidad numérica se desarrolla en los primeros años de edad y está en la base del aprendizaje de la matemática posterior, así como del éxito académico y laboral en edad adulta. Este artículo tiene por objetivo revisar la última evidencia empírica, a partir de recientes estudios con enfoques conductuales en cognición numérica, centrada en el desarrollo de las habilidades numéricas tempranas. Para ello, se revisan los principales hitos del desarrollo numérico en relación con la adquisición de la aritmética posterior, teniendo en cuenta las influencias intrínsecas y extrínsecas al individuo durante los primeros años de edad. Se revisan, además, las principales controversias que se mantienen actualmente en discusión en la disciplina.

PALABRAS CLAVE:
- *Cognición numérica*
- *Habilidades numéricas*
- *Sistema numérico aproximado*
- *Sistema numérico simbólico*
- *Correspondencia número-cantidad*

ABSTRACT

Numerical skills develop in the first years of life and are the base of later mathematical learning, as well as the academic and labour success in the adult age. This article aims to review the latest empirical evidence on early numerical cognition from behavioural approaches. For this, the main milestones of numerical development are reviewed in relation to the acquisition of later arithmetic skills. The focus of this review is in the intrinsic and extrinsic factors during the first years of age. Still open controversies in the field of number cognition are also reviewed.

KEY WORDS:
- *Number cognition*
- *Number skills*
- *Symbolic number system*
- *Approximate number system*
- *Number-numerosity mapping*

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (2021) *24* (3): 299-326.
Recepción: Enero 7, 2020 / Aceptación: Noviembre 19, 2021. DOI: 10.12802/relime.21.2433

RESUMO

A habilidade numérica se desenvolve nos primeiros anos de idade e está na base do aprendizado de matemática posterior, bem como do sucesso acadêmico e profissional na idade adulta. Este artigo tem como objetivo revisar as evidências empíricas mais recentes, baseadas em estudos recentes com abordagens comportamentais em cognição numérica, focados no desenvolvimento de habilidades numéricas precoces. Para isso, os principais marcos do desenvolvimento numérico são revistos em relação à aquisição da aritmética subsequente, levando em consideração as influências intrínsecas e extrínsecas do indivíduo durante os primeiros anos de idade. Além disso, são revisadas as principais controvérsias atualmente em discussão na disciplina.

PALAVRAS CHAVE:

- *Cognição numérica*
- *Habilidades numéricas*
- *Sistema numérico aproximado*
- *Sistema numérico simbólico*
- *Correspondência número-quantidade*

RÉSUMÉ

La capacité numérique se développe dans les premières années d'âge et est à la base de l'apprentissage des mathématiques ultérieures, ainsi que de la réussite scolaire et professionnelle à l'âge adulte. Cet article vise à passer en revue les dernières preuves empiriques, basées sur des études récentes avec des approches comportementales en cognition numérique, axées sur le développement de compétences numériques précoces. Pour cela, les principaux jalons du développement numérique sont passés en revue par rapport à l'acquisition d'arithmétique ultérieure, en tenant compte des influences intrinsèques et extrinsèques de l'individu au cours des premières années d'âge. De plus, les principales controverses actuellement en discussion dans la discipline sont passées en revue.

MOTS CLÉS:

- *Cognition numérique*
- *Compétences numériques*
- *Système numérique approximatif*
- *Système numérique symbolique*
- *Correspondance nombre-quantité*

1. Introducción

Los seres humanos, al igual que otros animales, nacemos con una sensibilidad para representar numerosidades que nos permite comprender las magnitudes de los conjuntos, manipularlas y compararlas. Estas capacidades son de origen preverbal, presentes en el momento del nacimiento y constituyen las denominadas habilidades cuantitativas primarias (Ansari, 2008; Geary, 1995). A pesar de que la naturaleza innata de este sistema de representación de magnitudes está siendo discutida (Leibovich, Katzin, Harel, y Henik, 2017), existe consenso en que sobre ella se asientan las habilidades cuantitativas secundarias (Ansari, 2008; Geary, 1995), es decir, la habilidad numérica y matemática posterior. Estas habilidades son de naturaleza verbal y se adquieren por medio de la instrucción formal en la escuela y de la acción de contextos informales de aprendizaje, como el hogar, gracias a la interacción de ciertos mecanismos cognitivos de soporte, que sustentan este y otros aprendizajes (Geary, 1995). El desarrollo de estas habilidades matemáticas básicas, como resultado de la interacción de estos factores intrínsecos y extrínsecos al individuo predicen el éxito laboral adulto (Ritchie y Bates, 2013), por lo que conocer el curso de desarrollo de la habilidad numérica y los procesos cognitivos y educativos que intervienen en él es crucial para poder diseñar e implementar prácticas pedagógicas y políticas públicas que nos permitan dotar a nuestros estudiantes de contextos formales e informales de aprendizaje adecuados.

Tradicionalmente, los paradigmas educativos en nuestras escuelas han residido sobre la tesis piagetiana de que el origen del pensamiento está en la función simbólica, así como el lenguaje, que no sería más que el código por el cual expresamos ideas o conceptos. Esta aproximación hizo poner el foco de la educación matemática sobre el desarrollo del pensamiento lógico, también llamado lógico-matemático, refiriéndose a un conjunto de habilidades, conocimientos y destrezas que engloban el proceso de las matemáticas tempranas y que sería necesario desarrollar para alcanzar el concepto del número (Chamorro et al., 2005). Así, las prácticas pedagógicas, siguiendo las prescripciones de nuestros currículos educativos, buscan el desarrollo de habilidades cognitivas tales como la seriación, la conservación y la clasificación por ser consideradas necesarias para comprender la *lógica de la matemática*. Además, se trabajan conceptos prenuméricos mediante la teoría de conjuntos, como la correspondencia, las seriaciones y ordenaciones. Todo ello sin dejar de lado otros objetivos, como la geometría o el lenguaje matemático, que serán necesarias para desarrollar la matemática posterior (MINEDUC, 2018a). En cuanto al lenguaje matemático, es habitual hacer especial hincapié en la lista de conteo, haciendo uso de canciones y excesivas repeticiones que no llevan necesariamente a la comprensión del fenómeno numérico si no se acompañan de otros conocimientos (Wynn, 1992; 1990). Es habitual, asimismo, que en nuestras escuelas se trabaje el símbolo numérico individual, sin poner el foco en las propiedades del sistema numérico simbólico, acelerando su uso hacia los procedimientos del cálculo simbólico, a menudo de forma no adecuada a la edad (Ponce y Strasser, 2019).

Podemos observar ciertos paralelismos en los procesos mencionados que engloban el pensamiento lógico-matemático con los hallazgos de la psicología cognitiva, y más concretamente de la cognición numérica y la neurociencia cognitiva. No obstante, falta presencia en nuestros currículos educativos de una aproximación cognitiva moderna que guíe a nuestras maestras, a través de sus prácticas pedagógicas, para la enseñanza de las habilidades numéricas iniciales, bajo la mirada de los últimos hallazgos empíricos. La investigación en cognición numérica en países hispanohablantes aún es incipiente (Haase et al., 2020), y la mayor producción de conocimiento en el área ha sido publicada en inglés, lo que dificulta que se abran líneas de investigación y se modifiquen legislaciones educativas. De la misma forma, en la formación inicial docente suele dejarse de lado las competencias asociadas al desarrollo de la habilidad numérica inicial, desde un aproximación cognitiva (Susperreguy et al., 2020). Cabe destacar que nuestras maestras manifiestan desconocimiento, dificultades en la instrucción e incluso incomodidad para enseñar matemáticas, debido a que ni a ellas mismas les agradaban cuando las estudiaron (Ormeño Hofer et al., 2013).

Por las razones anteriormente descritas, creemos que es necesario incluir una aproximación cognitiva a los paradigmas que se utilizan en educación matemática en la actualidad. Con ese fin, este trabajo pretende ser una revisión bibliográfica de la última evidencia empírica, a partir de la psicología cognitiva del desarrollo, específicamente desde la cognición numérica, y desde una aproximación conductual. Así, se van a revisar los principales hallazgos y controversias en relación con factores intrínsecos y extrínsecos que explican el desarrollo de la habilidad numérica temprana, como inicio de la enseñanza de la matemática.

2. Desarrollo de la habilidad numérica temprana

Para situar el marco de referencia, desde un punto de vista del desarrollo ontológico de las funciones cognitivas que sustentan el aprendizaje del número, debemos diferenciar entre los procesos cognitivos intrínsecos al individuo y los factores extrínsecos que modulan el desarrollo de los primeros. Asimismo, los procesos cognitivos instrínsecos se pueden clasificar en procesamiento cognitivo de dominio general (aquellos procesos cognitivos que sustentan la función cognitiva del individuo y participan en cualquier aprendizaje instrumental, incluido el número y las matemáticas), como la atención, el lenguaje o la memoria, y en procesamiento cognitivo de dominio específico del número (aquellos procesos cognitivos que sustentan específicamente el aprendizaje del número y las matemáticas), como la cardinalidad o la ordinalidad, y para las cuales utilizaremos aquí la etiqueta global de habilidades numéricas iniciales. Estos procesos específicos, a su vez, se pueden clasificar en torno a su naturaleza, aquellos que vienen predeterminados biológicamente frente a los que se adquirien y desarrollan gracias a la estimulación informal, a la instrucción explícita o por maduración. Atendiendo a estas consideraciones, se expone a continuación una revisión bibliográfica de recientes hallazgos en torno al desarrollo de la habilidad numérica inicial. La Figura 1 ayudará a comprender estas clasificacones, desde el punto de vista del desarrollo.

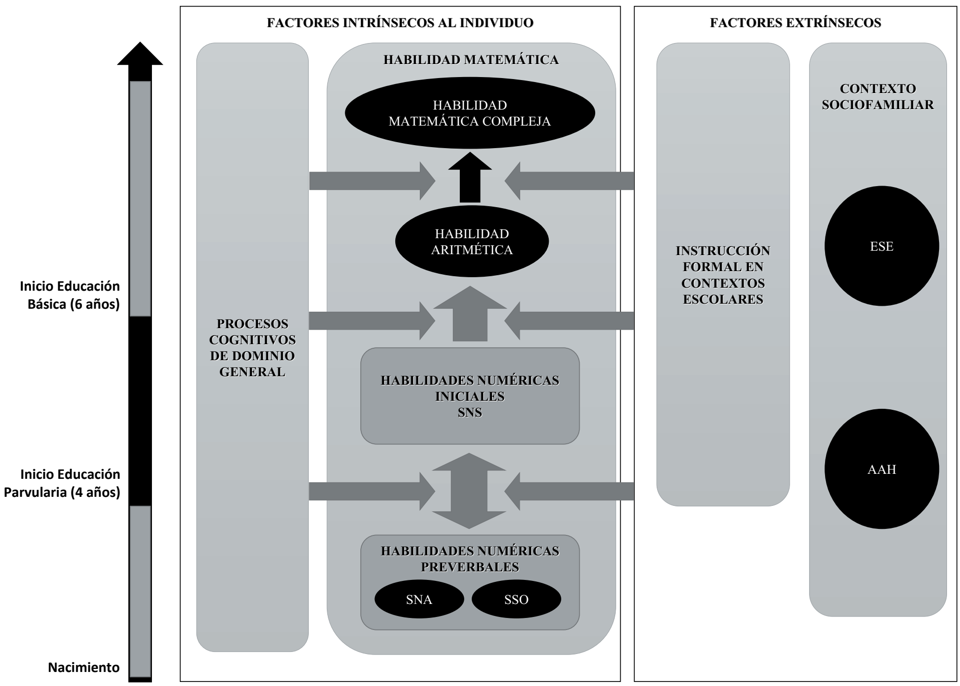

Figura 1. Modelo cognitivo de desarrollo de la habilidad matemática inicial. Notas: SNA: Sistema numérico aproximado; SNS: Sistema numérico simbólico; SSO: Sistema de seguimiento de objetos; ESE: Estatus socioeconómico; AAH: Ambiente de aprendizaje en el hogar. Las edades son aproximadas, basadas en el sistema educativo chileno.

2.1. *Sistemas preverbales de representación de magnitudes*

Como ya se ha dicho, venimos dotados de una capacidad preverbal, determinada biológicamente, para procesar magnitudes en el medio que nos rodea. Esta capacidad temprana para representar magnitudes no emerge por medio de la trasmisión cultural, ni por el aprendizaje individual, pero su desarrollo sí se ve perfeccionado por factores ambientales o por medio de la instrucción, por lo tanto, se puede decir que presenta componentes ontogenéticos y filogenéticos. Se ha demostrado que estas habilidades primarias, presentes en infantes de pocas semanas son, en realidad, dos subsistemas independientes que nos permiten representar conjuntos: el sistema de seguimiento de objetos (SSO) y el sistema numérico aproximado (SNA; Feigenson et al., 2004). Ambos sistemas están limitados en su capacidad y/o en su precisión de representación y no admiten conocimientos matemáticos más complejos. El SSO es un sistema de naturaleza discreta y visoespacial que permite monitorear hasta 3 o 4 elementos en paralelo, permitiendo extraer su numerosidad de forma exacta y automática sin el apoyo de una etiqueta numérica (Carey, 2004). Este sistema permite que los infantes de cuatro a seis meses sean sensibles a cambios en los conjuntos pequeños, gracias a un proceso que se ha denominado en lengua inglesa *subitizing*, sin traducción literal al español (Butterworth, 2005).

Por otro lado, el SNA es de carácter analógico y permite estimar cantidades superiores a las que soporta el SLO. Estas representaciones son imprecisas, dado que están sujetas a la ley psicofísica de Weber-Fechner (Dehaene, 2011), que explica que la percepción de cambio en una magnitud física, en este caso la numerosidad, dependerá de la intensidad del cambio. La ley de Weber-Fechner impone limitaciones al SNA ya que solo cambios de intensidades relativas serán percibidas, lo que se ha observado consistentemente en tareas de comparación numérica (Ansari, 2008), donde se debe determinar el mayor de una pareja de conjuntos, y de donde se desprenden el efecto de tamaño y el efecto de distancia (Moyer y Landauer, 1967). El primer efecto hace referencia a que discriminamos con mayor facilidad conjuntos de menor magnitud, es decir, es más sencillo comparar y diferenciar conjuntos de 25 vs 50 elementos, que de 75 vs 100 elementos. El efecto de distancia implica que discriminemos más fácilmente entre dos conjuntos con mayor distancia numérica (por ejemplo, entre 25 vs 50), que entre conjuntos con menor diferencia (como 25 vs 30). Así, se ha visto que a los 6 años de edad somos capaces de distinguir numerosidades en una relación de 1:2, esto es, que pueden diferenciar entre conjuntos de 8 y 16 elementos, pero no de 8 y 12. Al borde de los 10 meses ya somos capaces de discriminar en una relación de 1:1.5, lo que significa que pueden distinguir entre numerosidades de 8 y 12 elementos respectivamente, pero no de 8 y 10 (Xu y Arriaga, 2007).

Tradicionalmente, se ha entendido que el sistema de representación aproximado es innato en el ser humano y otras especies. Esta concepción del SNA asume que se trata de un sistema numérico independiente de otros sistemas de procesamiento cognitivo de otras magnitudes físicas (Dehaene, 2011). En los últimos años, los investigadores en cognición numérica se están cuestionando dichos postulados. Se ha propuesto que el sistema de representación numérica preverbal podría no ser innato, sino resultar de un sistema de representación de magnitudes general (Leibovich et al., 2017; Leibovich y Ansari, 2016)discretos. Esta propuesta proviene de la constatación de que, en las tareas de comparación numérica no simbólica, utilizadas clásicamente para acceder al SNA en estudios conductuales y de neuroimagen, las propiedades físicas de los estímulos (área de los elementos del conjunto y área total del propio conjunto, densidad del conjunto, etc) correlacionan con la numerosidad del conjunto, lo que podría estar sirviendo a los participantes para responder. Hasta ahora se ejercía un estricto control de estas propiedades de los estímulos al recoger medidas puras de la numerosidad, pero los defensores de esta propuesta animan a los investigadores a replantearse el carácter innato del SNA, proponiendo la existencia de este sistema de representación de magnitudes, y no de cantidades per sé (Leibovich et al., 2017).

2.2. *Principales hitos en la adquisición del sistema numérico simbólico*

Alrededor de los dos años, los niños recitan la lista numérica de conteo en formato verbal de manera ordenada, pero no le asocian un significado (Carey, 2004). En esta edad adquieren los primeros principios de conteo, donde el principio de orden estable juega un rol crucial pues establece que el orden de las etiquetas numéricas siempre es el mismo (/uno/, /dos/, /tres/, /cuatro/…). Así mismo, el principio de correspondencia uno a uno permite establecer la relación entre conjuntos y compararlos a través del conteo, sentando la base de las relaciones numéricas (Carey y Barner, 2019). Se ha demostrado que la familiaridad con la lista de etiquetas verbales es un predictor potente para establecer la correspondencia entre los numerales y las cantidades que éstos representan (Ebersbach, 2016; Ebersbach y Erz, 2014; Lipton y Spelke, 2005). Progresivamente, en torno a los dos años y medio, comienzan a conocer y comprender el concepto de "uno", de forma que, si se le pide explícitamente que nos entregue un elemento, son capaces de hacerlo, pero si se les pide una cantidad mayor, responden con un número aleatorio de elementos (Fuson, 1992). A medida que continua el desarrollo alcanzan a comprender la noción de "dos", después la noción de "tres" y hasta de "cuatro", con intervalos de tiempo considerables entre ellos (Le Corre y Carey, 2007; Wynn, 1990). Una vez comprenden el número "cuatro", alrededor de los cuatro años, comienzan a utilizar estrategias para contar (Fuson, 1992) y desarrollan el principio de cardinalidad (Odic et al., 2015). Este principio de conteo es de vital importancia para establecer la correspondencia y determinar el número total de una colección, ya que, gracias a este, es que comprenden que el último dígito contado de un conjunto de elementos corresponde a la cantidad total (Carey, 2004; Gelman y Gallistel, 1978). A los principios anteriormente mencionados, se le suman el de irrelevancia del orden, el cual se refiere a que la disposición de los elementos no influye en determinar cuántos objetos tiene una colección, y el principio de abstracción, que nos permite agrupar colecciones de objetos diferentes y contarlos juntos como uno solo. Estos principios de conteo permiten desarrollar el conteo y guían la adquisición y ejecución de la acción aritmética (Butterworth, 2005; Gelman y Gallistel, 1978). Una vez los estudiantes han alcanzado la comprensión del número "cuatro" y han adquirido el principio de cardinalidad, el ritmo por el cual establecen la correspondencia entre números y cantidades mayores a cuatro se acelera considerablemente (Le Corre y Carey, 2007; Odic et al., 2015). Existen controversias y disparidades en la interpretación sobre cómo y por qué ocurre este proceso (Reynvoet y Sasanguie, 2016), y se ha propuesto que en este punto del desarrollo emerge el sistema numérico simbólico de forma independiente al sistema de representación aproximado (Carey, 2004), tema sobre el que se reflexionará en la siguiente sección. Recientes investigaciones han mostrado que la adquisición de la cardinalidad es un requisito para adquirir la ordinalidad y la función del sucesor (Spaepen et al., 2018), que hacen referencia al orden de los símbolos numéricos y su relación ordinal, mientras que el segundo concepto se refiere al conocimiento de que todo numeral tiene un sucesor y que la distancia entre un numeral y el siguiente es constante (Carey y Barner, 2019).

Por último, cabe destacar que el uso de cuantificadores tiene un rol sustancial en la habilidad numérica. Estas son expresiones verbales que se usan desde edades tempranas, dado que están presentes en el lenguaje coloquial o son instruidos formalmente, y que sirven para indicar cantidades de manera imprecisa, como por ejemplo: "algunos", "todos" o "ninguno". Se especula que sirven de soporte en el proceso de adquisición de los números cardinales (Carey, 2004; Dolscheid et al., 2017).

El desarrollo de estas habilidades nos va a permitir identificar, comprender, ordenar y operar con los símbolos numéricos arábigos, es decir, dominar el concepto del número, paso previo a al cálculo operatorio simbólico. En la Tabla 1 se muestran una serie de hitos, donde interactúan factores intrínsecos y extrínsecos al individuo, y que son necesarios para la adquisición del sistema numérico simbólico.

TABLA I
Síntesis de los hitos del desarrollo del número en edades tempranas

Años	*Meses*	*Hitos*	*Autores*
0	0	Los seres humanos nacen con dos sistemas de representación innato: el sistema de representación aproximado y el sistema de representación exacto.	Feigenson y Carey, 2003; Feigenson et al., 2004.
		Pueden discriminar pequeñas cantidades y agregar y/o quitar un elemento.	Keating, 1983.
		En la etapa preverbal, los niños presentan un sentido numérico intuitivo de número aproximado.	Dehaene, 2011.
	6	A los seis meses, pueden discriminar con éxito conjuntos con una relación de 1:2.	Xu y Spelke, 2000; Lipton y Spelke, 2003.
		Discriminan el aumento de las numerosidades.	Brannon, 2002.
		Surge la memoria semántica.	Papalia, 1998.
	10	Pueden discriminar conjuntos con una proporción 1:1.5	Xu y Arriaga, 2007.
2	0	Los niños son capaces de recitar la lista de conteo (de forma verbal) en orden, pero sin significado.	Fuson, 1992; Le Corre y Carey, 2007.
	6	Comienzan a reconocer y comprender el significado la cantidad "uno", siendo capaces de entregar correctamente un objeto.	Fuson, 1992; Odic, Le Corre y Halberda, 2015.
		Reconocen que las etiquetas numéricas diferentes a uno representan cantidades mayores, pero no son capaces de representar estas cantidades de forma exacta.	Potter y Levy, 1968.
		Posterior a la adquisición del número "uno" se comienza a desarrollar el significado de la cantidad "dos" de forma progresiva, convirtiéndose en "one – knowers y two – knowers"	Wynn, 1992; Odic et al., 2015.
		Se subestima en tareas de producción (estimación simbólica a no simbólica).	Odic et al., 2015.

3	0	Comienzan a comprender el significado de “tres”. Por lo tanto, se convierten en “Three – Knowers”	Wynn, 1992.
		Luego de comprender el “tres” adquieren el significado de “cuatro”, convirtiéndose en “Four – Knowers”.	Wynn, 1992.
	6	Son capaces de enfrentarse a tareas de producción (estimación de simbólico a no simbólico), sin que aparezca sesgo de estimación.	Odic et al., 2015.
4	0	Comienzan a desarrollar el principio de cardinalidad.	Carey, 2007.
		Comienzan a utilizar estrategias de conteo, como el uso de los dedos.	Fuson, 1992.
	6	Desde esta edad sobrestiman en tareas de producción (estimación simbólica a no simbólica).	Odic et al., 2015.
		Desarrollo de la ordinalidad y la función del sucesor	Spaepen, Gunderson, Gibson y Goldin-Meadow, 2018
5 años	0 meses	Son capaces de estimar cantidades hasta el 100.	Lipton y Spelke, 2015.
		Hasta esta edad, se desarrolla la relación entre cuantificadores y números.	Banner, Chow y Yang, 2009.
		Comienzan a distinguir dígitos arábigos de otros símbolos.	Noël, 2001.
		Se consolida la correspondencia entre el Sistema numérico aproximado y las etiquetas numéricas verbales. Además, pueden realizar sumas de pequeñas cantidades, sin una intencionalidad explícita de usar el conteo.	Libertus, 2016.
	6 meses	Cuentan correctamente hasta el 40.	Starkey y Gelman, 1982.
		Establecen la subitización, es decir, estiman la cantidad de elementos de una colección.	Starkey y Gelman, 1982.
		Cuentan números de uno y dos dígitos.	Carpenter y Moser, 1982.
6 años.	0 meses	Integran habilidades cuantitativas preverbales y esquemas de conteo, para desarrollar una línea numérica mental.	Siegler y Booth, 2004.
Entre los 6 y 8 años.		Este es un periodo crítico para que el sistema simbólico, comience a servir de apoyo (andamiaje) para el sistema no simbólico.	Vanbist, 2017.
		Logran hacer comparaciones de magnitudes simbólicas.	Griffin, 2002; Griffin, 2004.

2.3. *Adquisición y desarrollo de la correspondencia entre numerosidades y numerales*

El SNA es de naturaleza aproximada, y aunque va ganando precisión con el desarrollo del individuo, jamás nos permitirá representar cantidades de forma exacta (Ansari, 2008; Dehaene, 2011). Para poder hacerlo, el ser humano ha desarrollado el sistema numérico simbólico (SNS), gracias al cual asignamos etiquetas simbólicas, ya sea en formato verbal oral (/cinco/) o escrito (CINCO) o en formato visual arábigo (5), para poder manipular cantidades exactas. Este sistema se consolida a partir de los 5 o 6 años de edad, como ya se ha dicho, gracias a la instrucción formal, al efecto de ambientes de aprendizaje informales y al desarrollo de las habilidades numéricas iniciales ya mencionadas. Este proceso de enculturización modifica estructuras neurocognitivas que originalmente podrían ser funcionalmente específicas para la habilidad numérica o no, con el fin de adaptarse al medio numérico, permitiéndonos aprender los numerales, operar con ellos y alcanzar conceptos matemáticos complejos (Ansari, 2008; Geary, 1995; Núñez, 2017). Aunque el debate sobre la adquisición del sistema simbólico en base a los sistemas numéricos preverbales sigue sin estar resuelto (Leibovich y Ansari, 2016), sí sabemos que durante estas tempranas edades se integran las habilidades cuantitativas preverbales y los esquemas de conteo para desarrollar una línea numérica mental. Variados estudios han comprobado la relación entre estos sistemas, mostrando cómo los niños progresivamente establecen la correspondencia entre el número y su etiqueta numérica visual, es decir, llegan a establecer la relación entre representaciones no simbólicas y simbólicas (Libertus, 2015; Mundy y Gilmore, 2009).

Establecer la correspondencia entre los numerales y las cantidades que éstos representan es un proceso lento y complejo e implica establecer la relación entre la representación simbólica y aproximada de una cantidad. Una de las principales controversias actuales en relación con cómo se establece la correspondencia entre símbolos numéricos y las cantidades que representan es el llamado en ingles *symbol grounding problem* (Leibovich y Ansari, 2016; Merkley y Ansari, 2016; Reynvoet y Sasanguie, 2016; Szkudlarek y Brannon, 2017). Existen dos principales posturas para explicar la adquisición del sistema simbólico. La primera, la hipótesis de correspondencia con el SNA (Dehaene, 2011), tradicionalmente propone que el significado de los símbolos numéricos (ya sea en formato verbal como arábigo), se establece a partir de su representación aproximada. Esta postura se basa en cuatro hallazgos: el carácter innato del sistema de representación numérico; la similitud que muestra el desempeño en tareas de comparación simbólica y no simbólica, donde aparecen los mismos efectos de distancia y tamaño; el solapamiento en activación de áreas cerebrales al resolver tareas simbólicas y no simbólicas; y la relación predictiva del SNA sobre la habilidad de cálculo (Dehaene, 2011). Esta postura ha captado la atención de los investigadores en las últimas décadas, pero se ha propuesto una alternativa que está ganando reconocimiento: la hipótesis de asociación símbolo-símbolo (Reynvoet y Sasanguie, 2016), originalmente concebida como la hipótesis del bootstrapping (Carey, 2004, 2009). Esta alternativa propone que el SNS es un sistema cualitativamente independiente al SNA, que surge de forma espontánea gracias a la instrucción formal e informal. Así, el SNS tendría su origen en el SSO, gracias al cual comprendemos las primeras palabras de los números y nos permite establecer el orden entre los símbolos numéricos, que después se generalizarían a cantidades mayores. El conocimiento de la lista de conteo permitiría generalizar este conocimiento ordinal a los símbolos arábigos. Con posterioridad, estableceríamos la correspondencia entre etiquetas verbales y símbolos arábigos con las representaciones aproximadas que representan. Para que este proceso de lugar, se han propuesto como elementos clave la ordinalidad, el valor cardinalidad y la función del sucesor, donde las habilidades verbales como la lista de conteo juegan un rol crucial indispensable (Leibovich y Ansari, 2016; Merkley y Ansari, 2016; Reynvoet y Sasanguie, 2016).

En línea con esto, se ha propuesto que si el SNS y el SNA son sistemas independientes, en el momento de establecer la correspondencia entre ellos, una vez se ha adquirido la lista de conteo y su orden, se daría un efecto de transferencia de la exactitud del SNS sobre el SNA (Goffin y Ansari, 2019; Szkudlarek y Brannon, 2017; Wong et al., 2016). Por ejemplo, (Matejko y Ansari, 2016) evaluaron longitudinalmente (3 veces a lo largo de un año académico) a 30 estudiantes de primer grado con tareas de comparación simbólica y no simbólica. El desempeño fue mejor en la tarea de procesamiento no simbólico al comienzo del primer grado, pero fue equivalente al final del año escolar. Además, el procesamiento simbólico predijo el procesamiento no simbólico en la primera mitad del año escolar, pero no a la inversa. Estos autores concluyeron que las habilidades simbólicas numéricas no dependen de las representaciones numéricas aproximadas y sugirieron que podría haber un efecto de transferencia de exactitud del sistema simbólico al sistema preverbal aproximado.

2.4. *El SNA y el SNS como predictores de la habilidad de cálculo*

Aunque existen controversias sobre la relación entre el SNA y el SNS y el proceso de adquisición del segundo (Reynvoet y Sasanguie, 2016), uno de los principales focos de la investigación en cognición numérica de los últimos años ha sido en determinar el impacto de ambos sistemas en la adquisición y desarrollo de la habilidad aritmética, dado que está en la base de la habilidad matemática posterior (Duncan et al., 2007). Tras numerosos estudios, en su mayoría correlacionales, se ha sugerido que, si bien el SNA tiene importancia en el desarrollo de habilidades de cálculo (Chen y Li, 2014), se ha encontrado un efecto mayor del SNS sobre las mismas (Schneider et al., 2017), ya que las representaciones simbólicas actúan de manera más precisa permitiendo a los humanos representar grandes cantidades de manera exacta (Carey, 2004; Mussolin, Nys, Leybaert, y Content, 2016). Con todo, se ha demostrado que el SNA influye directamente en la habilidad de cálculo, como en adiciones complejas, sustracciones y adiciones elementales (Chen y Li, 2014; Guillaume, Nys, Mussolin, y Content, 2013), no obstante, se ha propuesto que el hecho de adquirir el sistema simbólico conlleva un refinamiento del SNA como consecuencia de la correspondencia entre el SNA y el SNS (Goffin y Ansari, 2019). Esto permitiría el desarrollo de las habilidades de cálculo y la selección de estrategias de cálculo eficientes, explicando que ambos sean predictores de la habilidad.

Por otro lado, más allá del grado de predicción de cada sistema de representación, de forma independiente, sobre la habilidad aritmética, cabe destacar que las diferencias individuales en la transcodificación entre ellos predicen también la habilidad aritmética posterior (Wong, Ho, y Tang, 2016). De acuerdo con esto, Purpura, Baroody y Lonigan (2013) encontraron que el conocimiento simbólico (transcodificación entre números, palabras de números y matrices de conjuntos no simbólicas) medió la transición longitudinal de las habilidades de cálculo numérico informal al logro de las matemáticas formales. Además, sus resultados fueron respaldados por Libertus, Odic, Feigenson y Halberda (2016), quienes descubrieron que la transcodificación predecía las habilidades matemáticas formales, incluso cuando controlaban la edad y la precisión del SNA. Es más, la transcodificación mediaba el vínculo entre la precisión del SNA y la capacidad matemática general. Por lo tanto, parece que a medida que se establece este proceso de transcodificación, el desarrollo de la habilidad aritmética se ve beneficiado, lo que subraya la importancia de una instrucción adecuada antes y durante los primeros años de escolarización.

Diversos autores están focalizando sus investigaciones en el impacto que tiene la ordinalidad sobre la adquisición del sistema simbólico y su impacto posterior sobre la habilidad de cálculo. Se ha visto que la capacidad para ordenar series de símbolos arábigos está directamente relacionada con la adquisición del sistema numérico simbólico (Lyons, Vogel, y Ansari, 2016) y que además ésta es un predictor muy potente de la habilidad aritmética posterior (Goffin y Ansari, 2016; Lyons, Price, Vaessen, Blomert, y Ansari, 2014; O'Connor, Morsanyi, y McCormack, 2018). Lyons, et al., (2014) encontraron que el valor predictivo de la ordinalidad aumento durante la enseñanza básica, llegando a ser, incluso, el predictor más potente en 6º básico de entre todos los que se habían evaluado. De hecho, la conclusión final de dicho estudio fue que el efecto relativo del procesamiento numérico simbólico sobre la habilidad aritmética mostraba un cambio evolutivo desde el procesamiento cardinal al procesamiento ordinal, destacando el peso que tiene la ordinalidad en el desarrollo de la habilidad numérica.

2.5. *Procesos cognitivos de dominio general implicados en el desarrollo de la habilidad numérica*

No cabe duda de que los sistemas preverbales de representación numérica están en la base de la habilidad numérica temprana y de la habilidad aritmética posterior, pero no son suficientes para alcanzar desarrollos óptimos de éstas que nos lleven al éxito matemático. Los procesos cognitivos de dominio general juegan un rol fundamental desde edades tempranas y a lo largo de la escolaridad, funcionando como mecanismos cognitivos de soporte (Geary, 1995). Existen evidencias del impacto inicial de estos procesos cognitivos, donde se han destacado las funciones ejecutivas, especialmente la memoria de trabajo, el procesamiento visoespecial, la inteligencia y las habilidades lingüísticas como precursores moderados de las habilidades numéricas y matemáticas en edad escolar (Chu, vanMarle, y Geary, 2015; Fuchs, Geary, Fuchs, Hamlett, y Bryant, 2010; Geary, Nicholas, Li, y Sun, 2017; Hornung, Schiltz, Brunner, y Martin, 2014; Träff, 2013; Vanbinst y De Smedt, 2016). Por ejemplo, Geary, et al. (2017) encontraron que la inteligencia, la memoria de trabajo y la lectura tenían un efecto sobre el rendimiento matemático estable, a diferencia de los procesos cognitivos de dominio específico estudiados, cuyo impacto aumentaba progresivamente. Así, Hornung, et al. (2014) concluyeron que la inteligencia, la memoria de trabajo y el vocabulario eran procesos centrales para el desarrollo de la competencia numérica en edades tempranas, mientras que la habilidad numérica inicial era clave para el rendimiento matemático al inicio de la Educación Básica. Chu, et al. (2015) mostraron que la inteligencia y una medida general de funcionamiento ejecutivo predijeron el crecimiento en las habilidades cuantitativas básicas. Los autores concluyeron, en la misma línea, que aunque el rendimiento matemático era resultado de la combinación de procesos cognitivos de dominio general y específico, estos últimos resultaban más potentes, especialmente al final de edad preescolar. En la misma línea, el estudio de Vanbinst y De Smedt (2016) arrojó resultados similares, permitiéndoles concluir que, aunque el procesamiento numérico simbólico era el predictor que mejor explicaba las diferencias individuales entre estudiantes, el ejecutivo central jugaba un rol importante, dependiente de la etapa educativa y la experiencia.

Fuchs, et al. (2010) estudiaron el efecto de diferentes predictores cognitivos de dominio general (ejecutivo central, memoria de trabajo verbal y espacial, velocidad de procesamiento, atención, habilidad lingüística e inteligencia) así como procesos cognitivos específicos de la habilidad numérica sobre el cálculo aritmético y la resolución de problemas matemáticos. Sus resultaron arrojaron evidencias de que las habilidades numéricas específicas tenían pesos específicos sobre cada una de estas habilidades matemáticas, mientras que los procesos cognitivos generales tenían contribuían tanto a la resolución de cálculos como de problemas matemáticos. En línea con sus resultados, Träff (2013) llegó a la misma conclusión encontrando que la memoria de trabajo verbal, el procesamiento visoespacial, la fluidez verbal y la inteligencia no verbal contribuían a ambos dominios de la habilidad matemática. Por su lado, en un reciente estudio, Gashaj, Oberer, Mast y Roebers (2019), demostraron que las funciones ejecutivas (en este caso memoria de trabajo visoespacial, inhibición y flexibilidad) eran predictores de la habilidad simbólica en prekínder, pero que las habilidades motoras (gruesas y finas) lo eran de la habilidad numérica no simbólica. Por último, el procesamiento fonológico ha resultado ser un predictor determinante para el almacenamiento de hechos numéricos, componente central de la habilidad aritmética (Dehaene et al., 2003; Simmons, Singleton, y Horne, 2008).

El impacto y el tipo de contribución cognitiva que tienen los procesos de dominio general sobre la habilidad numérica y el rendimiento aritmético varía en función de la edad y de los componentes aritméticos estudiados. Estudios de neuroimagen han confirmado el efecto evolutivo de esta contribución, mostrando que el cerebro sufre una especialización neurofuncional de determinadas redes neuronales. Específicamente, se ha evidenciado que las estrategias iniciales empleadas por niños durante el procesamiento del número simbólico se basan en regiones prefrontales que se relacionan con procesos de control cognitivo, atención y memoria, más que en áreas exclusivas de procesamiento aritmético (Ansari, Garcia, Lucas, Hamon, y Dhital, 2005; Kaufmann et al., 2006). A lo largo del desarrollo, con la adquisición de competencias lingüísticas y el entrenamiento de las habilidades numéricas, las regiones parietales adquieren funciones que permiten la asociación entre las representaciones numéricas aproximadas y símbolos numéricos o la adopción de diferentes estrategias para resolver cálculos (Ansari, 2008; Bugden, DeWind, y Brannon, 2016; Emerson y Cantlon, 2015; Sokolowski, Fias, Mousa, y Ansari, 2017).

3. Influencia del contexto en el desarrollo de la habilidad numérica

Más allá de los factores intrínsecos que determinan el desarrollo de la habilidad numérica, la influencia de factores extrínsecos es imprescindible para lograr los principales hitos que nos llevarán al éxito en el área matemática. Estos factores extrínsecos se pueden dividir en la instrucción o entrenamiento formal de la habilidad numérica y aritmética, por una parte, y en la influencia que ejerce la diversidad de contextos no formales, donde destaca el ambiente familiar, determinado por el estatus socioeconómico de las familias y el ambiente de aprendizaje en el hogar.

3.1. *Instrucción formal de las habilidades numéricas*

Desde hace décadas, la investigación en psicología cognitiva y en neurociencia cognitiva ha arrojado evidencias que aportaron sustancialmente al diseño de políticas públicas en educación, en la forma de currículos educativos, donde se determinan los hitos que nuestros estudiantes deben alcanzar. La mayoría de estas propuestas provienen de estudios correlacionales, de donde es complejo formular atribuciones causales al efecto de entrenar determinados procesos cognitivos específicos en favor del desarrollo de la habilidad numérica, con el fin de impactar sobre el aprendizaje del cálculo y la matemática posterior. Con todo, en los últimos años se han llevado a cabo estudios para poner a prueba el efecto del entrenamiento de diversas habilidades numéricas, específicamente, del procesamiento numérico simbólico y no simbólico. Algunas de estas investigaciones se han centrado en determinar qué actividades pedagógicas permiten un mejor desarrollo de las habilidades numéricas, mientras que otras se han centrado en investigar qué tareas mejoran las habilidades aritméticas exactas. Para el desarrollo de habilidades numéricas simbólicas como la cardinalidad, la representación en la línea numérica mental, la comparación e la identificación numérica y el conteo, se han entrenado de forma efectiva con tareas de tipo simbólico, como la cardinalidad (contar primero y luego etiquetar), la estimación simbólica, el conteo y la identificación numérica, pero también mediante el uso de tareas de entrenamiento no simbólico, como la comparación y la estimación no simbólica (Paliwal y Baroody, 2018; Siegler y Ramani, 2008; Van Herwegen, Costa, Nicholson, y Donlan, 2018). Por otra parte, para el mejoramiento de la habilidad numérica no simbólica, se ha comprobado el impacto positivo de tareas de entrenamiento no simbólico, como la comparación, la estimación y la aritmética no simbólica. No obstante tareas de entrenamiento simbólico como el conteo, la estimación y la identificación numérica también resultaron efectivas para entrenar la habilidad no simbólica (Obersteiner, Reiss, y Ufer, 2013; Park y Brannon, 2013; Siegler y Ramani, 2008; Van Herwegen et al., 2018). En cuanto al desarrollo de las habilidades aritméticas exactas, se ha demostrado que las actividades de entrenamiento enfocadas en las representaciones no simbólicas poseen un efecto en el mejoramiento del cálculo, principalmente la tarea de cálculo no simbólico, así como la tarea de comparación no simbólica (Au, Jaeggi, y Buschkuehl, 2018; Hyde, Khanum, y Spelke, 2014; Maertens, De Smedt, Sasanguie, Elen, y Reynvoet, 2016; Park y Brannon, 2013, 2014). Sin embargo, para Van Herwegen, et al. (2018), el cálculo se entrena efectivamente tanto con tareas simbólicas (conteo e identificación numérica) como con tareas no simbólicas (estimación y comparación no simbólica). Con todo, se ha visto que el conocimiento del número es un predictor robusto del logro matemático, ya que media la transición entre el aprendizaje informal y el formal de la habilidad matemática, por lo que debería ser introducido en actividades no formales en el hogar (Purpura et al., 2013). Específicamente, se ha propuesto que la cardinalidad, la ordinalidad, la identificación numérica y la función del sucesor son los componentes cognitivos clave que mediarán el aprendizaje de la matemática formal a partir del entrenamiento de habilidad numéricas no formales, como la lista de conteo (Carey y Barner, 2019; Merkley y Ansari, 2016).

3.2. *Implementación del currículo matemático: el ejemplo de Chile*

En Chile, el desarrollo de las habilidades numéricas figura en el currículo nacional, promoviendo el trabajo de estas habilidades en edades tempranas. Actualmente el instrumento que se encarga de recoger estos objetivos de trabajo son las Bases Curriculares de Educación Parvularia (MINEDUC, 2018a) y las Bases Curriculares para Educación Básica (MINEDUC, 2018b). Estas, además de seleccionar y organizar los contenidos esenciales a enseñar, dividen a la población por tramos y cursos, con la finalidad asegurar que cada contenido se ajuste al estadio de desarrollo de un individuo. Los tramos asignados para la infancia son de 0 a 2 años (primer tramo), de 2 a 4 (segundo tramo) y de 4 a 6 años (tercer tramo). En esta edad es que se separa la educación preescolar de la básica, la cual comienza a los 6 años en primer año básico, 7 en segundo básico y así sucesivamente hasta octavo básico. Los hitos del desarrollo de las habilidades que se encuentran explícitas en el curriculum se enfocan en el empleo de cuantificadores en situaciones cotidianas, así como en la verbalización de algunos números dentro de un contexto de juego para el nivel de 2 años. Los estudiantes de 4 años deben progresar en el empleo de cuantificadores al comparar cantidades de objetos en situaciones cotidianas o de juego, e ir empleando progresivamente los números para contar, identificar, cuantificar y comparar cantidades, hasta el 10 e indicar orden o posición de algunos elementos en situaciones cotidianas o juegos. Deben representan progresivamente, números y cantidades en forma concreta y pictórica hasta el 10 y resolver progresivamente problemas simples, de manera concreta y pictórica, agregando o quitando hasta 5 elementos. Los estudiantes de 6 años deben haber adquirido el principio de cardinalidad, emplear los números para contar, identificar, cuantificar y comparar cantidades hasta el 20 e indicar orden o posición de algunos elementos en situaciones cotidianas o juegos, así como representar números y cantidades hasta el 10, en forma concreta, pictórica y simbólica. Además, deben ser capaces de resolver problemas simples de manera concreta y pictórica agregando o quitando hasta 10 elementos, comunicando las acciones llevadas a cabo. (MINEDUC, 2018a).

Cierto es que las habilidades numéricas iniciales que se han destacado en este trabajo están presentes en el currículo nacional, pero su mención es ciertamente superficial y sin guías para que la práctica pedagógica en efecto impacte en ellas. En un contexto donde la normativa no es clara, nuestras maestras se esfuerzan en enseñar estas habilidades siguiendo una perspectiva tradicional basada en el desarrollo del pensamiento lógico-matemático. Si a esta ecuación le sumamos el desconocimiento de nuestras profesoras sobre el desarrollo cognitivo de dominio específico del número, corremos el riesgo de no lograr adecuadamente los objetivos pedagógicos que sentarán la base de la habilidad matemática posterior.

3.3. *Impacto del contexto familiar en el desarrollo de la habilidad numérica*

De entre los predictores más importantes del desarrollo de la habilidad numérica y del aprendizaje matemático a edades tempranas cabe destacar el impacto del contexto familiar (Anders et al., 2012; Jordan y Levine, 2009; Manolitsis, Georgiou, y Tziraki, 2013; Melhuish et al., 2008). Éste se entiende por los recursos que llegan al hogar y las interacciones entre padres e hijos, que conforman el ambiente de aprendizaje en el hogar (AAH). El estatus socioeconómico (ESE) de la familia donde crece el estudiante tiene un impacto directo sobre su aprendizaje, éste se define por los recursos económicos que llegan al hogar, el nivel de estudios de los padres, su ocupación y el lugar donde vive la familia, es decir, el nivel sociodemográfico del contexto donde vive la familia (Clements y Sarama, 2008). El ESE influye en el aprendizaje y rendimiento en matemáticas, de forma que los niños que provienen de ambientes sociofamiliares pobres rinden sustancialmente por debajo de aquellos que provienen de ambientes más ricos (National Mathematics Advisory Panel, 2008). Es creciente el número de estudios sobre el efecto de las expectativas y las actitudes de los padres, tanto sobre las matemáticas en general, como del desempeño de sus hijos en esta área. Se ha demostrado que expectativas y actitudes tienen un impacto considerable en el aprendizaje matemático (del Río, Susperreguy, Strasser, y Salinas, 2017; Susperreguy, 2016), de forma que actitudes positivas hacia las matemáticas llevan resultados de aprendizaje positivos, a mientras que los padres que transmiten a sus hijos actitudes negativas hacia las matemáticas, interfieren con su motivación, generando expectativas de fracaso en ellos.

Actualmente, los investigadores han puesto el foco en el AAH como predictor de la habilidad numérica temprana y el desempeño matemático posterior. Éste se define por las interacciones entre padres e hijos que impactan en su aprendizaje y se han clasificado en directas e indirectas (Lefevre et al., 2010; Skwarchuk, Sowinski, y LeFevre, 2014). Las interacciones directas son aquellas que los padres llevan a cabo con sus hijos de forma explícita e intencional para ayudarles en el área de matemáticas, como practicar la lista de conteo o el cálculo aritmético. Por otro lado, las interacciones indirectas son aquellas instancias no intencionadas que tienen un efecto sobre el aprendizaje, como participar en actividades de la vida cotidiana, como ir a la compra, o participar en juegos y situaciones de ocio donde se practican los números. Aunque el AAH tiene un impacto sobre el aprendizaje matemático en general, se han determinado relaciones específicas para interacciones directas e indirectas. Las primeras parecen impactar más sobre el procesamiento numérico simbólico (Skwarchuk et al., 2014), la fluidez en cálculo aritmético (Lefevre et al., 2009), la resolución de problemas aritméticos (del Río et al., 2017) y la habilidad de conteo (Manolitsis et al., 2013), mientras que las interacciones indirectas se han relacionado de forma más general con algunos aspectos del conocimiento temprano matemático, como la identificación numérica y el cálculo aritmético simbólico (Lefevre et al., 2009) y el cálculo aritmético no simbólico (Skwarchuk et al., 2014). Se ha visto que la complejidad de las interacciones directas con que se dota a los estudiantes en el hogar determina su impacto sobre el aprendizaje, de forma que cuanto más avanzadas o complejas las interacciones, su impacto es mayor. Dada la complejidad para formular un modelo de ambiente de aprendizaje numérico en el hogar, Susperreguy, Douglas, Xu, Molina-rojas, y Lefevre (2018) han propuesto recientemente clasificar las interacciones directas en el hogar entre interacciones de correspondencia numérica y operacionales. Las primeras están relacionadas con el entrenamiento en el uso de cantidades y las diferentes formas de representarlas, incluyendo la transcodificación entre notaciones numéricas, mientras que las segundas se refieren a actividades donde se opera con cantidades en formato simbólico, ya sean actividades de cálculo operatorio como de cálculo mental. Este modelo no deja de lado las interacciones indirectas, que se compondrían de instancias de juego compartido con números.

Cabe destacar que, aunque el ESE, las actitudes y expectativas y el AAH tienen un efecto relativo sobre el aprendizaje numérico y matemático, es este último el que tiene un mayor impacto (Anders et al., 2012; Melhuish et al., 2008). Se ha visto que el AAH es un mediador de la relación entre ESE y el aprendizaje en matemáticas (Anders et al., 2012) y que aquellos padres que muestran actitudes más positivas hacia las matemáticas, reportan mayor frecuencia de interacciones que favorecen el aprendizaje (del Río et al., 2017).

4. Conclusiones

El presente trabajo tenía por objetivo ofrecer una revisión bibliográfica de los últimos hallazgos en cognición numérica, así como revisar los principales debates que se mantienen abiertos en esta subdisciplina de la psicología cognitiva. El fin de esta revisión fue favorecer la actualización de conocimientos en los agentes educativos de la comunidad hispanohablante. Como se ha dicho, las políticas públicas incluyen directrices sobre la enseñanza de la habilidad numérica inicial, pero su mención es demasiado superficial sin presentar una guía para nuestro profesorado, que, por otro lado, muestra desconocimiento de los principios de la psicología cognitiva con implicaciones educativas, y específicamente, en educación matemática inicial. El paradigma tradicional, con foco en el desarrollo de habilidades de carácter más general como la conservación, la clasificación, la seriación o la ordenación, es necesario para desarrollar el razonamiento lógico-matemático, pero insuficiente para alcanzar una comprensión profunda del fenómeno numérico específico. Los avances en cognición numérica han mostrado que ciertas habilidades de dominio específico sustentan la consolidación del símbolo numérico, como proceso cognitivo que nos permite manipular cantidades exactas y operar con ellas, y, por tanto, desarrollar el cálculo aritmético, que está en la base de conocimientos y procedimientos matemáticos complejos. Consecuentemente, se ha propuesto que el uso de la lista de conteo verbal, la identificación de símbolos numéricos, la cardinalidad, la ordinalidad y la función del sucesor, serían los procesos cognitivos clave que se deben trabajar durante la educación inicial, con el fin de consolidar la comprensión del sistema numérico (Carey y Barner, 2019; Merkley y Ansari, 2016). En este sentido, comprender la estructura ordinal del sistema numérico se ha mostrado como un predictor de impacto creciente para el desarrollo de la habilidad de cálculo a lo largo de Educación Básica (Lyons et al., 2014; Lyons y Ansari, 2015).

Con estos hallazgos sobre la mesa, creemos necesaria la inclusión de una aproximación pedagógica desde la psicología cognitiva del desarrollo, que impacte en el aprendizaje de nuestro estudiantado a través de las siguientes líneas de acción. En primer lugar, nuestros currículos educativos nacionales deben guiar nuestras prácticas pedagógicas hacia el desarrollo de los procesos cognitivos específicos del dominio numérico. Esta aproximación debiera acompañar y completar las miradas tradicionales, que han tenido el foco en procesos cognitivos de naturaleza más general. Segundo, se deben incluir, como objetivo curricular, la adquisición de conocimientos en cognición numérica que lleve a competencias pedagógicas en base a evidencia empírica, en la formación inicial docente en nuestros estudios de Pedagogía en Educación Parvularia, Educación Básica y Educación Diferencial. Mejorar el conocimiento de nuestras maestras sobre la habilidad numérica inicial es una acción clave para lograr impacto educativo sobre las mismas. Tercero, debemos proporcionar guías e instancias a nuestras maestras para favorecer la motivación por la habilidad matemática temprana y su enseñanza. En la misma línea, debemos proponernos como objetivo una gestión emocional adecuada del aprendizaje matemático, dado que el rechazo que genera esta área instrumental es un fenómeno generalizado, cuyas causas son variadas, pero incluyen la transferencia del rechazo de apoderados y el profesorado hacia el alumnado. Finalmente, sería deseable abrir nuevas líneas de investigación en cognición numérica con implicaciones educativas en universidades y centros de investigación de países hispanohablantes, lo que nos permitirá estudiar el impacto educativo de estas habilidades congitivas en nuestra propia realidad.

Es importante trabajar la función simbólica, el lenguaje matemático y el pensamiento lógico-matemático, como procesamiento cognitivo general que impacta en la habilidad numérica inicial. Esta propuesta contempla sumar el procesamiento cognitivo específico como objetivo educativo, en base a hallazgos empíricos en cognición numérica, que nos permita desarrollar prácticas pedagógicas que impacten en su desarrollo, favoreciendo la metacognición mediante el juego.

4.1. *Origen del sistema de representación numérico*

Tradicionalmente, se ha entendido que el sistema de representación aproximado es innato en el ser humano y otras especies. Esta concepción del SNA asume que se trata de un sistema numérico independiente de otros sistemas de procesamiento cognitivo de otras magnitudes físicas (Dehaene, 2011). En los últimos años, los investigadores en cognición numérica se están cuestionando dichos postulados. Se ha propuesto que el sistema de representación numérica preverbal podría no ser innato, sino resultar de un sistema de representación de magnitudes general (Leibovich y Ansari, 2016; Leibovich et al., 2017) que permite comprender y manipular magnitudes continuas. Este sistema estaría en la base de nuestra comprensión de las cantidades, que se entendería como una magnitud más o como una inferencia cuantitativa que haríamos a partir de las magnitudes subyacentes en los estímulos cuantitativos. Esta propuesta proviene de la constatación de que, en las tareas de comparación numérica no simbólica, utilizadas clásicamente para acceder al SNA en estudios conductuales y de neuroimagen, las propiedades físicas de los estímulos (área de los elementos del conjunto y área total del propio conjunto, densidad del conjunto, etc) correlacionan con la numerosidad del conjunto, lo que podría estar sirviendo a los participantes para responder. Hasta ahora se ejercía un estricto control de estas propiedades de los estímulos al recoger medidas puras de la numerosidad, pero los defensores de esta propuesta animan a los investigadores a replantearse el carácter innato del SNA, proponiendo la existencia de este sistema de representación de magnitudes, y no de cantidades per sé (Leibovich et al., 2017).

4.2. *Naturaleza de la correspondencia número-cantidad*

Una de las principales controversias actuales en relación con cómo se establece la correspondencia entre símbolos numéricos y las cantidades que representan es el llamado en ingles *symbol grounding problem* (Leibovich y Ansari, 2016; Merkley y Ansari, 2016; Reynvoet y Sasanguie, 2016; Szkudlarek y Brannon, 2017). Existen dos principales posturas para explicar la adquisición del sistema simbólico. La primera, la hipótesis de correspondencia con el SNA (Dehaene, 2011), propone que el significado de los símbolos numéricos (ya sea en formato verbal como arábigo), se establece a partir de su representación aproximada. Esta postura se basa en cuatro hallazgos: el carácter innato del sistema de representación numérico; la similitud que muestra el desempeño en tareas de comparación simbólica y no simbólica, donde aparecen los mismos efectos de distancia y tamaño; el solapamiento en activación de áreas cerebrales al resolver tareas simbólicas y no simbólicas; y la relación predictiva del SNA sobre la habilidad de cálculo (Dehaene, 2011). Esta postura ha captado la atención de los investigadores en las últimas décadas, pero se ha propuesto una alternativa que está ganando reconocimiento: la hipótesis de asociación símbolo-símbolo (Reynvoet y Sasanguie, 2016), originalmente concebida como la hipótesis del bootstrapping (Carey, 2004, 2009). Esta alternativa propone que el SNS es un sistema cualitativamente independiente al SNA, que surge de forma espontánea gracias a la instrucción formal e informal. Así, el SNS tendría su origen en el SLO, gracias al cual aprendemos las primeras palabras de los números y nos permite establecer el orden entre los símbolos numéricos, que después se generalizarían a cantidades mayores. El conocimiento de la lista de conteo permitiría generalizar este conocimiento ordinal a los símbolos arábigos. Con posterioridad, estableceríamos la correspondencia entre etiquetas verbales y símbolos arábigos con las representaciones aproximadas que representan. Para que este proceso de lugar, se han propuesto como elementos clave la ordinalidad, el valor cardinalidad y la función del sucesor, donde las habilidades verbales como la lista de conteo juegan un rol crucial indispensable (Leibovich y Ansari, 2016; Merkley y Ansari, 2016; Reynvoet y Sasanguie, 2016).

4.3. *Transferencia de la exactitud SNS-SNA*

En línea con la discusión del apartado anterior, se ha propuesto que si el SNS y el SNA son sistemas independientes, en el momento de establecer la correspondencia entre ellos, una vez se adquirido la lista de conteo y su orden, se daría un efecto de transferencia de la exactitud del SNS sobre el SNA (Goffin y Ansari, 2019; Szkudlarek y Brannon, 2017; Wong et al., 2016). Por ejemplo, Matejko y Ansari (2016) evaluaron longitudinalmente (3 veces a lo largo de un año académico) a 30 estudiantes de primer grado con tareas de comparación simbólica y no simbólica. El desempeño fue mejor en la tarea de procesamiento no simbólico al comienzo del primer grado, pero fue equivalente al final del año escolar. Además, el procesamiento simbólico predijo el procesamiento no simbólico en la primera mitad del año escolar, pero no a la inversa. Estos autores concluyeron que las habilidades simbólicas numéricas no dependen de las representaciones numéricas aproximadas y sugirieron que podría haber un efecto de transferencia de exactitud del sistema simbólico al sistema preverbal aproximado.

Agradecimientos

Este manuscrito ha sido posible gracias al financiamiento del proyecto FONDECYT DE INICIACIÓN 11180944, financiado por CONICYT, Ministerio de Educación de Chile, y por el proyecto INDIN 07/2017, financiado por la Dirección de Investigación de la Universidad Católica de la Santísima Concepción. En ambos proyectos el investigador responsable es el último autor de este artículo. Los autores quisieran, además, agradecer por su colaboración a María José Sáez y a Constanza Navarro.

Referencias bibliográficas

Anders, Y., Rossbach, H. G., Weinert, S., Ebert, S., Kuger, S., Lehrl, S., y von Maurice, J. (2012). Home and preschool learning environments and their relations to the development of early numeracy skills. Early Childhood Research Quarterly, 27(2), 231–244. https://doi.org/10.1016/j.ecresq.2011.08.003

Ansari, D. (2008). Effects of development and enculturation on number representation in the brain. Nature Reviews Neuroscience, 9(4), 278–291. https://doi.org/10.1038/nrn2334

Ansari, D., Garcia, N., Lucas, E., Hamon, K., y Dhital, B. (2005). Neural correlates of symbolic number processing in children and adults. NeuroReport, 16(16), 1769–1773. https://doi.org/10.1097/01.wnr.0000183905.23396.f1

Au, J., Jaeggi, S. M., y Buschkuehl, M. (2018). Effects of non-symbolic arithmetic training on symbolic arithmetic and the approximate number system. Acta Psychologica, 185(April 2017), 1–12. https://doi.org/10.1016/j.actpsy.2018.01.005

Bugden, S., DeWind, N. K., y Brannon, E. M. (2016). Using cognitive training studies to unravel the mechanisms by which the approximate number system supports symbolic math ability. Current Opinion in Behavioral Sciences, 10, 73–80. https://doi.org/10.1016/j.cobeha.2016.05.002

Butterworth, B. (2005). The development of arithmetical abilities. Journal of Child Psychology and Psychiatry and Allied Disciplines, 46(1), 3–18. https://doi.org/10.1111/j.1469-7610.2004.00374.x

Carey, S. (2004). Susan Carey. Doedalus, Wonter(1), 59–68. https://doi.org/10.1162/001152604772746701

Carey, S. (2009). The Origin of Concepts. The Origin of Concepts, 1–608. https://doi.org/10.1093/acprof:oso/9780195367638.001.0001

Carey, S., y Barner, D. (2019). Ontogenetic Origins of Human Integer Representations. Trends in Cognitive Sciences, 1–13. https://doi.org/10.1016/j.tics.2019.07.004

Chen, Q., y Li, J. (2014). Association between individual differences in non-symbolic number acuity and math performance: A meta-analysis. Acta Psychologica, 148, 163–172. https://doi.org/10.1016/j.actpsy.2014.01.016

Chu, F. W., vanMarle, K., y Geary, D. C. (2015). Early numerical foundations of young children's mathematical development. Journal of Experimental Child Psychology, 132, 205–212. https://doi.org/10.1016/j.jecp.2015.01.006

Clements, D. H., y Sarama, J. (2008). Experimental Evaluation of the Effects of a Research-Based Preschool Mathematics Curriculum. American Educational Research Journal, 45(2), 443–494. https://doi.org/10.3102/0002831207312908

Crollen, V., Castronovo, J., y Seron, X. (2011). Under- and over-estimation: A bi-directional mapping process between symbolic and non-symbolic representations of number? Experimental Psychology, 58(1), 39–49. https://doi.org/10.1027/1618-3169/a000064

Dehaene, S. (2011). The number sense. New York: Oxford University Press.

Dehaene, S., Piazza, M., Pinel, P., y Cohen, L. (2003). Three Parietal Circuits for Number Processing. Cognitive Neuropsychology, 20(3–6), 487–506. https://doi.org/10.1080/02643290244000239

del Río, M. F., Susperreguy, M. I., Strasser, K., y Salinas, V. (2017). Distinct Influences of Mothers and Fathers on Kindergartners' Numeracy Performance: The Role of Math Anxiety, Home Numeracy Practices, and Numeracy Expectations. Early Education and Development, 28(8), 939–955. https://doi.org/10.1080/10409289.2017.1331662

Dolscheid, S., Winter, C., Ostrowski, L., y Penke, M. (2017). The many ways quantifiers count: Children's quantifier comprehension and cardinal number knowledge are not exclusively related. Cognitive Development, 44(August), 21–31. https://doi.org/10.1016/j.cogdev.2017.08.004

Duncan,G.J.,Dowsett,C.J.,Claessens,A.,Magnuson,K.,Huston,A.C.,Klebanov,P.,…Japel,C.(2007). School readiness and later achievement. Developmental Psychology, 43(6), 1428–1446. https://doi.org/10.1037/0012-1649.43.6.1428; 10.1037/0012-1649.43.6.1428.supp (Supplemental)

Ebersbach, M. (2016). Development of Children's Estimation Skills: The Ambiguous Role of Their Familiarity With Numerals. Child Development Perspectives, 10(2), 116–121. https://doi.org/10.1111/cdep.12172

Ebersbach, M., y Erz, P. (2014). Symbolic versus non-symbolic magnitude estimations among children and adults. Journal of Experimental Child Psychology, 128, 52–68. https://doi.org/10.1016/j.jecp.2014.06.005

Emerson, R. W., y Cantlon, J. F. (2015). Continuity and change in children's longitudinal neural responsestonumbers.DevelopmentalScience,18(2),314–326.https://doi.org/10.1111/desc.12215

Feigenson, L., Dehaene, S., y Spelke, E. (2004). Core systems of number. Trends in Cognitive Sciences, 8(7), 307–314. https://doi.org/10.1016/j.tics.2004.05.002

Fuchs, L. S., Geary, D. C., Fuchs, D., Hamlett, C. L., y Bryant, J. D. (2010). Do Different Types of School Mathematics Development Depend on Different Constellations of Numerical versus General Cognitive Abilities?, 46(6), 1731–1746. https://doi.org/10.1037/a0020662.Do

Fuson, K. C. (1992). Research on whole number addition and subtraction. In Handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics. (pp. 243–275). New York, NY, England: Macmillan Publishing Co, Inc.

Gashaj, V., Oberer, N., Mast, F. W., y Roebers, C. M. (2019). Individual differences in basic numerical skills: The role of executive functions and motor skills. Journal of Experimental Child Psychology, 182, 187–195. https://doi.org/10.1016/j.jecp.2019.01.021

Geary, D. C. (1995). Reflections of evolution and culture in children's cognition. Implications for mathematical development and instruction. American Psychologist, 50(1), 24–37.

Geary, D. C., Nicholas, A., Li, Y., y Sun, J. (2017). Developmental Change in the Influence of Domain-General Abilities and Domain-Specific Knowledge on Mathematics Achievement : An Eight-Year Developmental Change in the Influence of Domain-General Abilities and Domain-Specific Knowledge on Mathematics Achie. Journal of Educational Psychology, 109(5), 680–693. https://doi.org/10.1037/edu0000159

Gelman, R., y Gallistel, C. R. (1978). The Child's Understanding of Number. Cambridge, MA: Harvard University Press.

Goffin, C., y Ansari, D. (2016). Beyond magnitude: Judging ordinality of symbolic number is unrelated to magnitude comparison and independently relates to individual differences in arithmetic. Cognition, 150. https://doi.org/10.1016/j.cognition.2016.01.018

Goffin, C., y Ansari, D. (2019). How Are Symbols and Nonsymbolic Numerical Magnitudes Related? Exploring Bidirectional Relationships in Early Numeracy. Mind, Brain, and Education, 13(3), 143–156. https://doi.org/10.1111/mbe.12206

Guillaume, M., Nys, J., Mussolin, C., y Content, A. (2013). Differences in the acuity of the Approximate Number System in adults: The effect of mathematical ability. Acta Psychologica, 144(3), 506–512. https://doi.org/10.1016/j.actpsy.2013.09.001

Holloway, I. D., y Ansari, D. (2009). Mapping numerical magnitudes onto symbols: The numerical distance effect and individual differences in children's mathematics achievement. Journal of Experimental Child Psychology, 103(1), 17–29. https://doi.org/10.1016/j.jecp.2008.04.001

Hornung, C., Schiltz, C., Brunner, M., y Martin, R. (2014). Predicting first-grade mathematics achievement: The contributions of domain-general cognitive abilities, nonverbal number sense, and early number competence. Frontiers in Psychology, 5(APR). https://doi.org/10.3389/fpsyg.2014.00272

Hyde, D. C., Khanum, S., y Spelke, E. S. (2014). Brief non-symbolic, approximate number practice enhances subsequent exact symbolic arithmetic in children. Cognition, 131(1), 92–107. https://doi.org/10.1016/j.cognition.2013.12.007

Jiménez-Lira, C., Carver, M., Douglas, H., y LeFevre, J. A. (2017). The integration of symbolic and non-symbolic representations of exact quantity in preschool children. Cognition, 166, 382–397. https://doi.org/10.1016/j.cognition.2017.05.033

Jordan, N. C., y Levine, S. C. (2009). Socioeconomic variation, number competence, and mathematics learning difficulties in young children. Developmental Disabilities Research Reviews, 15(1), 60–68. https://doi.org/10.1002/ddrr.46

Kaufmann, L., Koppelstaetter, F., Siedentopf, C., Haala, I., Haberlandt, E., Zimmerhackl, L. B., … Ischebeck, A. (2006). Neural correlates of the number-size interference task in children. NeuroReport, 17(6), 587–591. https://doi.org/10.1097/00001756-200604240-00007

Le Corre, M., y Carey, S. (2007). One, two, three, four, nothing more: An investigation of the conceptual sources of the verbal counting principles. Cognition, 105(2), 395–438. https://doi.org/10.1016/j.cognition.2006.10.005

Lefevre, J. A., Fast, L., Skwarchuk, S. L., Smith-Chant, B. L., Bisanz, J., Kamawar, D., y Penner-Wilger, M. (2010). Pathways to Mathematics: Longitudinal Predictors of Performance. Child

Development, 81(6), 1753–1767. https://doi.org/10.1111/j.1467-8624.2010.01508.x
Lefevre, J. A., Kwarchuk, S. L., Smith-Chant, B. L., Fast, L., Kamawar, D., y Bisanz, J. (2009). Home numeracy experiences and children's math performance in the early school years. Canadian Journal of Behavioural Science, 41(2), 55–66. https://doi.org/10.1037/a0014532
Leibovich, T., y Ansari, D. (2016). The symbol-grounding problem in numerical cognition: A review of theory, evidence, and outstanding questions. Canadian Journal of Experimental Psychology/Revue Canadienne de Psychologie Expérimentale, 70(1), 12–23. https://doi.org/10.1037/cep0000070
Leibovich, T., Katzin, N., Harel, M., y Henik, A. (2017). From "sense of number" to "sense of magnitude": The role of continuous magnitudes in numerical cognition. Behavioral and Brain Sciences, 40. https://doi.org/10.1017/S0140525X16000960
Libertus, M. E. (2015). The role of intuitive approximation skills for school math abilities. Mind, Brain, and Education, 9(2), 112–120. https://doi.org/10.1111/mbe.12072
Libertus, M. E., Odic, D., Feigenson, L., y Halberda, J. (2016). The precision of mapping between number words and the approximate number system predicts children's formal math abilities. Journal of Experimental Child Psychology, 150. https://doi.org/10.1016/j.jecp.2016.06.003
Lipton, J. S., y Spelke, E. S. (2005). Preschool Children's Mapping of Number Words to Nonsymbolic Numerosities. Child Development, 76(5), 978–988.
Lyons, I. M., Price, G. R., Vaessen, A., Blomert, L., y Ansari, D. (2014). Numerical predictors of arithmetic success in grades 1-6. Developmental Science, 17(5), 714–726. https://doi.org/10.1111/desc.12152
Lyons, I. M., Vogel, S. E., y Ansari, D. (2016). On the ordinality of numbers: A review of neural and behavioral studies. Progress in Brain Research (1st ed., Vol. 227). Elsevier B.V. https://doi.org/10.1016/bs.pbr.2016.04.010
Lyons, Ian M, y Beilock, S. L. (2013). Ordinality and the Nature of Symbolic Numbers, 33(43), 17052–17061. https://doi.org/10.1523/JNEUROSCI.1775-13.2013
Maertens, B., De Smedt, B., Sasanguie, D., Elen, J., y Reynvoet, B. (2016). Enhancing arithmetic in pre-schoolers with comparison or number line estimation training: Does it matter? Learning and Instruction, 46, 1–11. https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2016.08.004
Manolitsis, G., Georgiou, G. K., y Tziraki, N. (2013). Examining the effects of home literacy and numeracy environment on early reading and math acquisition. Early Childhood Research Quarterly, 28(4), 692–703. https://doi.org/10.1016/j.ecresq.2013.05.004
Matejko, A. A., y Ansari, D. (2016). Trajectories of symbolic and nonsymbolic magnitude processing in the first year of formal schooling. PLoS ONE, 11(3), 1–15. https://doi.org/10.1371/journal.pone.0149863
Mejias, S., y Schiltz, C. (2013). Estimation abilities of large numerosities in Kindergartners. Frontiers in Psychology, 4(August), 1–12. https://doi.org/10.3389/fpsyg.2013.00518
Melhuish, E. C., Phan, M. B., Sylva, K., Sammons, P., Siraj-Blatchford, I., y Taggart, B. (2008). Effects of the home learning environment and preschool center experience upon literacy and numeracy development in early primary school. Journal of Social Issues, 64(1), 95–114. https://doi.org/10.1111/j.1540-4560.2008.00550.x
Merkley, R., y Ansari, D. (2016). Why numerical symbols count in the development of mathematical skills: Evidence from brain and behavior. Current Opinion in Behavioral Sciences, 10, 14–20. https://doi.org/10.1016/j.cobeha.2016.04.006
Moyer, R. S., y Landauer, T. K. (1967). Time required for judgements of numerical inequality. Nature, 215, 1519–1520. https://doi.org/10.1038/2151519a0

Mundy, E., y Gilmore, C. K. (2009). Children's mapping between symbolic and nonsymbolic representations of number. Journal of Experimental Child Psychology, 103(4), 490–502. https://doi.org/10.1016/j.jecp.2009.02.003

Mussolin, C., Nys, J., Leybaert, J., y Content, A. (2016). How approximate and exact number skills are related to each other across development: A review. Developmental Review, 39, 1–15. https://doi.org/10.1016/j.dr.2014.11.001

Núñez, R. E. (2017). Is There Really an Evolved Capacity for Number? Trends in Cognitive Sciences, 21(6), 409–424. https://doi.org/10.1016/j.tics.2017.03.005

O'Connor, P. A., Morsanyi, K., y McCormack, T. (2018). Young children's non-numerical ordering ability at the start of formal education longitudinally predicts their symbolic number skills and academic achievement in maths. Developmental Science, 21(5), 1–16. https://doi.org/10.1111/desc.12645

Obersteiner, A., Reiss, K., y Ufer, S. (2013). How training on exact or approximate mental representations of number can enhance first-grade students' basic number processing and arithmetic skills. Learning and Instruction, 23(1). https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2012.08.004

Odic, D., Le Corre, M., y Halberda, J. (2015). Children's mappings between number words and the approximate number system. Cognition, 138(May), 102–121. https://doi.org/10.1016/j.cognition.2015.01.008

Paliwal, V., y Baroody, A. J. (2018). Early Childhood Research Quarterly How best to teach the cardinality principle ? Early Childhood Research Quarterly, 44, 152–160. https://doi.org/10.1016/j.ecresq.2018.03.012

Park, J., y Brannon, E. M. (2013). Training the Approximate Number System Improves Math Proficiency. Psychological Science, 24(10). https://doi.org/10.1177/0956797613482944

Park, J., y Brannon, E. M. (2014). Improving arithmetic performance with number sense training: An investigation of underlying mechanism. Cognition, 133(1). https://doi.org/10.1016/j.cognition.2014.06.011

Purpura, D. J., Baroody, A. J., y Lonigan, C. J. (2013). The transition from informal to formal mathematical knowledge: Mediation by numeral knowledge. Journal of Educational Psychology, 105(2), 453–464. https://doi.org/10.1037/a0031753

Reynvoet, B., y Sasanguie, D. (2016). The Symbol Grounding Problem Revisited : A Thorough Evaluation of the ANS Mapping Account and the Proposal of an Alternative Account Based on Symbol – Symbol Associations, 7(October), 1–11. https://doi.org/10.3389/fpsyg.2016.01581

Ritchie, S. J., y Bates, T. C. (2013). Enduring Links From Childhood Mathematics and Reading Achievement to Adult Socioeconomic Status. Psychological Science, 24(7), 1301–1308. https://doi.org/10.1177/0956797612466268

Schneider, M., Beeres, K., Coban, L., Merz, S., Susan Schmidt, S., Stricker, J., y De Smedt, B. (2017). Associations of non-symbolic and symbolic numerical magnitude processing with mathematical competence: a meta-analysis. Developmental Science, 20(3), 1–16. https://doi.org/10.1111/desc.12372

Siegler, R. S., y Ramani, G. B. (2008). Playing linear numerical board games promotes low-income children's numerical development. Developmental Science, 11(5), 655–661. https://doi.org/10.1111/j.1467-7687.2008.00714.x

Simmons, F., Singleton, C., y Horne, J. (2008). Brief report - Phonological awareness and visual-spatial sketchpad functioning predict early arithmetic attainment: Evidence from a longitudinal study. European Journal of Cognitive Psychology, 20(4), 711–722. https:

//doi.org/10.1080/09541440701614922
Skwarchuk, S. L., Sowinski, C., y LeFevre, J. A. (2014). Formal and informal home learning activities in relation to children's early numeracy and literacy skills: The development of a home numeracy model. Journal of Experimental Child Psychology, 121(1), 63–84. https://doi.org/10.1016/j.jecp.2013.11.006
Sokolowski, H. M., Fias, W., Mousa, A., y Ansari, D. (2017). Common and distinct brain regions in both parietal and frontal cortex support symbolic and nonsymbolic number processing in humans: A functional neuroimaging meta-analysis. NeuroImage, 146(October 2016), 376–394. https://doi.org/10.1016/j.neuroimage.2016.10.028
Spaepen, E., Gunderson, E. A., Gibson, D., Goldin-Meadow, S., y Levine, S. C. (2018). Meaning before order: Cardinal principle knowledge predicts improvement in understanding the successor principle and exact ordering. Cognition, 180(July), 59–81. https://doi.org/10.1016/j.cognition.2018.06.012
Susperreguy, M. I. (2016). Math Talk Between Children and Mothers and Its Connection to Math-Related Practices in the Home Setting. In P. E. Davis-Kean y S. Tang (Eds.), Socializing Children Through Language (pp. 81–109). London, UK: Academic Press. https://doi.org/10.1016/B978-0-12-803624-2.00004-7
Susperreguy, M. I., Douglas, H., Xu, C., Molina-Rojas, N., y LeFevre, J. A. (2018). Expanding the Home Numeracy Model to Chilean children: Relations among parental expectations, attitudes, activities, and children's mathematical outcomes. Early Childhood Research Quarterly. https://doi.org/10.1016/j.ecresq.2018.06.010
Szkudlarek, E., y Brannon, E. M. (2017). Does the Approximate Number System Serve as a Foundation for Symbolic Mathematics? Language Learning and Development, 00(00), 1–20. https://doi.org/10.1080/15475441.2016.1263573
Teghtsoonian, R. (1973). Range effects in psychophysical scaling and a revision of Steven's law. The American Journal of Psychology, 86, 3–27.
Träff, U. (2013). The contribution of general cognitive abilities and number abilities to different aspects of mathematics in children. Journal of Experimental Child Psychology, 116(2), 139–156. https://doi.org/10.1016/j.jecp.2013.04.007
Van Herwegen, J., Costa, H. M., Nicholson, B., y Donlan, C. (2018). Improving number abilities in low achieving preschoolers: Symbolic versus non-symbolic training programs. Research in Developmental Disabilities, 77(March), 1–11. https://doi.org/10.1016/j.ridd.2018.03.011
Vanbinst, K., y De Smedt, B. (2016). Individual differences in children's mathematics achievement: The roles of symbolic numerical magnitude processing and domain-general cognitive functions. Progress in Brain Research, 1–26. https://doi.org/10.1016/bs.pbr.2016.04.001
Wong, T. T. Y., Ho, C. S. H., y Tang, J. (2016). The relation between ANS and symbolic arithmetic skills: The mediating role of number-numerosity mappings. Contemporary Educational Psychology, 46, 208–217. https://doi.org/10.1016/j.cedpsych.2016.06.003
Wynn, R. E. N. (1990). Children's understanding of counting. Cognition, 36, 155–193.
Xu, F., y Arriaga, R. I. (2007). Number discrimination in 10-month-old infants. British Journal of Developmental Psychology, 25(1), 103–108. https://doi.org/10.1348/026151005X90704

Autores

Christian Peake. Universidad Católica de la Santísima Concepción. Chile. christian.peake@udp.cl

Valentina Alarcón. Universidad Católica de la Santísima Concepción. Chile.

Viviana Herrera. Universidad Católica de la Santísima Concepción. Chile.

Karina Morales. Universidad Católica de la Santísima Concepción. Chile.

Alberto Camacho Ríos

PRÁCTICAS SOCIALES ASOCIADAS A LA CONSTRUCCIÓN DE TEMPLOS ANTIGUOS

Social practices associated with the construction of ancient temples

RESUMEN

Este escrito presenta la modelización de una práctica social asociada a la medición de las bases rectangulares de los templos antiguos. Tiene por objetivo analizar la estructura de tres de ellos, ubicados entre los años 1,000 a.C., y el principio de la era cristiana, situados en diferentes espacios geopolíticos. Para su consecución, se sigue el método socioepistemológico a partir de las dimensiones social, histórica y cultural. Los resultados destacan cuatro características aritméticas estructurales con las cuales se diseñaron y construyeron los edificios. La comparación de las características deja ver una estrecha relación entre las magnitudes de área y volumen de cada templo.

PALABRAS CLAVE:

- *Principio genitivo*
- *Características*
- *Práctica social*
- *Bases rectangulares*

ABSTRACT

This paper presents the modeling of a social practice associated with the measurement of the rectangular bases of ancient temples. Its objective is to analyze the structure of three of them, located between 1,000 B.C., and the beginning of the Christian era, located in different geopolitical spaces. To achieve this, the socioepistemological method is followed from the social, historical and cultural dimensions. The results highlight four structural arithmetic characteristics with which the buildings were designed and constructed. The comparison of the characteristics reveals a close relationship between the magnitudes of area and volume of each temple.

KEY WORDS:

- *Genitive principle*
- *Characteristics*
- *Social practice*
- *Rectangular bases*

RESUMO

Este artigo apresenta a modelagem de uma prática social associada à medição das bases retangulares de templos antigos. Seu objetivo é analisar a estrutura de três deles, localizados entre 1.000 a.C. e o início da era cristã, localizados em diferentes espaços geopolíticos. Para tanto, segue-se o método socio epistemológico das dimensões social, histórica e cultural. Os resultados destacam quatro características

PALAVRAS CHAVE:

- *Princípio genitivo*
- *Características*
- *Prática social*
- *Bases retangulares*

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (2021) *24* (3): 327-353.
Recepción: Julio 1, 2020 / Aceptación: Noviembre 19, 2021. DOI: 10.12802/relime.21.2434

aritméticas estruturais com as quais os edifícios foram projetados e construídos. A comparação das características revela uma estreita relação entre as magnitudes de área e volume de cada templo.

RÉSUMÉ

Cet article présente la modélisation d’une pratique sociale associée à la mesure des bases rectangulaires des temples antiques. Son objectif est d’analyser la structure de trois d’entre eux, situés entre 1000 av. J.-C., et le début de l’ère chrétienne, situés dans différents espaces géopolitiques. Pour y parvenir, la méthode socio épistémologique est suivie des dimensions sociale, historique et culturelle. Les résultats mettent en évidence quatre caractéristiques arithmétiques structurelles avec lesquelles les bâtiments ont été conçus et construits. La comparaison des caractéristiques révèle une relation étroite entre les grandeurs de surface et le volume de chaque temple.

MOTS CLÉS:
- *Principe génitif*
- *Caractéristiques*
- *Pratique sociale*
- *Bases rectangulaires*

1. Introducción

Existe abundante información relacionada con las dimensiones del Templo de Salomón que el Dios Yahvé demandó a los patriarcas bíblicos le fuera construido en la ciudad de Jerusalén, lo cual ocurrió en el año 960 a.C. Destacan los registros metrológicos contenidos en la Biblia cuyas longitudes se presentan en “codos largos”. El complejo arquitectónico fue levantado con calidad, solidez y amplia economía de acuerdo a diseños de otros templos fenicios. Se dividía en diferentes espacios como La Casa de Yahvé[1] que era el edificio principal dedicado al culto, orientado sobre su eje longitudinal de este a oeste, El Pórtico o entrada principal, El Santísimo donde se resguardaba el Arca de la Alianza que contenía los diez mandamientos dictados por Yahvé a Moisés en el Monte Sinaí cuyas dimensiones formaban un cubo de 20 codos de lado, así como otras áreas distribuidas en bardas, atrios, cámaras y habitaciones de los sacerdotes, envueltos por un ancho muro cuadrado que era llamado El Santuario de 500 codos por lado, incluidas grandes columnas ubicadas en diferentes espacios. En (2 Crónicas, 3) se afirma que la Casa de Yahvé media 60 codos de largo por 20 de ancho y 30 de altura, es decir, fue diseñado como una “caja” cuya altura determina un paralelepípedo rectangular, ubicado en el centro del Santuario. Mencionaremos esas dimensiones como $l = 60$ codos al largo, $a = 20$ codos al ancho y $h = 30$ codos la altura, independientemente de que, de momento, desconozcamos el valor en metros del codo largo.

[1] *Hekhal* en hebreo לכיה , Casa Grande.

1.1. *Metrología y características del Templo de Salomón*

Enseguida se exhiben cuatro características fundamentales que dan estructura metrológica a las dimensiones rectangulares del templo, las cuales determinan una "técnica" asociada a la actividad práctica de su construcción. Debemos aclarar que las características se encuentran en todos los edificios, cámaras, bardas, atrios, entre los mencionados, que conforman el complejo del templo. Para ello partiremos de las siguientes hipótesis las cuales forman parte de las decisiones operativas del diseñador del inmueble, aparentemente el propio Yahvé.

1) El área A de la base era supuesta o conocida,
2) Las longitudes l y a se desconocían y era necesario determinarlas, $l > a$,
3) La proporción entre las longitudes $\frac{l}{a} = c$ (c es constante, $a \neq 0$) se desconocía y
4) Se suponía la proporción entre la suma de las longitudes respecto a la diferencia de las mismas, es decir:

   $\frac{l+a}{l-a} = k$ (k constante, $l > a$)

Junto con el área A el último supuesto era el más representativo, pues garantizaba la estructura metrológica de la extensión del edificio. Es como solicitar a un arquitecto la construcción de una casa cuya área de la base es conocida, así como la proporción de la suma y diferencia de sus longitudes. Este último tendría que partir de ambos conocimientos para diseñar su base obteniendo con los datos dados las longitudes l y a. Lo cual toma sentido puesto que es más factible operativamente ir de la proporción de la suma y resta de los lados, es decir: $\frac{l+a}{l-a} = k$ a la de los propios lados $\frac{l}{a} = c$, como se muestra enseguida.

La proporción $\frac{l+a}{l-a} = k$ posee la particularidad de que entre más parecidas sean las longitudes l y a de la base rectangular del templo, la constante k tiende a ser muy grande. En tanto iguales, la base sería cuadrada y k tendría por límite el infinito. Caso contrario, si alguna de las longitudes es más larga que la otra k tendría por límite a cero. Para la extensión de la Casa de Yahvé solo importa revisar los supuestos ya que las longitudes han sido tomadas directamente de la Biblia, no obstante seguiremos el orden considerado para estos últimos.

Para la base del edificio se supone conocida el área A, así como la proporción entre la suma y diferencia de las longitudes, es decir:

$$A = 1,200 \text{ codos}^2, \frac{l+a}{l-a} = \frac{2}{1} \text{ codos}$$

Advierta en la proporción que al multiplicar en cruz $(l - a)$ por 2 para luego pasar al miembro izquierdo lo que resta, resulta $l(1 - 2) + a(1 + 2) = 0$. La cifra 2 de la proporción corresponde a un "número simétrico" en el sentido de las operaciones, pues le restan y suman una unidad. Luego queda $3a = l$. De aquí resulta la proporción en que se encuentran el lado largo y el ancho de la base del templo, es decir: $\frac{l}{a} = \frac{3}{1}$. Se sigue determinar las longitudes l y a, para ello se despeja cualquiera de estas de las expresiones del área y la proporción entre los lados, quedando al despejar el lado largo $l = 3\times a$ y $l = \frac{1{,}200}{a}$. De modo que el ancho a se calcula de la siguiente manera:

$$a^2 = \frac{1{,}200}{3} = 400 = \frac{l\times a}{l\div a}$$

O bien $a = \sqrt{400} = 20$ codos. Y puesto que $l = 3\times a$, se obtiene $l = 3\times 20 = 60$ codos. Longitudes que corresponden a las sugeridas en la Biblia.

Se enumeran enseguida las primeras tres características obtenidas durante el proceso seguido, estas son:

a) $A = 1,200$ codos^2, $a = 20$ codos, $l = 60$ codos

b) $\frac{l+a}{l-a} = 2$, c) $\frac{l}{a} = \frac{3}{1}$

Por su lado, cada una de las caras del paralelepípedo guarda también las tres características, las cuales resultan semejantes y factibles de establecer. Además, las magnitudes de longitud, área y volumen fijan entre ellas proporciones importantes, por ejemplo el volumen $V = l\times a\times h = 36,000$ codos^3 dividido por la suma de las áreas de las caras del poliedro 7,200 codos^2, resulta, $\frac{V}{A} = 5$ codos. Incluso su diagonal es un número entero, $d = 70$ codos.

La cuarta característica tiene que ver con que cada una de las dimensiones mostradas dividen al número 780 o bien múltiplos de este. Las longitudes lo hacen formando con los resultados una sucesión aritmética de la forma 13, 26, 39, es decir:

$$l = \frac{780}{60} = 13,\; h = \frac{780}{30} = 26,\; a = \frac{780}{20} = 39$$

Mientras que el área y el volumen, determinan:

$$\frac{78{,}000}{A=1{,}200} = 64,\; \frac{78{,}000}{V=36{,}000} = 2.1666\ldots$$

El número 780 representa al que se conoce, incluso actualmente, como ciclo sinódico del planeta Marte el cual mide las revoluciones de este último en días. También es reconocido como “calendario del planeta Marte”. En el escrito lo designamos como “número calendárico”. Otros números de este tipo se desprenden de la proporción 2.1666… que resulta de dividir 78,000 y el volumen 36,000 codos[3] de La Casa de Yahvé, estos son (las negrillas son nuestras):

$$\frac{78{,}000}{36{,}000} = \frac{819}{378} = 2.1666\ldots$$

En el denominador la cifra 378 simboliza al ciclo sinódico del planeta Saturno, tal como se caracteriza en nuestros días. Mientras que 819 es llamada “rueda calendárica” lo cual aclaramos más adelante.

2. Organización del artículo

2.1. *Objetivo*

El objetivo del escrito se divide en dos partes, la primera es mostrar los principios fundamentales de una práctica social vinculada a la toma de decisiones para la determinación de las dimensiones de las bases rectangulares de los templos antiguos. Parte de esas articulaciones son las cuatro características que determinan la estructura metrológica de la base rectangular del Templo de Salomón, las cuales constituyen una técnica. Esta última fue heredada para el diseño de otros templos construidos en épocas y espacios geográficos diferentes, edificados con un propósito político y religioso también diferente. La segunda es la modelización socioepistemológica de la práctica. Este interés involucra otros principios en actividades inherentes que se mencionan más adelante.

2.2. *Pregunta de investigación*

La pregunta que destaca en el escrito es la siguiente ¿Qué hace que las dimensiones de área y volumen de un templo construido cerca de 1,000 años a.C., en Israel, sean proporcionales con otro levantado en la costa del Golfo de México próximo al año cero de la era cristiana?

2.3. *Justificación*

Existen pocas investigaciones relacionadas con estudios metrológicos cuidadosos de las dimensiones de los templos antiguos. De las que se tiene noticia se cuenta la del jesuita Juan Bautista Villalpando, quien durante los años 1595 y 1606 elaboró en un documento el esbozo del Templo de Salomón a partir de las dimensiones mencionadas por el profeta Ezequiel en la Biblia. Estaba convencido de que, al haber sido el templo judío un diseño del mismo Yahvé, el conocimiento del edificio permitiría deducir las reglas de la arquitectura perfecta, la "revelada" por Dios. Este tipo descripciones son sujetas a la importancia religiosa inherente en los templos y sería hasta el siglo XVII cuando aparecerían representaciones fundamentadas en métodos analíticos. Investigaciones de este tipo se encuentran en Newton 1728 y Newton, 1737, limitadas al reconocimiento del codo real como unidad de medida del Templo de Salomón y su "reconstrucción" arquitectónica. Sin embargo, Isaac Newton no logró deslindarse de la postura religiosa del inmueble. Obras contemporáneas como la del investigador germano T. A Busink, escrita en 1970, titulada Der Tempel Von Jerusalem Von Salomon Bis Herodes, muestran un recuento del caudal económico y humano empleado en la construcción del templo, habiendo estimado sus dimensiones en 27 metros de largo por 9 metros de ancho y una altura de 13.5 metros (60 por 20 por 30 codos). Otros trabajos como el de Morrison (2011) son dedicados al estudio de las investigaciones de Newton sobre el templo, antes citadas.

De lado de otros templos construidos en latitudes y épocas diferentes, de convicciones políticas, religiosas y arquitectónicas distintas a las inmersas en la edificación del Templo de Salomón, la información que se cuenta es la descripción en metros de sus dimensiones, producto de hallazgos arqueológicos desarrollados a lo largo de los siglos XIX, XX y lo que va del presente. El arqueólogo inglés Flinders Petrie fue, en 1880, pionero en utilizar levantamientos topográficos en la medición de los sitios arqueológicos como parte de la sistematización del estudio de las estructuras monumentales. Creía que las mediciones permitirían entender mejor ese tipo de construcciones de modo que otorgaran a la arqueología un carácter científico de valor permanente (Petrie, 1890). No obstante, y a pesar de la bondad en las mediciones realizadas a una buena cantidad de sitios, en ningún caso se ha problematizado la unidad de medida de origen con la cual los inmuebles fueron diseñados y construidos. En este sentido la investigación metrológica es incipiente, toda vez que los estudios arqueológicos se han centrado en cuestiones arquitectónicas, históricas, antropológicas, estéticas, entre otras, dejando de lado las relacionadas sobre el origen metrológico de las dimensiones de los templos.

Por lo anterior, consideramos que los estudios metrológicos de los edificios antiguos han sido desdeñados por la investigación racional, creando un hueco que no permite reflexionar otro tipo de explicaciones, también racionales, sobre su origen.

2.4. *Marco Teórico. Socioepistemología*

La actividad de establecer las dimensiones de las bases de los rectángulos de los templos a través de las características de área y proporción de la suma y diferencia de las longitudes, es una Práctica Social ocupada a lo largo de varios siglos por grupos humanos de diversa ideología y religión. Como tal, la práctica formó parte de diferentes culturas y civilizaciones transitando entre generaciones y escenarios geopolíticos a través de procesos de difusión difíciles de reconocer. La práctica se evidencia en los templos egipcios, israelitas, griegos, romanos, mesoamericanos y se aprecia, también, en los confines del Renacimiento durante el diseño de los rectángulos de los bastidores de las obras pictóricas de esa etapa cultural, repercutiendo en las dimensiones de los marcos de las pinturas de artistas del siglo XX, así como en aquellas de los códices prehispánicos producidos en diferentes épocas en la región de Mesoamérica.

En si misma, la práctica está oculta en el producto final que con ella se construyó, en este caso el templo. En su búsqueda la práctica no se puede explicar sino a condición de vincular las condiciones sociales en las que se constituyeron los principios que la engendraron (Bourdieu, 2009, p. 91). En el que nos ocupa las condiciones sociales de por medio son principalmente de naturaleza religiosa en un sentido intrasubjetivo. Los principios están enraizados en una condición mítica que implica que los elementos del cosmos tuvieran sobre la superficie terrestre arquetipos que les representaran (Eliade, 2001). Esta condición se halla en la organización métrica de la extensión de los templos y es biunívoca con aquella de los números que gobiernan el movimiento planetario. El descubrimiento de este principio en el contexto hace que la producción de la práctica sea visible, predecible y verificable.

Las prácticas sociales forman parte del estudio de la Socioepistemología (SE), la cual se dedica al análisis de la construcción social del conocimiento. El método socioepistemológico es de naturaleza sistémica y trata los fenómenos de producción y difusión de saberes desde una perspectiva múltiple, situando el conocimiento en tres componentes de investigación, a saber, social, histórica y cultural (Cantoral, Montiel y Reyes-Gasperini, 2015, pp. 8-9). Con este enfoque se asume la legitimidad de todo tipo de conocimiento.

Se parte del supuesto de una "…filiación entre la naturaleza del conocimiento que los seres humanos producen con las actividades mediante las cuales, y en razón de las cuales, dichos conocimientos son producidos" (Cantoral et al. 2015, p. 9). Es el intento de evitar el "objeto" como tal y retornar a la práctica que le originó. La práctica se origina por una clase particular de condiciones de existencia que producen principios generadores y organizadores de prácticas y representaciones (Bourdieu, 1980, p. 86). Son esos principios los que interesan a la SE, ya que forman parte de la realidad social, de igual manera que los objetos matemáticos que describen, toda vez que destinados al salón de clases.

La práctica social que nos ocupa fue originada por un "principio genitivo"[2] y es articulada y producida por otros principios transubjetivos que de este se desprenden, así como procedimientos, técnicas y conocimientos que forman parte del establecimiento de las dimensiones de las bases rectangulares de los edificios.[3]

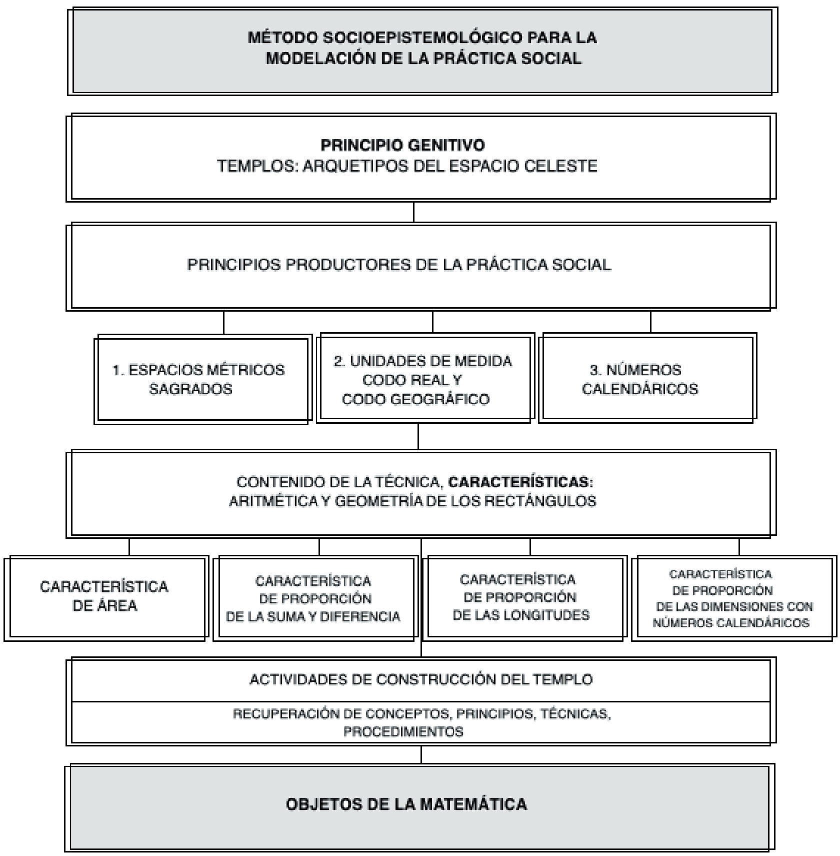

Figura 1. Método socioepistemológico para la modelación de la Práctica Social.

2 Genitivo: en el sentido de que "engendra" la práctica y otros principios. Ello no significa que toda práctica social sea engendrada por un principio genitivo de este tipo. El principio que se exhibe es un caso particular de ésta práctica.

En la Figura 1 se encuentra parte del método socioepistemológico formulado a partir de las dimensiones mencionadas las cuales seguimos en la investigación, aunque no en ese orden, para realizar una "modelización de la práctica". El método es solo un esbozo que puede mejorarse. La modelización comprende:

1. El reconocimiento del principio genitivo antes mencionado.
2. El reconocimiento de los principios productores de la práctica. Estos son:
   a) Expresiones métricas devenidas de lo religioso que determinan las dimensiones de los templos,
   b) La unidad de medida que sirvió para su diseño, trazo y construcción, ausente en la actualidad, y
   c) Una estructura numérica de lado de las dimensiones de longitud, área y volumen de los edificios, también desconocida.

El segundo principio, colocado en *b*), tiene que ver con la definición y ubicación histórica del codo real, de la cual se desprende el situado en *c*).

3. Reconocimiento de las técnicas. En este caso se plantean las cuatro características que determinan la estructura de las bases de los rectángulos de los templos que comprenden la técnica comentada para el Templo de Salomón.
4. Actividades de construcción del templo[4] y recuperación de conceptos, principios, técnicas, procedimientos, etc.
5. Contraste de los elementos recuperados con los objetos de la matemática escolar.

De la descripción histórica y definición de los tres principios mencionados en el rubro 2 nos ocupamos enseguida. En el artículo reconocemos y evidenciamos la práctica en el sentido de los principios que la articulan en su constitución histórica y nos deslindamos de su posible adopción en el sistema educativo. Esto último queda abierto para ser utilizado en posibles diseños de situaciones didácticas que lleven a la realización de algunos objetos matemáticos a través de los elementos contenidos en la práctica.

---

[3] El principio genitivo se diferencia del *habitus* de Bordieu, puesto que se define como el origen mismo que determina la producción de la práctica, mientras que el habitus fue concebido como "un conjunto de principios [transubjetivos] socialmente adquiridos que mueven a los individuos a vivir de manera similar a la de otros miembros de su grupo social" (Bourdieu, 2009).

[4] En si misma la construcción de los templos no se describe en el escrito, pero toma sustento de las actividades que se desprenden de la práctica social, razón por la que se incluye.

3. Principios fundamentales que organizan la práctica social

3.1. *Espacio métrico sagrado*

Los primeros patriarcas como Moisés y el profeta Ezequiel tuvieron la oportunidad de conversar "frente a frente" con el Dios israelita Yahvé, quien les transmitió las "medidas sagradas"[5] del Tabernáculo[6] al primero y aquellas del Templo de Salomón al segundo. Yahvé puntualizó a Moisés en la montaña cómo sería el Tabernáculo diciéndole "ve que hagas todas las cosas conforme al modelo que te fue mostrado…" (Éxodo 24: 40). El modelo sugerido era un Santuario Sagrado "sombra de las cosas celestiales" (Hebreos 8: 5). Sería de base rectangular y sus longitudes dadas en codos (Éxodo 25:31). Para los sacerdotes a quienes confió Yahvé la encomienda de los templos, los espacios sagrados eran resultado de una experiencia mística que involucraba una metrología en el dictado de sus dimensiones los cuales debían construirse sobre lugares "desorganizados" de la superficie terrestre, para constituirlos "puertas del cielo":

> Es a partir de este punto fijo, de este centro, pues, que desde tiempos inmemoriales el hombre ha organizado el espacio caótico y sin sentido a su alrededor, construyendo ciudades, casas y santuarios, remedando de esta manera la creación del mundo por parte de los dioses. (Roitman, 2016, p. 19) http://www.verbodivino.es/hojear/3445/del-tabernaculo-al-templo.pdf

Los templos tenían un origen arquitectónico y simbólico transmitido a los sacerdotes para su edificación, idealizados espacios métricos por las dimensiones exactas de sus longitudes las cuales determinan su orientación cosmológica. En la visión del profeta Ezequiel Yahvé simula la medición del templo usando un personaje "bronceado" que trae consigo una cuerda de lino y una vara dividida en 6 codos, al que va ordenando el levantamiento de la extensión del inmueble:

> Me llevó ahí, y he aquí un varón, cuyo aspecto era como de bronce; y tenía un cordel de lino en su mano, y una caña de medir; y él estaba a la puerta. Entonces vi que por el exterior del templo había un muro, todo alrededor, y en la mano del hombre había una caña de medir de 6 codos, cada codo era de un codo y un palmo. Midió el espesor del muro, que tenía una caña de alto. (Ezequiel 40: 6)

[5] El entrecomillado es nuestro.

[6] *Mishkan,* en hebreo.

La unidad de medida mencionada en la visión es el codo largo bíblico aludido por Yahvé para la construcción del templo. La contradicción "...cada codo era un codo y un palmo...", ocurre por una interpretación errónea de esa parte de la Biblia. En realidad ese apartado presenta dos tipos de unidades de medida diferentes, ambos ampliamente mencionados en el mismo documento, el "codo corto" y el codo largo. El segundo se obtiene al sumarle un "palmo" al primero. La visión involucra al personaje de bronce que hace las veces de agrimensor para mostrar a Ezequiel las dimensiones sugeridas. Las dimensiones de la "caña" de medir es ordenada de acuerdo con las magnitudes de las unidades utilizadas para la medición las cuales sirven de norma.

En El Diccionario Enciclopédico de Biblia y Teología se contrasta el valor numérico del codo bíblico en centímetros. Según se informa el codo largo vendría a ser el codo egipcio de 0.5233 m y el "codo ordinario" que se indica, el codo corto de 0.4445 m, también mencionado en la Biblia. https://www.biblia.work/diccionarios/codo/

3.2. *Isaac Newton, metrólogo del siglo XVII*

Uno de los grandes metrólogos, Isaac Newton, se sintió cautivado por la belleza y arquitectura del Templo de Salomón. El primer templo fue construido por el rey Salomón cerca del año 960 a.C., para sustituir al Tabernáculo, considerado como el único centro de culto para el pueblo judío siendo destruido en el año 586 a.C., al igual que la ciudad de Jerusalén, por las tropas del rey de Babilonia Nabucodonosor II. Después de este hecho histórico, según la Biblia, hubo un nuevo interés religioso en su reconstrucción. El Dios israelita Yahvé transmitió instrucciones sobre las dimensiones al profeta Ezequiel a través de una visión extática del inmueble tenida por este último. El segundo templo se levantó en la época de Zorobabel, líder de la resistencia judía, quien inició su reconstrucción en el año 535 a.C., sin que históricamente se acierte a considerar si las medidas empleadas hayan sido las profetizadas. Alrededor del 19 a.C., el rey Herodes comenzó una masiva renovación y expansión del templo, así se reconstruyó el segundo. Sin embargo, alrededor del año 70 d.C., se destruyó de nuevo la ciudad de Jerusalén, incluyendo el templo restaurado por Herodes.

Newton se dio a la tarea de rescatar las "verdaderas" medidas del edificio, puesto que se habían perdido por las destrucciones citadas, cuyos números consideraba, por obvias razones, de origen divino. Analizó detalladamente la geometría del establecimiento a partir de reconocer sus longitudes en el Antiguo Testamento, principalmente del Libro de Ezequiel, además de referencias marginales de la misma Biblia como Reyes, Éxodo, Crónicas, entre otras secciones, incluyendo el Talmud.[7] Asimismo, reportó las magnitudes y elaboración de plantas arquitectónicas del edificio en el capítulo V titulado A Description of the Temple of Salomon, colocado en una de sus obras (Newton, 1728). En esta última descubre además diferencias metrológicas entre algunos de los espacios de los tres templos. El libro se considera parte de los escritos de estudios bíblicos. Sin embargo, los diseños arquitectónicos elaborados en planta del templo aportan evidencia valiosa de la realidad metrológica y arquitectónica del inmueble, en la cual se percibe su capacidad introspectiva para recuperar las medidas originales, las cuales no se alejan de las que se mencionan en la Biblia, Figura 2. Se sabe que dedicó a esta investigación más de 50 años, muchos más que a los Principia, sin que en el escrito se perciba haber encontrado la "magia de la divinidad" en los números que representan las medidas. Con ese mismo interés hurgó, también, en las extensiones de las pirámides egipcias y, con la misma desazón, no acertó en la verdad que esperaba.

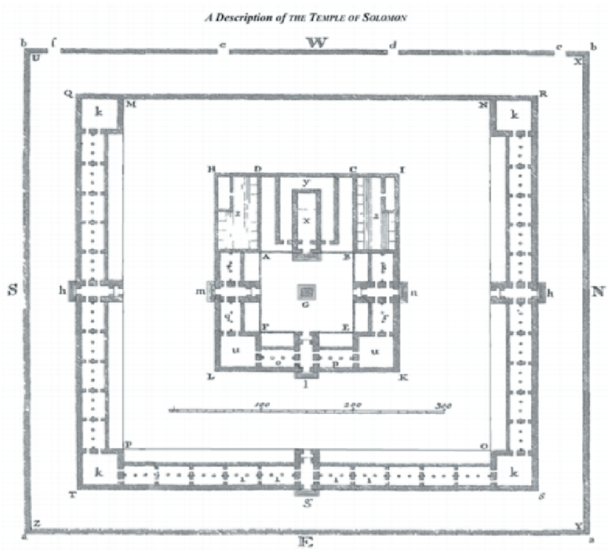

Figura 2. Planta del Templo de Salomón según la concepción de Newton.
Fuente: Newton (1728, p. 347)

[7] Newton atendió el Talmud debido a que en este se encuentran unidades de medida bíblicas y talmúdicas utilizadas principalmente por los antiguos israelitas, las cuales aparecen con frecuencia en la Biblia Hebrea y en escritos rabínicos posteriores como el Mishná.

Entre los méritos de Newton se encuentra haber determinado con suficiente precisión el tamaño en pies ingleses de la unidad de medida que reconoció como "codo real" (codo largo bíblico) con el cual fue diseñado y construido el Templo de Salomón. En un primer intento estableció este último entre 21.5 y 22 pulgadas inglesas, algo así como 0.5524 m (Newton, 1728, p. 333).

Entre los años 1636 y 1640, John Greaves profesor de astronomía de la Universidad de Oxford efectuó un reconocimiento de las diferentes dimensiones de la Cámara del Rey ubicada en el interior de la pirámide de Keops en el yacimiento de Guiza. Las longitudes determinadas por Greaves en la pirámide, en pies ingleses, se distinguen en la siguiente cita:

> There are also other specimens of this Cubit; as particularly that the whole length of that gallery, with the hypotenuse of a rectangular triangle, whose base was 15 Feet, and height about 5 or 6, or perhaps 7 Feet, being measured by a cord, was 154 Feet. Subtract the hypotenuse, and there will remain the length of the gallery, 138 Feet; that is, 20 times the breadth, or 20 Royal Cubits. Two other galleries were likewise measured, and found to be in length 110 Feet, that is, sixteen Royal Cubits and another Chamber was in breadth about 17 Feet, that is, 10 Cubits (…). (Newton, 1737)

Newton comparó los resultados de Graves con las medidas determinadas por estudiosos, como Heródoto, Vitrubio, Strabo, Josefo, Hesychius de Alexandria, Agrícola, Snellius, Purshas, Villalpando, entre otros (Morrison, 2011) y dedujo las magnitudes de la Cámara en codos de Memphis en proporción de 4: 1 respecto de los codos reales sugeridos en el Templo de Salomón.

De las tres medidas, obtenidas por Greaves, realizadas en el interior de la Cámara: 1.725, 1.71875 y 1.7, apreciadas en la Tabla I, se obtiene un promedio de 1.711458333 pies ingleses, cuyo resultado en metros es de 0.522605 (Newton, 1737).

TABLA I
Magnitudes del codo real en diferentes unidades de medida

Magnitudes de la Galería en pies ingleses	*Magnitudes en codos reales de Memphis*	*Magnitudes en codos reales egipcios*	*Estimación del codo real en pies ingleses*	*Estimación del codo real en metros*
138	80	80÷4=20	1.725	0.52578
110	64	64÷4=16	1.1875	0.523875
17	10	10÷4=2.5	1.7	0.5186
Promedios			1.171458333	0.522605

Elaboración del autor.

No satisfecho con el resultado, 1.714583 pies o bien 0.5226 m, profundizó en su estudio y reconoció otras unidades de medida. Una de ellas que llamó “codo sagrado” de 0.3 m (11.811 pulgadas inglesas) con el que, admitió, se diseñaron y levantaron las pirámides de Guiza. Gracias a ésta dedujo otro fragmento que aproximó en 0.45 m (17.716 pulgadas inglesas) al multiplicar el primero por 1.5 el cual es reconocido en la Biblia como codo corto, ya antes mencionado. Dedujo que entre este y el codo real existía una proporción de $\frac{7}{6}$ y propuso este último como $0.45\times\frac{7}{6}=$ 0.525 m, el cual le convenció de sus propósitos de investigación.

Para el año de 1971 del siglo pasado el metrólogo italiano Livio Stecchini, a través de diferentes comparaciones con otras unidades de medida egipcias, incluyendo las aportaciones de Newton y partiendo de una postura del todo antropocéntrica, sostuvo que el tamaño de codo real se debía considerar en los 0.525 m (Stecchini, s.f). Debido a ello fue el primero en reconocer una magnitud de 0.4617 m para el codo corto bíblico aproximado por Newton en 0.45 m. Este último fue llamado por el investigador “codo geográfico” del cual afirma haber sido utilizado por los constructores egipcios.

Para establecer las longitudes de los templos que enseguida se analizan utilizaremos el codo real (cr) en 0.524836841 m, próximo de las propuestas de Newton y Stecchini con una diferencia de 1.6 diezmilésimos. La definición es empírica y deviene a procesos experimentales de tipo ensayo y error, aunque al final del escrito intentamos determinar su origen metrológico. De igual manera, estimamos el codo geográfico (cg) en 0.4619836247 m, con una diferencia respecto de la definición de Stecchini de 2.8 diezmilésimos.

El codo real y codo geográfico formaron parte de instrumentos semejantes al primer metro patrón construido en Francia en 1889 de platino e iridio, Figura 3. Se conservaban como unidades de medida estándar que servían de norma para la elaboración de cuerdas utilizadas para la medición de diferentes tipos de longitudes y, principalmente, en el diseño y construcción de los templos.

Figura 3. Barra metálica graduada cuya longitud es igual a la de un codo real. Fuente. Museo de Turín, Italia, en https://en.wikipedia.org/wiki/Cubit

3.3. *Números calendáricos*

La virtud del codo real y codo geográfico es que al trasladar magnitudes en metros a esos dominios devuelven números calendáricos que representan respectivamente las revoluciones sinódicas de los planetas Marte, en 780 días, Venus 585 días, Saturno 378 días, así como los años lunar de 384 días y solar de 365.625, según la concepción estructural mostrada para algunos de estos en las dimensiones del Templo de Salomón. Además, la división por tres del ciclo sinódico de 780 días, es decir, $\frac{780}{3}=260$, determina el que investigadores, arqueólogos y antropólogos han considerado "año ritual" de 260 días, expresión de la cual se deduce su propio origen. No obstante Bernal (2015) encontró en la epigrafía contenida en algunos tableros de templos mayas la que ha denominado Rueda Calendárica de 819 días relacionada con el ciclo sinódico de 378 días del planeta Marte a través de la constante que las proporciona, es decir, $\frac{819}{378}=2.1666\ldots$, ya deducida de las dimensiones del Templo de Salomón como $\frac{78,000}{36,000}=2.1666\ldots.$

El calendario real del ciclo de Venus se acepta actualmente en los 584 días. En el escrito adoptamos la forma en que surge en las medidas de los edificios y es considerado en esa cifra (585) por su cercanía con el ciclo real. Lo mismo ocurre con el año solar de 365.625 días que destaca de las dimensiones. Ciertamente que el año solar de 365.625 días solo se acerca al año trópico real de 365.25 días, no obstante, dichos números forman una estructura que determina parte de un sistema de medición manifiesto en el análisis de cada edificio. Esa estructura surge de manera natural de las dimensiones de los inmuebles. Es una ordenación numérica que se aproxima a la realidad de los calendarios de los planetas citados, la cual utilizaremos para explicar la metrología conferida por los constructores a la extensión de las edificios antiguos que enseguida se analizan. Por su naturaleza, estos números son dados en "días" debido a que representan calendarios que se miden en ese tipo de unidades. Sin embargo, en las dimensiones de los templos aparecen acumulados en forma de producto, por ejemplo en el área de cierto rectángulo de 299,520 cr^2 esta se acomoda en la forma 780×384 cr^2, la cual se lee como el producto de un ciclo sinódico de 780 días del planeta Marte multiplicado por un año lunar de 384 días. No obstante, cada factor está dado realmente en codos reales y se debe apreciar como el producto de 780 cr multiplicado por 384 cr. La denominación que se otorga en días solo ofrece una representación calendárica de los factores y se debe mirar como una designación transitoria que explica esa particularidad.

4. Metodología y objetos de estudio

Para dar certeza del uso del codo real y codo geográfico en la antigüedad, así como a lo principios antes mencionados, proponemos un análisis metrológico de las dimensiones de las bases rectangulares de dos templos icónicos. El primero es el Partenón de Atenas construido entre los años 447-438 a.C., y el segundo el Templo de las Caritas ubicado en el sitio arqueológico de Cempoala, Veracruz, México, edificado al iniciar la era cristiana. Partimos del supuesto que el codo real fue apropiado por los griegos durante su dominio sobre los egipcios siendo utilizado en la mayoría de sus construcciones, principalmente El Partenón, El Telesterión y otros. En lo que se refiere a la utilidad del codo geográfico en la construcción del Templo de las Caritas, como se aprecia más adelante, no contamos con una explicación congruente al respecto puesto que la difusión intercontinental de conocimientos entre culturas antiguas ha sido un tema controvertido en las investigaciones arqueológicas, que han fincado sus puntos de vista en el reconocimiento de patrones culturales que se proclaman paralelismos constituyentes de formas comunes en los continentes europeo y americano. Esta postura es alejada del punto de vista metrológico de las dimensiones de los templos construidos en ambos continentes, ya que este último no se ha distinguido como un “patrón cultural” de estudio.

Planteamos como hipótesis asumir que la determinación de las longitudes de los rectángulos de los templos era una actividad deliberada previa a su construcción o diseño. La metodología involucra realizar testeos de las dimensiones de las bases rectangulares en un intento por controlar sus magnitudes de longitud y área con las cuatro características establecidas. El problema que se advierte con este procedimiento es confrontar las dimensiones de los rectángulos, medidas actualmente con aproximación a centímetros, puesto que su determinación en milímetros favorece los resultados que arroja el testeo. Los errores se deben a su deterioro y restauración, así como la falta de precisión en las mediciones.

Para la comprobación de las hipótesis no consideramos prudente el uso de herramientas estadísticas. Creemos que la reproducibilidad y replicación de las operaciones en cada caso, así como la precisión de los resultados y comparación de magnitudes entre los templos, es suficiente para su verificación y validación.

5. Análisis de templos antiguos

5.1. *Partenón de Atenas*

Fue construido por orden del gobernador de Atenas Pericles entre los años 447 a. C. y 438 a. C., en la parte alta de la ciudad, habiéndose levantado unos cien años después de la edificación del segundo Templo de Salomón durante el gobierno en Jerusalén de Zorobabel. El proyecto y su edificación fue encomendada a los arquitectos griegos Ictino, Calícrates y Fidias. Se levantó sobre tres gradas y fue recubierto de mármol blanco; cuenta dimensiones de 69.54 m de largo por 30.89 m de ancho y columnas que alcanzan los 10.4 m de altura, según se afirma en la página Web https://es.wikiarquitectura.com/edificio/partenon/.

El interior del edificio estaba formado por dos pórticos, uno anterior y otro posterior, y dos cámaras que no se comunicaban entre si, las cuales permanecían cerradas tras dos puertas de bronce, conocidas como la Naos y el Partenón o Cámara de las Vestales, Figura 4. Dentro de esta última se resguardaba la estatua de la diosa Atenea Parthenos, protectora de la ciudad, tenía 12 metros de altura y fue elaborada en marfil y oro.

La traslación de las longitudes de la base del edificio l = 69.54 m de largo por a = 30.89 m de ancho, a codos reales de 0.524836841 m, da por resultado:

$$l = 132.4983206 \text{ cr por } a = 58.85638657 \text{ cr}$$

Iremos enseguida del reconocimiento de las características de área $A = l \times a$ y la proporción de la suma y diferencia de longitudes $\frac{l+a}{l-a} = k$, al resto de las características. Las mencionadas resultan:

$$A = l \times a = 7,798.37 \approx 7,800 \text{ cr}^2, \frac{l+a}{l-a} = 2.6 = \frac{780}{300} \text{ cr}$$

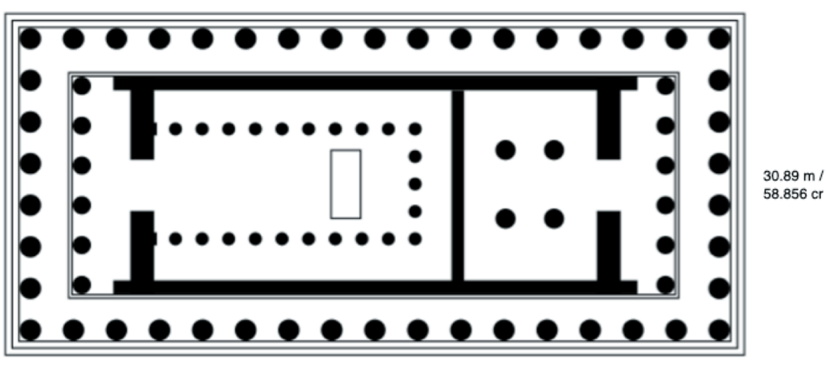

Figura 4. Planta del Partenón. Sostenido en su perímetro por 48 columnas

El área de la base del templo corresponde a 10 ciclos sinódicos de 780 días del planeta Marte, mientras que la proporción de la suma y diferencia determina la división de un ciclo del mismo planeta dividido por 300. Se aprecia en estas últimas errores poco considerables que devienen al levantamiento de las longitudes sobre la base del edificio. De aquí se sigue determinar la proporción entre las longitudes *l* y *a*. Esta resulta de las siguientes operaciones:

$$\frac{l}{a} = \frac{2.6+1}{2.6-1} = \frac{3.6}{1.6} = \frac{9}{4} \text{ cr}$$

La determinación de las longitudes se logra despejando cualquiera de estas de las expresiones del área y la proporción, es decir: $l = \frac{9}{4} \times a$, $l = \frac{A=7{,}800}{a}$. De aquí que el lado *a* se obtiene de la operación:

$$a^2 = \frac{7{,}800\times 4}{9} \rightarrow a = \sqrt{3{,}466.666} = 58.878405 \text{ cr}$$

De modo que *l* queda como:

$$l = \frac{9}{4} \times a \rightarrow l = \frac{9}{4} \times 58.878405 = 132.476413 \text{ cr.}$$

En metros las longitudes resultan *a* = 30.90 y *l* = 69.53. Las diferencias fincan un error de 1 cm en cada longitud, respecto a las suministradas en la página Web, que se puede considerar tolerable.

Observe, además, que el área 7,800 cr^2 de la base del Partenón resulta 6.5 veces mayor que el área 1,200 cr^2 de la base del Templo de Salomón, es decir $\frac{7{,}800}{1{,}200} = 6.5$ cr^2. No obstante la proporción también se puede disponer como el cociente de un ciclo sinódico de 585 días del planeta Venus dividido por 90, esto es $\frac{7{,}800}{1{,}200} = \frac{585}{90} = 6.5$.

5.2. *Templo de las Caritas*

El Templo de las Caritas se ubica en el sitio arqueológico de Cempoala, en el estado de Veracruz, México. Es conocido desde la época de la conquista española debido a que fue paso obligado de Hernán Cortés y su ejercito al incursionar al México prehispánico por la zona del Golfo de México. En diferentes épocas se hicieron exploraciones y excavaciones en el sitio que culminaron en 1945 con una medición detallada de varias estructuras. Es un templo pequeño de base rectangular el cual cuenta un altar en la plataforma superior, cuya única escalera es alineada al oriente.

El templo fue originalmente diseñado y construido usando codos geográficos de 0.4619836247 m. La afirmación del uso de este tipo de unidades se debe a que la traslación de sus longitudes a ese dominio determina en sus magnitudes de área y volumen números calendáricos como los mostrados en los análisis realizados a los templos antes referidos. Durante las etapas de exploración el arquitecto mexicano José García Payón realizó la medición del templo, utilizando una cinta métrica de aproximación a milímetros. Midió tanto la planta de la base del monumento como sus cuatro caras frontales. Dispuso la base y los perfiles en un plano elaborado a escala 1 cm: 75 cm, Figura 5. Las longitudes que se reportan en la planta son 14.5 m de largo, *l*, por 10.2 m de ancho, *a*, y en los perfiles la altura, *h,* es dispuesta en 5.2 m. La traslación de estas últimas a cg resultan l = 31.38639386 cg, por a = 22.07870464 cg y h = 11.25581021 cg.

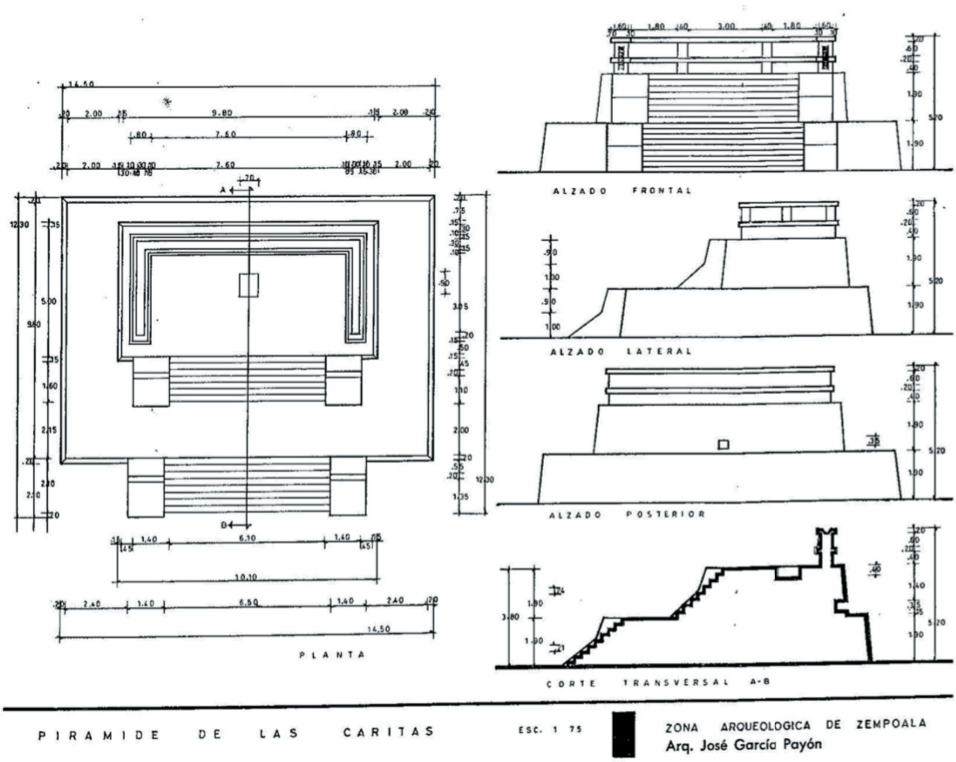

Figura 5. Planta y perfiles del Templo de las Caritas elaborado por el Arquitecto José García Payón.
Fuente: Melgarejo (1966, p. 10)

Para el establecimiento de las características del templo determinaremos primero sus magnitudes de área *A* y volumen *V.* La primera corresponde al rectángulo base $A = l \times a$ y el segundo al paralelepípedo formado por las tres longitudes $V = l \times a \times h$, de manera semejante a la "caja" que representa al Templo de Salomón. Este último es dado por el producto de las tres longitudes, es decir:

$V = 31.38639386 \times 22.07870464 \times 11.25581021 = 7,799.95 \approx 7,800$ cg^3

El resultado 7,800 cr^3 establece 10 ciclos sinódicos de 780 días del planeta Marte. El error $7,800 - 1799.95 = 0.05$ cr^3 no es significativo y suponemos se debe a posibles errores milimétricos en la medición de las longitudes de la base rectangular del templo, toda vez que sus longitudes son mayores que aquella de la altura. Luego el área se obtiene de dividir el volumen $V = 7,800$ cg^3 por la altura $h = 11.25581021$ cg, quedando:

$$A = \frac{7,800}{11.25581021} = 692.9754371 \text{ cg}^2$$

El área $A = 692.9754371$ cg^2, así obtenida, posee la particularidad de expresarse como el cociente de diferentes números calendáricos incluyendo $\sqrt{2}$, es decir:

$$A = \frac{780 \times 384 \times 864 \times \sqrt{2}}{3,125 \times 169} = 692.9754371 \text{ cg}^2$$

En el numerador se reitera el ciclo sinódico de 780 días del planeta Marte multiplicado por el año lunar de 384 días, 864 y $\sqrt{2}$; el resto de las cifras, 3,125 y 169, son múltiplos de números calendáricos.

De modo que las siguientes características vienen a ser:

$\frac{l+a}{l-a} = \frac{247}{43}$ cg y $\frac{l}{a} = \frac{145}{102}$.

Y puesto que $l = \frac{145}{102} \times a$ y $l = \frac{A}{a}$, resulta que a y l se describen de la siguiente manera:

$$a = \sqrt{\frac{780 \times 384 \times 864 \times \sqrt{2} \times 145}{3,125 \times 169 \times 102}} = 22.07877661 \text{ cg}$$

$$l = \sqrt{\frac{780 \times 384 \times 864 \times \sqrt{2} \times 102}{3,125 \times 169 \times 145}} = 31.38649616 \text{ cg}$$

Observe que en el área de la base rectangular del templo $A = \frac{780 \times 384 \times 864 \times \sqrt{2}}{3,125 \times 169}$ cg^2, en lo inmediato, no se aprecia correspondencia con las áreas de las bases rectangulares del Templo de Salomón y El Partenón, vistos anteriormente. Para verificar esto último será necesario que las áreas de las bases de los tres templos hubieran sido calculadas partiendo de una misma unidad de medida.

6. Hallazgos

Hemos presentado un sistema de medición cuyas unidades utilizadas en las operaciones de diseño, trazo y construcción de templos antiguos eran el codo real y codo geográfico, de los que resultan hallazgos importantes que enseguida se consignan. Ambas unidades destacan en los procesos de cálculo de áreas y volúmenes números calendáricos. Ello significa que las dimensiones del Templo de Salomón y El Partenón son factibles de ser dispuestos en codos geográficos de 0.4619836247 m y, en ese orden, distinguir en sus dimensiones esa numerología. Hagamos ese ejercicio con el Templo de Salomón en la búsqueda de establecer la correspondencia entre el área de la base de este último con aquella del Templo de las Caritas.

1. Las longitudes de la base del templo corresponden a $l = 60$ cr por $a = 20$ cr. Si estas se multiplican por el valor de un codo real de 0.524836841 m, resultan en metros como: l = 31.49021046 m y a = 10.49673682 m. Enseguida dividamos ambas longitudes por un codo geográfico de 0.4619836247 m, quedando en la forma l = 68.1630447 cg por a = 22.721949 cg. El área en este último dominio resulta del producto:

$$A = 68.1630447 \times 22.721949 = 1,548.735879 \text{ cg}^2$$

No obstante, esta se acomoda al siguiente producto acumulado de factores, es decir:

$$A = 1,548.735879 = 780 \times 585 \times \sqrt{2} \times \frac{384}{160,000} \text{ cg}^2$$

Los factores representan al ciclo sinódico de 780 días del planeta Marte, al ciclo de 585 días del planeta Venus, al año lunar de 384 días, $\sqrt{2}$ y la cifra en números enteros 160,000 que aparece en el residuo como $\frac{384}{160,000}$. Si el área se compara con aquella del Templo de las Caritas en la forma, $\frac{1,548.735879}{692.9754371}$ cg^2, el resultado de la proporción queda como 2.234903971 cg^2. Si en la operación se utilizan números calendáricos, se obtiene:

$$2.234903971 = \frac{365.625 \times 169}{384 \times 72} \text{ cg}^2$$

El cociente manifiesta en el numerador 169 años solares de 365.625 días divididos por 72 años lunares de 384 días, es decir, la correspondencia entre las áreas de los dos templos solo se distingue y toma significado en el dominio calendárico. Esto último manifiesta, además, una completa correspondencia entre el codo real y codo geográfico.

Algo semejante ocurre al trasladar el área 7,800 cr^2 de la base rectangular del Partenón a codos geográficos, este resulta de 10,066.7681 cg^2 (2,148.539 m^2), la cual se representa como el siguiente producto acumulado de factores:

$$10,066.7681 = 780 \times 585 \times \sqrt{2} \times \frac{780}{500,000} \text{ cg}^2$$

2. En su origen mítico las dimensiones de área y volumen de los templos estaban determinadas por el Sistema Sexagesimal. Observe que aquellas de La Casa de Yahv de 1,200 cr^2 y 36,000 cr^3, respectivamente, se describen en ese sistema de la siguiente manera:

1,200 cr^2 = 20×60 = (20. 0); **36,000** cr^3 = $10\times60^2+0\times60^1+0\times60^0$ = (10. 0. 0)

Los números en el producto que determina el área, 60 y 20, coinciden con las longitudes larga y corta de la base rectangular del templo citados en la Biblia.

Lo mismo ocurre con el área 7,800 cr^2 de la base rectangular del Partenón, es decir:

$$7,800 = 2\times60^2+10\times60^1+0\times60^0 = (2.\ 10.\ 0)$$

La expresión es válida también para el volumen 7,800 cg^3 del Templo de las Caritas.

3. Por su naturaleza, el codo geográfico de 0.4619836247 m tuvo un origen que involucra números calendáricos como los puestos en evidencia a lo largo del escrito. El cociente que se muestra enseguida da cuenta de esto último:

$$0.4619836247 \ldots m = \frac{780\times384\times864}{7,500\times625\times169} \times \sqrt{2} \text{ m}$$

Los productos involucrados en las operaciones devienen al sistema sexagesimal, puesto que:

$$0.4619836247 \ldots m = \frac{(19.\ 58.\ 4.\ 48.\ 0)}{(1.\ 1.\ 7.\ 32.\ 4.\ 1.\ 0)} \times \sqrt{2}$$

Este último se reduce a la expresión:

$$0.4619836247\ldots = 0.104\times\sqrt{2} \times\pi_1$$

Siendo π_1 el número racional:

$\pi_{1}=\frac{384\times864}{625\times169}=3.141074556\ldots$, y $0.104=\frac{780}{7{,}500}$.

4. La cifra 3.141074556… posee las mismas características operativas del pi griego (π), hace una diferencia con este de 0.00051809759. Por lo general se manifiesta en las áreas de monumentos de bases circulares a las que hereda la acumulación de números calendáricos. No obstante, aparece también en las áreas de bases rectangulares de los templos. Por ejemplo el área 692.9754371 cg^2 de la base del Templo de las Caritas se acomoda, incluyendo π_1, de la siguiente manera:

$$692.9754371=156\times\sqrt{2}\times\pi_1\ cg^2$$

Observe que la cifra 156 divide al ciclo sinódico de 780 días del planeta Marte. Además, el área de la base rectangular del templo, es la misma que la del círculo $A=\pi_{1}\times r^2$, de radio $r=\sqrt{156\times\sqrt{2}}$ cg.

5. Por su lado, el codo real y codo geográfico son en proporción del ciclo sinódico del planeta Marte de 780 días, de la siguiente manera:

$$\frac{780}{1{,}000\times\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{3}}}=\frac{0.524836841}{0.4619836247}\ \text{m}$$

En este caso la expresión $1{,}000\times\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{3}}$ corresponde al número 686.58904. Este último es semejante al período sideral del planeta Marte de 686.9785 días determinado por Newton y dispuesto en los Principia (Newton, 1726: 446). En consecuencia, la proporción entre las revoluciones del planeta es la misma que aquella que determinan ambas unidades de medida.

7. Discusión

Se han caracterizado las dimensiones de la extensión de los templos con diferentes herramientas de la matemática actual sin que ello signifique que los constructores en su origen conocieran de estas, incluyendo además de las operaciones elementales, números racionales e irracionales, así como aquellos comprendidos en el sistema sexagesimal. En este sentido la historia de la ciencia es limitada y ofrece pocas posibilidades en las explicaciones subyacentes. Por extraña que se vea la modelización aritmética de la actividades que destacan de la practica se ajustan sin reclamos a los argumentos exhibidos.

Expertos afirman que el codo real variaba en longitud en cada región de Mesopotamia y Egipto y en todos los casos se asumen las extremidades del cuerpo humano como aquellas que organizaban esa longitud. Sin embargo, el Museo de Turín así como el Museo de Louvre en París, resguardan reglas metálicas graduadas que se dicen codos reales utilizados como normas para la medición, Figura 3. Este punto de vista es cercano a la homogeneidad que se encuentra en las magnitudes de los templos analizados, de las cuales se infiere que las longitudes del codo real y codo geográfico eran medidas estandarizadas para su uso.

8. Conclusiones

En la producción de la práctica hemos encontrado una buena cantidad de conceptos principalmente aquellos de proporción, áreas y volúmenes que involucran productos acumulados de factores de naturaleza calendárica, sistemas numéricos y sistemas de medición, estos últimos desconocidos, así como técnicas, también desconocidas, para el establecimiento estructural de las bases rectangulares de los templos. Dichos principios configuran la actividad de la práctica y se encuentran en descentración de los objetos matemáticos que se llevan al salón de clases. Creemos que la práctica social enriquece la comprensión de los conceptos matemáticos involucrados y que una organización adecuada de la misma puede llevar a la producción de algunos de éstos.

En cuanto al planteamiento del método sosioepistemológico, lo hemos desplegado de acuerdo a las tres componentes de investigación en la SE, social, histórica y cultural (Cantoral, et al. 2015, pp. 8-9) y ha sido útil en la organización de las actividades de investigación. Se puede observar que estas son articuladas con el discurso.

Alrededor de la pregunta ¿Qué hace que las dimensiones de área y volumen de un templo construido cerca de 1,000 años a.C., en Israel, sean proporcionales con otro levantado en la costa del Golfo de México próximo al año cero de la era cristiana? esta es difícil de responder si no se acepta la amplia heterogeneidad sociocultural implicada en la construcción de ambos templos. En este sentido, al menos las culturas del Golfo de México no fueron ajenas de procesos de difusión independientes, puesto que, como afirma Esteva-Fabregat (1971), “no se conoce ninguna civilización que haya surgido espontáneamente o sin haber estado en contacto con otras culturas". Este es un tema que seguirá siendo controversial en los debates entre especialistas. No obstante, las proporciones metrológicas y calendáricas entre las dimensiones de los templos que se han puesto en evidencia se convierten, entre otros, en elementos culturales que acentúan la posibilidad de ser interpretados como resultado de procesos de difusión, independientemente de la distancia que separa estas culturas.

9. Epílogo

En octubre de 2006 fue encontrado cerca del Templo Mayor, Centro Histórico de la Ciudad de México, en cuatro grandes trozos, el monumento monolítico de forma rectangular que contiene la imagen de la diosa azteca Tlaltecuhtli, elaborado cerca los años 1,250-1,519 d.C., con la finalidad de ser colocado en la base de las escalinatas del templo principal de la villa de Tenochtitlán. Después de un año de trabajos de restauración el bloque fue unido tal y como se encontraba originalmente y especialistas midieron sus longitudes obteniendo 4.17 metros de altura por 3.62 en su base, con un peso de 12 toneladas. El arqueólogo mexicano Leonardo López-Luján afirma que las longitudes mencionadas corresponden a h =15 pies mexicas (pm) de altura por a =13 pm de la base (López-Luján, 2010, p. 53). Sin perjuicio del reconocimiento del sistema de medición utilizado por la cultura azteca, es sencillo corroborar que las dimensiones del bloque se sujetan a las cuatro características referidas de los templos anteriormente analizados. El área resulta múltiplo del ciclo sinódico de 780 días del planeta Marte, es decir (las negrillas son nuestras):

$$A = 15\times 13 = 195 = \frac{780}{4}\ \mathrm{pm}^2$$

La característica de la proporción entre la suma y diferencia de las longitudes $\frac{h+a}{h-a} = 14$ se obtiene del cociente del ciclo sinódico de 378 días del planeta Saturno dividido 27, o sea:

$$\frac{h+a}{h-a} = 14 = \frac{378}{27}\ \mathrm{pm}$$

Mientras que la proporción entre las longitudes corresponde a:

$$\text{a: } \frac{h}{a} = \frac{14+1}{14-1} = \frac{15}{13} = \frac{780}{676}\ \mathrm{pm}.$$

Se observa que el rectángulo de piedra que comprende la extensión de la diosa guarda la estructura fincada por las cuatro características. Además, la definición de estas últimas desde un sistema de medición diferente a los analizados en el escrito, muestra el interés no por el sistema sino por el dominio calendárico al que se transfieren las magnitudes.

La reproducción de la práctica ocurrió cerca de 2,500 años después de la construcción del primer Templo de Salomón y 1,500 respecto al levantamiento del Templo de las Caritas. El principio genitivo contiene tal estructura que la potencia del mito arquetipo-cosmos en la memoria colectiva de la cultura mexica, garantizó la aceptación de la práctica y su persistencia a través del tiempo. ¿Quién heredó esa metrología a los aztecas? Es sencillo contestar: la creencia en mitos compartidos por diferentes culturas. Según lo expresa Eliade (1977, p. 154):

> (…) esta *construcción* se funda en última instancia en una revelación primordial que, *in illo tempore*,[8] reveló al hombre el arquetipo del espacio sagrado, arquetipo que luego se repitió y copió hasta el infinito en la erección de cada nuevo altar, templo, santuario, etc.

Referencias bibliográficas

Bernal, G. (2015). El ciclo de 819 días y otros ritos cuatripartitas y direccionales del período clásico Maya, en *El tiempo de los dioses-tiempo. Concepciones de Mesoamérica*, ed. Mercedes de la Garza, México: Universidad Nacional Autónoma de México, 51-90.

Bourdieu, P. (2009). El sentido práctico. México: Siglo XXI.

Cantoral, R., Montiel, G., y Reyes-Gasperini, D. (2015). El programa socioepistemológico de investigación en Matemática Educativa: el caso de Latinoamérica. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, *18*(1), 5-17 https://dx.doi.org/10.12802/relime.13.1810

Diccionario Enciclopédico de Biblia y Teología. En https://www.biblia.work/diccionarios/codo/ Consultado el 13 de junio de 2020.

Eliade, M.

(1977). Tratado de Historia de las Religiones, Trad. de A. Medinaveitia, Ed. Cristiandad, (Paris, 1964), Madrid, Vol. II, p. 151.

(2001). El mito del eterno retorno. Arquetipos y repetición. Buenos Aires: Emecé, Editores.

Esteva-Fabregat, C. (1972). El circunmediterráneo y sus relaciones con la América prehispánica. *Anuario de Estudios Atlánticos,* núm. 17, 151-197.

López-Luján, L. (2010). Tlaltecuhtli. México: Fundación Conmemoraciones.

Melgarejo, J. L. (1966). Los calendarios de Zempoala. Cuadernos del Instituto de Antropología, Universidad Veracruzana, Xalapa, México.

Morrison, T. (2001). Isaac Newton´s of Salomon and Reconstruction of Sacred Architecture. DOI 10.1007/978-3-0348-0046-4 6, Springer Basel AG

Newton, I.
(1728). The Chronology of Ancient Kingdoms Amended. London: Towson, Osborne and Longman, editors. Disponible en: https://www.e-rara.ch/zut/content/pageview/11420118. Acceso 13 de junio de 2020.
(1729). Mathematical Principles of Natural Philosophy. De la traducción al inglés de B. Cohen y A. Whitman, hecha al facsímil de la edición en latín de 1729.
(1737). A Dissertation upon the Sacred Cubit of the Jews and the Cubits of the several Nations. En: John Greaves, Miscellaneous Works of Mr. John Greaves, Professor of Astronomy in the University of Oxford, vol. 2 London, pp. 405-433. Disponible en: http://www.newtonproject.ox.ac.uk/view/texts/normalized/THEM00276. Acceso: 24 de Junio de 2020.
Petrie, F. (1890). The pyramids and temples of Gizeh. The first edition work was published with the assistance of a vote of one hundred pounds from the Government-Grant Committee of the royal Society.
Roitman, A. (2016). Del Tabernáculo al templo. Sobre el espacio sagrado en el judaísmo antiguo. Editorial Verbo Divino.
Stecchini, L. (sf). A History of Measures. Disponible en: https://www.metrum.org. Acceso: 20 Junio de 2020.

Autor

Alberto Camacho Ríos. Tecnológico de Chihuahua II. México. alberto.cr@chihuahua2.tecnm.mx

La Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (*Relime*) es la publicación oficial de investigación del Comité Latinoamericano de Matemática Educativa (Clame AC). Se edita tres veces por año. Acepta artículos en español, portugués, inglés y francés. Está dirigida a investigadores en Matemática Educativa, a profesores de matemáticas y ciencias, y estudiantes de licenciatura y posgrado interesados en conocer los resultados recientes de las investigaciones y en profundizar en el conocimiento de un tema en particular.

Objetivos:

1. *Relime* pretende ser un foro abierto a las diversas escuelas del pensamiento (paradigmas, teorías, metodologías, métodos, enfoques) en nuestra disciplina, la Matemática Educativa, sin definir perspectivas únicas y con un profundo respeto a las tradiciones educativas y los contextos de los diversos sistemas educativos de nuestra región.
2. Dar a conocer resultados de investigación original en Matemática Educativa que se realizan en América Latina y el Caribe y en el resto del mundo.
3. Contribuir al proceso de profesionalización de la Matemática Educativa en nuestra región.
4. Fomentar una cultura de divulgación e investigación entre los distintos grupos de investigación en nuestra región.
5. Propiciar el debate y la reflexión profunda sobre problemas de investigación que fortalezca la disciplina en nuestra área geográfica.
6. Fortalecer la calidad de la investigación en Matemática Educativa y la vinculación entre comunidades nacionales e internacionales.

INSTRUCCIONES TÉCNICAS PARA AUTORES

Las contribuciones

Toda contribución propuesta a Relime se somete a un estricto proceso de arbitraje. Las contribuciones deberán ser resultado de investigaciones teóricas o experimentales, estudios de caso, etnográficos, etc., en formato de artículo. Estas contribuciones deberán ser trabajos inéditos de investigación, no estar en arbitraje en otra revista ni tratarse de traducciones previamente publicadas en su lengua original.

Características de los manuscritos

Relime publica artículos en castellano, portugués, inglés y francés. Acepta ensayos teóricos originales así como propuestas que sean resultado de estudios experimentales, de casos, de observación, etnográficos, etc.

Los artículos deberán tener un máximo de nueve mil palabras, incluyendo referencias, figuras, cuadros y anexos. En caso de que su propuesta exceda esta extensión, el Comité de Redacción decide si considera la posibilidad de publicarlo siempre que tal propuesta no ocupe todo el espacio disponible en un número de la revista.

En el caso de reportes de estudios experimentales, de casos, de observación, etnográficos, etcétera, recomendamos que los escritos contengan:

1) Resumen del trabajo, deberá tener un máximo de 10 renglones escrito en español, portugués, inglés y francés y de 5 palabras clave en las cuatro lenguas. Resumen, título y palabras clave deben ser escritos en los cuatro idiomas.
2) Una exposición del problema de investigación (su pertinencia y relevancia en el tema que se aborda).
3) Indicaciones globales acerca de la estructura teórica del reporte.
4) Justificación de la metodología usada.
5) Desarrollo de algunos ejemplos y análisis de resultados.
6) Referencias bibliográficas.

Si se trata de ensayos teóricos y filosóficos, nuestra recomendación es la siguiente:

1) Iniciar con una exposición del problema de investigación (su pertinencia y relevancia en el tema que se aborda).
2) Revisión de la literatura que incluya trabajos importantes que sustenten la investigación, en el que se refleje una variedad de resultados actuales. Esta revisión debe incluir investigaciones internacionales pertinentes y no limitarse a estudios de un solo país.
3) Ofrecer indicaciones sobre la estructura teórica o filosófica en la cual se desarrolla el tema del artículo.
4) Exposición detallada de la posición del autor dentro del tema o los temas de exposición. Esto debe reflejarse a través del desarrollo de ideas, más que de una lista de reflexiones.

5) Implicaciones o consecuencias de la investigación en el área.
6) Referencias bibliográficas.

Proceso de evaluación en relime

Los artículos propuestos a Relime serán leídos por dos miembros del Comité de Redacción, y si el contenido atiende a la originalidad y satisface los criterios anteriores, así como a la claridad de la presentación e interés para la comunidad de matemática educativa, serán evaluados en forma “ciega” por dos investigadores reconocidos y con experiencia dentro del área. En el proceso de evaluación se garantizará el anonimato de autores y evaluadores.

El resultado del dictamen puede ser:

A. Sugerencia de publicar el artículo sin modificaciones.
B. Sugerencia de publicar el artículo bajo reserva de hacer ligeras modificaciones.
C. Sugerencia de reestructurar el artículo atendiendo a los comentarios, lo que precisaría una nueva revisión.
D. Sugerencia de rechazo del artículo.

Formato de las contribuciones

Todas las contribuciones deberán estar escritas en procesador de texto Word 6.0 o superior, tipo de letra Times New Roman, tamaño 11 y utilizar un espacio anterior y posterior de 4 pt, lo que significa que no se requiere dar espacio entre un párrafo y otro. Los cuatro márgenes de la página deberán ser de 2.5 cm. Para las expresiones matemáticas debe usarse el editor de ecuaciones.

Encabezados principales

El estilo de letra para los encabezados principales es tipo VERSALES en formato minúsculas, utilizando un espacio anterior de 36pt y el posterior de 12pt, lo que significa que no se requiere dar espacio entre un encabezado y los párrafos subsecuentes. Enumerar las secciones de los encabezados principales (usando 1, 2, 3, etc.) y utilizar el estilo de alineación centrada.

Subtítulos

El estilo de letra para los subtítulos del artículo es tipo Times New Roman, tamaño 11 y cursiva. La primera letra debe escribirse con mayúsculas. Utilizar un espacio anterior de 24 pt y el posterior de 10 pt, lo que significa que no se requiere dar espacio entre un subtítulo y los párrafos subsecuentes. Los subtítulos deberán enumerarse 1.1., 1.2, 1.3, etc., según corresponda en estilo tipo Normal. Los subtítulos posteriores a un encabezado principal deben tener un espacio anterior y posterior de 6 pts.

Estilo para las tablas

Las tablas deben tener una alineación centrada. El estilo de letra del texto en el interior de la tabla debe ser tipo Times New Roman, Normal, tamaño 10 y con un espacio anterior y posterior de 2 pto. Enumerar las tablas, usando tipo de letra VERSALES tamaño 10, en formato minúscula: TABLA I, TABLA II, TABLA III, etc., utilizando un espacio anterior de 6 pto y posterior de 0 pto. El número de la tabla debe escribirse en la parte superior y su título debajo, utilizando un estilo de alineación centrada y tipo de letra normal tamaño 10.

Estilo para las figuras e imágenes

Las figuras e imágenes deben tener una alineación centrada. El estilo de letra debe ser tipo Times New Roman, tamaño 10 y tipo Cursiva y Normal. Escribir el número de la figura o imagen en formato tipo cursiva y el título en formato tipo normal. Utilizar un espacio anterior de 2 pt y el posterior de 4 pt. Las imágenes y figuras deberán adjuntarse en un archivo independiente al manuscrito en formato de alta resolución.

Transcripciones

Para las transcripciones usar el estilo de letra normal, tipo Times New Roman tamaño 10. Utilizar un interlineado sencillo.

Usar estilos de transcripción como los siguientes:

Estudiante: Para graficar utilicé uno de los métodos que vimos en clase. Me pareció que era el más simple para resolverlo
Profesor: ¿Por qué consideras que ese método es más simple?

Si las líneas de la transcripción requieren ser numerados, entonces usar el estilo de transcripción enumerada como sigue:

[122] Entrevistador: En la primera actividad se te propuso determinar la función velocidad ¿Podrías explicar cómo la hallaste?
[123] Alumno: Hum... pues...

En el caso de que no se requiera hacer referencia a los números, se sugiere usar el primer estilo de transcripción (indicada párrafos arriba).

Reconocimientos

Los reconocimientos a personas, fondos, asociaciones, etc. deberán colocarse en una sección separada antes de las referencias bibliográficas. Los nombres de organizaciones financieras deberán escribirse completos.

Bibliografía, referencias y notas

Solicitamos emplear el estilo de la APA (Publication Manual of the American Psychological Association, 6th ed., 2009) para las citas de pie, notas, referencias textuales y bibliografía. (Pueden apoyarse en el siguiente link: http://www.apastyle.org/learn/tutorials/basics-tutorial.aspx; o bien, consultar el Manual).

La bibliografía deberá escribirse en forma de lista sin enumerar y en orden cronológico. El estilo de letra debe ser Times New Roman 9. Para escribir una referencia debe usarse alineación justificada para el primer renglón. A partir del segundo renglón deberán establecer una sangría especial de 0.63 cm.

Las notas deberán escribirse al final de cada página del documento. El estilo de letra que deberá usarse es Times New Roman 9 en formato normal.

Información complementaria

1) No se devolverán los artículos originales.
2) El editor se reserva el derecho de hacer algunas modificaciones necesarias para mantener el estilo de la publicación.
3) Los textos pueden ser publicados en otro órgano editorial previo permiso expreso, por escrito, y haciendo referencia explícita de la fuente.
4) Los autores recibirán gratuitamente dos ejemplares del número en que se haya publicado su artículo.
5) No se realizarán pagos a los autores por los artículos que se publiquen en *RELIME*. Para mayores informes, puede visitar la página web: http://www.clame.org.mx/relime.htm o bien el correo electrónico:

relime@clame.org.mx

En este último número del vigésimo cuarto volumen de la *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *Relime*, agradecemos la colaboración de aquellos colegas que aportaron su conocimiento y tiempo en la revisión y arbitraje de los manuscritos propuestos a la revista. A través de sus comentarios críticos nuestros revisores contribuyen no solamente a mantener la calidad de los manuscritos publicados sino al desarrollo de nuestra disciplina en un ambiente de pluralidad a fin de fortalecer la escuela latinoamericana.

EVALUADOR / A	INSTITUCIÓN, PAÍS
Alberto Camacho	Tecnológico Nacional de México, México
Ana María Ojeda	Cinvestav-IPN, México
Antonio Estepa Castro	Universidad de Jaén, España
Asuman Oktac	Cinvestav-IPN, México
Bertha Ivonne Sánchez Luján	Instituto Tecnológico Nacional de México, México
Blanca Ruiz Henrandez	ITESM- Campus Monterrey, México
Cecilia Crespo Crespo	Instituto Nacional Superior del Profesorado Técnico - UTN, Argentina
Claudia Acuña	Cinvestav-IPN, México
Crisólogo Dolores	Universidad Autónoma de Guerrero, México
Cristian Paredes Cancino	Cinvestav-IPN, México
Cristina Ochoviet	Consejo de Formación en Educación, Uruguay.
Daniela Soto	Universidad de Santiago de Chile, Chile
David Gómez	Universidad O´Higgins, Chile
David Zaldívar	Universidad Autónoma de Coahuila, México
Diana Medina Lara	UNITRÓPICO, Colombia
Diana Torres	Cinvestav-IPN, México
Domingo Yojcom	Universidad de San Carlos, Guatemala
Edgar Guacaneme	Universidad del Valle, Colombia
Eduardo Carrasco	Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación, Chile
Evelia Reséndiz	Universidad Autónoma de Tamaulipas, México
Flor Rodríguez	Universidad Autónoma de Guerrero, México
Francisco Cordero	Cinvestav-IPN, México
Gabriela Buendía Ábalos	Red de Centros de Investigación en Matemática Educativa AC, México.
Gabriela De la Cruz Flores	IISUE-UNAM, México
Gloria Sánchez Matamoros	Universidad de Sevilla, España

M. ACEVEDO, M. FALK / Formación del pensamiento algebraico de los docentes. R. CANTORAL, H. MIRÓN / Sobre el estatus de la noción de derivada: De la epistemología de Joseph Louis Lagrange al diseño de una situación didáctica. A. CAÑADA / Una perspectiva histórica de las series de Fourier: de las ecuaciones de onda y del calor a los operadores compactos y autoadjuntos. B. D'AMORE / Escolarización del saber y de las relaciones: efectos sobre el aprendizaje de las matemáticas. P. FLORES, C. BATANERO, J. D. GODINO / Aplicación del análisis de textos mediante técnicas multivariantes al estudio del cambio de concepciones sobre las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje. G. GARCÍA, C. SERRANO / Variables institucionales en el conocimiento profesional del docente: El caso de la función.

VOLUMEN 4, 2001

O. L. LEÓN, D. I. CALDERÓN / Validación y argumentación de lo matemático en el aula. R. A. OLFOS / Entendiendo la clase de matemática. G. T. BAGNI / La introducción de la historia de las matemáticas en la enseñanza de los números complejos. Una investigación experimental en la educación media superior. R. ZAZKIS / Múltiplos, divisores y factores: explorando la red de conexiones de los estudiantes.

F. CORDERO / La distinción entre construcciones del cálculo. Una epistemología a través de la actividad humana. J. GASCÓN / Incidencia del modelo epistemológico de las matemáticas sobre las prácticas docentes. J. LEZAMA, R. M. FARFÁN / Introducción al estudio de la reproducibilidad.

C. ACUÑA / Concepciones en graficación, el orden entre las coordenadas de los puntos del plano cartesiano. S. BLÁZQUEZ, T. ORTEGA / Los sistemas de representación en la enseñanza del límite. A. CAMACHO, M. AGUIRRE / Situación didáctica del concepto de límite infinito. M. R. OTERO, M. FANARO, I. ELICHIRIBEHETY / El conocimiento matemático de los estudiantes que ingresan a la universidad.

VOLUMEN 5, 2002

A. CAMACHO / Difusión de conocimientos matemáticos a los colegios mexicanos del siglo XIX. De la noción de cantidad al concepto de límite. A. CASTAÑEDA / Estudio de la evolución didáctica del punto de inflexión: una aproximación socioepistemológica. G. MARTÍNEZ / Explicación sistémica de fenómenos didácticos ligados a las convenciones matemáticas de los exponentes. L. SIÑERIZ / La enseñanza de la resolución de problemas de regla y compás. Del mundo de la pura resolución de problemas a la escuela media argentina: estudio de dos casos.

A. CONTRERAS, M. CONTRERAS, M. GARCÍA / Sobre la geometría sintética y analítica. La elipse y sus construcciones. F. CORDERO, E. MIRANDA / El entendimiento de la transformada de Laplace: una epistemología como base de una descomposición genética. I. ELICHIRIBEHETY, M. R. OTERO, M. A. FANARO / Los modelos mentales que subyacen a la resolución de problemas algebraicos: un estudio transversal. M. M. SOCAS / Las interacciones entre iguales en clase de matemáticas. Consideraciones acerca del principio de complementariedad en educación matemática.

VOLUMEN 8, 2005

C. ACUÑA / ¿Cuántos puntos hay? Concepciones de los estudiantes en tareas de construcción. M. MARCOLINI, J. PERALES / La noción de predicción: Análisis y propuesta didáctica para la educación Universitaria. H. PARRA / Creencias matemáticas y la relación entre actores del contexto. F. PLUVINAGE / Árboles de transiciones etiquetadas en cálculo de probabilidades.

C. CASTELA / A propósito de los conocimientos que no se enseñan explícitamente, empero necesarios para tener éxito en las matemáticas escolares. M. F. DELPRATO / Educación de adultos: ¿saberes matemáticos previos o saberes previos a los matemáticos? L. DÍAZ / Profundizando en los entendimientos estudiantiles de variación. S. GARBIN / ¿Cómo piensan los alumnos entre 16 y 20 años el infinito? La influencia de los modelos, las representaciones y los lenguajes matemáticos. G. MARTÍNEZ / Los procesos de convención matemática como generadores de conocimiento. G. MONTIEL / Interacciones en un escenario en línea. El papel de la socioepistemología en la resignificación del concepto de derivada.

C. BATANERO / Significados de la probabilidad en la educación secundaria. F. CORDERO / El rol de algunas categorías del conocimiento matemático en educación superior. Una socioepistemología de la integral. C. CRESPO, R. M. FARFÁN / Una visión socioepistemológica de las argumentaciones en aula. El caso de las demostraciones por reducción al absurdo. M. FALSETTI, M. RODRÍGUEZ / Interacciones y aprendizaje en matemática preuniversitaria: ¿Qué perciben los alumnos? J. LEZAMA / Una mirada socioepistemológica al fenómeno de la reproducibilidad. M. ROSA, D. CLARK / Las raíces históricas del programa Etnomatemáticas. B. D´AMORE / Oscar Reutersvärd.

VOLUMEN 9, 2006

E. APARICIO, R. CANTORAL / Aspectos discursivos y gestuales asociados a la noción de continuidad puntual. A. BERGÉ / Análisis institucional a propósito de la noción de complejidad del conjunto de los números reales. A. CONTRERAS, L. ORDOÑEZ / Complejidad ontosemiótica de un texto sobre la introducción a la integral definida. L. GARCÍA, C. AZCÁRATE, M. MORENO / Creencias, concepciones y conocimiento profesional de profesores que enseñan cálculo diferencial a estudiantes de ciencias económicas. J. D. GODINO, V. FONT, A. CONTRERAS, M. WILHELMI / Una visión de la didáctica francesa desde el enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática. M. R. OTERO, L. BANKS-LEITE / Modelos mentales y modelos numéricos: un estudio descriptivo en la enseñanza media.

S. BLÁZQUEZ, T. ORTEGA, S. N. GATICA, J. BENEGAS / Una conceptualización de límite para el aprendizaje inicial de análisis matemático en la universidad. A. BRUNO, M. NODA, R. AGUILAR, C. GONZÁLEZ, L. MORENO, V. MUÑOZ / Análisis de un tutorial inteligente sobre conceptos lógico-matemáticos en alumnos con Síndrome de Down. G. BUENDÍA / Una socioepistemología del aspecto periódico de las funciones. A. CASTAÑEDA / Formación de un discurso escolar: el caso del máximo de una función en la obra de L´Hospital y Maria G. Agnesi. O. PEREZ / ¿Cómo diseñar el sistema de evaluación del aprendizaje en la enseñanza de las matemáticas? E. RUIZ, M. E. VALDEMOROS / Vínculo entre el pensamiento proporcional cualitativo y cuantitativo: el caso de Paulina.

RELIME ESPECIAL, 2006

VOLUMEN 10, 2007

R. CANTORAL / ¿Publicar o perecer, o publicar y perecer? A. ALSINA i PASTELLS / ¿Por qué algunos niños tienen dificultades para calcular? Una aproximación desde el estudio de la memoria humana. J. J. DÍAZ, V. BERMEJO / Nivel de abstracción de los problemas aritméticos en alumnos urbanos y rurales. U. MALASPINA / Intuición, rigor y resolución de problemas de optimización. C. R. MURO, P. CAMARENA, R. C. FLORES / Alcances de la Teoría de Vergnaud en la representación de un problema complejo de ingeniería. M. L. RODRÍGUEZ, L. RICARDO / El modelo holístico para el proceso de enseñanza-aprendizaje de geometría en arquitectos de la escuela cubana.

VOLUMEN 11, 2008

R. CANTORAL / ¿Cuál es el papel de una revista científica en la conformación de una comunidad? V. ABOITES, G. ABOITES / Filosofía de la matemática en el nivel medio superior. M. ARAVENA, C. CAAMAÑO, J. GIMÉNEZ / Modelos matemáticos a través de proyectos. C. STENGER, K. WELLER, I. ARNON, E. DUBINSKY, D. VIDAKOVIC / A search for a constructivist approach for understanding the uncountable set $P(N)$. M. E. VALDEMOROS, E. F. RUIZ / El caso de Lucina para el estudio de las fracciones en la escuela de adultos.

R. CANTORAL / El papel de las revistas especializadas en las agendas de investigación en Matemática Educativa. S. CASTILLO / Propuesta pedagógica basada en el constructivismo para el uso óptimo de las TIC en la enseñanza y el aprendizaje de la matemática. A. MATOS, J. P. DA PONTE / O estudo de relações funcionais e o desenvolvimento do conceito de variável em alunos do 8. º ano. A. B. RAMOS, V. FONT / Criterios de idoneidad y valoración de cambios en el proceso de instrucción matemática. G. SÁNCHEZ-MATAMOROS, M. GARCÍA, S. LLINARES / La comprensión de la derivada como objeto de investigación en didáctica de la matemática.

R. CANTORAL / En defensa de "lo nuestro". M. FERRARI, R. M. FARFÁN / Un estudio socioepistemológico de lo logarítmico: La construcción de una red de modelos. J. GALLARDO, J. L. GONZÁLEZ, W. QUISPE / Interpretando la comprensión matemática en escenarios básicos de valoración. Un estudio sobre las interferencias en el uso de los significados de la fracción. G. SCHUBRING / Gauss e a tábua dos logaritmos. C. VALDIVÉ, S. GARBIN / Estudio de los esquemas conceptuales epistemológicos asociados a la evolución histórica de la noción de infinitesimal.

VOLUMEN 12, 2009

R. CANTORAL / Relime en ISI Web: Social Science Citation Index (SSCI). G. BUENDIA, A. ORDOÑEZ / El comportamiento periódico en la relación de una función y sus derivadas: significados a partir de la variación. C. CRESPO, R. M. FARFÁN, J. LEZAMA / Algunas características de las argumentaciones y la matemática en escenarios sin influencia aristotélica. U. T. JANKVIST / On empirical research in the field of using history in Mathematics Education. M. I. ROCHA, H. A. MENINO / Desenvolvimento do sentido do número na multiplicação. Um estudo de caso com crianças de 7 /8 anos.

R. CANTORAL / Identidad y desarrollo: Matemática Educativa y Relime. S. MAYÉN, C. BATANERO, C. DÍAZ / Conflictos semióticos de estudiantes mexicanos en un problema de comparación de datos ordinales. N. PLANAS, N. IRANZO / Consideraciones metodológicas para la interpretación de procesos de interacción en el aula de matemáticas. L. RADFORD, M. ANDRÉ / Cerebro, cognición y matemáticas. M. A. SORTO, J. H. MARSHALL, T. F. LUSCHEI, M. CARNOY / Teacher knowledge and teaching in Panama and Costa Rica: A comparative study in primary and secondary education.

R. CANTORAL / Revistas Latinoamericanas en ISI WoK, reflexiones con la comunidad. A. R. CORICA, M. R. OTERO / Análisis de una praxeología matemática universitaria en torno al límite de funciones y la producción de los estudiantes en el momento de evaluación. B. GARII, R. SILVERMAN / Beyond the Classroom Walls: Helping Teachers Recognize Mathematics Outside of the School. P. SALINAS, J. A. ALANÍS / Hacia un nuevo paradigma en la enseñanza del Cálculo en una institución educativa. F. VISEU, J. P. DA PONTE / Desenvolvimento do conhecimento didáctico do futuro professor de Matemática com apoio das TIC´s.

VOLUMEN 13, 2010

R. CANTORAL / Finalmente… trois. A. ALSINA, M. DOMINGO / Idoneidad didáctica de un protocolo sociocultural de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. M. A. VIGGIANI, M. ROSA / Educação matemática na realidade do ciberespaço – que aspectos ontológicos e científicos se apresentam? C. M. FERNÁNDEZ / Análisis epistemológico de la secuencia numérica. S. ROA-FUENTES, A. OKTAÇ / Construcción de una descomposición genética: Análisis teórico del concepto transformación lineal.

R. CANTORAL / Matemática Educativa: una disciplina de múltiples perspectivas. C. ARANDA, M. L.CALLEJO / Construcción del concepto de dependencia lineal en un contexto de geometría dinámica: un estudio de casos. M. BERGER / A semiotic view of mathematical activity with a computer algebra system. F. CORDERO, C. CEN, L. SUÁREZ / Los funcionamientos y formas de las gráficas en los libros de texto: una práctica institucional en el bachillerato. J. A. FERNANDES, P. FERREIRA, R. ROA / Aquisição das operações combinatórias por alunos pré-universitários através de uma intervenção de ensino.

R. CANTORAL / ¿Qué es la Matemática Educativa? F. J. BOIGUES, S. LLINARES, V. D. ESTRUCH / Desarrollo de un esquema de la integral definida en estudiantes de ingenierías relacionadas con las ciencias de la naturaleza. Un análisis a través de la lógica Fuzzy. C. CRESPO, R. M. FARFÁN, J. LEZAMA / Argumentaciones y demostraciones: Una visión de la influencia de los escenarios socioculturales. M. D. POCHULU / Significados atribuidos a la resolución de problemas con software de geometría dinámica durante un desarrollo profesional docente. H. da S. ZAGO, C. R. FLORES / Uma proposta para relacionar arte e educação matemática.

RELIME ESPECIAL (TOMO I), 2010

F. CORDERO, C. ÍMAZ, S. URSINI / Matemática Educativa en México. Aspectos sociales y cognitivos. G. BUENDÍA / Articulando el saber matemático a través de prácticas sociales. El caso de lo periódico. A. CAMACHO, B. SÁNCHEZ / Análisis sociocultural de la noción de variabilidad. M. FERRARI, R. M. FARFÁN / Una socioepistemología de lo logarítmico. G. MONTIEL / Hacia el rediseño del discurso: formación docente en línea centrada en la resignificación de la matemática escolar. R. PULIDO / La enseñanza de los diferenciales en las escuelas de ingeniería desde un enfoque socioepistemológico. E. RESÉNDIZ / El discurso en la clase de matemáticas y los acuerdos sociales. La noción de variación. C. ACUÑA / Las funciones figurales y epistémicas de los dibujos. J. A. LANDA / Acercamiento a funciones con dos variables. V. LARIOS, N. GONZÁLEZ / Aspectos que influyen en la construcción de la demostración en ambientes de Geometría Dinámica. A. LÓPEZ / Interpretación de estudiantes de bachillerato sobre la identidad de la variable en expresiones algebraicas. T. MENDOZA, D. BLOCK / El porcentaje: lugar de encuentro de las razones, fracciones y decimales en las matemáticas escolares. R. RODRÍGUEZ / Aprendizaje y enseñanza de la modelación: el caso de las ecuaciones diferenciales.

RELIME ESPECIAL (TOMO II), 2010

F. CORDERO, C. ÍMAZ, S. URSINI / Matemática Educativa en México. Aspectos sociales y cognitivos. C. DOLORES / El lenguaje variacional en el discurso de la información. A. GALLARDO, E. BASURTO / La negatividad matemática: antesala histórica de los números enteros. G. MARTÍNEZ / Los estudios sobre los procesos de convención matemática: una síntesis metódica sobre la naturaleza de sus resultados. G. MUÑOZ / Hacia un campo de prácticas sociales como fundamento para rediseñar el discurso escolar del cálculo integral. J. G. SÁNCHEZ, S. URSINI / Actitudes hacia las matemáticas, género y tecnología: estudios con alumnos mexicanos de educación básica. L. SUÁREZ, F. CORDERO / Modelación – Graficación, una categoría para la matemática escolar. Resultados de un estudio socioepistemológico. R. ÁVILA, S. IBARRA, A. GRIJALVA / El contexto y el significado de los objetos matemáticos. S. MOCHÓN / La relación del comportamiento del profesor con el avance cognitivo de los estudiantes al introducir un software educativo en el aula. A. OKTAÇ, M. TRIGUEROS / ¿Cómo se aprenden los conceptos de Álgebra Lineal? C. RONDERO / Cálculo promedial. El caso de la media aritmética. E. SÁNCHEZ / Una jerarquía de razonamiento estadístico sobre la noción de predicción/incertidumbre elaborada con profesores de secundaria. M. VALDEMOROS / Dificultades experimentadas por el maestro de primaria en la enseñanza de fracciones.

VOLUMEN 14, 2011

R. CANTORAL / La Escuela Latinoamericana de Matemática Educativa. G. GÁLVEZ, D. COSMELLI, L. CUBILLOS, P. LEGER, A. MENA, E. TANTER, X. FLORES, G. LUCI, S. MONTOYA, J. SOTO-ANDRADE / Estrategias cognitivas para el cálculo mental. L. RUIZ-HIGUERAS, F. J. GARCÍA / Análisis de praxeologías didácticas en la gestión de procesos de modelización matemática en la escuela infantil. J. DÍEZ-PALOMAR, J. M. MENÉNDEZ, M. CIVIL / Learning mathematics with adult learners: drawing from parents' perspective. M. C. RICOY, M. J. V. S. COUTO / As TIC no ensino secundário na matemática em Portugal: a perspectiva dos professores.

VOLUMEN 15, 2012

VOLUMEN 16, 2013

R. CANTORAL / Tendencias: Los métodos de investigación para profesionalización docente en matemáticas. N. CLIMENT, J. ROMERO, J. CARRILLO, M. C. MUÑOZ, L. C. CONTRERAS / ¿Qué conocimientos y concepciones movilizan futuros maestros analizando un vídeo de aula?. A. ALVARADO, M. T. GONZÁLEZ / Generación interactiva del conocimiento para iniciarse en el manejo de implicaciones lógicas. E. ALONSO / Razones, proporciones y proporcionalidad en una situación de reparto: una mirada desde la teoría antropológica de lo didáctico. S. SANHUEZA, M. C. PENALVA, M. FRIZ / Identidades y competencias profesionales de estudiantes para maestro de educación infantil relativas a la enseñanza de la geometría.

R. CANTORAL / *Relime:* DOI y OJS. M. ARAVENA, C. CAAMAÑO / Niveles de razonamiento geométrico en estudiantes de establecimientos municipalizados de la región del Maule. Talca, Chile. S. INZUNSA, J. V. JIMÉNEZ / Caracterización del razonamiento estadístico de estudiantes universitarios acerca de las pruebas de hipótesis. M. JARERO, E. APARICIO, L. SOSA / Pruebas escritas como estrategia de evaluación de aprendizajes matemáticos. Un estudio de caso a nivel superior. J. RUIZ, P. DÁVILA, J. ETXEBERRIA, J. SARASUA / Los libros de texto de matemáticas del bachillerato en el periodo 1970-2005.

R. CANTORAL / El talón de Aquiles. L. ALBARRACÍN, N. GORGORIÓ / Problemas de estimación de grandes cantidades: Modelización e influencia del contexto. A. M. OLLER, J. M. GAIRÍN / La génesis histórica de los conceptos de razón y proporción y su posterior aritmetización. J. PRIOR, G. TORREGROSA / Razonamiento configural y procedimientos de verificación en contexto geométrico. L. A. DE SOUZA, A. V. MARAFIOTI GARNICA / As matemáticas modernas: um ensaio sobre os modos de produção de significado ao(s) movimento(s) no ensino primário brasileiro.

VOLUMEN 17, 2014

R. CANTORAL / El quehacer del matemático educativo: el pasaje del *sujeto* a su *entorno*. I. M. ESCUDERO, J. M. GAVILÁN, G. SÁNCHEZ / Una aproximación a los cambios en el discurso matemático generados en el proceso de definir. P. LEGER, G. GÁLVEZ, M. INOSTROZA, L. CUBILLOS, G. LUCI, E. TANTER, D. COSMELLI, J. SOTO / ECOCAM, un sistema computacional adaptable al contexto para promover estrategias de cálculo mental: características de su diseño y resultados preliminares. G. OBANDO, C. E. VASCO, L. C. ARBOLEDA / Enseñanza y aprendizaje de la razón, la proporción y la proporcionalidad: un estado del arte. S. E. PARADA, F. PLUVINAGE / Reflexiones de profesores de matemáticas sobre aspectos relacionados con su pensamiento didáctico.

R. CANTORAL / Matemática Educativa: *Relme*, *Clame* y *Relime*. / J. JUSTIN, C. L. OLIVEIRA, L. MORENO / Registros de representação semiótica e geometría analítica: uma experiência com futuros professores. S. PALMAS, D. BLOCK / Acceso a la representación escrita de los números naturales: una secuencia didáctica para adultos de baja o nula escolaridad. H. J. RUIZ, Y. RIASCOS / ¿4^3 se puede leer como “cuatro subido a la tres”?: un estudio sobre las estrategias de construcción de la representación polinomial. C. SÁENZ, A. LEBRIJA / La formación continua del profesorado de matemáticas: una práctica reflexiva para una enseñanza centrada en el aprendiz.

VOLUMEN 18, 2015

R. CANTORAL, G. MONTIEL, D. REYES-GASPERINI / El programa socioepistemológico de investigación en Matemática Educativa: el caso de Latinoamérica. J. ARRIETA, L. DÍAZ / Una perspectiva de la modelación desde la Socioepistemología. A. MAZ-MACHADO, L. RICO / Principios didácticos en textos españoles de Matemáticas en los siglos XVIII y XIX. L. SOLANILLA, A. CELI TAMAYO, G. A. PAREJA / Memoria sobre la emergencia de las funciones elípticas. V. H. G. DE SOUZA, R. NOGUEIRA DE LIMA, T. M. M. CAMPOS / A functional graphic approach to inequations.

P. PEÑA-RINCÓN, C. TAMAYO-OSORIO, A. PARRA / Una visión latinoamericana de la etnomatemática: tensiones y desafíos. A. P. AIRES, H. CAMPOS, R. POÇAS / Raciocínio geométrico versus definição de conceitos: a definição de quadrado com alunos de 6.º ano de escolaridade. B. D'AMORE, M. FANDIÑO, M. IORI, M. MATTEUZZI / Análisis de los antecedentes histórico-filosóficos de la "Paradoja cognitiva de Duval". J. GARCÍA-GARCÍA, F. M. RODRÍGUEZ, C. NAVARRO / Las estrategias utilizadas por los niños *Tee Savi* en la resolución de problemas aritméticos. V. C. LLANOS, M. R. OTERO / La incidencia de las funciones didácticas topogénesis, mesogénesis y cronogénesis en un recorrido de estudio y de investigación: el caso de las funciones polinómicas de segundo grado.

P. VALERO, M. ANDRADE-MOLINA, A. MONTECINO / Lo político en la educación matemática: de la educación matemática crítica a la política cultural de la educación matemática. G. A. MARMOLEJO, M. T. GONZÁLEZ / Control visual en la construcción del área de superficies planas en los textos escolares. Una metodología de análisis. A. MENA-LORCA, J. MENA-LORCA, E. MONTOYA-DELGADILLO, A. MORALES, M. PARRAGUEZ / El obstáculo epistemológico del infinito actual: persistencia, resistencia y categorías de análisis. J. PEIXOTO / Gestos, sinais e esquemas de aprendizes surdos na multiplicação. E. A. SÁNCHEZ, A. L. GÓMEZ-BLANCARTE / La negociación de significado como proceso de aprendizaje: el caso de un programa de desarrollo profesional en la enseñanza de la estadística.

VOLUMEN 19, 2016

A. MÁRQUEZ, I. ORDORIKA, A. DÍAZ-BARRIGA, R. CANTORAL, W. DE VRIES / Consorcio Mexicano de Revistas de Investigación Educativa. P. ARTEAGA, C. BATANERO, J. M. CONTRERAS, G. CAÑADAS / Evaluación de errores en la construcción de gráficos estadísticos elementales por futuros profesores. M. J. CARVALHO, A. FREITAS / Nível de conhecimento em probabilidade condicionada e independência: um caso de estudo no ensino secundário português. M. POCHULU, V. FONT, M. RODRÍGUEZ / Desarrollo de la competencia en análisis didáctico de formadores de futuros profesores de matemática a través del diseño de tareas. R. RODRÍGUEZ, S. QUIROZ / El papel de la tecnología en el proceso de modelación matemática para la enseñanza de las ecuaciones diferenciales.

VOLUMEN 20, 2017

matemáticas: incidencia de la gravedad de las dificultades. A. BAROJAS, I. GARNICA / Comprensión de nociones del sistema métrico decimal mediada por la LSM en el aula de sordos [17-21]: estudio de casos. S. ESTRELLA, R. OLFOS, S. MORALES, P. VIDAL / Argumentaciones de estudiantes de primaria sobre representaciones externas de datos: componentes lógicas, numéricas y geométricas.

VOLUMEN 21, 2018

R. CANTORAL / Educación comparada en América Latina. El caso de la educación alternativa en Oaxaca: Matemáticas y práctica social. / Y. T. HOFFMANN, D. A. COSTA / História da educação matemática: conservação da cultura escolar. R. RAMÍREZ, P. FLORES, I. RAMÍREZ / Análisis de los errores en tareas geométricas de argumentación visual por estudiantes con talento matemático. M. RODRÍGUEZ, M. PARRAGUEZ, M. TRIGUEROS / Construcción cognitiva del espacio vectorial R^2. A. ZAPATERA / Cómo alumnos de educación primaria resuelven problemas de generalización de patrones. Una trayectoria de aprendizaje.

O. PÉREZ / La Matemática Educativa en Camagüey: incidencia social de un programa de maestría. H. ALVARADO, L. RETAMAL, S. ESTRELLA, M. GALINDO / Intuiciones probabilísticas en estudiantes de ingeniería: implicaciones para la enseñanza de la probabilidad. N. MARTÍNEZ P. R. GARZÓN, N. R. RODRÍGUEZ / Estrategias de los niños en la resolución de situaciones multiplicativas: reconocimiento y uso de unidades. V. ROJO, J. VILLARROEL, J. M. MADARIAGA / The affective domain in learning mathematics according to students' gender. G. SÁNCHEZ, M. MORENO, P. PÉREZ, M. L. CALLEJO / Trayectoria de aprendizaje de la longitud y su medida como instrumento conceptual usado por futuros maestros de educación infantil.

M. PARRAGUEZ / Posgrado en didáctica de la matemática de la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso: un multiproceso en búsqueda de la construcción ciudadana. L. ESPINOZA, A. VERGARA, D. VALENZUELA / Geometría en la práctica cotidiana: la medición de distancias inaccesibles en una obra del siglo XVI. L. A. RAMOS, L. M. CASAS / Concepciones y creencias de los profesores de Honduras sobre enseñanza, aprendizaje y evaluación de las matemáticas. G. ESPINOZA, D. ZAKARYAN, J. CARRILLO / El conocimiento especializado del profesor de matemáticas en el uso de la analogía en la enseñanza del concepto de función. C. BATANERO, M. M. GEA, P. ARTEAGA, J. M. CONTRERAS, C. DÍAZ / Conocimiento del contenido sobre correlación y regresión de futuros profesores.

VOLUMEN 22, 2019

R. CANTORAL, D. REYES-GASPERINI, B. CASTRO, D. W. RÍOS / RELIME: Construcción, desarrollo y consolidación ¿A dónde nos dirigimos? / E. SANTANA, L. SERRAZINA, C. NUNES / Contribuições de um processo formativo para o desenvolvimento profissional dos professores envolvidos. E. GOMES, J. CERQUEIRA / A aprendizagem de regras do sistema matemático escolar na modelagem matemática.

VOLUMEN 23, 2020

application. V. CASTILLO RIQUELME / Enseñanza de la estadística inferencial mediante una aplicación móvil.

R. CANTORAL / 2020. S. PASCUAL PIZARRO / Una secuencia didáctica para la enseñanza de la transformación lineal: Unificación de métodos y problemas, modelización y explicitación del aprendizaje. A. CASADIEGO CABRALES, K. AVENDAÑO CASADIEGO, G. CHÁVARRO MEDIA, G. AVENDAÑO CASADIEGO, L. X. GUEVARA SALAZAR, A. AVENDAÑO RODRÍGUEZ / Criterios de clasificación en niños de preescolar utilizando bloques lógicos. M. LAGUNA, D. BLOCK SEVILLA / Reconstrucción de situaciones didácticas de matemáticas en el aula. Un estudio en preescolar. A. MARTÍNEZ ZARZUELO, J. M. RODRÍGUEZ MANTILLA, E. ROANES LOZANO, M. J. FERNÁNDEZ DÍAZ / Efecto de Scratch en el aprendizaje de conceptos geométricos de futuros docentes de primaria.

Suscripción a Relime

Costo del volumen 24 (tres números)

Suscripción Institucional:
Volumen US$ 120
Cada número US$ 50

Suscripción Individual:
Volumen US$ 50
Cada número US$ 20

Suscripción Miembros Clame:
Volumen US$ 20
Cada número US$ 10

Estos costos NO aplican a *números especiales*,
NO incluyen gastos de envío, NI comisión bancaria por transferencias
o depósitos de cheques emitidos fuera de México

Las suscripciones deberán solicitarse al correo electrónico
suscripcion@relime.org

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa

Volumen 24, Número 3

Diseño digital:
LDG. Emilio Serna Hernández
Recrea. Soluciones infinitas
sernandem@yahoo.com.mx

Se imprimió en los talleres de
Editorial Progreso S.A. de C.V.
Sabino # 275
Col. Santa María la Ribera
Alcaldía Cuauhtémoc
06400, CDMX, México

Noviembre de 2021
Tiraje: 1000 ejemplares más sobrantes