RELIME 25-1

9 771665 243002 02501

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa

Vol. 25, Núm. 1, marzo 2022

ISSN 1665-2436

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa

RELIME

Vol. 25, Núm. 1, 2022

Clame Comité Latinoamericano de Matemática Educativa

Publicación oficial de investigación del Comité Latinoamericano de Matemática Educativa

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa

Departamento de Matemática Educativa – Cinvestav
AP 14-740, México 07000, CDMX
M É X I C O

Publicación cuatrimestral, se publica en los meses de marzo, julio y noviembre. Editada por el Colegio Mexicano de Matemática Educativa A.C., con reservas de derechos al uso exclusivo, con No. 04-2016-110914351000-102, del ISSN: 1665-2436 y, con No. 04-2016-110413025500-203, del e-ISSN: 2007-6819, otorgados por el Instituto Nacional del Derecho de Autor en México.

Contribuciones e información: editorial@relime.org

Relime es una revista indizada en:
ISI Web of Knowledge, SSCI – Social Sciences Citation Index y Journal Citation Reports • ERIH – European Reference Index for the Humanities • Conacyt – Índice de Revistas Mexicanas de Investigación Científica y Tecnológica - Scopus – Elsevier Database • International Bibliography of Periodical Literature in the Humanities and Social Sciences • DOAJ – Directory of Open Access Journals • Clase – Citas Latinoamericanas en Ciencias Sociales y Humanidades • Iresie – Índice de Revistas de Educación Superior e Investigación Educativa • Latindex – Sistema Regional de Información en Línea para Revistas Científicas de América Latina, el Caribe, España y Portugal • Redalyc – Red de Revistas Científicas de América Latina y el Caribe, España y Portugal • EBSCO – Information Services • Dialnet • Scielo-México.

2022 Impresa en México

Volumen 25 – Número 1 – 2022

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa

Clame Comité Latinoamericano de Matemática Educativa

Publicación oficial del Comité Latinoamericano de Matemática Educativa

2022

Volumen 25 Número 1 Marzo de 2022

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa

EDITORIAL

ARTÍCULOS

REVISTA LATINOAMERICANA DE INVESTIGACIÓN EN MATEMÁTICA EDUCATIVA, RELIME, es la publicación de investigación oficial del Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C., editada por el Colegio Mexicano de Matemática Educativa, A. C., Av. Instituto Politécnico Nacional, 2508, Col. San Pedro Zacatenco, C.P. 07360, Alcaldía Gustavo A. Madero, CDMX, México. www.relime.org. Directora responsable: Gisela Montiel Espinosa, direccion@relime.org.

Publicación cuatrimestral. Se publica en los meses de marzo, julio y noviembre, con el financiamiento del Clame.

EDITORIAL

IN MEMORIAM
Ricardo Cantoral

Francisco Cordero
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados
del Instituto Politécnico Nacional,
(Cinvestav), México

A Ricardo Cantoral lo conocí por cerca de cuatro décadas. Aún recuerdo, con su tono de voz pausada y afable, con su cordialidad peculiar que lo caracterizaba -tenía un don que con facilidad le caía bien a la gente-, me hizo varias preguntas después de saludarnos y presentarnos, yo era la primera vez que visitaba la Sección de Matemática Educativa, en la calle de Dakota en la Colonia Nápoles, en la Ciudad de México. Ricardo a las pocas semanas presentaría su examen de grado de maestro en Ciencias, con especialidad de Matemática Educativa. Entre las principales preguntas, que aún me hacen mella, fueron: ¿qué pensaba sobre la diferencia entre matemáticas y la matemática educativa? y la otra, no menos importante, ¿qué necesitan saber las y los docentes de matemáticas para enseñar mejor, en nuestras universidades?

La conversación fue cordial, pero a su vez profunda, sin saberlo, más tarde se convertiría en un programa de investigación de gran envergadura: la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. La cual, tiene su expresión, por un lado, en el tratamiento matemático que genera la identidad disciplinar de la matemática educativa y por otro, la impronta latinoamericanista en su historia y desarrollo contemporáneo.

Jamás olvidaré las largas conversaciones que solíamos tener en la oficina de Ricardo. Para ese entonces ya éramos profesores de lo que hoy se llama Departamento de Matemática Educativa. Esas conversaciones, sistemáticamente,

DOI: 10.12802/relime.21.2510

tocaban temas con relación a la organización, en la obra y en la función que una disciplina debe tener, todo ello para entender el marco de referencia de la Matemática Educativa, disciplina que se estaba construyendo.

Su visión era inagotable y aguda. Atento a los puntos de inflexión de lo que se estaba construyendo en el mundo y Latinoamérica, para decidir los rumbos de la Matemática Educativa. Tres factores siempre los puso en enlace y en coordinación: la producción científica, la formación de investigadores y la vinculación entre instituciones, organizaciones, redes y grupos nacionales e internacionales. No en balde, fue el primer matemático educativo que ingresó a la Academia Mexicana de Ciencias e incentivó a que varios ingresáramos. Pero también, lideró la conformación del Comité Latinoamericano de Matemática Educativa, siendo el primer presidente. Todo esto, otorgó visibilidad a la Matemática Educativa con las otras Ciencias y generó una matemática educativa latinoamericana en contraste con la producción, en torno a la educación de matemática, en el resto del mundo.

Además, se concretó la Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa (RELME), con un desarrollo de más de tres décadas. Estos espacios, como lo he mencionado varias veces, han sido prolíficos semilleros de iniciativas, discusiones y definiciones de la educación de la matemática en América Latina. Como resultado de estos espacios se han creado proyectos concretos de formación de recursos humanos y de desarrollo profesional docente que han nutrido la disciplina de la matemática educativa y multiplicado los espacios de conocimiento a través de redes de investigadores y docentes locales y del extranjero.

La Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (Relime) es, sin dudas, otro proyecto visionario de Ricardo. Me dijo: *Pancho, necesitamos una revista que refleje el trabajo que hacemos en Latinoamérica pero que esté a la altura de las mejores revistas del mundo*. Los que vivimos de cerca la experiencia de su construcción sabemos, al inicio, las embestidas que pasó la revista por sectores conservadores del conocimiento y los augurios equivocados de no progreso por ser una revista en el idioma español. Hoy, ha alcanzado los rankings internacionales para posesionarla en las mejores revistas del mundo, sin escatimar el principio latinoamericanista.

Aún recuerdo con agrado y emoción, la primera vez que pronunció Ricardo en público la palabra socioepistemología (*socioepistemology*). Fue en inglés, en una plenaria, en una ciudad de Michigan, en Estados Unidos. Un evento sobre la matemática universitaria que encabezó Ed Dubinsky. Se encontraban la mayoría de los miembros del grupo RUMEC. Me dijo, hoy iniciamos el programa de identidad latinoamericana. Lo que hacemos debe tener un nombre.

En la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa subyace un significado profundo. Expresa la síntesis de la sabiduría humana, que recoge los saberes matemáticos populares, técnicos y científicos, como marco de referencia para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Hay participantes en la construcción del conocimiento matemático que no son considerados en la epistemología que se privilegia en la matemática escolar. En ese sentido el programa socioepistemológico intenta sacar a la luz los roles de esos y esas participantes. Ricardo puso, intensamente, la atención para explicar que la humanidad es el elemento fundamental para entender con profundidad la construcción de un conocimiento, por eso hablamos de la construcción social del conocimiento matemático como complemento de la construcción axiomática de la matemática. Uno de los resultados cruciales de esa visión es haber logrado incorporar el rol del relativismo epistemológico de la matemática a las situaciones de aprendizaje y en el desarrollo profesional de la docencia de la matemática. Esta incorporación orienta el cambio epistemológico de la matemática como ejes para la nueva educación de la matemática, reconociendo la diversidad de saberes matemáticos.

Una de las sensibilidades mayores que permearon la obra científica de Ricardo y los programas que lideró: ¿Será posible el Sur? A más de uno nos tocó el corazón y nos generó con profundidad el principio latinoamericanista de la matemática educativa: participar en Europa y en Estados Unidos significa discutir y defender lo que construimos científicamente de este lado del sur.

Para terminar con este tributo a Ricardo Cantoral, no podría soslayar una expresión que caracteriza y sella su obra: *¿Por qué la matemática es como es y no de otra manera?* Entender el significado de esta consigna y trabajar en torno de ella nos permitirá continuar con su legado y mantener vivo el programa latinoamericano de la matemática educativa.

Gracias y hasta siempre, Ricardo.

Un abrazo en el camino del sur que te encuentres.

Sula Cristina Teixeira Nunes, Évelin Fulginiti de Assis, Luciana Vellinho Corso

DIFERENTES PERFIS DE FLEXIBILIDADE COGNITIVA EM ESTUDANTES BRASILEIROS DE 2º E 4º ANOS DO ENSINO FUNDAMENTAL

Different cogitive flexibility profiles in brazilian students of 2nd and 4th year of Elementary School

RESUMEN

Este artículo tiene como objetivo identificar, caracterizar y comparar el perfil de flexibilidad cognitiva los cálculos mentales de los estudiantes brasileños, en función del análisis de elementos cognitivos, a saber, las características de los problemas y los procedimientos de solución, utilizados durante la resolución de cálculos aritméticos. La muestra de este estudio incluyó 42 estudiantes de segundo año (7 a 8 años) y 42 estudiantes de cuarto año (9 a 11 años), de cuatro escuelas públicas en Porto Alegre. Se alentó a cada niño a clasificar 12 cálculos aritméticos, demostrando su conocimiento numérico al explicar el razonamiento involucrado en la resolución, a través de un instrumento de evaluación específico sobre la flexibilidad cognitiva. Los resultados revelaron que las diferencias en las proporciones de uso del conocimiento numérico diferenciaban los perfiles de flexibilidad cognitiva: flexible, mixto o rígido.

PALABRAS CLAVE:

- *Cálculo mental*
- *Flexibilidad cognitiva*
- *Matemáticas*

ABSTRACT

This article aims to identify, characterize and compare the cognitive flexibility profile in mental calculation of brazilian students, based on the analysis of cognitive elements, namely problem characteristics and solution procedures, used during the resolution of arithmetic calculations. The sample of this study included 42 2nd graders (7 to 8 years old) and 42 4th graders (9 to 11 years old), from 4 public schools in Porto Alegre. Each child was encouraged to classify 12 arithmetic calculations, thus demonstrating their numerical knowledge by explaining the thought process involved in solving the calculations through a specific cognitive flexibility assessment instrument. In general, the results revealed that the different proportions of numerical knowledge used made it possible to distinguish the flexibility profiles – flexible, mixed or rigid.

KEY WORDS:

- *Mental calculation*
- *Cognitive flexibility*
- *Mathematics*

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (2022) *25* (1): 9-34.
Recepción: Junio 18, 2020 / Aceptación: Julio 21, 2022. DOI: 10.12802/relime.22.2511

RESUMO

Este artigo tem como objetivo identificar, caracterizar e comparar o perfil de flexibilidade cognitiva em cálculo mental de estudantes brasileiros, com base na análise dos elementos cognitivos, a saber características dos problemas e procedimentos de solução, utilizados durante a resolução de cálculos aritméticos. A amostra deste estudo incluiu 42 estudantes de 2º ano (7 a 8 anos) e 42 de 4º ano (9 a 11 anos), de quatro escolas públicas de Porto Alegre. Cada criança foi encorajada a classificar 12 cálculos aritméticos, demonstrando seu conhecimento numérico ao explicar o raciocínio envolvido na resolução, por meio de um instrumento específico de avaliação de flexibilidade cognitiva, utilizado em estudos anteriores. Os resultados revelaram que as diferenças de proporções de uso de conhecimento numérico diferenciaram os perfis de flexibilidade cognitiva: flexível, misto ou rígido.

PALAVRAS CHAVE:

- *Cálculo mental*
- *Flexibilidade cognitiva*
- *Matemática*

RÉSUMÉ

Cet article vise à caractériser et comparer le profil de flexibilité cognitive dans les calculs mentaux des étudiants brésiliens, sur la base de l'analyse des éléments cognitifs, à savoir les caractéristiques des problèmes et les procédures de solution, utilisés lors de la résolution des calculs arithmétiques. L'échantillon de cette étude comprenait 42 élèves de 2e année (7 à 8 ans) et 42 élèves de 4e année (9 à 11 ans), de quatre écoles publiques de Porto Alegre. Chaque enfant a été encouragé à classer 12 calculs arithmétiques, démontrant leurs connaissances numériques lors de l'explication du raisonnement impliqué dans la résolution, grâce à un instrument d'évaluation spécifique sur la flexibilité cognitive. Les résultats ont révélé que les différences dans les proportions d'utilisation des connaissances numériques différenciaient les profils de flexibilité cognitive: flexible, mixte ou rigide.

MOTS CLÉS:

- *Calcul mental*
- *Flexibilité cognitive*
- *Mathématiques*

1. Introdução

A habilidade de realizar cálculos matemáticos é necessária nos diferentes espaços da vida cotidiana. Tal competência é utilizada para estimar o troco da padaria ou para estabelecer o horário da medicação prescrita três vezes ao dia. Os cálculos exemplificados podem ser resolvidos por meio de diferentes possibilidades de resolução - como, por exemplo, contar nos dedos, estimar o valor, ou utilizar a calculadora - que constituem estratégias válidas e potencialmente eficientes, mas algumas parecem ser mais adequadas para determinadas situações do que outras (Heinze *et al*., 2020; Spinillo, 2014).

Nesse sentido, a valorização da habilidade de adequar a estratégia para determinado tipo de cálculo matemático – adaptatividade – e alternar o uso de diferentes meios de resolução – flexibilidade – acompanha a necessidade de promover níveis mais altos de aprendizagem (Andrews *et al*., 2021; Korten, 2020; Rathgeb-Schnierer & Green, 2013; Threlfall, 2002) e de introduzir a matemática como uma ferramenta de interpretação e transformação do mundo (Ching & Nunes, 2017). Isso se torna ainda mais relevante quando se considera que crianças com baixo desempenho matemático, ou seja, que não demonstram alcance de níveis mais altos de aprendizagem, se encontram em sérios riscos de desenvolver dificuldades de aprendizagem na área (Aunio, 2019).

Portanto, em relação ao uso flexível e à adequação de estratégias ao tipo de cálculo exigido, é válido ressaltar a definição de Star e colaboradores (2015), que compreendem esta habilidade como flexibilidade cognitiva, correspondendo à capacidade de gerar, usar e avaliar vários métodos de solução para determinados problemas, sendo reconhecida pela sua importância para o domínio matemático. Corroborando esta ideia, Rathgeb-Schnierer e Green (2013) referem que um método de solução flexível no cálculo mental depende da rede de relações numéricas construída pelos estudantes.

Nesta perspectiva, este estudo apresenta os cálculos mentais como importante meio de avaliar e favorecer a flexibilidade e faz uma breve revisão das pesquisas sobre o tema. Grande parte destes estudos foram realizados em países estrangeiros, no entanto ainda não se tem registros de investigações do tipo no Brasil. Diante do cenário de desempenho educacional brasileiro, com baixos índices de proficiência matemática (Brasil, 2021a, 2021b), compreende-se a relevância de aprofundar o conhecimento acerca da flexibilidade cognitiva em cálculo mental dos estudantes brasileiros, com o intuito de contribuir para a literatura da área e elucidar implicações educacionais. Tem-se como objetivo, portanto, identificar os conhecimentos subjacentes aos perfis de flexibilidade cognitiva em cálculo mental (flexível, misto ou rígido), permitindo a caracterização destes perfis, em estudantes de 2º (7 a 9 anos) e 4º (9 a 10 anos) anos do Ensino Fundamental, com base nos elementos cognitivos por eles utilizados durante a resolução de cálculos aritméticos. Convém mencionar que esta investigação foi realizada com base em estudos anteriores, os quais compararam amostras de diferentes países (Rathgeb-Schnierer e Green (2013, 2015, 2017), e por isso os termos que designam os diferentes raciocínios a serem utilizados no decorrer do texto serão mantidos de acordo com o proposto pelos autores referidos.

2. Flexibilidade em cálculo mental

O cálculo mental, como habilidade matemática, é um instrumento importante (e possível) de avaliação, intervenção e promoção de flexibilidade para os pesquisadores que se ocupam desta temática (Carvalho & Rodrigues, 2021; Heinze *et al*., 2020; Korten, 2020; Heirdsfield & Cooper, 2004; Rathgeb-Schnierer & Green, 2013, 2015, 2017, 2019; Serrazina & Rodrigues, 2017, 2021). Do mesmo modo, um crescente corpo teórico tem demonstrado a validade de ensinar cálculos mentais para promover a flexibilidade cognitiva e alcançar a competência matemática (Heinze *et al*., 2020; Serrazina & Rodrigues, 2017, 2021; Rathgeb-Schnierer & Green, 2013, 2015, 2017; Rechtsteiner-Merz & Rathgeb-Schnierer, 2015; Threlfall, 2009).

Em relação à definição, o cálculo mental é diferente da aritmética feita "de cabeça", pois conforme argumenta Thompson (1999), esta pode envolver apenas a recordação de fatos básicos ou a execução mental de um cálculo algorítmico, enquanto o cálculo mental exige a utilização de estratégias mentais, definidas como "(...) a aplicação de fatos numéricos conhecidos ou calculados rapidamente, em combinação com propriedades específicas do sistema numérico, para encontrar a solução de um cálculo cuja resposta não é conhecida" (Thompson, 1999, p. 2, tradução nossa). Além desta diferenciação proposta por Thompson (1999), as estratégias de cálculo mental também diferem dos algoritmos escritos porque exigem mais do que a aplicação de um procedimento passo a passo, requerendo a aplicação de um conhecimento mais profundo de como os números funcionam (Carvalho & Rodrigues, 2021; Rathgeb-Schnierer & Green, 2019).

Ao se considerar esse conhecimento mais profundo sobre o funcionamento dos números, é possível referir Buys (2001), que destaca que o cálculo mental permite calcular livremente, sem restrições, possibilitando o desenvolvimento de novas estratégias de resolução, usando números de referência e estratégias do repertório pessoal. O autor assinala três características importantes do cálculo mental: (I) opera com números e não com dígitos; (II) usa propriedades elementares das operações e relações numéricas; e (III) permite o recurso de registros intermediários em papel. A ideia de cálculo mental, portanto, está centrada no trabalho com números, suas relações e padrões, e operações relacionadas à noção de um cálculo pensado e não mecanizado (Mendes, 2012). Corroborando esta ideia, Verschaffel, Greer e De Corte (2007) referem que a distinção entre cálculo mental e algoritmos (escritos) independem do uso ou não de lápis e papel, mas sim das ações e conhecimentos matemáticos envolvidos.

Nesse sentido, Serrazina e Rodrigues (2017, 2021) acreditam que o cálculo mental viabiliza a flexibilidade no raciocínio matemático. Para as pesquisadoras é essencial, por exemplo, que as crianças compreendam os números a partir de diferentes representações, canônica e não-canônica (exemplo: 9 = 5+4, 18/2, 3+3+3, 10-1, etc), pois cada representação acrescenta uma informação sobre o número e, desta forma, aprofunda o conhecimento sobre o mesmo e facilita a identificação das relações numéricas existentes, como relação parte-todo, comutatividade, associatividade e distributividade. As autoras também salientam a importância da construção de fatos aritméticos básicos, por possibilitarem automatismo, o que é relevante para o cálculo mental. Destacam as estratégias de dobro, quase dobro, metade do número, dobrar repetidamente, fechar ou completar a dezena e compensação como suporte à resolução de cálculos e para o desenvolvimento de fatos básicos. Cabe chamar atenção à compreensão das autoras sobre flexibilidade como componente do senso numérico, visto que contempla o conhecimento sobre números e operações e sobre o uso flexível para fazer julgamentos matemáticos e resolver problemas (Serrazina & Rodrigues, 2017). Dessa forma, para as autoras a qualidade do senso numérico influencia a flexibilidade e vice-versa. Mais que isso, convém ressaltar que parte dos conhecimentos numéricos iniciais mencionados até então são, justamente, preditores do desempenho matemático posterior (Aunio & Räsänen, 2015).

Essa base numérica, significativa e interconectada, viabilizada pelo cálculo mental, é o fundamento do raciocínio flexível em matemática (Serrazina & Rodrigues, 2021). Korten (2020) assume o cálculo mental flexível como uma resposta individual a características e relações numéricas específicas do cálculo em questão e à correspondente construção de um processo de solução usando meios estratégicos. Estes meios estratégicos, ou ações mentais, são definidos como elementos cognitivos por Rathgeb-Schnierer e Green (2013, 2015, 2017, 2019), que estabelecem duas alternativas a serem utilizadas pelos alunos ao resolverem um cálculo mental: características numéricas percebidas nos cálculos e procedimentos de solução. A partir da análise dos elementos utilizados pelos estudantes no cálculo, é possível estabelecer as características individuais do perfil de raciocínio flexível, as quais podem dar pistas sobre dificuldades e preditores da competência matemática (Heize *et al.*, 2020; McMullen *et al.*, 2017; Rathgeb-Schnierer & Green, 2019).

Os estudos acima apontados parecem deixar evidente, conforme refere Threlfall (2002), que a contribuição dos cálculos mentais para a flexibilidade do raciocínio matemático está bem estabelecida, mas a natureza exata dos processos e das competências numéricas envolvidas nesta habilidade são menos claras. A seguir, estes fatores serão explorados por meio da análise de diferentes evidências da área.

2.1. *Pesquisas em flexibilidade em cálculo mental*

Embora a flexibilidade cognitiva seja estudada há décadas, ainda há muito a ser investigado, especialmente no que tange às habilidades envolvidas no cálculo mental flexível e às características que distinguem os diferentes perfis. Poucas investigações se dedicam a compreender as diferenças individuais do conhecimento subjacente ao raciocínio flexível. A seguir são apresentadas algumas pesquisas que estudam a flexibilidade através da resolução de cálculos mentais.

Alguns pesquisadores, a partir de seus resultados empíricos, conseguiram mapear características individuais dos estudantes e agrupá-las em padrões de raciocínio. Nesse sentido, Heirdsfield e Cooper (2004) estudaram os procedimentos mentais e a compreensão da adição e subtração em cálculos multidígitos de seis alunos australianos de 3º ano do Ensino Fundamental (EF). Os resultados apontam que os estudantes com raciocínio flexível escolheram e implementaram as estratégias apoiados em uma ampla compreensão numérica (senso numérico), conhecimento de fatos básicos, metacognição, efeito de operação na compreensão de números e forte crença em suas próprias estratégias. Os alunos com raciocínio inflexível aplicaram uma estratégia automática (imagem mental do algoritmo de lápis e papel) para compensar o seu conhecimento limitado, assim como suas crenças metacognitivas os levavam a não verificar suas soluções, pois confiavam na precisão do procedimento ensinado pelo professor.

Os diferentes tipos de raciocínio flexível podem ser identificados em estudos variados, demonstrando características semelhantes conforme o perfil do aluno. Sobre este tema, em um dos estudos apresentados por McMullen e colaboradores (2016), os pesquisadores buscaram determinar se havia diferenças individuais no conhecimento adaptativo/flexível de números em 55 estudantes de 3º e 5º ano do EF de uma escola finlandesa. Os resultados demonstraram diferenças individuais substanciais nas respostas dos participantes no "*Adaptive Number Knowledge Task*". Essas diferenças individuais são quantitativas, em termos do número de respostas corretas dadas, e qualitativas, em termos da complexidade matemática das respostas. Analisadas e categorizadas, as resoluções da amostra resultaram em 4 grupos: (1) Baixo, poucas respostas corretas e maior parte de soluções simples; (2) Simples, com alto número de acertos, mas relativamente poucas respostas complexas; (3) Complexo, não tiveram muitas respostas corretas, mas as respostas produzidas foram consideradas complexas; (4) Alto, com número alto de acertos e alto de respostas complexas. As variáveis desempenho acadêmico, idade e escolaridade (3º e 5º anos) não apresentaram significância pronunciada em relação aos grupos, mas foi identificada uma tendência de os alunos com melhor desempenho, mais velhos e no 5º ano integrarem os grupos alto e complexo. Por fim, os autores discutem a importância de entender as diferenças individuais no conhecimento numérico adaptativo/flexível como um componente chave da competência aritmética posterior. Embora não trabalhem na perspectiva dos cálculos mentais, os autores apontam que fornecer experiências com numerosidades, relações quantitativas, e relações entre números e operações podem ser cruciais para o conhecimento adaptativo / flexível de números melhor desenvolvido.

Ainda sobre os perfis de raciocínio, Rathgeb-Schnierer e Green (2017) utilizaram os cálculos mentais como meio para avaliar a flexibilidade cognitiva de 69 estudantes americanos e alemães de 2º e 4º ano do EF e identificam diferentes perfis de flexibilidade mental. A noção de flexibilidade destes pesquisadores é semelhante à "interação entre perceber e conhecer" (Threlfall, 2002, p. 29, tradução nossa) os números no processo de cálculo. O objetivo do estudo foi verificar se os alunos reconhecem e usam as características, padrões e relações numéricas na resolução de cálculos mentais. Esta compreensão numérica é um indicador de raciocínio flexível e, em contrapartida, os procedimentos passo a passo indicam uma forma rígida de raciocínio matemático.

Os resultados da pesquisa demonstraram uma variedade de tipos de resolução, maior do que a esperada, com um total de 902 raciocínios de resolução, categorizados em 3 perfis de raciocínio matemático: (1) raciocínio flexível – predomínio do uso de caraterísticas e relações numéricas durante a resolução dos cálculos; (2) raciocínio misto – caracterizado pelo equilíbrio no uso de características e relações numéricas e procedimentos de solução e; (3) raciocínio rígido – preferências pelos procedimentos de solução. Os autores não encontraram diferenças significativas entre os estudantes dos dois países investigados, nem entre os anos escolares americanos. No entanto, houve diferença na amostra da Alemanha, em que os estudantes de 4º ano apresentaram um raciocínio significativamente mais flexível do que os alunos do 2º ano, possivelmente pela maior experiência com os números. Esse não era o resultado esperado pelos autores, a expectativa era de que as crianças mais novas seriam mais flexíveis em suas resoluções, pois se apoiariam em habilidades numéricas e não estariam engessadas pelo regramento do algoritmo padrão, uma vez que no 2º ano ainda há pouca prática deste procedimento. Por outro lado, os estudantes do 4º ano tenderiam a usar mais procedimentos padronizados nas suas resoluções, diante dos anos de experiência com estes. Os pesquisadores demandam mais estudos para esclarecer esta questão e ampliar e distinguir as características e diferenças entre os perfis encontrados em sua pesquisa.

A respeito da identificação das diferentes alternativas de resolução utilizadas pelas crianças em cálculos mentais, Caviola e colaboradores (2018) examinaram como as escolhas estratégicas de 160 crianças italianas, de 3º e 5º ano do EF, estão relacionadas ao grau e às variações de complexidade das características dos cálculos. As análises do repertório de estratégias indicam que as crianças do 3º ano tinham maior probabilidade de relatar estratégias menos eficientes (ou seja, contagem) e dependiam mais do algoritmo padrão (da direita para a esquerda) em comparação às crianças do 5º ano, que usaram mais recuperação de fatos básicos e estratégias da esquerda para a direita baseadas em conceitos (decomposição). No entanto, todos os tipos de estratégias foram utilizados pelas crianças de 3º e 5º ano e o uso variou de acordo com a complexidade do cálculo. Tal achado mostra que uma base conceitual e procedimental comum já estava presente desde o 3º ano escolar e que este conhecimento foi ampliado e qualificado com o passar dos anos.

Portanto, a literatura apresenta a identificação de diferentes maneiras através das quais as crianças resolvem flexivelmente (ou não) os cálculos. No que se trata de desenvolver esta flexibilidade, a abordagem de Rechtsteiner-Merz e Rathgeb-Schnierer (2015) visa promover o "*Zahlenblick*[1]", um constructo semelhante à noção de senso numérico, para desenvolver a flexibilidade no cálculo mental. Esse constructo é considerado "[...] um resultado do desenvolvimento e significa a competência para reconhecer de antemão as características do problema, os padrões de número e as relações numéricas, e usá-las para resolver problemas" (Rechtsteiner-Merz & Rathgeb-Schnierer, 2015, p. 355, tradução nossa). As pesquisadoras investigaram como uma abordagem especial, chamada "*Zahlenblickschulung*", apoiou 12 crianças com dificuldades para aprender matemática em comparação aos 8 estudantes submetidos ao ensino regular, matriculados no 1º ano do EF na Alemanha. A análise de dados demonstra que essa abordagem de ensino ofereceu suporte aos alunos menos avançados no desempenho aritmético e no desenvolvimento de flexibilidade no cálculo mental, uma vez que o reconhecimento de padrões e relações numéricas foi crucial para aprender a calcular, para além da contagem.

Os estudos destacados acima têm amostras de estudantes holandeses, australianos, americanos, alemães e italianos. No Brasil, pouco se estuda a flexibilidade cognitiva em cálculo mental considerando-a como uma habilidade cognitiva específica da matemática. Além desta lacuna de estudos em amostras latino-americanas, as pesquisas dão pouco suporte sobre quais habilidades numéricas e matemáticas integram cada tipo de raciocínio. Identificar os perfis de raciocínio e suas diferenças individuais parece ser uma importante ferramenta para identificar estudantes em risco de desenvolver dificuldades de aprendizagem (Aunio, 2019; McMullen *et al.*, 2016; Rathgeb-Schnierer & Green, 2019). Pesquisas têm destacado a importância desta habilidade no ensino da matemática, apontando evidências de que a flexibilidade em aritmética é um bom preditor do desempenho matemático posterior como, por exemplo, a álgebra (McMullen *et al.*, 2017). Isto posto, a relevância do presente estudo está na compreensão de como a flexibilidade em cálculo mental se manifesta em estudantes no contexto brasileiro, o qual apresenta características educativas, socioeconômicas e culturais tão diversas dos países acima mencionados.

[1] Tradução nossa aproximada: Visão de Número.

Considerando o exposto, este estudo parte de evidências pioneiras sobre os perfis de flexibilidade cognitiva em uma amostra brasileira. Foram encontrados os três tipos de perfil, rígido, misto e flexível, em alunos de 2º e 4º anos do Ensino Fundamental, baseados nas definições de Rathgeb-Schnierer e Green (2017) supracitadas (Nunes, Dorneles & Corso, 2020). O estudo replicou a pesquisa alemã e americana e tinha como intuito verificar se os perfis de flexibilidade seriam identificados de forma semelhante em crianças brasileiras. De fato, foram encontrados padrões bastante parecidos de raciocínio flexível, no entando apenas categorizar as crianças em diferentes perfis dizia pouco sobre a qualidade dos conhecimentos envolvidos. Também não havia suporte na literatura que destacasse as habilidades e conhecimento matemático de cada padrão de raciocínio flexível. Assim, com intuito de contribuir para a literatura em cálculo mental flexível, a partir dos três tipos de perfil identificados no Brasil, esta pesquisa visa: a) Caracterizar o perfil de flexibilidade cognitiva em cálculo mental, no 2º ano e no 4º ano do EF, identificando as ações mentais específicas (elemenos cognitivos) que sustentam o processo de resolução: características dos problemas e procedimentos de solução e; b) Comparar o repertório de características dos problemas e de procedimentos de solução utilizado entre os anos escolares.

Tem-se como hipóteses que: a) Cada perfil de flexibilidade será caracterizado pelo uso do conhecimento numérico (características, padrões e relações numéricas), enquanto os procedimentos de solução terão papel secundário nesta caracterização, embora espere-se alta proporção de uso devido à ênfase no ensino do algoritmo padrão, conforme evidenciado em alguns estudos (Mendes, 2012) e; b) Os estudantes de 4º ano apresentarão maiores proporções de uso do repertório de características numéricas do que os estudantes do 2º ano, de acordo com os resultados encontrados por Rathgeb-Schnierer e Green (2017) que evidenciaram que os alunos mais velhos apresentavam maior experiência com números e, portanto, maior conhecimento numérico e flexibilidade no racíocinio. No entanto, este ainda é um dado controverso na literatura, visto que alguns autores acreditam que os anos de experiência, junto com a introdução do algoritmo padrão, podem dificultar a flexibilidade nos cálculos (Heirdsfield & Cooper, 2004).

3. Método

3.1. *Amostra*

Participaram do estudo 84 alunos, 42 de 2º ano (7-8 anos) e 42 de 4º ano (9-11 anos), do Ensino Fundamental, oriundos de quatro escolas públicas de Porto Alegre, Rio Grande do Sul. A caracterização da amostra está na Tabela I. As escolas apresentam semelhança na metodologia de ensino e nas características socioeconômicas, e foram escolhidas a partir de critérios de conveniência da pesquisa (proximidade entre escolas, maior quantidade de alunos). Dois aspectos justificam a escolha do 2º e 4º anos. O primeiro, observar se há diferenças no perfil de flexibilidade em cálculo mental dos alunos com mais ou menos tempo de escolaridade. O segundo refere-se ao fato de que o instrumento para avaliar flexibilidade cognitiva em que o presente estudo se baseia, de Rathgeb-Schnierer e Green (2013, 2015, 2017), foi aplicado em alunos destes mesmos níveis de escolaridade.

Uma amostra inicial de 96 estudantes foi avaliada por meio do Subteste de Aritmética do Teste de Desempenho Escolar (TDE) (Stein, 1994). Foram incluídos no estudo apenas os alunos que obtiveram desempenho médio e superior na tarefa, de acordo com a padronização do teste, visando a necessidade de conhecimentos mínimos para a realização da avaliação de flexibilidade cognitiva. Nesta etapa, seis alunos foram excluídos e outras seis crianças foram retiradas da amostra por não concluírem a avaliação da flexibilidade cognitiva (Rathgeb-Schnierer & Green, 2017), totalizando os 84 estudantes. A autorização dos pais de todos os alunos participantes foi obtida com a assinatura do Termo de Consentimento Livre e Esclarecido. Este estudo foi aprovado pelo Comitê de Ética em pesquisa da Universidade Federal do Rio Grande do Sul, sob o número 4404721 5.3.0000.5347.

TABELA I
Caracterização da amostra

Dados	*Amostra total*	*2º ano*	*4º ano*
Amostra	84 100%	42 50%	42 50%
Meninas	35 100%	18 51,42%	17 48,57%
Meninos	49 100%	24 48,97%	25 51,02%
Média de idade	9,3	8,27	10,33

Nota. Elaborada pelas autoras

3.2. *Instrumentos*

Avaliação de flexibilidade cognitiva em cálculo mental: o instrumento de avaliação proposto por Rathgeb-Schnierer e Green (2013, 2015, 2017) consiste em uma entrevista, direcionada ao reconhecimento das características, padrões e relações numéricas de cálculos de adição e subtração de dois dígitos. Cada questão foi projetada para mostrar, no mínimo, uma característica numérica especial, conforme a Tabela II. As entrevistas, realizadas pela primeira autora, dividiram-se em dois momentos. O primeiro envolvia classificar os cálculos em "fáceis" ou "difíceis" e justificar a classificação. No segundo, as crianças resolviam os cálculos. Na primeira etapa, os estudantes foram incentivados a observar atentamente os números em cada cálculo para classificá-los nas categorias "fácil" ou "difícil" (estes rótulos foram colocados em cada lado da mesa). Em seguida, foram questionados os motivos da triagem: "Por que esse problema é fácil/difícil para você?". Na segunda fase, os alunos resolveram os cálculos de cada categoria (fácil ou difícil) e explicaram o raciocínio utilizado durante a resolução. Os estudantes foram orientados a realizar os cálculos "na cabeça". Lápis e papel foram disponibilizados sobre a mesa, mas não foram diretamente oferecidos aos alunos. O instrumento foi aplicado individualmente, em sala reservada dentro da escola, com duração de tempo que variou de 15 a 60 minutos por criança. Todas as entrevistas foram realizadas pela pesquisadora e filmadas para a posterior análise de dados. Somente raciocínios que levaram a uma solução correta dos cálculos foram computados como dado de pesquisa. As crianças que não chegaram a resultados corretos em nenhum cálculo foram excluídas do estudo.

TABELA II
Questões da tarefa de avaliação em flexibilidade em cálculo mental

CÁLCULOS	*CARACTERÍSTICAS*
33 + 33	– sem reagrupamento, dígitos duplos, dígitos duplos no lugar das unidades, inverso de 66-33.
34 + 36	– com reagrupamento, dígitos duplos no lugar das dezenas, unidades que somam 10.
47 + 28	– com reagrupamento.
56 + 29	– com reagrupamento, 29 perto de trinta.
65 + 35	– com reagrupamento, cinco no lugar das unidades, unidades somam 10.
73 + 26	– sem reagrupamento.
31 – 29	– com reagrupamento, faixa estreita de números, 29 perto de trinta.
46 – 19	– com reagrupamento, 19 perto de vinte.
63 – 25	– com reagrupamento.
66 – 33	– sem reagrupamento, relação de dobro e metade, dígitos dobrados, inverso de 33+33.
88 – 34	– sem reagrupamento, relação de dobro e metade nas unidades.
95 – 15	– sem reagrupamento, cinco no lugar das unidades.

Nota. Adaptado de Rathgeb-Schnierer e Green (2013, 2017)

Desempenho aritmético: para avaliar o nível de desempenho aritmético dos estudantes, foi utilizado o Subteste de Aritmética (SA) do Teste de Desempenho Escolar - TDE (Stein, 1994), instrumento padronizado para a cidade de Porto Alegre, composto por 38 questões envolvendo cálculos aritméticos com grau de dificuldade crescente. O instrumento foi aplicado pela pesquisadora, coletivamente, em sala de aula. Os escores do TDE (Stein, 1994) foram utilizados como critério de inclusão e a amostra representou os alunos com desempenho médio e alto em aritmética (escores do percentil 50 em diante).

3.3. *Análise de dados*

O conteúdo das entrevistas, registrado por meio de filmagens, foi analisado e categorizado pelo sistema de codificação desenvolvido por Rathgeb-Schnierer e Green (2013, 2015, 2017), baseado na premissa de que procedimentos padronizados demonstram conhecimento engessado e conhecimento numérico é indicador de flexibilidade. O sistema é composto por duas categorias principais: raciocínio por característica do problema (RCP) e raciocínio por procedimento de solução (RPS). Estas categorias centrais incluem vários códigos e subcódigos, conforme demonstrado na Tabela III:

TABELA III
Categorias do sistema de codificação

Códigos	*Subcódigos*
RACIOCINIO POR CARACTERISTICA DO PROBLEMA	
ADU – Analogia dezena e unidade	
RN – Relações numéricas	– Dobro e metade; – Quase dobro; * – Número próximo à dezena; – Distância entre os números.
RT – Relações da tarefa	– Associatividade; – Inversos total; – Operação de soma; * – Operação de subtração. *
CU – Características das unidades	– Soma das unidades é 10; – Soma inferior a 10; – Restante e reagrupamento; – 5 em ambas as unidades; – Restante e reagrupamento não é necessário.

NE – Números Especiais	– Mesmos números; – Números com 9; – Dígitos dobrados; – Números pares e ímpares. *
TN – Tamanho dos números	– Ambos os números são pequenos; – Ambos os números são grandes; * – Um dos números é pequeno; * – Um dos números é grande. *
FB – Fatos básicos	– Parte do cálculo conhecido; – Todo o cálculo conhecido.
RACIOCÍNIO POR PROCEDIMENTO DE SOLUÇÃO	
CD – Composição e decomposição	
CT – Contagem	
ED – Encontrar diferenças	
MP – Modificar o problema	
AP – Algoritmo padrão	
OE – Outra estratégia	

Nota. Elaborada pelas autoras a partir de Rathgeb-Schnierer e Green (2013, 2015, 2017)

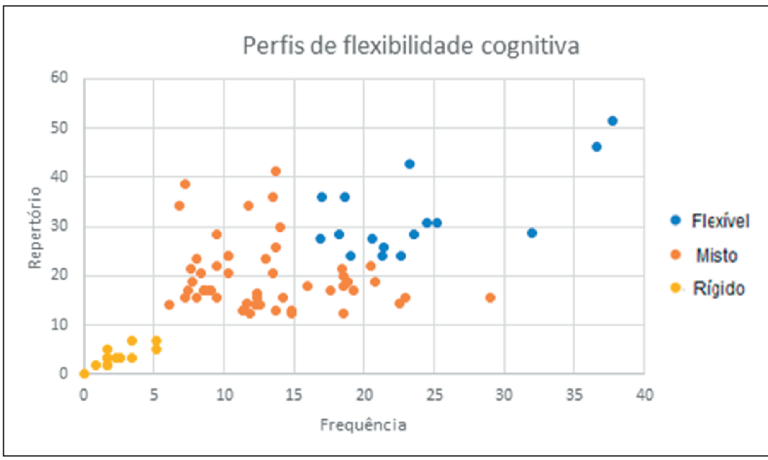
* Estas subcategorias surgiram a partir da amostra deste estudo, mas só foram incluídas porque havia lógica no raciocínio empregado.

O raciocínio por características do problema foi codificado quando os estudantes se referiram especificamente às características do problema – por exemplo, fatos básicos, associatividade, quase dobro – portanto, considerado um raciocínio flexível. O raciocínio por procedimentos de solução foi codificado quando os alunos descreveram qualquer técnica de computação mental, ou seja, que envolveu procedimentos mentais do tipo contagem, composição ou decomposição, algoritmo padrão, entre outros, sendo considerado como raciocínio rígido (Rathgeb-Schnierer & Green, 2017).

Após a categorização das respostas dos estudantes, foram realizadas comparações dos valores de frequência e repertório dos dados de raciocínio por característica do problema (RCP) e raciocínio por procedimento de solução (RPS), através de uma razão que evidenciava a diferença entre os dois tipos de raciocínio. Essas comparações foram baseadas em Rathgeb-Schnierer e Green (2013, 2015, 2017) que definem os perfis de flexibilidade pela diferença de uso dos dois tipos de raciocínio. Os autores utilizaram apenas dados de frequência em suas análises, no entanto, o presente estudo incluiu a informação de repertório, pois o interesse principal é identificar os conhecimentos matemáticos utilizados em cada perfil.

Os seguintes valores (aproximados) foram tomados como referência para a distribuição da amostra nos perfis de raciocínio. As métricas menores que 1 indicavam a prevalência de RPS, portanto o perfil dos alunos era rígido. Os valores iguais a 1 indicavam o equilíbrio entre RCP e RPS, assim estes alunos apresentaram raciocínio misto. Por fim, as métricas maiores que 1 representaram preferência pelo RCP e os estudantes foram classificados como flexíveis.

Deste modo, no perfil flexível foram identificados alunos do 2º ano (n=8) e alunos do 4º ano (n=8). No perfil misto também foram observados estudantes de 2º ano (n=19) e de 4º ano (n=34). O perfil rígido foi composto exclusivamente por crianças do 2º ano (n=15), conforme observado na Figura 1.



Nota. Elaborada pelas autoras

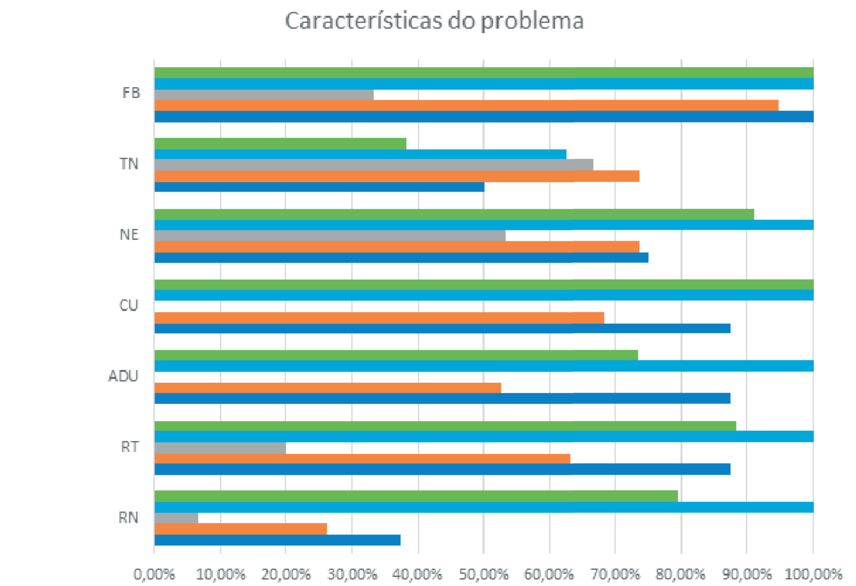
Figura 1. Dispersão dos perfis de flexibilidade cognitiva

Para examinar e caracterizar os perfis de raciocínio flexível dos estudantes, o repertório foi calculado a partir do uso ou não de cada item pelos estudantes, durante a resolução dos cálculos da tarefa avaliativa. Deste modo, obteve-se as porcentagens de alunos que utilizaram cada recurso dos dois padrões de raciocínio. Assim, foi possível ter a visão da variabilidade do raciocínio em cada grupo dos perfis de flexibilidade.

O teste exato de Fischer (p>0,05) verificou a significância estatística das proporções de alunos que utilizaram cada recurso das características dos problemas (CP) e dos procedimentos de solução (PS). O teste verificou as diferenças entres os perfis rígido, misto e flexível dentro de cada ano escolar, como também comparou a diferença entre 2º e 4º ano em cada grupo de raciocínio (por exemplo, mistos de 2º e 4º ano).

3.4. *Resultados*

As figuras 2 e 3, expostas a seguir, demonstram a distribuição do repertório de características do problema e procedimento de solução, respectivamente, por ano escolar e por padrão de raciocínio. As interpretações de cada figura serão descritas, evidenciando as características de cada perfil de raciocínio.

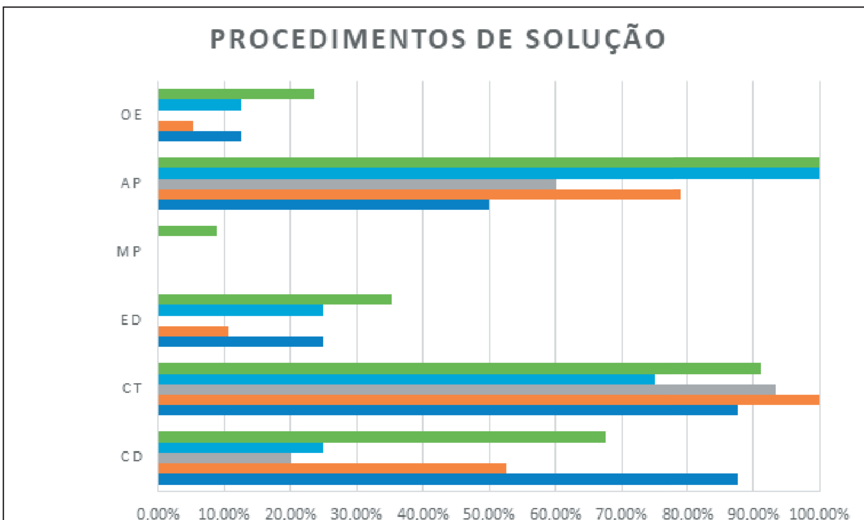


	RN	RT	ADU	CU	NE	TN	FB
4º ano Misto	79,41%	88,24%	73,53%	100,00%	91,18%	38,24%	100,00%
4º ano Flexível	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	100,00%	62,50%	100,00%
2º ano Rígido	6,67%	20,00%	0,00%	0,00%	53,33%	66,67%	33,33%
2º ano Misto	26,32%	63,16%	52,63%	68,42%	73,68%	73,68%	94,74%
2º ano Flexível	37,50%	87,50%	87,50%	87,50%	75,00%	50,00%	100,00%

Nota. Elaborada pelas autoras

Figura 2. Proporções de uso dos recursos das características do problema

A proporção de alunos que utilizaram *Relações Numéricas* (RN) foi significativamente maior no grupo de alunos flexíveis do 4º ano em comparação ao mesmo grupo do 2º ano (p=0,0256). Mais alunos mistos de 4º ano utilizaram RN do que os estudantes mistos de 2º ano (p=0,0003) e não houve diferença estatística entre os grupos flexíveis, mistos e rígidos de cada ano escolar. No que diz respeito às *Relações da Tarefa* (RT), os alunos rígidos do 2º ano diferiram (p=0,0043) de seus colegas mistos e flexíveis, desta forma, a proporção de alunos rígidos que utilizaram RT foi significativamente menor que a proporção de alunos mistos e flexíveis, sendo que estes não diferiram entre si. A proporção de alunos mistos de 4º ano foi estatisticamente superior (p=0,0410) à proporção dos mistos de 2º ano na utilização de RT. Em relação à *Associação Dezena e Unidade* (ADU), os estudantes rígidos do 2º ano não apresentaram ADU em seu repertório (p>0,0001) e, portanto, diferiram estatisticamente dos demais. No que tange às *Características das Unidades* (CU), o grupo misto do 4º ano teve proporção significativamente maior (p=0,0011) do que o grupo misto de 2º ano no uso de características das unidades. As CU não foram utilizadas pelo grupo de estudantes rígidos (p<0,001), portanto os rígidos diferiram estatisticamente dos seus pares do 2º ano mistos e flexíveis. No *Tamanho dos Números* (TN), houve diferença estatística apenas no grupo dos alunos mistos (p= 0,0214), em que os estudantes de 2º ano utilizaram mais TN do que seus colegas de 4º ano. Por fim, nos *Fatos Básicos* (FB), o grupo de alunos rígidos do 2º ano diferiu significativamente de seus colegas de mesmo ano escolar (p= 0,0002), com uma baixa proporção de alunos que recorreram ao uso de fatos básicos.



	CD	CT	ED	MP	AP	OE
4º ano Misto	67,65%	91,18%	35,29%	8,82%	100,00%	23,53%
4º ano Flexível	25,00%	75,00%	25,00%	0,00%	100,00%	12,50%
2º ano Rígido	20,00%	93,33%	0,00%	0,00%	60,00%	0,00%
2º ano Misto	52,63%	100,00%	10,53%	0,00%	78,95%	5,26%
2º ano Flexível	87,50%	87,50%	25,00%	0,00%	50,00%	12,50%

Nota. Elaborada pelas autoras

Figura 3. Proporções de uso dos recursos dos procedimentos de solução

Concernente à *Composição e decomposição* (CD), no 2º ano, a proporção de estudantes que a utilizou foi significativamente maior no grupo flexível (p= 0,0090) do que nos grupos mistos e rígidos e, estes, por sua vez, não diferiram entre si. A proporção de alunos flexíveis do 4º ano que utilizaram CD foi estatisticamente menor do que os estudantes mistos do mesmo ano escolar (p= 0,0449). Dentro do grupo flexível, os alunos do 2º ano apresentaram maior proporção de utilização de CD do que seus colegas do 4º ano (p=0,0405). O uso da *Contagem* (CT) apresentou alta proporção de alunos que a utilizaram durante a resolução dos cálculos e não houve diferença estatística entre os grupos de raciocínio e dentro dos anos escolares. Em relação ao *Algoritmo padrão* (AP), todos os alunos do 4º ano utilizam o algoritmo padrão durante a resolução dos cálculos. No entanto, apenas a proporção de estudantes mistos de 4º ano que utilizaram AP foi estatisticamente superior à proporção do mesmo perfil de 2º ano (p= 0,0132).

O repertório total da amostra contabilizou 626 raciocínios de resolução, destes, 402 (64%) são raciocínios por características do problema (RCP) e 224 (36%) são raciocínios por procedimentos de solução (RPS). Os estudantes do 2º ano apresentaram 249 (40%) raciocínios, dos quais 155 (62%) são RCP e 94 (38%) são RPS. Os alunos do 4º ano representam 60% (377) dos raciocínios totais da amostra, em que 247 (66%) são RCP e 130 (34%) são RPS. A Tabela IV demonstra os valores totais das proporções de uso de características do problema e de procedimentos de solução pelos grupos de raciocínio por ano escolar.

TABELA IV
Proporções de uso de características do problema e de procedimentos de solução

PERFIL	*ANO*	*CP*	*PS*	*p- valor*
Flexível	2º ano	75,00%	43,75%	0,0005
	4º ano	94,64%	39,58%	<0,0001
		p= 0,0070	p=0,8362	
Misto	2º ano	64,66%	41,23%	<0,0001
	4º ano	81,51%	54,41%	<0,0001
		p=0,0004	p=0,0266	
Rígido	2º ano	25,71%	28,89%	0,8632

Nota. Elaborada pelas autoras

CP – características do problema; PS- procedimentos de solução. Nível de significância à 0,05.

Estudantes flexíveis de 2º e 4º ano apresentaram clara preferência pelo uso de característica do problema (CP) em relação aos procedimentos de solução (PS), confirmado pela diferença estatística verificada pelo teste exato de Fischer ($p=0,0005$ e $p<0,0001$, respectivamente). Os dois anos escolares do perfil flexível não diferem entre si no uso de PS ($p=0,8362$), no entanto o 4º ano usou CP em maior proporção estatística do que o 2º ano ($p=0,0070$). Este resultado indica que os estudantes mais velhos exibiram maior grau de flexibilidade do que seus pares mais novos, em virtude do maior repertório de uso de recursos de características do problema.

O perfil misto, de 2º e 4º ano, apresenta proporções de CP e PS mais aproximadas, se comparadas ao perfil flexível, mesmo que o uso de características do problema tenha sido significativamente maior do que os procedimentos de solução ($p <0,0001$ para ambos). Os alunos mistos de 2º e 4º ano diferiram entre si no uso de CP ($p =0,0004$) e no uso PS ($p=0,0266$), demonstrando que os alunos de 4º ano utilizaram maiores proporções dos dois tipos de raciocínio. Estes resultados indicam que o 4º ano apresenta vantagem no grau de flexibilidade em relação aos alunos de 2º ano.

O grupo rígido, composto apenas por estudantes de 2º ano, utilizou proporções de CP e PS estatisticamente baixas e equivalentes ($p=0,863$).

4. Discussão

Em uma análise geral, foi observada alta proporção de uso de características, padrões e relações numéricas (64%) pelos estudantes de 2º e 4º anos, de forma que o reconhecimento e uso destes levaram os alunos a determinar os passos a serem seguidos no caminho da resolução dos cálculos, a revisar seus procedimentos durante o cálculo e a confirmar os resultados de diferentes maneiras. Os fatos básicos (FB) foram o recurso mais utilizado para chegar à solução, seguidos pelos números especiais (NE) e pelas características das unidades (CU). Em contrapartida, apesar das menores proporções de uso (36%), os procedimentos de solução estavam presentes em quase todos os cálculos realizados, com forte destaque para o algoritmo padrão (AP), composição e decomposição (CD) e contagem (CT). A seguir, serão destacados os recursos mais significativos em cada perfil de flexibilidade dos dois anos escolares, conforme o primeiro objetivo.

O uso da contagem foi determinante para a carateterização do perfil de raciocínio rígido, pois o desempenho na tarefa foi pautado por este procedimento, e, assim, determinou o uso de outros recursos. A contagem (93,3%) cumpriu papel de abordagem principal de resolução, apoiada nos dedos ou na representação gráfica, de modo a compensar o conhecimento numérico limitado dos estudantes rígidos. O grupo apresentou a menor proporção do uso do algoritmo (60%), que se deve à falta de compreensão do conjunto de regras deste procedimento. Os alunos rígidos não conseguiam "armar a conta" corretamente e seguir suas etapas procedimentais e, assim, recorriam à contagem. Esse resultado indica a baixa compreensão numérica deste grupo, pois pouca ou nenhuma compreensão é necessária para o uso de procedimentos (Heirdsfield e Cooper, 2004). Dentre as características do problema, o tamanho do número (TN) foi um recurso que obteve a maior proporção de uso (66,6%), pois os alunos procuravam pelos cálculos com números de menor magnitude, que demandassem menos trabalho na contagem um – a – um (por exemplo, 46-19 e 33+33). Este grupo também se destaca pela menor proporção de fatos básicos (33%). Usar a contagem como um procedimento de solução reforça uma tendência de rigidez do raciocínio, conforme explicam Rathgeb-Schnierer e Green (2013, 2015, 2017), por limitar a resolução à aplicação de um regramento. Além disso, possuir um limitado repertório de procedimentos de solução e de conhecimento numérico dificulta a construção de fatos aritméticos básicos. Nesse sentido, Serrazina e Rodrigues (2021) apontam que os fatos básicos são desenvolvidos na prática com os números, suas características e relações, e são um suporte essencial para o cálculo mental. Assim, a aparente pouca prática com os números pode justificar as menores proporções de uso das características do problema no perfil rígido.

O grupo de alunos mistos, incluindo 2º e 4º anos, abrangeu perfis bastante heterogêneos de raciocínio. Estes alunos apresentaram maior variabilidade na proporção de uso de características do problema (CP) e procedimentos de solução (PS), sem apresentar um padrão de raciocínio dominante. Embora os estudantes mistos de 2º ano apresentem altas proporções de uso de contagem (100%) e de tamanho do número (73,6%), também têm alta proporção de fatos básicos (94,7%), o que revela que eles já possuem certa prática em cálculos e números (Serrazina & Rodrigues, 2021). O perfil misto de 4º ano utilizou todos os recursos dos dois tipos de raciocínio, demonstrando a grande variabilidade cognitiva deste grupo. Estudos interventivos recentes têm apontado que a articulação do ensino de procedimentos e de uma base numérica parece ser o caminho mais promissor para o desenvolvimento e manutenção da habilidade de flexibilidade em cálculos (Heinze *et. al.,* 2020), mesmo após a introdução do algorítimo padrão. Assim, a heterogeneidade desse grupo, se bem conduzida, pode levar a níveis mais sofisticados de raciocínio.

O perfil flexível de 2º ano foi o grupo que mais recorreu à composição e decomposição (87,5%), o que pode indicar que estava menos vinculado ao algoritmo padrão e mais disposto a basear seu raciocínio em procedimentos matemáticos construídos, possivelmente vinculados ao senso numérico (Serrazina & Rodrigues, 2021). Estes alunos apresentaram repertório de características do problema variado e estatisticamente superior aos procedimentos de solução, demonstrando uma compreensão numérica mais complexa, que suporta o cálculo por meio da adaptação deste conhecimento ao processo flexível de solução (Heirdsfield & Cooper, 2004; McMullen *et al*., 2016; Rathgeb-Schnierer & Green, 2015, 2019)

Os estudantes flexíveis de 4º ano evidenciaram um padrão de raciocínio com clara preferência pelo raciocínio por características do problema (RCP) (Figura 2). Estes alunos apresentaram um repertório rico e interconectado de conhecimentos numéricos, base para o cálculo mental (Serrazina & Rodrigues, 2021), dentre os quais destaca-se a relação parte todo, relação dobro / metade, associatividade, distributividade, completar a dezena, valor posicional, relação inversa entre adição e subtração e fatos básicos. Diferentes meios de solução partiram de um destes conhecimentos ou da articulação entre mais de um deles, o que indica a flexibilidade do raciocínio matemático destes estudantes (Heirdsfield & Cooper, 2004; Korten, 2020; Rathgeb-Schnierer & Green, 2019). Outro destaque importante do perfil flexível foi a capacidade metacognitiva de monitoramento na realização dos cálculos, verificada na postura de muitos estudantes de procurar alternativas de solução que verificassem os resultados alcançados e, inclusive, a aplicação de procedimentos padronizados para a verificação da solução correta para o cálculo. Como bem lembram Heirdsfield e Cooper (2004), a metacognição é um indicador importante de flexibilidade no raciocínio e está bem estabelecida como preditora do desempenho matemático posterior (Aunio & Räsänen, 2015).

De acordo com a discussão acima, verifica-se a confirmação parcial da primeira hipótese, visto que as proporções totais (Tabela 4) e de cada recurso do raciocínio por características do problema (Figura 2) diferenciaram os perfis de flexibilidade cognitiva no 2º ano e no 4º ano. Cada grupo fez uso de recursos em diferentes proporções, enquanto os grupos flexíveis usaram e articularam seu conhecimento numérico em todas as situações de cálculo; os grupos mistos e rígido os utilizaram em menor proporção. Entretanto, a alta proporção de uso de procedimentos de solução (Figura 3) cumpriu uma função tão importante quanto as características dos problemas na caracterização dos perfis, diferente do desempenho secundário que a hipótese inicial estabelecia. O limitado conhecimento de recursos matemáticos como, por exemplo, as relações de dobro e metade, associatividade e de fatos básicos, levaram grande parte das crianças a recorrerem ao recurso seguro para alcançar a solução de um cálculo (Threlfall, 2002) e, por isso, as proporções de contagem foram altas em todos os perfis de flexibilidade.

As comparações entre os dois anos escolares, segundo objetivo do estudo, indicam que os estudantes de 4º ano apresentaram maiores proporções de uso do repertório de características do problema do que seus colegas de 2º ano, enquanto que o uso do repertório de procedimentos de solução obteve maior equilíbrio entre os dois anos escolares. Destaca-se a maior proporção de uso de tamanho do número (TN) no 2º ano, que se trata de uma abordagem que demanda um conhecimento numérico mais superficial, vinculado à maior proporção de uso de contagem. Ou seja, o 2º ano apresenta recursos cognitivos mais imaturos para sustentar a resolução de cálculos mentais. O 4º ano, por sua vez, apesar de ter apresentado conhecimento numérico mais aprofundado, indicado pelas altas proporções de características do problema, também se destacou pelo uso do algoritmo padrão (AP) e de encontrar a diferença (ED), o que demonstra a marca do sistema de ensino baseado em procedimentos mecanizados. A prevalência de raciocínio por caraterísticas do problema indica flexibilidade (Rathgeb-Schnierer & Green, 2015), portanto os estudantes do 4º ano foram mais flexíveis do que seus pares mais jovens, confirmando a hipótese deste objetivo. Este achado contradiz alguns resultados da literatura que afirmam que, após aprender um algoritmo padrão de cálculos, as crianças abandonam estratégias mais vantajosas e apropriadas e que estes procedimentos podem ter um impacto negativo no desenvolvimento da flexibilidade em cálculo mental (Heirdsfield; Cooper, 2004; Rathgeb-Schnierer & Green, 2015, 2019; Rechtsteiner-Merz & Rathgeb-Schnierer, 2015). Em contrapartida, outros resultados, a favor da hipótese, mostram que as crianças mais velhas tendem a apresentar um nível de raciocínio mais complexo, articulando diferentes fontes de conhecimento que favorecem a flexibilidade (McMullen *et al.*, 2016). Corroborando estes resultados, a pesquisa de Caviola e colaboradores (2018) comparou as habilidades de cálculo aritmético de estudantes de 3º e 5º anos e evidenciou que a superioridade da compreensão conceitual dos alunos de 5º ano está de acordo com seu nível de experiência numérica (mais tempo de escolarização).

6. Considerações finais

O objetivo desta pesquisa foi identificar os conhecimentos subjacentes que caracterizam o perfil de flexibilidade cognitiva em cálculo mental de estudantes de 2º e 4º anos do Ensino Fundamental, com base na análise das ações mentais utilizadas durante a resolução de cálculos aritméticos: características dos problemas e procedimentos de solução. Além disso, buscou-se comparar o repertório de uso daquelas ações mentais entre os anos escolares, a fim de verificar como os perfis de raciocínio flexível se manifestam e se diferenciam em cada ano escolar.

Dentre os resultados, evidenciou-se que os estudantes mais flexíveis apresentavam conhecimento numérico mais desenvolvido e que as porcentagens de uso deste conhecimento diferenciaram os perfis de flexibilidade entre os anos escolares. Neste sentido, argumenta-se, com base na perspectiva de Serrazina e Rodrigues (2021), que a flexibilidade cognitiva pode ser um indicador de senso numérico, posto que o ensino experienciado pelos alunos da pesquisa enfatizava habilidades procedimentais em detrimento do conhecimento numérico. Embora o desenvolvimento do senso numérico não seja um objetivo evidente no Ensino Fundamental no Brasil, a prática com os números estabelece relações e padrões numéricos que constituem os fatos básicos e propiciam a base para o cálculo flexível (Korten, 2020; Rathgeb-Schnierer & Green, 2019; Rechtsteiner-Merz & Rathgeb-Schnierer, 2015) e para o senso numérico (Serrazina & Rodrigues, 2021). Observou-se também que todos os recursos do raciocínio por características do problema foram usados pelos dois anos escolares, com menores proporções no 2º ano e maiores no 4º ano, ou seja, de modo geral, estes recursos cognitivos, ou ações mentais, já estavam disponíveis para as crianças mais novas e o seu uso foi ampliado pelas crianças mais velhas (Caviola *et al*., 2018; McMullen *et al*., 2016). Acredita-se que tal achado esteja relacionado ao nível de experiência numérica dos estudantes (Rathgeb-Schnierer & Green, 2017). Embora o conhecimento numérico tenha se destacado nos resultados, os procedimentos de solução também evidenciaram as fragilidades deste conhecimento nos estudantes brasileiros, pois houve alta proporção de contagem, considerada a mais imatura das estratégias de cálculo (Threfall, 2002).

Neste ponto, faz-se pertinente dirigir esforços de pesquisa para alcançar objetivos práticos e aplicados. Com isso, algumas implicações educacionais merecem destaque. A flexibilidade em cálculo mental pode ser favorecida por atividades que encoragem os alunos a prestar atenção sobre as características das operações e as relações numéricas (Korten, 2020; Rechtsteiner-Merz & Rathgeb-Schnierer, 2015). Os professores podem levantar questões cognitivamente desafiadoras, com o intuito de estimular a reflexão dos alunos e fazê-los raciocinar (metacognição) sobre suas escolhas (por exemplo, “Este cálculo é fácil ou difícil para você? Por quê?”; “Existem operações fáceis que te ajudam a resolver aquelas que são mais difíceis?”). Ações desse tipo implicam adiar o ensino do algoritmo em favor do enfoque que prioriza a análise das características das operações e das relações entre as operações (Rathgeb-Schnierer & Green, 2019; Serrazina & Rodrigues, 2021). Outra implicação para a educação diz respeito à necessidade de o professor conhecer e identificar os perfis de raciocínio dos seus alunos para que possa obter uma visão ampla do conhecimento numérico dos mesmos, e, a partir disso, traçar ações de intervenção pedagógica que previnam dificuldades posteriores e promovam níveis mais sofisticados e flexíveis de pensamento matemático (McMullen *et al.*, 2016). Em especial, diante de uma evidência recente de que a flexibilidade em aritmética prediz o desempenho em álgebra nos anos mais adiantados da Educação Básica (McMullen *et al.*, 2017).

Convém lembrar que os achados deste estudo devem ser considerados de acordo com algumas limitações identificadas. Dentre elas, ressalta-se o fato de o instrumento de avaliação da flexibilidade usado, proposto por Rathgeb-Schnierer e Green (2013, 2015, 2017), apresentar cálculos aritméticos que não foram adequados ao conhecimento matemático dos estudantes de 2º ano da amostra. Por assim ser, o desempenho deste ano escolar foi significativamente inferior, gerando poucos dados sobre o raciocínio destas crianças, o que pode ter influenciado nos dados finais, uma vez que o grupo de estudantes rígidos foi composto exclusivamente por estudantes deste ano escolar.

Para finalizar, destaca-se que este estudo apresenta as primeiras impressões sobre a flexibilidade cognitiva no contexto educacional do Brasil e, por assim ser, pesquisas futuras precisam direcionar esforços para ampliar a compreensão deste constructo em estudantes brasileiros e estabelecer referências que identifiquem cada perfil, o que requer, entre outros aspectos, observar a adequação dos instrumentos avaliativos de flexibilidade para as diferentes etapas de escolaridade, assim como para o currículo escolar. Estudos futuros podem esclarecer a construção do racíocinio flexível e como este se correlaciona com o desempenho matemático posterior, além de delimitar, com maior objetividade, a identicação dos perfis de raciocínio. Aponta-se igualmente a relevância de pesquisas que correlacionem a flexibilidade em cálculo mental a habilidades de domínio especifico (como o senso numérico) e de domínio geral (por exemplo, a memória de trabalho), particularmente em estudos longitudinais que acompanhem o desenvolvimento da flexibilidade em cálculo mental durante o processo de escolarização.

Referências

Andrews, P., Sunde, P. B., Nosrati, M., Petersson, J., Rosenqvist, E., Sayers, J. e Xenofontos, C. (2021). Computational Estimation and Mathematics Education: A Narrative Literature Review. *Journal of Mathematics Education*, *14*(1), 6-27. https://doi.org/10.26711/007577152790061

Aunio, P. (2019). Early Numeracy Skills Learning and Learning Difficulties - Evidence-based Assessment and Interventions. Em Geary, D. C., Berch, D. B. e Koepke, K. M. (Eds.). *Cognitive Foundations for Improving Mathematical Learning* (pp. 195-214). Academic Press. https://doi.org/10.1016/B978-0-12-815952-1.00008-6

Aunio, P. e Räsänen, P. (2015). Core numerical skills for learning mathematics in children aged five to eight years–a working model for educators. *European Early Childhood Education Research Journal, 24*(5), 684-704. https://doi.org/10.1080/1350293X.2014.996424

Brasil. (2021a). *Resultados do Índice de Desenvolvimento da Educação Básica: resumo técnico.* Brasília, Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira.

Brasil. (2021b). *Relatório de resultados do Saeb 2019: volume 1: 5o e 9o anos do Ensino Fundamental e séries finais do Ensino Médio.* Brasília, Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira.

Buys, K. (2001). Mental arithmetic. In van den Heuvel-Panhuizen, M. (Ed.), *Children learn mathematics* (pp. 121-146). Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.

Carvalho, R., e Rodrigues, M. (2021). Day number routine: An opportunity to understand students' uses of numbers and operations. *Journal of Mathematics Education*, *14*(1), 28-46. https://doi.org/10.26711/007577152790062.

Caviola, S., Mammarella, I. C., Pastore, M. e Lefevre, J. A. (2018). Children's strategy choices on complex subtraction problems: Individual differences and developmental changes. *Frontiers in psychology*, *9*, Article 1209. https://doi.org/10.3389/fpsyg.2018.01209.

Ching, B. H.-H. e Nunes, T. (2017). The Importance of Additive Reasoning in Children's Mathematical Achievement: A Longitudinal Study. *Journal of Educational Psychology, 109*(4), 477-508. https://doi.org/10.1037/edu0000154.

Heirdsfield, A. M. e Cooper, T. J. (2004). Factors affecting the process of proficient mental addition and subtraction: Case studies of flexible and inflexible computers. *The Journal of Mathematical Behavior, 23*(4), 443-463. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2004.09.005.

Heinze, A., Grüßing, M., Arend, J. e Lipowsky, F. (2020). Fostering Children's Adaptive Use of Mental Arithmetic Strategies: A Comparison of Two Instructional Approaches. *Journal of Mathematics Education*, *13*(1), 18-34. https://doi.org/10.26711/007577152790052.

Korten, L. (2020). Developing Flexibility in Mental Arithmetic in Interactive-Cooperative Learning Situations: Interaction as an Occasion for Productive Learning Processes. *Journal of Mathematics Education*, *13*(1), 73-94. https://doi.org/10.26711/007577152790055.

McMullen, J., Brezovszky, B., Hannula-Sormunen, M. M., Veermans, K., Rodríguez-Aflecht, G., Pongsakdi, N. e Lehtinen, E. (2017). Adaptive number knowledge and its relation to arithmetic and pre-algebra knowledge. *Learning and Instruction*, *49*, 178-187. http://dx.doi.org/10.1016/j.learninstruc.2017.02.001.

McMullen, J., Brezovszky, B., Rodríguez-Aflecht, G., Pongsakdi, N., Hannula-Sormunen, M. M. e Lehtinen, E. (2016). Adaptive number knowledge: Exploring the foundations of adaptivity with whole-number arithmetic. *Learning and Individual Differences*, *47*, 172-181. https://doi.org/10.1016/j.lindif.2016.02.007.

Mendes, M. F. P. C. (2012). *A aprendizagem da multiplicação numa perspectiva de desenvolvimento do sentido de número: um estudo com alunos do 1.º ciclo* [Tese de Doutorado, Instituto de Educação da Universidade de Lisboa]. Repositório da Universidade de Lisboa. http://hdl.handle.net/10451/5893.

Nunes, S. C. T., Dorneles, B. V., e Corso, L. V. (2020). Flexible Mental Calculation: Reasoning Profiles of Brazilian Students in Second and Fourth Grades. *Journal of Mathematics Education, 13*(1), 35-55. https://doi.org/10.26711/007577152790053.

Rechtsteiner-Merz, C. e Rathgeb-Schnierer, E. (2015). Flexible mental calculation and "Zahlenblickschulung". Em K. Krainer e N. Vondrová (Eds.), *Proceedings of the Ninth Conference of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 354-360). Charles University in Prague, Faculty of Education and ERME. https://hal.inria.fr/CERME9-TWG02/hal-01281864v1.

Rathgeb-Schnierer, E. e Green, M. (2013). Flexibility in mental calculation in elementary students from different math classes. Em *Proceedings of the Eighth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 353-362). Middle East Technical University and ERME. http://cerme8.metu.edu.tr/wgpapers/WG2/WG2_Rathgeb_Schnierer.pdf.

Rathgeb-Schnierer, E. e Green, M. (2015). *Cognitive flexibility and reasoning patterns in American and German elementary students when sorting addition and subtraction problems* [Conference presentation]. CERME 9-Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education, Prague, Czech Republic.

Rathgeb-Schnierer, E. e Green, M. (2017). Profiles of cognitive flexibility in arithmetic reasoning: A cross-country comparison of German and American elementary students. *Journal of Mathematics Education, 10*(1), 1-16. https://doi.org/10.26711/007577152790009.

Rathgeb-Schnierer, E. e Green, M. (2019). Desenvolvendo Flexibilidade no Cálculo Mental. *Educação e Realidade*, *44*(2), Article e87078. http://dx.doi.org/10.1590/2175-623687078.

Serrazina, M. D. L. e Rodrigues, M. (2017). 'Day number': A promoter routine of flexibility and conceptual understanding. *Journal of Mathematics Education*, *10*, 67-82. https://doi.org/10.26711/007577152790013.

Serrazina, L. e Rodrigues, M. (2021). Number sense and flexibility of calculation: A common focus on number relations. Em Spinillo, A. G., Lautert, S. L. e Borba, R. E. d. S. R. (eds). *Mathematical Reasoning of Children and Adults* (pp. 19-40). Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-69657-3_2.

Spinillo, A. G. (2014). Usos e funções do número em situações do cotidiano. Em Brasil. *Pacto Nacional pela Alfabetização na Idade Certa: Quantificações, registros e agrupamentos* (pp. 20-29). Ministério da Educação, Secretaria da Educação Básica.

Star, J. R., Newton, K., Pollack, C., Kokka, K., Rittle-Johnson, B. e Durkin, K. (2015). Student, teacher, and instructional characteristics related to students' gains in flexibility. *Contemporary Educational Psychology, 41*, 198-208. https://doi.org/10.1016/j.cedpsych.2015.03.001.

Stein, L. M. (1994). TDE: teste de desempenho escolar: manual para aplicação e interpretação. São Paulo: Casa do Psicólogo.

Thompson, I. (1999). Mental calculation strategies for addition and subtraction. Part 1. *Mathematics in school*, *28*(5), 2-4. http://www.jstor.org/stable/30215422.

Threlfall, J. (2002). Flexible mental calculation. *Educational studies in Mathematics, 50*(1), 29-47. https://link.springer.com/article/10.1023/A:1020572803437.

Threlfall, J. (2009). Strategies and flexibility in mental calculation. *ZDM, 41*(5), 541-555. https://link.springer.com/article/10.1007/s11858-009-0195-3.

Verschaffel, L., Greer, B. e de Corte, E. (2007). Whole number concepts and operations. Em F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 557-628). Reston, VA: NCTM.

Autoras

Sula Cristina Teixeira Nunes. Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Brasil.
0000-0002-9287-6389 sulactn@gmail.com

Évelin Fulginiti de Assis. Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Brasil.
0000-0002-8542-0607 evelin_assis@hotmail.com

Luciana Vellinho Corso. Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Brasil.
0000-0001-6384-3994 luciana.corso@ufrgs.br

Mayra Báez Melendres, Rosa María Farfán Márquez

SISTEMATIZACIÓN Y ANÁLISIS DE UN PROCESO DE REFLEXIÓN SOBRE LA MATEMÁTICA ESCOLAR: ASPECTOS PARA LA PROFESIONALIZACIÓN DOCENTE

Systematization and analysis of a process of reflection on school mathematics: aspects for teacher professionalization

RESUMEN

En este artículo se presentan resultados de una investigación basada en el proceso de reflexión sobre la matemática escolar de un profesor de nivel secundario. Para ello se configuró un modelo teórico de tres componentes articulado con la Teoría Socioepistemológica. Específicamente, se expone cómo sucede el proceso: de qué y cómo se toma conciencia, qué conocimientos se construyen y qué se transforma. Para el análisis consideramos una categoría de significados y otra sobre las formas de argumentación relacionadas con la proporcionalidad directa; tales categorías permitieron entender el estado del conocimiento del profesor al inicio y al término del proceso reflexivo. Entre los resultados tenemos que la reflexión de la proporcionalidad escolar da evidencia de que el cambio de relación a este conocimiento matemático promueve la conciencia de una responsabilidad sobre la formación matemática y el desarrollo de una autonomía sobre el conocimiento matemático (ambos relacionados a la proporcionalidad), dos aspectos que caracterizan a la profesionalización docente en matemáticas.

PALABRAS CLAVE:

- *Profesionalización docente*
- *Reflexión*
- *Problematización*
- *Proporcionalidad*
- *Significados*

ABSTRACT

This paper presents the results of a research based on the process of reflection on school mathematics of middle school teacher. For this purpose, a three-component theoretical model was configured, articulated with the Socioepistemological Theory. Specifically, it shows how the process takes place: what and how awareness is acquired, what knowledge is constructed and what is transformed. For the analysis we considered a category of meanings and another on the forms of argumentation related to direct proportionality; both categories allowed us to understand the state of the teacher's knowledge at the beginning and at the end of the reflective process.

KEY WORDS:

- *Teacher professionalization*
- *Reflection*
- *Problematization*
- *Proportionality*
- *Meanings*

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (2022) *25* (1): 35-62.
Recepción: Octubre 25 2020 / Aceptación: Julio 25, 2022. DOI: 10.12802/relime.22.2512

Among the results we have that the reflection of school proportionality gives evidence that the change of relationship to this mathematical knowledge promotes the awareness of responsibility for mathematical education and the development of autonomy over mathematical knowledge (both related to proportionality), two aspects that characterize the professionalization of mathematics teachers.

RESUMO

Este artigo apresenta os resultados de um projecto de investigação baseado no processo de reflexão de um professor do ensino secundário sobre a matemática escolar. Para este efeito, foi configurado um modelo teórico de três componentes, articulado com a Teoria Socioepistemológica. Especificamente, estabelece como o processo acontece: o que e como a consciência é aumentada, que conhecimento é construído e o que é transformado. Para a análise considerámos uma categoria de significados e outra sobre as formas de argumentação relacionadas com a proporcionalidade directa; tais categorias permitiram-nos compreender o estado dos conhecimentos do professor no início e no fim do processo de reflexão. Entre os resultados temos que o reflexo da proporcionalidade escolar evidência que a mudança de relação com este conhecimento matemático promove a consciência de uma responsabilidade na formação matemática e o desenvolvimento de uma autonomia no conhecimento matemático (ambos relacionados com a proporcionalidade), dois aspectos que caracterizam a profissionalização dos professores de matemática.

PALAVRAS CHAVE:

- *Profissionalização do professor*
- *Reflexão*
- *Problematização*
- *Proporcionalidade*
- *Significados*

RÉSUMÉ

Cet article présente les résultats d'un projet de recherche basé sur le processus de réflexion d'un enseignant du secondaire sur les mathématiques scolaires. À cette fin, un modèle théorique à trois composantes a été configuré, articulé avec la théorie socio-épistémologique. Plus précisément, il expose la manière dont le processus se déroule : ce qui est sensibilisé et comment, quelles connaissances sont construites et ce qui est transformé. Pour l'analyse, nous avons considéré une catégorie sur les significations et une autre sur les formes d'argumentation liées à la proportionnalité directe ; ces catégories nous ont permis de comprendre l'état des connaissances de l'enseignant au début et à la fin du processus de réflexion. Parmi les résultats nous avons que la réflexion de la proportionnalité scolaire donne évidence que le changement de relation à cette connaissance mathématique favorise la conscience d'une responsabilité sur la formation mathématique et le développement d'une autonomie sur la connaissance mathématique (tous les deux liés à la proportionnalité), deux aspects qui caractérisent la professionnalisation des enseignants de mathématiques.

MOTS CLÉS:

- *Professionnalisation des enseignants*
- *Réflexion*
- *Problématisation*
- *Proportionnalité*
- *Significations*

1. Profesionalización, práctica reflexiva y reflexión

La problemática de esta investigación se sitúa en el terreno de la profesionalización docente. La discusión central de ésta cuestiona la profesionalidad de los profesores por la carencia de prácticas o competencias que permitan reconocerlos como profesionales y no como técnicos, esto es, como reproductores del conocimiento. Ante este fenómeno, se ha propuesto a la Práctica Reflexiva como un elemento profesionalizante del profesor y de la profesión (Davini, 1995; Latorre, 1992; Bazán, 2007; Perrenoud, 2004; Dolores, García, Hernández, y Sosa, 2014). Se busca así, una especie de reivindicación del estatus de profesión, donde la constitución de la docencia como profesión pende de manera significativa de las acciones individuales y colectivas.

Desde nuestro punto de vista, la profesionalización puede ser vista como el momento para reconocer a los maestros como profesionales desde lo que ya hacen, y así, enfocar la profesionalización como un proceso de acción y toma de desiciones cada vez más argumentadas. Por ejemplo, los autores citados arriba, concuerdan en que la profesionalización tiene el propósito fundamental de desarrollar la autonomía, lo que implica que se desarrolle a la par un sentido de responsabilidad sobre las acciones que realiza la persona o el grupo de personas que se profesionaliza. Concretamente,

> … (la profesionalización) promueve la formación de personas lo bastante competentes como para saber cuál es su cometido, sin estar estrictamente constreñido por las reglas, las directivas, los modelos, los programas, los horarios o los procedimientos normalizados… es más bien una característica colectiva, el estado histórico de una práctica, que reconoce a los profesionales una autonomía estatutaria, fundada en una confianza, en sus competencias y en su ética. En contrapartida, asumen la responsabilidad de sus decisiones y de sus actos, moralmente pero también en el derecho civil y penal. La autonomía y la responsabilidad de un profesional no se entienden sin una gran capacidad de reflexionar. (Perrenoud, 2004, p.11)

En este sentido, la práctica reflexiva busca avanzar en el desarrollo de esa autonomía y responsabilidad de las prácticas de la profesión docente, bajo el estudio organizado de la misma. Se precisa, entonces, de procesos de profesionalización que ayuden a resignificar la docencia desde sus acciones, sobre todo, desde los conocimientos que la sustentan.

> Los seres humanos crean esquemas de significación que les permiten actuar y pensar sobre su realidad. Lo que puede modificarse es la transformación personal, el cambio laboral o colectivo, en cualquier caso. En cambio, en el docente o el colectivo escolar no habrá cambios consistentes sin la debida reflexión de los significados que habitan en sus prácticas educativas. (Perales, 2006, p. 18)

Varios autores describen a la práctica reflexiva no como proceso ni como objeto, sino como una actitud intelectual (Dewey, 1989), una identidad o *habitus* (Perrenoud, 2004, cursivas del autor) o un fenómeno de construcción social (Bazán, 2007). De esta manera es que se concibe como *práctica*, en tanto que es intencional y estructurada, y su función es problematizar las posturas existentes (Bazán, 2007), como el caso de los significados mencionados. De esta manera es que dintinguimos entre hablar de Práctica Reflexiva y Reflexión, pues la segunda refiere al proceso que vive una persona para transformar algo, no necesariamente es una acción intencionada del individuo, sino que puede ser provocada por factores externos; tampoco es una identidad o *habitus*, porque como proceso, la reflexión tiene la característica de desestabilizar el sistema de quien lo vive. De manera concreta, los procesos reflexivos tienen la función de construir o reconstruir las bases del conocimiento para el ejercicio de una práctica docente cada vez mejor argumentada.

Conceptualizando a la Práctica Reflexiva como una estructura que se diseña y se desarrolla hasta estabilizarla como práctica, es necesario conocer y entender de qué están hechos sus andamios. En el caso de los profesores de matemáticas, consideramos que la reflexión precisa de cuestionar no solo la didáctica que profesa el docente, sino también la matemática que sabe y que enseña (Báez & Farfán, 2015). Es así que como objetivo de este proyecto nos planteamos estudiar el proceso de reflexión sobre la matemática escolar de un profesor de secundaria (que trabaja con estudiantes de entre 12 y 15 años), considerando una postura de construcción social del conocimiento matemático, específicamente, aquella que plantea la teoría socioepistemológica. La pregunta para responder fue: ¿Cuál es el proceso de reflexión que transita un profesor de matemáticas de secundaria cuando se cuestiona su conocimiento matemático?

A continuación, se presentan los sustentos teóricos que fundamentaron y guiaron el estudio. Para iniciar, se describe el modelo de reflexión de tres componentes usado (toma de conciencia, construcción de conocimientos, transformación) que ha sido producto de los análisis a la revisión bibliográfica. Posteriormente, este modelo se articula con los elementos teóricos de la Socioepistemología (confrontación, resignifiación y cambio de relación con el conocimiento matemático), ya que la postura tiene a la confrontación como herramienta para analizar los significados, procedimientos y argumentos matemáticos. Se expone también la herramienta de análisis de la información y su rol en la reconstrucción del proceso reflexivo vivido por el docente, es decir, la teoría fundamentada. En el análisis de los datos exponemos el proceso sintético resaltando las confrontaciones, las resgnificaciones y el cambio de relación con el conocimiento matemático que vivió el profesor, así como la evolución de categorías que muestran la transformación de significados en términos de un estado inicial y un estado final. La discusión versa sobre las relaciones del proceso reflexivo vivido con un desarrollo de autonomía sobre el conocimiento matemático y la responsabilidad de la formación matemática. Al final presentamos las conclusiones del estudio.

2. Reflexionar sobre la matemática escolar

2.1. *El modelo de reflexión de tres componentes*

La reflexión es considerada como una herramienta que permite mejorar la práctica docente. La tarea ha sido, entonces, la configuración de modelos o rutas que permitan sistematizar la práctica para estudiarla, orientarla y mejorarla. Estos diseños han abordado temas desde la formación inicial y continua (Climent, Romero-Cortés, Carrillo, Muñoz-Catalán y Contreras, 2013); la identidad profesional (Guichot, 2013; Walshaw, 2010); la autoevaluación y autoformación (Tzur, 2001); la investigación de la práctica (Díaz, 2006) y la profesionalización docente (Perrenoud, 2004).

Las interpretaciones de lo que es la reflexión son variadas (Zeichner, 1993; Tzur, 2001; Sañudo, 2006; García, Sánchez y Escudero, 2007; Kwon y Orril, 2007; Cánovas, 2007; Ponte y Chapman, 2008; Binti, 2010; Revilla, 2010; Edwards y Thomas, 2010), éstas se desprenden de los trabajos de John Dewey y Donald Schön. Dewey (1989) planteó la reflexión como un pensamiento intencional que, para distinguirse de otros pensamientos y propiciar el desarrollo humano de la persona, se requiere de una cuidadosa y atenta orientación educativa. Este proceso debía iniciar con una perturbación al estado actual de conocimientos que propiciara acciones para construir nuevo conocimiento, es decir, la reflexión debía originar un desequilibrio que no aparece por espontaneidad, sino que se provoca para promover la búsqueda de nuevas conclusiones. Respecto a Schön (1998), la reflexión es una herramienta para la revisión y validación del conocimiento profesional que se ha configurado desde la práctica. Es decir, es en la acción donde se toman las decisiones más relevantes de la profesión, por lo que el análisis de la experiencia reafirma y robustece el conocimiento profesional al tiempo que promueve la configuración de una nueva práctica. Los momentos de análisis son, por tanto, durante la misma acción y después de la acción.

Podemos notar que en ambas posturas la reflexión requiere tomar en cuenta las creencias y los significados que se poseen sobre alguna acción o conocimiento establecido para poder transformarlos, es decir, se requiere tomar conciencia. En el caso de Dewey (1989) se establece que el estado inicial y vivencial para desencadenar un proceso reflexivo, es la duda; mientras que Schön (1998) sugiere a la acción (o la experiencia) como la situación a la que hay que poner atención para entrar en un proceso de análisis y descubrir lo que se debe modificar. Para Dewey (1989), el inicio es un estado de desequilibrio cognitivo, mientras que para Schön (1998), es un estado de acciones. En ambos casos, la reflexión se realiza sobre el saber teórico y práctico, pues no se puede indagar en la práctica sin pasar por la revisión de significados, ni se pueden analizar los conocimientos de manera desarticulada de la práctica que los sustentan. El producto de tal análisis es la construcción de nuevo conocimiento de tal manera que dé lugar a nuevas configuraciones (teóricas o prácticas) dirigidas a mejorar la labor profesional.

De esta manera, identificamos en Dewey y Schön tres componentes de un proceso reflexivo que es posible reconocer en otros modelos actuales: la toma de conciencia, la construcción de conocimiento y la transformación (Figura 1.a). Todos de diferente naturaleza y alcance que dan sentido al acto reflexivo como un acto de meta aprendizaje, de sistematización de la práctica y desarrollo de la autonomía profesional.

Respecto a la toma de conciencia, Campechano (2006, p. 71) menciona que “cualquier docente que quiera transformar racionalmente su práctica primero tiene que conocerla, no imaginarla ni suponerla”. De esta manera, la toma de conciencia sobre los saberes que se quieren transformar es un punto de partida. Para Perrenoud (2004), la toma de conciencia se desarrolla en el plano cognitivo y se relaciona con hacer consciente lo inconsciente, además, se provoca por disponer al individuo ante situaciones que le exigen modificar sus esquemas. Para Freire (1973) la toma de conciencia alcanza un plano más sociocultural, refiere a un proceso de acción cultural a través del cual las mujeres y los hombres despiertan a la realidad de su situación sociocultural, avanzan más allá de las limitaciones y alienaciones a las que están sometidos, y se afirman a sí mismos como sujetos conscientes y co-creadores de su futuro histórico. En este sentido, dicha concientización implica un *apoderarse de la realidad*, que implica una ruptura de fronteras para ser ellos partícipes de la creación de nuevo conocimiento.

Ya sea que se provoque, como suele diseñarse en espacios de desarrollo profesional docente, o que surja del análisis de la situación a la que se enfrenta el docente, la toma de conciencia es un componente imprescindible del proceso reflexivo que permitirá al profesor, por un lado, hacerse consciente de conocimientos teóricos y prácticos que necesitan modificarse; y por otro, ganar mayor entendimiento del impacto de su práctica docente, ya que no solo crea su realidad a partir de sus conocimientos, también crea la realidad de sus estudiantes.

Es importante dar cuenta de que la toma de conciencia es fundamental para dar paso a un proceso de transformación, pero ésta no refiere solo a saber algo o darse cuenta, sino a aceptar los cambios que implica, aceptar el proceso hacia la transformación para dar lugar a las nuevas producciones y argumentaciones del cambio. Perrenoud (2004) menciona que el tomar conciencia podría generar un estado de imposibilidad de acción, es decir, más que generar un estado favorable para la transformación, la toma de conciencia en algunas ocasiones puede bloquear el proceso reflexivo. Esto podría requerir otro tipo de atenciones para salir del obstáculo y continuar hacia la construcción de nuevo conocimiento y la transformación.

Una diferencia clave sobre la forma que promovieron Dewey y Schön la construcción conocimiento es acentuada por Akbari (2007): mientras que Dewey plantea una reflexión intencionada, sistematizada y dirigida, Schön plantea la reflexión como una actividad no racional, intuitiva, personal. Para Akbari, el concepto de reflexión de Dewey trata de una práctica que resultará en la profesionalización del campo en tanto que busca reemplazar las acciones impulsivas y repetitivas con alternativas aprobadas racional y científicamente. En la concepción de Schön, la reflexión es de naturaleza artística en la que se busca darle un nuevo sentido a las situaciones que son tratadas como únicas e inciertas y que son producto de la experiencia de enseñanza. En otras palabras, mientras que para uno el conocimiento es resultado de una articulación de ideas científicas, para el otro, el conocimiento que se construye es resultado de la práctica misma. Akbari postula que la articulación de estas posturas es fundamental para el desarrollo de un fuerte sentido de autonomía en tanto que el profesor construye argumentos sólidos para el cambio tanto desde la teoría como desde la práctica.

La transformación se refiere a una nueva racionalidad que sustenta las consecuentes acciones (Perales, 2006). Se materializa con la puesta en juego de los argumentos y conocimientos construidos. Es un regreso a la realidad que se recrea con una nueva base epistemológica. En otras palabras, en la transformación "se modifican las relaciones del educador con la práctica objetivada sobre la cual se reflexiona" (Sañudo, 2006, p. 37). Freire (1973), Perrenoud (2004) y Sennet (2009) concuerdan en que dicha transformación (del entorno) es producto de una transformación de sí mismo: "Entonces, el reto no sólo consiste en estar preparado para actuar de forma distinta la próxima vez, sino de convertirse –en algunos aspectos– en otro distinto" (Perrenoud, 2004, p. 39).

Así, un proceso reflexivo indica que cuando alguien reflexiona, se produce una tensión o alteración en los significados, las actitudes, los sentimientos, las acciones pasadas, las creencias, de tal manera que se generan las condiciones (razones, instrumentos, conocimientos) para la toma de decisión, la nueva acción (Revilla, 2010; Binti, 2010; Ponte & Chapman, 2008; Sánchez, 2010). Esto es, se toma una conciencia y se construye una *razón de hacer*, un argumento, que tiene su raíz en una transformación del ser, para dar lugar a la transformación del hacer.

Los componentes descritos anteriormente son los que hemos tomado como unidad mínima para estudiar la reflexión (Báez y Farfán, 2017), caracterizarla y exponerla como un proceso de problematización. Cada uno se presenta como un componente invariante de cualquier proceso reflexivo, aunque sus descripciones podrían ser algo diferentes. Además, son independientes del objeto de reflexión y son, en sí mismos, procesos. Es importante mencionar que el desarrollo de cada componente estará fuertemente relacionado a la ruta y base teórica que las guíe. Al respecto, en el siguiente apartado presentamos la articulación de este modelo de tres componentes con la teoría Socioepistemológica, pues define la mirada con la que se analizó el proceso reflexivo.

2.2. *El modelo reflexivo en la Socioepistemología*

Para estudiar el proceso reflexivo en actividades sustentadas en la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa, TSME (Cantoral, 2013), los componentes descritos se han articulado con constructos bien definidos en ella que describen los momentos de tomar conciencia, construir conocimiento y transformación de prácticas. Específicamente, nos situamos en los procesos de reflexión durante la *problematización de la matemática escolar* (pme), que refiere a la fase de intervención educativa de la Teoría sustentada en sus propios resultados (fase de investigación o de *problematización del saber matemático*). Es decir, cualquier intervención educativa está guiada por un diseño epistemológico sobre un saber matemático específico. Entonces, la primera característica del proceso reflexivo que estudiamos es que su objeto de reflexión no es la práctica docente como se puede ver en otros modelos (Smyth, 1991; Sañudo, 2006; Jaworski, 1993; Ramos, 2014; Parada y Pluvinage, 2014; Domingo y Gómez, 2014), sino la matemática escolar (Báez y Farfán, 2015, 2017). Entonces, ¿cómo y de qué se toma de conciencia, qué conocimiento se construye y qué se transforma?

La TSME postula que el conocimiento matemático se construye socialmente, lo cual lo dota de significados y usos que le dan sentido y razón de ser. Sin embargo, tales significados y usos no tienen presencia en el ambiente escolar, lo que ha provocado la enseñanza de una matemática que preexiste a las personas y, por lo tanto, los individuos no participan de su construcción y significación, solo memorizan conocimientos y procedimientos. Ante tal problemática, la TSME se ha planteado la recuperación de bases epistemológicas del saber matemático a través de identificar prácticas sociales que han significado al conocimiento. La finalidad, es plantear propuestas de construcción social que puedan ser vivenciadas por docentes y estudiantes y todo aquél que pretenda adquirir una matemática funcional en su formación. Es así que la TSME reconoce dos racionalidades: aquella que vive en la escuela y se caracteriza por una reproducción de significados, y una propuesta basada en prácticas que involucra significados y usos del saber.

Desde esta manera, la problematización de la matemática escolar refiere al proceso de confrontación de ambas racionalidades que busca construir nuevos significados para con los objetos matemáticos, es decir, los *resignifica*. Dicha confrontación consiste en cuestionar el conocimiento matemático que se difunde en el escenario escolar, mientras se presentan nuevos significados, procedimientos y argumentos inicitados por una construcción social. En términos de Freire esto representa un proceso de concientización en tanto que se "denuncia" una estructura carente de sentido y se "anuncia" una propuesta solucionadora (Torres, 1980).

Desde la teoría, la resignificación refiere al uso del conocimiento, entendido no como una aplicación, sino como un uso culturalmente situado (Cantoral, Reyes-Gasperini y Montiel, 2014). Esto es, el significado deviene de las relaciones puestas en juego que dan sentido al objeto matemático en un contexto determinado: "el significado dependerá en gran medida del escenario contextual donde se produce la acción" (Cantoral, 2013, p.161). De esta manera, la resignificación resalta la relación uso-significado que promueve la conexión del objeto matemático con otros saberes otorgándole, así, una característica funcional.

Así, la resignificación propicia una nueva relación con el conocimiento matemático que se presenta por la incorporación de otros usos y significados promovidos por la racionalidad basada en prácticas (Reyes-Gasperini, 2016). Entonces, no se trata solo de conocer la propuesta solucionadora, sino de reconocerla como parte del desarrollo del pensamiento matemático en tanto que proporciona un sentido y significado al objeto matemático más allá de su operatividad.

> La transformación no es sólo una cuestión de métodos y técnicas. Si la educación liberadora fuera sólo eso, entonces, el problema sería cambiar algunas metodologías tradicionales por otras más modernas. Pero ese no es el punto. La cuestión es el establecimiento de una relación diferente con el conocimiento y con la sociedad (Freire y Shor, 1986, p. 63).

Así, el individuo que construye una relación con su conocimiento matemático también construye un nuevo compromiso con la sociedad. De manera sintética, la inserción de la nueva racionalidad al ambiente escolar y su articulación con la racionalidad existente, precisa de momentos de confrontación, de resignificación y de promover un cambio de relación con el conocimiento matemático. Estos son los elementos que desarrollan la problematización de la matemática escolar, pero que a su vez describen un proceso de reflexión sobre la matemática escolar. A continuación, se describe el objetivo y el rol de cada elemento en articulación con los componentes del proceso reflexivo:

- La confrontación: tiene por objetivo desestabilizar la hegemonía de un discurso matemático escolar a través de generar conciencia de una estructura de significados limitados y conciencia de una estructura que provee de otros significados. El rol de la confrontación es, entonces, evidenciar una cultura matemática limitada para dar *acceso* a nuevas formas de construir conocimiento matemático.
- La resignificación: tiene por objetivo la construcción de significados y usos del conocimiento, también del desarrollo de procedimientos. Se apoya de diferentes representaciones o relaciones con el contexto que le dan sentido. Así, el rol de la resignificación en la problematización de la matemática escolar es construir los argumentos para la transformación, desarrollar una *razón de hacer* de las futuras acciones que dan lugar a una nueva práctica.
- Cambio de relación con el conocimiento matemático: tiene por objetivo el reconocimiento de una nueva racionalidad de los conocimientos matemáticos. El rol de este cambio de relación es la aceptación e inserción de los nuevos conocimientos al discurso propio del profesor, y de propiciar una articulación entre significados de diferentes racionalidades que favorezcan a la razón de ser de los objetos matemáticos. Con una nueva base de significados, el docente dispone de nuevas articulaciones que le permiten innovar, ajustar o modificar algo de su enseñanza de la matemática. Así, la nueva relación con su conocimiento matemático no solo trastoca el *cómo enseñar,* sino también el *qué enseñar*.

Dado que la construcción de significados es situada, el cambio de relación también lo es. Por tanto, la reflexión estará delimitada por el contexto, las experiencias y la base de conocimientos de quien vivencia el proceso.

La siguiente figura expresa tanto el modelo general de reflexión como el modelo reflexivo que se desarrolla bajo la orientación de los planteamientos socioepistemológicos.

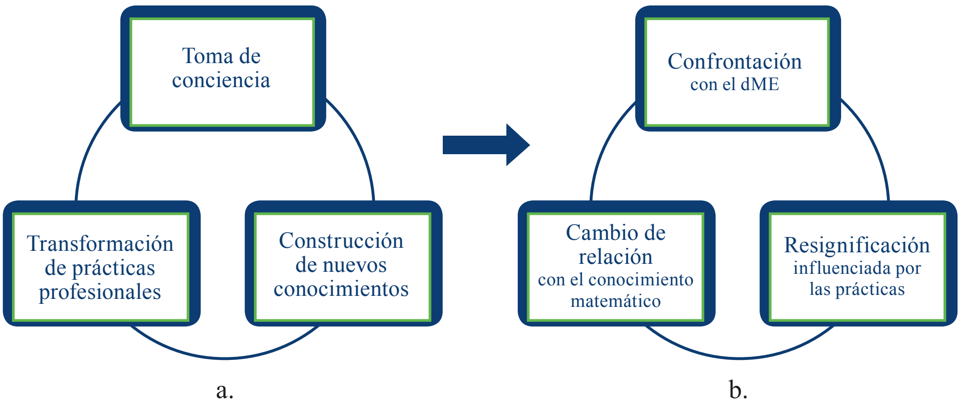


Figura 1. Componentes para estudiar la reflexión, del modelo general (a) al modelo socioepistemológico (b)

Por las descripciones anteriores, en este modelo reflexivo la confrontación se provoca. De hecho, una premisa teórica es que, sin confrontación de racionalidades, no se desarrolla la problematización y menos la reflexión; en otras palabras, no se resignifica ni se alcanza un cambio de relación con el conocimiento matemático. Esta afirmación se sustenta en que la pme es una configuración sustentada en una psm. De esta manera, esta forma de provocar el proceso reflexivo es fundamental para dar acceso a los nuevos conocimientos.

Un aspecto importante es que la problematización y la reflexión son teóricamente diferentes pero que se desarrollan a la par. Mientras que la pme es una configuración que promueve una evolución prágmática de la matemática escolar, la reflexión es el proceso mental, actitudinal y comportamental que vive una persona. Por tanto, al enfocar el objeto de reflexión sobre la matemática escolar, los procesos se empalman.

3. Elementos metodológicos

En esta investigación se optó por realizar un estudio de caso, el de la reflexión del profesor sobre la matemática escolar. Este tipo de estudio se caracteriza por abordar la "particularidad y complejidad de un caso singular para llegar a comprender su actividad en circunstancias importantes… El investigador cualitativo destaca las diferencias sutiles, la secuencia de los acontecimientos en su contexto, la globalidad de las situaciones personales" (Stake, 1995, p.11). Los antecedentes teóricos sobre la confrontación, la resignificación y el cambio de relación con el conocimiento matemático, permiten reconocer que dicho proceso de reflexión es de carácter particular. Es decir, no todas las personas vivirán la misma confrontación, resignificación o cambiarán de igual manera su relación con el conocimiento matemático. Es por esta razón, que interesa conocer el proceso reflexivo que vivencia un profesor para comprender su particularidad. De esta forma, el estudio es de tipo descriptivo-interpretativo, en tanto que detallamos la radiografía de un proceso reflexivo en un escenario socioepistemológico e interpretamos los efectos para la profesionalización docente.

El conocimiento disciplinar puesto en juego fue la proporcionalidad, ya que este saber se ha problematizado desde la TSME y se ha generado una epistemología de prácticas a partir de dicha problematización (Reyes-Gasperini, 2011; 2016). Con esta base epistemológica es que se han construido propuestas de intervención para su socialización en el ambiente escolar, esto es, problematizaciones de la matemática escolar. La problematización del saber proporcional realizada por Reyes-Gasperini se puede relacionar con una evolución conceptual (Razón, Proporción, Proporcionalidad) en el sistema escolar cuyo tratamiento limita la construcción de significados situados, por lo que la propuesta es el desarrollo de prácticas (Comparar, Igualar, Medir) que permiten reconocer una matemática funcional, articulada y significada desde los contextos de los que aprenden. Desde el plano teórico, la propuesta es *transitar* de una racionalidad a otra: ir de los conceptos a las prácticas; mientras que, desde el plano educativo, la intervención busca el reconocimiento de la racionaldiad basaba en prácticas y su articulación con la que está basada solo en los conceptos.

A manera de síntesis, la confrontación de ambas racionalidades referentes a la proporcionalidad directa se presenta en la tabla I.

En la tabla se puede notar una familiaridad con las características que plantea la racionalidad conceptual de la proporcionalidad directa; mientras que las características relacionadas con la racionalidad basada en prácticas pueden no ser tan familiares, aunque es posible reconocer que no son ajenas al discurso relativo a la proporcionalidad. Por ejemplo, podemos advertir que la noción de equidad está relacionada a situaciones de proporcionalidad, pero no es una noción que se ponga en juego en las actividades escolares más allá de encontrar un reparto proporcional. Como resultado de la problematización de Reyes-Gasperini (2016), la proporcionalidad refiere a una relación adecuada entre dos magnitudes, que no es precisamente hablar de una relación de igualdad, sino de las características de las magnitudes, de la actividad que las moviliza, de relaciones no aritmetizadas, de lo justo, que lleve posteriormente a la aritmerización de la relación.

TABLA I
Confrontación de racionalidades de la proporcionalidad directa

Proporcionalidad directa	
Racionalidad conceptual	*Racionalidad basada en prácticas*
Resolución de problemas de cuarto valor faltante utilizando el método de la regla de tres simple y la posterior incorporación de la función de proporcionalidad directa en sus diferentes representaciones: coloquial, tabular, algebraica y gráfica.	Puede incorporarse la discusión sobre lo que refiere al equilibrio, justo medio o relación adecuada, considerando que la medida y la acción de medir como fin último, tienen un papel relevante.
Resultado de una trasposición de la matemática.	Resultado de una simbiosis entre saber sabio, técnico y popular.
Tratamiento cuantitativo-numérico: se pregunta por el *cuánto*.	Tratamiento relacional-cualitativo: se pregunta por el *cómo*.
Prioriza técnicas: hallar la constante, o cuarto valor faltante.	Construye la relación adecuada, equilibrada.
Enfatiza la noción de igualdad.	Articula con la noción de equidad.
Análisis: Variación de las magnitudes por separado.	Análisis: Relacionar ambas magnitudes.
Opera con razones.	Construye la unidad de medida común.
Reconoce y valida un solo tipo de razonamiento.	Reconoce y valida varios razonamientos.
Evolución conceptual: razón, proporción proporcionalidad.	Evolución pragmática: Comparar, igualar, medir.

Es así como el arreglo anterior no solo compara racionalidades, sino que abona a la estructura de diseños de actividades para confrontar los significados, procedimientos y argumentos, por tanto, estos elementos guiaron la problematización de la matemática proporcional que llevamos a cabo para estudiar el proceso de reflexión de un profesor de matemáticas.

Respecto a la elección del profesor, se consideraron dos aspectos, uno metodológico y uno teórico: que el docente haya participado previamente en espacios de profesionalización configurados bajo las ideas teóricas de la TSME, y que manifestara una confrontación en la realización de una actividad relacionada con la proporcionalidad directa. La experiencia previa de profesionalización fue relevante en tanto que las confrontaciones vividas ahí habían iniciado en el profesor un cambio de relación al conocimiento matemático a partir de los significados construidos; por lo que participar en un estudio en profundidad con el mismo fundamento teórico, le resultaría familiar. El segundo aspecto, manifestar la confrontación, permitiría iniciar el proceso reflexivo. Esa confrontación se convirtió, entonces, en la confrontación inicial de la Fase 1 que es la que se desarrolla en este escrito.

La complejidad de esta elección radicó en el momento político-social que atravesaban los profesores, ya que las últimas reformas educativas de México han implementado pruebas a los docentes sobre su desempeño y conocimientos cuyos resultados se han usado para desvalorizar su formación y práctica profesional (Lozano y Levinson, 2018). Por tanto, participar en un proceso de reflexión que exponía los conocimientos que fundamentan su práctica, significaba un alto riesgo. En contraparte, la postura de la TSME ha sido el de reconocer al profesor como un actor educativo fundamental para el desarrollo del pensamiento matemático, de ahí que al inicio de este escrito hayamos expuesto que se parte de lo que el docente sabe, pues desde la teoría se reconoce que esos conocimientos forman parte de una racionalidad de la matemática escolar con la que fue formado. Es decir, es la matemática escolar con significados limitados un elemento que afecta el desempeño profesional.

El diseño del estudio consistió en tres fases: Confrontación, Argumentación y Prácticas. En cada fase se estudió un proceso reflexivo según los tres componentes de la problematización: confrontación, resignificación y cambio de relación al conocimiento matemático. En este artículo abordamos solo la primera fase, que tuvo como objetivo generar la confrontación para iniciar una toma de conciencia en el profesor sobre sus conocimientos respecto de la proporcionalidad directa, principalmente sobre sus formas de argumentación, articulación y los significados asociados a ella. Por tanto, se consideró una actividad tomada de Reyes-Gasperini (2011) que busca la confrontación de argumentaciones sobre la proporcionalidad directa. La actividad propone un planteamiento familiar que promueve el involucramiento del docente, lo que posteriormente se convierte en un análisis de los significados que producen la confrontación. Es decir, esta fase inicia la toma de conciencia de la racionalidad basada conceptos: “Cualquier profesor que quiera modificar racionalmente su práctica primero tiene que conocerla, no imaginarla ni suponerla” (Campechano, 2004, p. 71).

Una vez producida la confrontación inicial, se acordó con el profesor tener entrevistas en su centro de trabajo, ya que disponía de un espacio de 20 a 25 minutos entre sus clases. Las entrevistas fueron semiestructuradas, ya que el proceso de atención a la confrontación promovió el análisis de otros ejercicios puntuales que permitían profundizar los significados movilizados en la confrontación inicial. En total, la fase 1 tuvo 7 entrevistas, de las cuales 5 muestran el proceso reflexivo hasta que el profesor acepta la confrontación y transforma sus significados.

Como instrumento de análisis de la información usamos la Teoría Fundamentada de Glasser y Strauss (2002), pues permitió estudiar el proceso reflexivo en categorías articuladas que evolucionaron una vez atendida la confrontación inicial. Es importante aclarar que, si bien el modelo de reflexión ya consideraba tres componentes, éstos no fungieron como categorías, sino como momentos por los que transita el proceso. Los componentes solo permitían identificar una confrontación, pero no permitía determinar qué se debía resignificar en el profesor. Mientras que las categorías formuladas a partir de una codificación abierta y axial evidenciaron el estado del conocimiento del profesor en relación con la o las confrontaciones, lo que promovió que otras preguntas fueran incluidas durante las entrevistas.

A continuación, presentamos las categorías generadas, así como sus respectivos códigos:

Significados	**Cómo argumenta**	**Rol y práctica profesional**	**Interacción con los estudiantes**
• No tiene códigos	• Análisis • Argumentos • Definiciones	• Qué y Cómo enseña • Rol profesional	• Estudiantes • Expectativas

Figura 2. Categorías del proceso de reflexión estudiado

En este artículo nos centramos en las primeras dos categorías:

- Significados: Esta categoría representó lo atribuido o asociado a un conocimiento y las relaciones que guardan. Son conocimientos institucionalizados en el profesor que refieren a aspectos observables, descriptibles. Funcionan como referencias no cuestionables, invariables, que articulan varios conocimientos implicados.
- Cómo argumenta: Esta categoría presenta las formas de análisis del profesor respecto a la proporcionalidad para validar y sustentar sus respuestas. Se conformó por los códigos Análisis, Argumentos y Definiciones, donde las propiedades se expresaron por el razonamiento usado y las dimensiones por la representación donde tiene sentido dicho razonamiento.

Cabe mencionar que la categoría de los ‘Significados’ fungió como categoría central, ya que a partir de ella se definían las argumentaciones, articulaciones y validaciones de conocimiento del profesor.

La comparación constante de las categorías en cada entrevista dio lugar a:

- Identificar otras confrontaciones que se desprendían de la confrontación inicial.
- Identificar transiciones, esto es, aquellos conocimientos en las categorías ‘Significados’ y ‘Cómo argumenta’ que presentaron un cambio: pasaron de un estado inicial A a un estado final B.
- Identificar cómo algunos conocimientos variaban en cuanto a su importancia y uso: cambio de argumentos hegemónicos.
- Robustecer las propiedades y dimensiones de la categoría ‘Cómo argumenta’ al incorporar un referente de comparación de proporcionalidad directa: la definición de proporcionalidad inversa.

Por tanto, la comparación constante permitió reconocer una evolución de las categorías en cada fase, mientras que se desarrollaban los momentos de resignificación y el cambio de relación al conocimiento proporcional.

En el siguiente apartado presentamos una síntesis del análisis de la Fase 1 que contempla los aspectos teóricos y metodológicos antes comentados.

4. Análisis

Para este artículo reportamos solo la primera fase del estudio con la intención de conocer y evidenciar cómo ocurre el proceso de reflexión sobre la matemática escolar. Como el foco fue mirar el proceso reflexivo a través de confrontaciones, resignificaciones y un cambio de relación al saber matemático, es preciso dejar claro que el análisis no cuestiona si el profesor sabe o no matemáticas, pues la premisa es que tiene los conocimientos que la formación inicial y continua le dan dado. De ahí que la confrontación sea la herramienta teórica-metodológica para introducir otras formas en que se desarrolla el conocimiento matemático.

El análisis tampoco cuestiona si el profesor sabe o no reflexionar, en la primera parte de este escrito planteamos brevemente el estado de esta competencia profesional como una que todavía requiere de procesos de sistematización y orientación. Sin embargo, en la fundamentación teórica planteamos la relación de la reflexión con la problematización de la matemática escolar, por lo que el profesor vivencia un proceso con una orientación clara e intencionada.

4.1. *La confrontación*

La fase 1 tuvo por objetivo hacer consciente al profesor de su relación con el conocimiento proporcional, es decir, tomar conciencia de los significados, procedimientos y argumentos que tiene, enseña, valida y espera en sus estudiantes. Por lo que la confrontación inicial se presentó con la actividad de la figura 3.a:

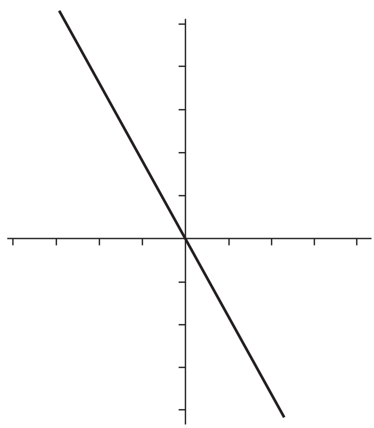
Observa la gráfica y determina si es de proporcionalidad directa o inversa. Argumenta tu respuesta. 	No es de proporcionalidad directa porque no va aumentando de la misma manera y tampoco va disminuyendo de la misma manera.
a. Actividad inicial tomada de Reyes-Gasperini (2011)	*b. Argumento 1*

Figura 3. Confrontación inicial de la Fase 1

En Reyes-Gasperini (2011) se menciona que la actividad tiene la característica de incitar la confrontación al evocar argumentos que no son suficientes para responder, pero que tampoco se perciben como tales debido al discurso matemático escolar validado. Por tanto, para atender la confrontación se discutió la definición de proporcionalidad directa dada por el profesor para profundizar en los conceptos y significados involucrados, entre ellos: el análisis variacional de las magnitudes y la constante de proporcionalidad. Lo anterior condujo a que el profesor planteara una representación tabular y la expresión algebraica para las cuales proporcionó firmemente los siguientes argumentos:

TABLA II
Otras representaciones y argumentaciones asociadas a la Actividad inicial

Confrontación de argumentaciones	
Argumento 2	*Argumento 3*
x | y −4 | 2 −3 | 1.5 −2 | 1 −1 | .5 0 | 0 1 | −0.5	$\boxed{y=kx}$ $\boxed{yk=x}$ $y=\frac{x}{-2} \rightarrow k$ $y=\boxed{-\frac{1}{2}}x$
Sí, mirando la gráfica nada más, eh, hacemos lo que también aquí en la tablita aparece, que al aumentar una cantidad la otra disminuye me dice que ya no es de proporcionalidad directa.	*Pareciera que esta debiera ser de proporcionalidad directa por la constante de proporcionalidad.*

En la figura 3 y la tabla II se puede advertir que el argumento 1 y 2 sostienen la misma conclusión (la gráfica no es de proporcionalidad directa), mientras que el argumento 3 es contrario (la gráfica es de proporcionalidad directa) pues aquí el profesor reconoce la constante de proporcionalidad en la expresión general $y=kx$ con el valor $k=-\frac{1}{2}$. La conciencia de los diferentes argumentos usados lo conduce a decidirse por uno, por lo que sostiene su postura en la siguiente definición:

> Por definición nomás decimos que: al aumento de una, la otra aumenta de la misma manera. A la disminución de una, la otra disminuye de la misma forma. Según lo que vemos aquí, una aumenta y la otra disminuye, entonces, esa sería la única forma de decir que no es de proporcionalidad directa.

Esto indicó que en el momento del acontecimiento esta confrontación no fue aceptada por el profesor, por lo que, a pesar de las propias representaciones y análisis contradictorios, prefiere volver a aquel conocimiento que ha aprendido y validado en la formación y la experiencia.

¿Qué produjo la confrontación de argumentos? Además, ¿cómo es que las diferentes representaciones regulan la hegemonía de un tipo de argumento y, además, estos se llegan a contradecir? Las respuestas a estas preguntas fueron explicadas principalmente por las categorías de los ‘Significados’ (Tabla III) y ‘Cómo argumenta’ (Figura 4), generadas a partir de los argumentos y la definición dados por el profesor.

TABLA III
Categoría de 'Significados'

Significados	*Forma de análisis asociada*
"de la misma manera"	Expresa un referente hegemónico para determinar proporcionalidad directa. – se espera el mismo comportamiento de las variables: ambas aumentan o ambas disminuyen. Análisis del *cómo* cambia – asociado a un análisis individual de las magnitudes: razonamiento inter (duplicidad) y diferencias. Análisis del *cuánto* cambia
El comportamiento contrario implica proporcionalidad inversa	Expresa un referente para determinar proporcionalidad inversa. – *Cómo cambia*: una aumenta, la otra disminuye – expresión algebraica asociada: $\frac{y}{k}=x$ – se asocia a la pendiente obtusa de la recta
El paso de la recta por el origen implica proporcionalidad directa	Expresa un referente visual de comparación, pero no decisivo. – analiza si la recta cruza o no el punto (0,0)
La constante de proporcionalidad directa siempre es positiva	Expresa un referente cuantitativo, pero no decisivo. – existencia de un factor k que cumple $kx=y$ (multiplicativo) – identificación de un valor constante en cada magnitud: mismo valor implica proporcionalidad directa – el factor negativo no tiene un significado

La primera columna de tabla anterior expone una serie de significados que usa el docente para determinar respuestas, construir argumentos y validar conocimientos en los estudiantes. Los cuatro significados están articulados, se implican uno al otro, pero el de mayor peso es la frase corta "de la misma manera", ya que determinó en el docente el no aceptar la confrontación de sus argumentos y suponer que algo de la actividad estaba mal planteado. Es este argumento con el que identifica que las variables de la gráfica no varían "de la misma manera", sino que lo hacen de manera contraria, por lo tanto, la gráfica no representa una situación de proporcionaldidad directa. Aunque la gráfica pasa por el origen, este significado no es suficiente para determinar la proporcionalidad directa, sino el hecho de que la variación "de la misma manera" no se cumple. Esto expresa, la hegemonía de dicho significado.

La segunda columna deja ver a mayor detalle que la confrontación está asociada a conocimientos válidos (por ejemplo, el análisis del *cómo* y *cuánto* cambia), pero desarticulados (por ejemplo, conceptos de proporcionalidad directa e inversa), así como a representaciones algebraicas que han perdido significado ($\frac{y}{k}=x$) y a símbolos que no significan nada (signo negativo de la constante de proporcionalidad). Si bien el profesor no fue consciente de esto al momento de la confrontación, la perturbación a sus conocimientos provocó la duda (Dewey, 1989). En las siguientes entrevistas el profesor se dispuso a tomar acción para validar sus conocimientos. Esa actitud fue la que permitió el desarrollo del proceso reflexivo.

La categoría ‘Cómo argumenta’ detalla otras características de los significados, es decir, cómo se presentan (propiedades) y en qué representación (dimensiones), ya que algunos análisis como de la variación de las variables, no fue propia de la representación gráfica (Figura 3.a), sino también de la representación en tabla (Tabla II: Argumento 2); mientras que la interpetación de la constante de proporcionaldiad solo apareció en la expresión algebracica (Tabla II: Argumento 3).

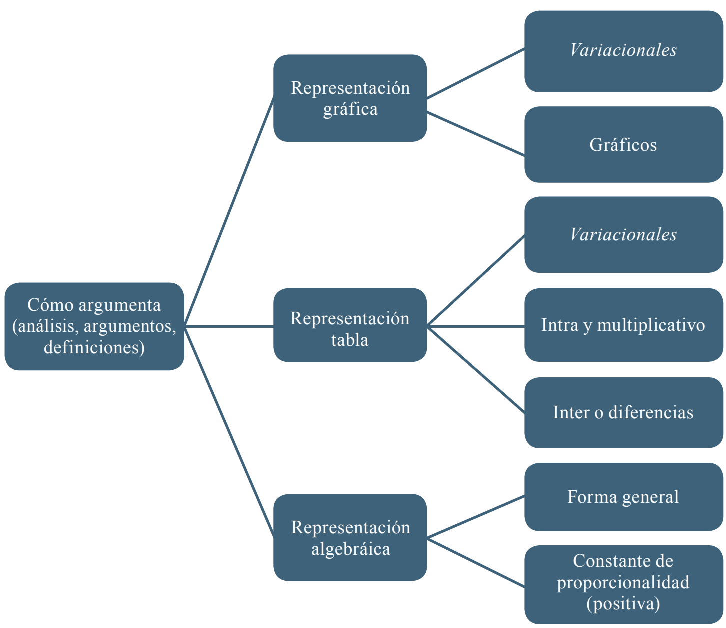


Figura 4. Categoría ‘Cómo argumenta’

Estas observaciones permitieron conocer a detalle los tipos de razonamientos que pone en juego el docente en cada representación, así como algunas articulaciones o desarticulaciones entre ellos. Por ejemplo:

- El razonamiento multiplicativo siempre está acompañado del razonamiento intra (relación $\frac{y}{x}$ para cada par de valores), ya que este permite encontrar un factor k cuya verificación como factor de proporcionalidad implica el cumplimiento de la multiplicación: $k*x=y$, para cada par de valores. De esta forma, dicha multiplicación $k*x=y$ se presenta como de mayor peso que solo encontrar la razón $\frac{y}{x}$. En otras palabras, la razón constante $\frac{y}{x}$ no es suficiente para determinar proporcionalidad, sino el resultado de la operación $k*x=y$.
- El razonamiento inter se presenta como el análisis del cambio de los valores en x que se corresponde con la forma de cambio de los valores en y. Es decir, si la variable x cambia de dos en dos, la variable y también tiene que cambiar de dos en dos para que exista una relación proporcional. Esto es, tienen que cambiar en la misma cantidad, y si sucede, ese valor se interpreta como la constante de proporcionalidad.
- En las gráficas, el paso de la recta por el origen es un referente de proporcionalidad directa siempre y cuando la recta tenga pendiente positiva o se cumpla el análisis variacional esperado: si una variable aumenta, la otra también aumenta de la misma manera. Dicho referente gráfico y variacional implican la existencia de un factor de proporcionalidad.
- En la expresión algebraica, la forma general $y=kx$ es la representación de proporcionalidad directa, ya que la ordenada al origen es cero. En esta expresión, k es la constante de proporcionalidad si y solo si es positiva. No existe la constante negativa porque ni la definición ni la expresión general refieren a un valor $-k$.

Ambas categorías sistematizan el conocimiento del profesor al momento de la confrontación. De esta manera, las categorías, con sus respectivas articulaciones entre ellas dejan ver cómo es la base de significados, procedimientos y argumentos del docente respecto de la proporcionalidad directa que regulan su práctica de enseñanza.

Así, el estado inicial de las categorías describe la relación del profesor con su conocimiento proporcional, por lo que el cambio en esa relación implicó una evolución de ellas. Antes de presentar la evolución, presentamos la resignificación, es decir, el proceso que llevó a esa evolución.

4.2. *La resignificación*

La resignificación tuvo lugar por los siguientes aspectos: el análisis de definiciones de proporcionalidad directa e inversa, la aparición de confrontaciones intermedias y las validación o refutación de argumentos. Este momento inició cuando el profesor tomó acción y recurrió a sus fuentes de confianza para validar sus argumentos. En las cinco entrevistas (Figura 5), la resignificación se desarrolló como sigue:

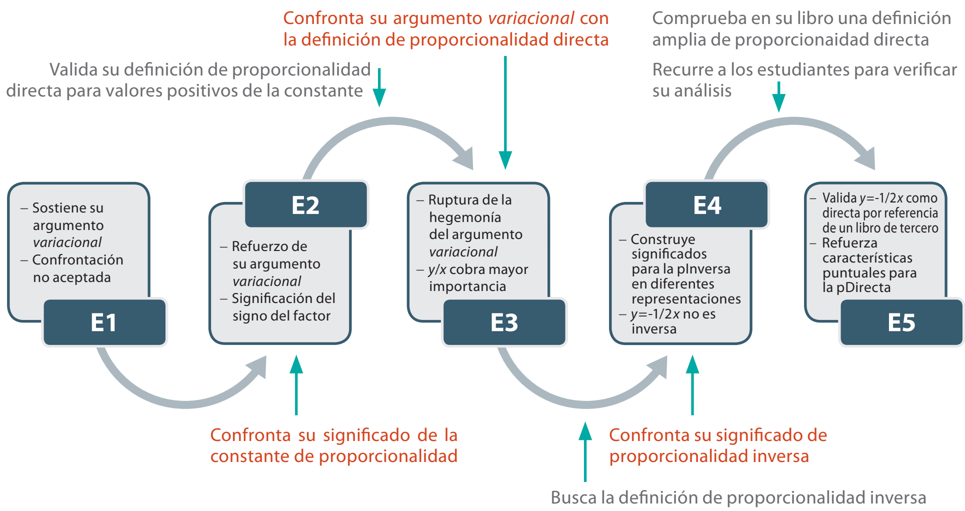


Figura 5. Confrontaciones intermedias, acciones del profesor y resignificaciones

- Se analizó una definición de proporcionalidad directa tomada de una tarea de sus estudiantes (Entrevista 2). Esta definición no la dio el profesor en la clase, la encontraron los estudiantes en alguna fuente. La definición permitió analizar las características del factor de proporcionalidad directa de donde se resaltó que no se especificaba de qué signo debía ser. En este momento, la toma de conciencia de que el factor podría ser negativo fue interpretado como incumplimiento de su propia definición, que lo condujo a reforzar la hegemonía de su argumento variacional (Argumento 1 y 2).
- Se analizó una tabla de valores (Entrevista 3) en la que el profesor determina que no es de proporcionalidad directa porque los valores de la variable x cambiaban de 5 en 5, mientras que los valores de la variable y cambiaban de 6 en 6; es decir, no cambiaban "de la misma manera". Al solicitar la constante de proporcionalidad, el profesor encuentra sin dificultad que se trata de la razón constante $\frac{6}{5}$, lo cual produce un cambio de argumento y concluye que la tabla representa proporcionalidad directa. De esta manera, se genera una ruptura del argumento variacional asociado al significado "de la misma manera" y cobra relevancia la búsqueda del factor constante (positivo) para determinar si una situación es de proporcionalidad.

- Se analizó una definición de proporcionalidad inversa consultada por el profesor en otra fuente (Entrevista 4). En esta definición se especificaba cómo analizar el comportamiento de las variables (cuando una variable aumenta, la otra disminuye), cómo obtener la constante de proporcionalidad inversa ($y*x=k$), y cuál es la expresión algebraica asociada ($y=-\frac{k}{x}$). Estas características le permitieron confirmar que la gráfica de la actividad inicial (Figura 3.a) no era de proporcionalidad inversa, aunque todavía no podía confirmar si era de proporcionalidad directa ay que el signo negativo de la constante todavía no tenía un significado.
- En la entrevista 5, fue la significación del signo negativo lo que le permitió aceptar que sus argumentos a la actividad inicial se contradecían y sus significados debían ser cambiados. Esta significación provino de consultar en su libro de texto de referencia, no vigente, la familia de rectas que genera la función $y=mx$, donde m determina la inclinación de la recta. Esto condujo a la validación de la función $y=-\frac{1}{2}x$ como una relación de proporcionalidad directa.

Así, esta resignificación se caracterizó, principalmente, por la ruptura del argumento hegemónico ("de la misma manera"), una articulación de razonamientos (variacional, inter, intra), la construcción de referentes para la proporcionalidad inversa y la significación del factor negativo. Si bien estas nuevas formulaciones no provienen de documentos teóricos, sí provienen de fuentes que eran familiares para el profesor, lo cual tuvo un rol importante en esta primera fase del proceso para que el docente aceptara la confrontación de argumentaciones e introdujera nuevos significados y relaciones, aunque estos estuvieran basados en una racionalidad de conceptos.

4.3. *El cambio de relación con el conocimiento matemático*

El cambio de relación con el conocimiento matemático del profesor se comienza a manifestar cuando acepta la confrontación de sus argumentaciones y significa la constante negativa como determinante de proporcionalidad directa. Esto produce que concluya que la gráfica de la actividad inicial es de proporcionalidad directa, pero ya no solo por la obtención de la constante, sino también porque tiene referentes para reconocer diferentes representaciones de proporcionalidad inversa. Estas modificaciones a la base de conocimientos es lo que le permitie al profesor construir una *razón de hacer*, es decir, los argumentos para modificar la enseñanza de la proporcionalidad directa, comenzando con un cambio en la hegemonía de la expresión "de la misma manera". Cabe mencionar que esta expresión no es eliminada, sino transformada. En la entrevista 3 al comprobar la insuficiencia del argumento variacional, el profesor advierte que la constante $k=\frac{y}{x}$ es un referente suficiente para concluir la proporcionalidad directa, por lo que la expresión “de la misma manera” comienza a referirse al caracter constante de esa razón, que implica la relación de las magnitudes más que el análisis del comportamiento de cada variable. De esta manera, la constante de proporcionalidad comienza a posicioarse como el argumento hegemónico.

A continuación, se presenta el estado final de las categorías de los ‘Significados’ y de ‘Cómo argumenta’, que refiere al cambio de relación sobre el conocimiento proporcional. Respecto a los significados, se puede notar que se trata de conocimientos que se han robustecido o transformado (Figura 6); mientras que en la categoría ‘Cómo argumenta’, se trata de una integración de la proporcionalidad inversa (Figura 6) al esquema de la proporcionalidad directa (Figura 4). Si bien este contenido no se aborda en todos los grados del nivel secundario, su incorporación brinda referentes de comparación y delimitación respecto de la proporcionalidad directa.

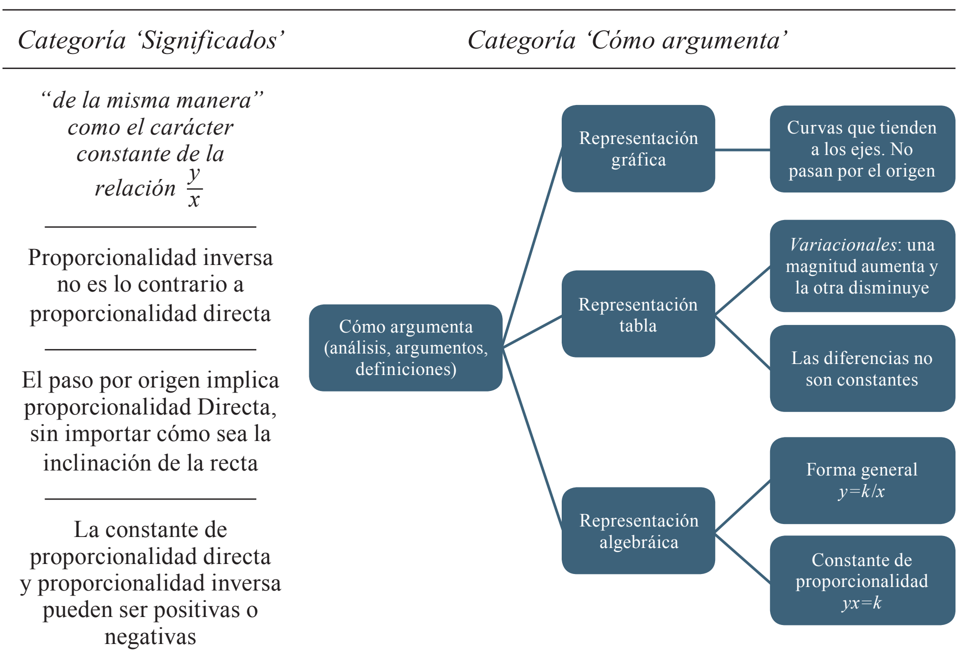


Figura 6. Evolución de categorías: estado final

En estas categorías finales se evidencia una conciencia mayor sobre la proporcionalidad directa, ya que la base de estos conocimientos se ha ampliado y articulado. Aunque la racionalidad de la matemática escolar se mantiene, no se mantienen los significados, las hegemonías, las articulaciones, ni las relaciones presentes en las categorías iniciales, ya que incluso los razonamientos de la categoría 'Cómo argumenta' cambian de rol y de importancia al momento de realizar un análisis. Este hecho, resulta fundamental para la comprensión de lo que se resignifica incluso dentro de una misma racionalidad.

4. Resultados y discusión

El análisis anterior deja ver un proceso de reflexión sobre la matemática escolar orientado por la TSME. En esta primera fase del estudio se provocó una confrontación inicial que hizo al profesor tomar conciencia del estado de su conocimiento matemático relacionado con la proporcionalidad escolar, específicamente, de los significados y argumentaciones que ponía en juego para resolver problemas, así como en la enseñanza. El análisis nos permitió dar cuenta de que la confrontación no fue única, el proceso reflexivo desató varias confrontaciones intermedias y necesarias para resolver la confrontación inicial. Lo anterior evidenció una desarticulación de conocimientos de la cual no había una conciencia, ya que esta desarticulación es preservada por los significados limitados expuestos y por la costumbre didáctica. Como ejemplo de esto último, el profesor llega a expresar el olvido de algunos conocimientos al tener presente solo los que corresponden a los grados escolares donde enseña.

> Por ejemplo, estaba yo ahí: "¿Cómo no puedo llegar a esa parte, no? Si ya me la sabía". Hay cosas que ya de repente no las practica uno y va dejando uno de interesarse en esa parte que más debe saber bien, porque no se vale decir: "pues casi no lo manejamos", ¿no?

Por otra parte, las resignificaciones fueron promovidas por las acciones del profesor, desde las que buscaba la validación de sus conocimientos, y tales resignificaciones no fueron aceptadas hasta lograr una articulación de los argumentos y significados que produjeron la confrontación inicial. Esto indica que, al confrontarse, el profesor también toma conciencia de su desconexión con la matemática que enseña, ya que recurre a argumentos y significados que no le permiten responder congruentemente. De esta manera, la desatención a su formación matemática es producto tanto de la desarticulación como de una disminución de esa responsabilidad respecto a su formación. De la primera, porque los conocimientos desarticulados tienen la característica de tener un valor de verdad no cuestionable; y de la segunda, por la desconfianza en el conocimiento profesional promovido por la desvalorización docente. El extracto anterior evidencia también la conciencia del profesor respecto a la necesidad de revisar sus conocimientos matemáticos.

Así, para el profesor del estudio fue la articulación de conocimientos (significados, procedimientos y argumentos) lo que le permitió tanto reconstruir su base de conocimientos como conectarse de nuevo con la matemática que enseña. La resignificación, por tanto, promovió una responsabilidad sobre la propia formación matemática, donde las fuentes de validación de conocimientos cobraron mucha relevancia.

Dicha aceptación de la confrontación y las resignificaciones expresaron el cambio de relación con el conocimiento matemático. El signo más relevante de este cambio es la ruptura de una hegemonía y la elección de otra. Es precisamente esta ruptura la que nos permitió identificar una autonomía del profesor sobre sus conocimientos, pues teniendo otros referentes para determinar la proporcionalidad directa, es la existencia de la constante lo que elige como herramienta para un primer análisis. El cambio de relación, entonces, manifiesta un compromiso con la formación matemática y el desarrollo de la autonomía sobre los conocimientos matemáticos. Es de esta manera, que podemos decir que el profesor vivió un proceso reflexivo que abona a su profesionalización docente desde el *cómo* y *qué* enseñar.

Aun así, con este estudio no podemos asegurar que el profesor haya desarrollado una Práctica Reflexiva respecto de la matemática escolar, pues esta competencia profesional requiere un saber hacer que no fue atendido aquí; sin embargo, las confrontaciones vividas dan indicios de cómo ganar habilidad en ese saber hacer. Como menciona Bazán (2007) se trata de problematizar las posturas existentes.

5. Conclusiones

Un proceso de reflexión de la matemática escolar no puede solo considerar los conocimientos que se involucran, sino también las actitudes, preocupaciones, emociones que vive la persona durante el proceso, ya que esos aspectos son los que determinan que el profesor cambie o no su relación con el conocimiento matemático.

Aunque este escrito solo presenta resultados de la fase 1, nos ha permitido comprender que la reflexión del profesor sobre la matemática escolar tiene procesos profundos. Por ejemplo, tomar conciencia de la relación al conocimiento matemático ha implicado más de una confrontación y ha facilitado la transición hacia conocimientos más articulados. Aunque en esta fase todavía se está en la racionalidad del discurso matemático escolar, el conocimiento de sus características ha dejado una puerta abierta para la presentación e incorporación de otra racionalidad.

Referencias bibliográficas

Akbari, R. (2007). Reflections on reflection: A critical appraisal of reflective practices in L2 teacher education. *System, 35* (2), 192-207. https://doi.org/10.1016/j.system.2006.12.008

Báez, M. & Farfán, R. (2015). La matemática escolar como objeto de reflexión docente. Aspectos para su desarrollo. *Memorias del Vigésimo noveno de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática*. Alicante, España.

Báez, M. y Farfán, R. (2017). Reflexionar sobre la matemática escolar. Una ruta socioepistemológica. En L. Serna (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 30, 1037-1045.

Bazán, D. (2007). Autonomía profesional y reflexión docente. *El oficio del pedagogo. Aportes para la construcción de una práctica reflexiva en la escuela*, Cap. IV, p. 93-117. Homo Sapiens Ediciones.

Binti. S. (2010). An exploration of mathematics teachers' reflection on their teaching practices. *Asian Social Science*, *6*(5), 147-152.

Campechano, (2006). Elementos para interpretar los significados de las acciones en las prácticas educativas. En R. C. Perales (coord.), *La significación de la práctica educativa*, 19-53. México: Paidós.

Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa*. Estudios sobre construcción social de conocimiento. (1ª Edición). Mexico: Gedisa.

Cantoral, R., Reyes-Gasperini, D. y Montiel, G. (2014). Socioepistemología, Matemáticas y Realidad. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática 7*(3), 91-116. Recuperado a partir de https://www.revista.etnomatematica.org/index.php/RevLatEm/article/view/149

Cánovas, C. (2007). Reflexión de la práctica docente en un proceso innovador. *Revista electrónica "Actualidades investigativas en educación",* 7(3), 1-19.

Chapman, O. (2014). Understanding mathematics education through teachers' perspectives. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 17, 199-200. doi.org/10.1007/s10857-014-9278-3.

Climent, N., Romero-Cortés, J., Carrillo, J., Muñoz-Catalán y M., Contreras, L. (2013). ¿Qué conocimientos y concepciones movilizan futuros maestros analizando un video de aula? *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 16 (1), 13-36.

Davini, Ma. C. (1995). *La formación docente en cuestión: política y pedagogía*. Buenos Aires, Paidós.

Dewey, J. (1989). *Cómo pensamos. Nueva exposición de la relación entre el pensamiento pensamiento reflexivo y proceso educativo.* Barcelona, Buenos Aires, México: Paidós.

Díaz, V. (2006). Formación docente, práctica pedagógica y saber pedagógico. *Laurus*, 12, 88-103.

Dolores, C.; García, M.; Hernández, J. y Sosa, L. (Eds.) (2014). *Matemática Educativa: la formación de profesores.* México: Ediciones Díaz de Santos.

Domingo, A. y Gómez, M. V. (2014). *La práctica reflexiva. Bases, modelos e instrumentos.* Madrid, España: Narcea, S. A. de Ediciones.

Edwards, G. &Thomas, G. (2010). Can reflective practice be taught? *Educational Studies*, *36*(4), 403-414.

Freire, P. (1973). *Pedagogía del oprimido.* (11ª edición). México: Siglo XXI Editores.

Freire, P. y Shor, I. (1986). Miedo y osadía: lo cotidiano del profesor. Madrid, España: Siglo XXI Editores.

García, M., Sánchez, V. y Escudero, I. (2007). Learning through reflection in mathematics teacher education. *Educational Studies in Mathematics*, 64(1), 1-17. doi.org/10.1007/s10649-006-9021-9

Guichot, V. (2013). La capacidad reflexiva, factor esencial de la identidad profesional del profesorado: Reflexiones en torno a las propuestas de John Dewey y Martha Nussbaum. *Cuestiones Pedagógicas*, 22, 183-202.

Jaworski, B. (1993). The Professional Development of Teachers — The Potential of Critical Reflection. *British Journal of In-Service Education*, 19:3, 37-42. https://doi.org/10.1080/0305763930190307

Kwon, N.Y. & Orrill, Ch. H. (2007). A comparison study of a teacher's reflection. En O. Figueras, J. L. Cortina, S. Alatorre, T. Rojano y A. Sepúlveda (Eds.), *Proceedings of the Joint Meeting of the 32nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education and XXXth Annual Meeting of the North American Chapter of PME*, 1, 352.

Latorre, M. (1992). *La reflexión en la formación del profesor.* Tesis de doctorado. Universitat de Barcelona. España.

Lozano, I. y Levinson, B. (2018). El docente de secundaria ante las reformas educativas en México. De apóstol a empleado desechable. *Revista Electrónica "Actualidades Investigativas en Educación", 18*(1), 1-23. DOI: 10.15517/aie.v18i1.31656

Parada, E. y Pluvinage, F. (2014). Reflexiones de profesores de matemáticas sobre aspectos relacionados con su pensamiento didáctico. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *17*(1), 83-113. https://dx.doi.org/10.12802/relime.13.1714

Perales, R. (2006). *La significación de la práctica educativa*. México: Paidós.

Perrenoud, P. (2004). *Desarrollar la práctica Reflexiva en el oficio de enseñar.* España: Graó.

Ponte, J. & Chapman, O. (2008). Preservice mathematics teachers' knowledge and development. In L. English, M. B. Bussi, G. A. Jones, R. A. Lesh, B. Sriraman, & D. Tirosh (Eds.), *Handbook of international research in mathematics education*. New York, NY: Routledge.

Ramos, E. (2014). *Reflexión docente sobre la enseñanza del álgebra en un curso de formación continua*. Tesis de doctorado no publicada. Universidad de Granada.

Revilla, D. (2010). La práctica reflexiva durante el desarrollo de la práctica pre – profesional docente. *Congreso Iberoamericano de Educación*. *Metas educativas*. Buenos Aires, Argentina.

Reyes-Gasperini, D. (2016). *Empoderamiento docente desde una visión socioepistemológica: una alternativa para la transformación y la mejora educativa*. Tesis de doctorado no publicada. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados, México.

Sánchez, M. (2010). *How to stimulate rich interactions and reflections in online mathematics teacher education?* PhD Dissertation. Roskilde University, Denmark. ISSN: 0106-6242.

Sañudo, L. E. (2006). El proceso de significación de la práctica como sistema complejo. En R. C. Perales (coord.), *La significación de la práctica educativa*, (19-53). México, Paidós.

Schön, D. A. (1998). *El profesional reflexivo: cómo piensan los profesionales cuando actúan*. España, Paidós.

Sennet, R. (2009). *El artesano.* Barcelona, Anagrama.

Smyth, J. (1991). Una pedagogía crítica de la práctica en el aula. *Revista de Educación*, *294* (14), 275-300. Recuperado de: https://www.educacionyfp.gob.es/revista-de-educacion/numeros-revista-educacion/numeros-anteriores/1991/re294/re294-14.html

Torres, C. A. (1980). *Paulo Freire. Educación y Concientización.* España: Ediciones Sígueme.

Tzur, R. (2001). Becoming a mathematics teacher-educator: Conceptualizing the terrain through self-reflective analysis. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 4, 259-283.

Walshaw, M. (2010). Mathematics pedagogical change: rethinking identity and reflective practice. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *13* (6), 487-497. https://doi.org/10.1007/s10857-010-9163-7

Zeichner, K. (1993). El maestro como profesional reflexivo, *Revista de Pedagogía*, 220, 44-49. Barcelona: Fontalba.

Autoras

Mayra Báez Melendres. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, CINVESTAV. México. 0000-0001-8550-1602 mbaez@cinvestav.mx

Rosa María Farfán Márquez. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, CINVESTAV. México. 0000-0003-1229-8521 rfarfan@cinvestav.mx

Marcela Parraguez González, Solange Roa-Fuentes,
Raúl Jiménez Alarcón, Alexander Betancur Sánchez

ESTRUCTURAS Y MECANISMOS MENTALES QUE DESDE UNA PERSPECTIVA GEOMÉTRICA MODELAN Y ARTICULAN EL APRENDIZAJE DE VALOR Y VECTOR PROPIO EN $\mathbb{R}^2$

Mental structures and mechanisms that from a geometric perspective model and articulate the learning of eigenvalue and eigenvector in $\mathbb{R}^2$

RESUMEN

Se proponen dos descomposiciones genéticas (DG's) refinadas, como resultado de la aplicación del Ciclo de investigación de APOE, que describen estructuras y mecanismos mentales para el concepto de valor y vector propio en dos casos de estudio. La primera DG_0 modela los conocimientos previos que estudiantes de secundaria (14 – 16 años) deben lograr para construir en la universidad dicho concepto en $\mathbb{R}^2$, —este modelo se sustenta en la rotación de vectores y el concepto de múltiplo escalar—. La segunda DG_1 modela en $\mathbb{R}^2$ la construcción de valor y vector propio en estudiantes universitarios de primer año y muestra cómo apoyarse en tópicos de secundaria para estructurar dicho concepto a partir de relaciones entre la transformación lineal y el vector múltiplo escalar como generador de una recta. El análisis de datos permite validar las DG's y bosquejar un camino cognitivo para el aprendizaje del concepto de valor y vector propio en $\mathbb{R}^2$.

PALABRAS CLAVE:

- *Valor propio*
- *Vector propio*
- *Rotación*
- *Múltiplo escalar*
- *Teoría APOE*

ABSTRACT

Two refined genetic decompositions (DGs) are proposed, as a result of the application of the APOS Research Cycle, which describe mental structures and mechanisms for the concept of value and eigenvector in two case studies. The first DG_0 models the prior knowledge that high school students (14 – 16 years old) must achieve in $\mathbb{R}^2$ order to build this concept in the university —this model is based on vector rotation and the concept of scalar multiple—. The second DG_1 models in $\mathbb{R}^2$ the construction of eigenvalue and eigenvector in first-year university students and shows how to rely on secondary education to structure that concept from relationships between the linear transformation and the scalar multiple vector as a generator of a line. The data analysis allows to validate the DG's and outline a cognitive path for learning the concept of eigenvalue and eigenvector in $\mathbb{R}^2$.

KEY WORDS:

- *Eigenvalue,*
- *Eigenvector*
- *Rotation*
- *Scalar product*
- *APOS theory*

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (2022) *25* (1): 63 - 92.
Recepción: Octubre 25 2020 / Aceptación: Julio 25, 2022. DOI: 10.12802/relime.22.2513

RESUMO

Duas decomposições genéticas refinadas (DGs) são propostas, como resultado da aplicação do Ciclo de Pesquisa APOS, que descrevem estruturas mentais e mecanismos para o conceito de valor e autovetor em dois estudos de caso. O primeiro DG_0 modela o conhecimento prévio que os alunos do ensino médio (14 – 16 anos) devem adquirir para construir esse conceito na universidade em $\mathbb{R}^2$ —este modelo é baseado na rotação vetorial e no conceito de múltiplo escalar—. O segundo DG_1 modela a $\mathbb{R}^2$ construção de autovalor e autovetor em estudantes universitários do primeiro ano e mostra como contar com o ensino médio para estruturar esse conceito a partir das relações entre a transformação linear e o vetor múltiplo escalar como gerador de uma reta. A análise dos dados permite validar os GD's e traçar um caminho cognitivo para a aprendizagem do conceito de autovalor e autovetor em $\mathbb{R}^2$.

PALAVRAS CHAVE:

- *Autovalor*
- *Autovetor*
- *Rotação*
- *Produto escalar*
- *Teoria APOS*

RÉSUMÉ

Deux décompositions génétiques raffinées (DG) sont proposées, à la suite de l'application du cycle de recherche APOS, qui décrit les structures mentales et les mécanismes du concept de valeur et de vecteur propre dans deux études de cas. Le premier DG_0 modélise les connaissances préalables que les lycéens (14 – 16 ans) doivent acquérir pour construiré en $\mathbb{R}^2$ ce concept à l'université —ce modèle est basé sur la rotation vectorielle et le concept de multiple scalaire—. Le deuxième DG_1 modélise en $\mathbb{R}^2$ la construction de valeur et de vecteur propre chez les étudiants de première année d'université et montre comment utiliser le soutien de l'enseignement secondaire pour structurer ledit concept en fonction des relations entre la transformation linéaire et le vecteur multiple scalaire en tant que générateur d'une ligne. L'analyse des données permet de valider les DG's et de tracer un chemin cognitif pour apprendre le concept de valeur et de vecteur propre en $\mathbb{R}^2$.

MOTS CLÉS:

- *Valeur propre*
- *Vecteur propre*
- *Rotation*
- *Produit scalaire*
- *Théorie APOS*

1. Introducción

Los estudiantes de ciencias, tecnología, ingeniería y matemáticas, STEM (por sus siglas en inglés) precisan de un pensamiento matemático avanzado (Tall, 1991) para abordar actividades interdiciplinarias y en correspondencia con las habilidades requeridas en el siglo XXI (Cook & Bush, 2018), que apuntan a profundizar la comprensión conceptual de la matemática desde la escuela.

La era de las "Matemáticas Modernas" de los años 60, que estuvo liderada por matemáticos puristas de la Escuela de Bourbaki, concebían que la enseñanza de las matemáticas y en particular el Álgebra Lineal tenía que reflejar la construcción de la lógica, dotando a este fragmento de la matemática muy abstracta y formal, lo que fue provocando fracasos y dificultades en los estudiantes.

Unos 25 años después, con la aparición de la Matemática Educativa y el uso de las Tecnologías, la enseñanza del Álgebra Lineal ha ido incorporando la visualización para ver y entender de mejor manera los tópicos que conforman el Álgebra Lineal. Algunos investigadores, como Dorier y Sierpinska (2001) no son optimistas en estos nuevos enfoques y declaran que "comunmente en las discusiones sobre la enseñanza y el aprendizaje del Álgebra Lineal, los cursos de Álgebra Lineal están mal diseñados y mal enseñandos y que no importa como se enseñe, el Álgebra Lineal sigue siendo una materia cognitiva y conceptualmente díficil" (p. 258). Sin embargo, Klasa (2010), presenta actividades apoyadas en geometría dinámica y álgebra computacional para fortalecer la comprensión del Álgebra Lineal en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$, finalidad que comparte la propuesta actual de este artículo para $\mathbb{R}^2$.

Para Hillel, Sierpinska & Dreyfus (1998) la comprensión de un fragmento del Álgebra Lineal se produce cuando ineractúa el pensar práctico (dado por lo geométrico) y el pensar teórico (dado por algebraico y lo estructural) de ese fragmento. Por ende abordar y atender lo geométrico de un concepto del Álgebra Lineal se torna fundamental y particular a la vez, para la comprensión de sus conceptos. Posteriores extensiones de la investigación anterior, como el trabajo de Soto (2005) muestran algunas dificultades en la conversión gráfico-algebraica de situaciones con vectores.

Sin embargo, los estudiantes que cursan Álgebra Lineal por primera vez sienten haber aterrizado en un mundo completamente nuevo (Dorier, Robert, Robinet y Rogalski, 2000), no logran "ver" cómo los tópicos que se definen formalmente en la universidad se relacionan con las matemáticas de la escuela (Rensaa, Hogstad y Monaghan, 2020; Rach y Fillebrown, 2016). La brecha entre las matemáticas de la escuela y la universidad esta dibujada por la construcción sobre Objetos concretos y abstractos (Arnon, Cottril, Dubinsky, Oktaç, Roa-Fuentes, Trigueros & Weller, 2014) respectivamente, en este sentido, el uso de las representaciones geométricas es un aspecto que permite trazar puentes entre formas simples y complejas de pensamiento (Harel, 2017). Los valores y vectores propios, así como otros conceptos de Álgebra Lineal con frecuencia descuidan la comprensión conceptual (Bouhjar, Andrews-Larson, Hadier y Zandieh, 2018) y pretenden esquivar la naturaleza abstracta de conceptos como espacio vectorial y transformación lineal mediante la ejercitación de procedimientos calculatorios específicos que los estudiantes logran manipular, pero que no necesariamente logran comprender (Robinet, 1986; Moore, 1995; Parraguez y Oktaç, 2010; Parraguez, Lezama y Jiménez, 2016; González y Roa-Fuentes, 2017).

Particularmente, para los estudiantes los conceptos del Álgebra Lineal se construyen de manera parcial y diferentes según los dominios (físico, geométrico, numérico, algebraico, analítico u otros), lo que tributa a que la construcción de estos tópicos abstractos pueda estar afectada por desequilibrios de la generalidad a partir de situaciones geométricas concretas (Harel, 2017), que el presente artículo –como objetivo general– trata de compensar al trabajar de manera geométrica un determinado tópico del Álgebra Lineal; con base en un modelo de conocimientos previos sustentados en lo geométrico de un currículo y nivel escolar concreto.

En específico, referente a los valores y vectores propios algunos planteamientos enfatizan en el problema de la visualización y las aplicaciones de estos conceptos en áreas como Física (Beltrán-Meneu, Murillo-Arcila & Albarracin, 2017; Beltrán-Meneu, Murillo-Arcila & Jordán, 2017). Por otra parte, Salgado y Trigueros (2015), proponen el diseño y desarrollo de un modelo de clase inicial basado en la Teoría APOE. De manera particular, Rodríguez, Parraguez y Trigueros (2018) y González y Roa-Fuentes (2017) centran la mirada en el estudio de $\mathbb{R}^2$ como espacio vectorial y su representación en el plano, evidenciando que la construcción de Acciones concretas generan una mejor comprensión de *Objetos* cognitivos abstractos (Klasa, 2010).

Esta investigación se direcciona en plantear desde una perspectiva geométrica un análisis teórico del concepto de valor y vector propio en $\mathbb{R}^2$. Específicamente en describir, por un lado, los conocimientos previos de secundaria que se precisan para construir dicho concepto y por otro, mostrar estructuras geométricas sobre los cuales puede apoyarse un estudiante universitario de primer año para interpretar algebraica y geométricamente el concepto de valor y vector propio en $\mathbb{R}^2$.

Los valores y vectores propios de acuerdo con varios libros de texto (Poole, 2011; Lay, 2007; entre otros) se definen como:

> Si A es cualquier matriz numérica cuadrada con coeficientes en los números reales, de tamaño $n \times n$, entonces:
> (1) Un valor propio de la matriz A, denominado λ, es un escalar, que para un vector v distinto del vector nulo, se cumple la siguiente condición: $Av = \lambda v$.
> (2) El vector v se llama vector propio de A, asociado al valor propio λ.

La definición formal del concepto puede pasar a segundo plano, cuando se realza la fuerza visual de las interpretaciones geométricas de los conceptos definidos en $\mathbb{R}^2$. De acuerdo con esto, el aprendizaje de los estudiantes no se debe limitar solo a la aplicación de propiedades de matrices sobre expresiones algebraicas, como la que sugiere, el paso de la expresión $Ax=\lambda x$ a la expresión $(A-\lambda I)x=0$ (Thomas y Stewart, 2011).

El proceso de rotación de vectores propios, en general está relacionado con el endomorfismo $T_\theta:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ donde θ es el ángulo de rotación y se llama operador rotación. En la presente investigación, se analizan resultados para el caso n=2 dado que se utilizan evidencias de estudiantes tanto de enseñanza secundaria como de primer año universitario y que es, a juicio de los autores, los niveles que reportan mayores dificultades. El operador T_θ puede representarse matricialmente respecto de la base canónica $B=\{e_1,e_2\}$ de $\mathbb{R}^2$, mediante la matriz $[\mathrm{A}]_{T_\theta}=\begin{bmatrix} cos0 & -sen0 \\ sen\theta & cos\theta \end{bmatrix}$. Por ejemplo, si θ = 90°, esta matriz no puede tener vectores propios en $\mathbb{R}^2$, ya que ningún vector es transformado en un múltiplo de si mismo y por lo tanto no puede tener valores propios reales. De hecho, su polinomio característico está dado por el polinomio $p(\lambda)=\lambda^2+1$ con raíces $\lambda=i$ y $\lambda=-i$ con valores propios sobre $\mathbb{C}^2$ dados por $\begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$ respectivamente. En general, los valores propios de la matriz $[\mathrm{A}]_{T_\theta}$ están dados por los números $\lambda=r(cos\theta \pm isen\theta)=re^{\pm i\theta}$. Si asumimos que un vector propio asociado lo podemos escribir de la forma $v_1=r_1e^{i\theta_1}$, en la igualdad $Av_1=\lambda v_1$, el producto $\lambda v_1=re^{\pm i\theta}r_1e^{i\theta_1}=rr_1e^{i(\theta_1\pm\theta)}$ nos muestra que el vector propio v_1 es escalado (dilatado o contraído) y sufre una rotación. Esto establece que valores propios complejos, modifican la magnitud y orientación del vector propio.

Para efectos de esta investigación y para focalizarnos en un problema recurrente sobre el proceso de rotación, consideraremos el caso de valores y vectores propios reales, de donde en la igualdad $\lambda=r(cos+isen)=0$ la única posibilidad que sean reales es si se cumple que $sen\theta=0$. Por tanto, los valores propios son reales para $\theta=k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$, esto es, por ejemplo, rotaciones en 180°.

Los valores y vectores propios pertenecen a los tópicos de mayor aplicación del Álgebra Lineal; entre los que cabe destacar, el problema de la diagonalización de una matriz, de Cadenas de Markov y crecimiento poblacional, de sistemas de ecuaciones diferenciales lineales y de sistemas lineales discretos (Poole, 2011), el movimiento de masas unido a una cuerda (Yáñez, 2015). Particularmente este último se modela y resuelve a partir de los conceptos de valor y vector propio y el uso de ecuaciones diferenciales.

Un acercamiento más intuitivo de valor y vector propio en $\mathbb{R}^2$, se presenta en la Figura 1. En ella se puede apreciar, que la transformación deforma el copo de nieve de tal manera que los vectores rojo $(1,-1)$ y rosado $(1, 1)$ son vectores propios de la transformación con valores propios 1 y 3 respectivamente.

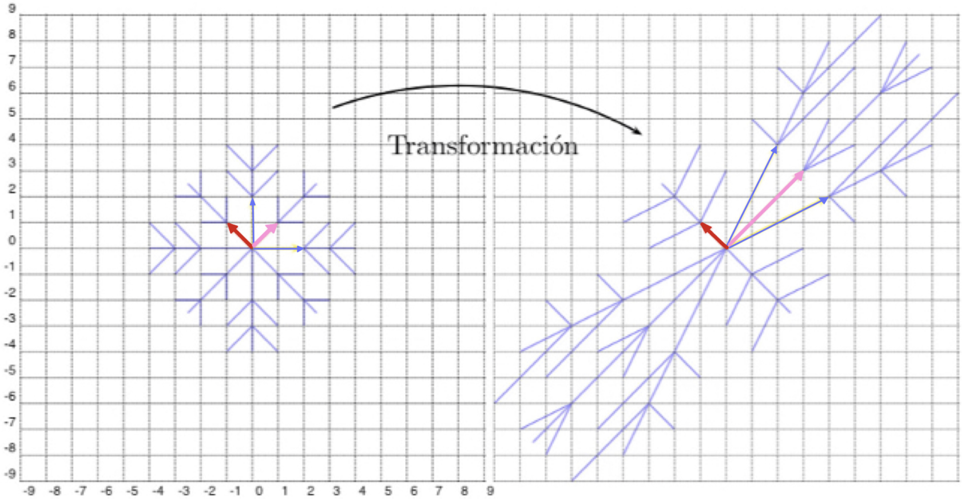


Figura 1. Transformación del copo de nieve

El vector rojo mantiene su dirección y sentido $T(1,-1)=1(1,-1)$ por tanto su valor propio correspondiente es 1; mientras que el vector rosado mantiene su dirección pero no su longitud, $T(1,\ 1)=3(1,\ 1)$, en este caso 3 es su valor propio correspondiente. Todos los vectores en la misma dirección y sentido de los vectores rojo y rosado son vectores propios, al valor propio respectivo; éstos forman los espacios propios $S_\lambda=\{v\in\mathbb{R}^2/Av=\lambda v\}$ definidos por el valor propio λ, en este caso S_1 y S_3.

Las preguntas de investigación que surgen con base a la presentación de los apartados anteriores, son, desde la matemática: ¿Qué prerrequisitos son necesarios para el aprendizaje de los valores y vectores propios desde una perspectiva geométrica en $\mathbb{R}^2$? y desde la cognición y la didáctica: ¿Cuáles son las estructuras y mecanismos mentales asociados a la construcción de los conceptos valores y vectores propios desde una perspectiva geométrica en $\mathbb{R}^2$? Esta investigación se sitúa en un escenario con estudiantes de secundaria y primer año de universidad, utilizando como marco teórico la teoría APOE. Esta teoría es pertinente dado que justamente se aboca al análisis de la construcción de conceptos matemáticos y proporciona una metodología que permite el diseño de instrumentos y el análisis de los datos de forma congruente con la propuesta teórica (Arnon et al., 2014). Es decir, permite analizar las estrategias, que los estudiantes utilizan cuando resuelven problemas específicos, en los cuales ponen en juego sus concepciones sobre conceptos matemáticos (Oktaç, 2019).

2. Fundamentación teórica: estructuras y mecanismos mentales de la Teoría APOE

La teoría APOE explica la construcción de conocimiento matemático, con base en el mecanismo de abstracción reflexiva propuesto por Piaget (Dubinsky, 1991); este se pone de manifiesto en la teoría a través de distintos mecanismos: interiorización, coordinación, generalización, encapsulación, reversión, entre otros, que dan paso a las estructuras que definen su nombre: Acciones, Procesos, Objetos y Esquemas (Arnon et al., 2014).

Como se señala en Arnon et al., (2014) la construcción de un concepto puede iniciar con la aplicación de Acciones sobre Objetos construidos previamente. Así un estudiante muestra una concepción[1] *Acción* si realiza paso a paso un tipo de transformación, obedeciendo a estímulos externos; estas Acciones se han relacionado en un nivel básico con la aplicación de algoritmos. Las Acciones pueden ser interiorizadas en un *Proceso* si el estudiante puede realizar esencialmente la misma transformación enteramente en su mente, sin necesariamente realizar todos los pasos específicos o en orden.

Por otra parte, dos o más *Procesos* pueden coordinarse para construir un nuevo *Proceso*; el mecanismo de coordinación es fundamental en la construcción de muchos conceptos matemáticos (Arnon et al., 2014), dado que permite poner dos o más *Procesos* juntos y dar paso a la encapsulación. Si el estudiante considera un *Proceso* como un todo, y realiza y construye transformaciones sobre él, se afirma que ha *encapsulado* el *Proceso* en un *Objeto.* Desde la perspectiva de la teoría APOE, las dificultades de los estudiantes con el simbolismo matemático provienen de tratar de aplicar rótulos antes de que los objetos hayan sido construidos vía encapsulación. Una vez que el objeto existe en la mente, es fácil asignarle un rótulo. Por otra parte, haber alcanzado la construcción Objeto, conlleva la posibilidad de desencapsular el Objeto en el Proceso que lo formó (Dubinsky et al., 2005, p. 340), de este modo se favorece la interpretación de una representación simbólica.

Finalmente, un *Esquema* es una colección de *Acciones*, *Procesos*, *Objeto* y otros *Esquemas* que el estudiante organiza de forma coherente en su mente. Un esquema esta siempre en evolución y puede considerarse como un nuevo *Objeto* para aplicar nuevas *Acciones*; en tal caso, se dice que el *Esquema* se ha *tematizado*.

[1] Una concepción difiere de estructura, en el sentido en que la primera es propia del sujeto, y la segunda es consenso de la comunidad matemática (McDonald, Mathews & Strobel, 2000).

Para operacionalizar la teoría APOE como marco de investigación se requiere del diseño de un modelo predictivo, llamado descomposición genética (DG). Este es un modelo hipotético que describe en detalle las construcciones y mecanismos mentales que son necesarios para que un estudiante comprenda un concepto matemático (Arnon et al., 2014). En el caso de esta investigación interesa el diseño de dos DG´s que describan la construcción mental de los conocimientos previos que subyacen en la educación secundaria y las estructuras y mecanismos mentales que tributan para el aprendizaje de valor y vector propio en $\mathbb{R}^2$ por estudiantes universitarios.

3. Método

Para determinar las construcciones y mecanismos mentales que subyacen a la construcción y prerrequisitos de los valores y vectores propios en estudiantes de los niveles escolares señalados, se diseñaron dos DG's que se presentan más adelante. También, se elaboraron instrumentos, basados en las DG's, con la finalidad de realizar un análisis de las producciones escritas de los estudiantes. Para analizar sus procedimientos, se consideró que una aproximación adecuada es el estudio de Casos (Stake, 2010), ya que se presta para analizar una situación a profundidad en un periodo de tiempo acotado.

3.1. *Participantes*

En esta investigación participan doce estudiantes chilenos de dos instituciones de distinto nivel educativo: secundaria y universitaria. Los casos de estudio se justifican en la necesidad de delimitar con precisión las construcciones mentales previas que los participantes ponen en juego cuando trabajan con conocimientos asociados a los valores y vectores propios en $\mathbb{R}^2$. Además, se busca analizar las estructuras y mecanismos mentales que los participantes construyen cuando abordan situaciones que involucran el concepto de valor y vector propio en $\mathbb{R}^2$. Los casos de estudio permiten explicitar y describir las estructuras y los mecanismos mentales identificados mediante los instrumentos de investigación aplicados. Además, la heterogeneidad en la formación de los estudiantes de distintos niveles de formación permite explicitar las construcciones y los mecanismos mentales que son comunes y disimiles en la construcción de valores y vectores propios desde una perspectiva geométrica.

El procedimiento seguido en la selección de los casos de estudio se basó en la consideración de las siguientes categorías.

Caso 1: Corresponde a seis estudiantes de secundaria (14 – 16 años, etiquetados como E1, E2, E3, E4, E5, E6), que durante un trimestre y una vez por semana se han reunido voluntariamente para dar respuesta a 12 actividades, entre ellas las preguntas del cuestionario que se reportan en este escrito. En los cursos de matemáticas, que han llevado estos estudiantes, se incluyen el estudio de transformaciones isométricas.

Caso 2: Corresponden a seis estudiantes de Pedagogía en Matemáticas etiquetados como E7, E8, E9, E10, E11 y E12 que han finalizado y aprobado un primer curso de Álgebra Lineal. En este curso se abordaron los conceptos de espacio vectorial, transformación lineal, valor y vector propio con un enfoque algebraico.

3.2. *Ciclo de investigación*

El ciclo de investigación inicia con un análisis teórico sobre los conceptos básicos ligados a los valores y vectores propios en $\mathbb{R}^2$. Este análisis permite mediante la descripción de las construcciones mentales, modelar la epistemología y cognición de los conceptos matemáticos a estudiar a través de dos DG's: una DG_0 para modelar los conocimientos previos a la construcción de valores y vectores propios en $\mathbb{R}^2$ y otra DG_1, con la finalidad de modelar su construcción en $\mathbb{R}^2$ para estudiantes universitarios.

En la segunda etapa de la investigación una vez constituidas las DG's hipotéticas es necesario documentarlas. Es decir, tener alguna certeza de la viabilidad de los caminos señalados en ellas. Para esto se diseñan y aplican instrumentos que permitan validar las estructuras mencionadas en las DG's (ver Tabla I) o bien incorporar aquellas estructuras que no hayan sido consideradas en las DG's hipotéticas. El carácter cualitativo y descriptivo de esta investigación, permite analizar las concepciones de los estudiantes como elemento de primordial importancia ya que se busca hacerlas lo más explícitas posible.

TABLA I
Resumen y recolección de información por casos de estudio

Fuente	*Caso 1* Estudiantes de Secundaria E1, …, E6	*Caso 2* Estudiantes Universitarios E7, …, E12
Técnica de Recogida de datos	Aplicación de las preguntas 1, 2, 3 y 4 del cuestionario	Aplicación de las preguntas 1, 2, 3, 4, 5 y 6 del cuestionario
Análisis y Verificación de Datos	Analizados desde la DG_0	Analizados desde la DG_1
Objetivo	Validar y/o Refinar DG_0	Validar y/o Refinar DG_1

En la tercera etapa Análisis y verificación de datos, los resultados obtenidos con la aplicación de los instrumentos son analizados desde las DG`s hipotéticas, detectando qué elementos no han sido considerados o cuáles de las construcciones dadas hipotéticamente no se evidencian en el trabajo de los estudiantes. En general el análisis tiene que ser realizado con nitidez, es decir, ejemplos de estudiantes quienes parecen comprender esto y otros que no lo hacen, y luego discutir que la diferencia radica en la presencia o falta de una construcción o mecanismo mental en particular que aparece en las DG`s. Solamente entonces se puede llegar a la conclusión de que los datos soportan esta construcción mental particular en las DG`s. Esto es realizado para todas las estructuras mentales específicas que se explicitan en el Análisis teórico.

3.3. *Análisis teórico*

El análisis teórico en esta investigación se materializa en el diseño de dos DG`s validadas o refinadas a través de dos casos de estudio. Para la primera DG_0 hemos situado su validación o refinación en la enseñanza secundaria –Caso 1–; y en educación superior –Caso 2– para DG_1.

3.3.1. *Modelo cognitivo hipotético de los conocimientos geométricos previos para la construcción de los valores y vectores propios desde una perspectiva geométrica en $\mathbb{R}^2$:* DG_0

El modelo cognitivo hipotético de los conocimientos previos y sus relaciones para la construcción de los conceptos de valor y vector propio en $\mathbb{R}^2$ toma como estructuras iniciales: el múltiplo escalar y la rotación de 180º alrededor del origen, como *Acciones*. Como se presenta en la Figura 2, el múltiplo escalar inicia su construcción con la aplicación de las *Acciones 1 y 2* sobre formas geométricas o algebraicas de los vectores. La transformación de vectores específicos en $\mathbb{R}^2$ mediante escalares c en $\mathbb{R}$, determinados por la función $f(a, b) = (ca, cb)$ puede generar la reflexión de los estudiantes sobre el múltiplo escalar y dar paso a la construcción del *Proceso 1.*

Por otra parte, analizando la Figura 2 por la derecha, se tienen el *Proceso* de rotación de 180° con centro en el origen. Dicho *Proceso* resulta de la interiorización de la *Acción* de seleccionar vectores específicos y graficarlos con sus respectivas rotaciones. La estructura *Proceso* se caracteriza por anticipar la relación geométrica entre un vector y su rotación ya sea de forma geométrica o algebraica. La coordinación entre el *Proceso* de la función $f(x, y) = (\lambda x, \lambda y)$ (Proceso 2) con el *Proceso* de rotación de 180° con centro en el origen permite la construcción del *Proceso* múltiplo escalar de un vector como se muestra en la Figura 2. Esta estructura permite describir la transformación que se aplica a cualquier vector al ser multiplicado por un escalar, es decir, es posible establecer intervalos para los valores del escalar donde el efecto geométrico que se aplica a cualquier vector es él mismo. En relación con esto último es posible definir para cada vector $v \in \mathbb{R}^2$, la función $g_v(\lambda)=\lambda v$, en donde si $\lambda>0$, se mantiene el sentido del vector, mientras que si $\lambda<0$, el sentido del vector es opuesto, generando una rotación en 180°.

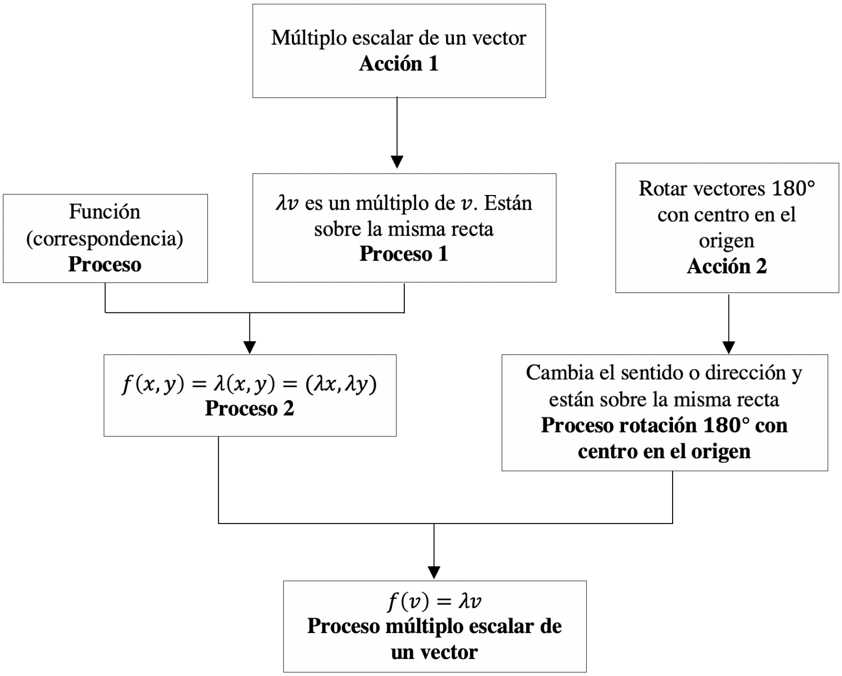


Figura 2. DG_0 hipotética de los conceptos previos para la construcción de valor y vector propio en $\mathbb{R}^2$: Interiorización de Acciones y coordinación de Procesos

3.3.2. *Modelo cognitivo hipotético para la construcción de los valores y vectores propios desde una perspectiva geométrica en* $\mathbb{R}^2$*:* DG_1

En esencia el concepto protagónico a nivel universitario para el aprendizaje de valores y vectores propios es el concepto de transformación lineal. La Figura 3 en la parte derecha muestra las *Acciones* que debe realizar un estudiante, y que se han considerado esenciales para iniciar la construcción de valor y vector propio. La

Acción 3 corresponde al producto matriz-vector, su interiorización se evidencia al reconocer tal producto como una transformación de vectores, de manera que sin realizar cálculos es posible imaginar el efecto geométrico que produce la matriz en el vector. Las *Acción 4 y 5* están relacionadas con las propiedades de linealidad de la transformación lineal. Sobre la interiorización de las *Acciones 4 y 5* y la coordinación de los *Procesos* relacionados a dichas *Acciones (Procesos 4 y 5)* se muestran más detalles en Roa-Fuentes y Oktaç (2010). La coordinación del *Proceso 3* con el *Proceso* de transformación lineal es producto de la comparación de igualdad entre $T(v)$ y $A_T v$ considerando la matriz $A_T = [T(e_1)\ T(e_2)]$, llamada matriz asociada a la transformación T respecto de la base $B = \{e_1, e_2\}$. González y Roa-Fuentes (2017) consideran que la interpretación matricial de la transformación lineal involucra la elección de una base, que para este caso es la canónica de $\mathbb{R}^2$. Finalmente, la comparación mediante la igualdad entre $T(v)$ o $A_T v$ con λv permite reconocer que se produce un mismo efecto en el vector, aunque sean operaciones diferentes. De esta manera se puede rotular al vector y al escalar como valor y vector propio, respectivamente.

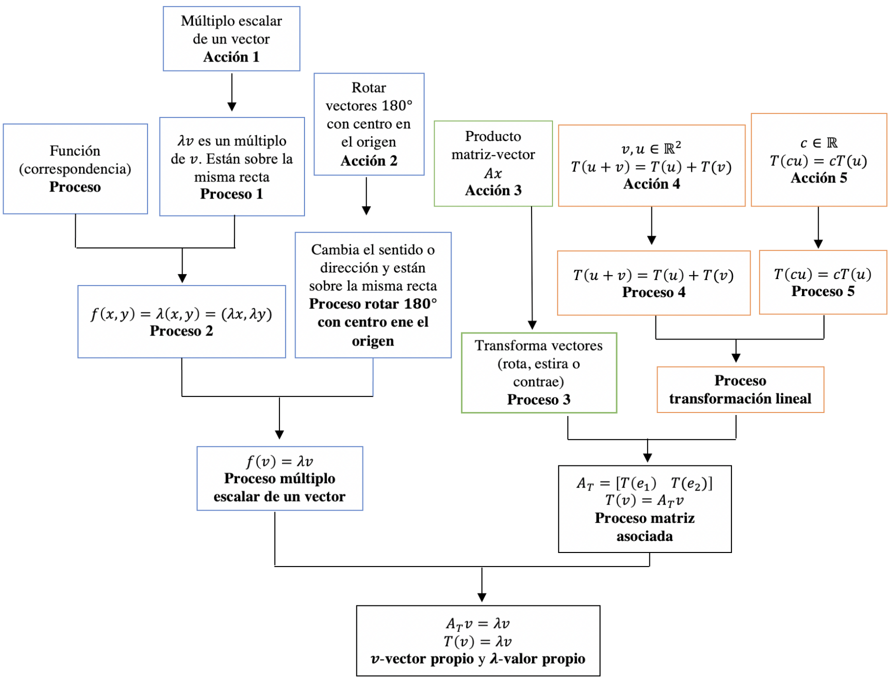


Figura 3. DG_1 hipotética de los conceptos de valor y vector propio en $\mathbb{R}^2$: Interiorización de Acciones y Coordinación de Procesos

Con base en los dos modelos cognitivos descritos, se da paso a la recolección y análisis de datos. En esta etapa se pueden evidenciar o refinar las estructuras y mecanismos planteados en DG_0 y en DG_1 o bien, pueden emerger producto del análisis nuevas construcciones y mecanismos, como resultado del trabajo real de los estudiantes derivado de la aplicación de los instrumentos de investigación diseñados.

3.4. *Instrumento*

Una vez diseñados los análisis teóricos para DG_0 y DG_1 fue necesario validarlos, esto es, tener certeza de su viabilidad como modelo de construcción de las estructuras previas (conocimientos previos) situadas en enseñanza secundaria y del concepto de valor y vector propio en $\mathbb{R}^2$ situados en enseñanza universitaria, respectivamente. Para ello se diseñaron dos cuestionarios uno para cada Caso de estudio. Para cada una de las preguntas de los cuestionarios se realizó un análisis a priori y otro a posteriori. Ambos análisis fueron profusamente discutidos entre los investigadores y las discrepancias se negociaron, hasta alcanzar un acuerdo que se presenta más adelante como el análisis a priori de las preguntas, y posteriormente como el análisis de los datos obtenidos en la investigación.

3.4.1. *Análisis a priori de las preguntas*

El análisis a priori se realiza para cada una de las preguntas del cuestionario diseñado para cada Caso de estudio. Estos instrumentos tienen una componente epistemológica ya que se basan en las DG's, además, su intención es promover la reflexión de los estudiantes para apoyar la construcción de conocimiento asociado a los valores y vectores propios. Los instrumentos además, toman en cuenta las mallas curriculares y/o programas de matemáticas de los estudiantes de ambos casos.

Caso 1: Estudiantes de enseñanza secundaria. Para este caso se analizan las preguntas P1, P2, P3 y P4 del cuestionario.

Pregunta 1: A continuación se presenta una función T que tiene el siguiente efecto al aplicarla a un vector v de $\mathbb{R}^2$, $T(v)=\lambda v$, donde λ es un número real.

a) ¿Qué efecto geométrico ejerce T? Explique.
b) Si λ toma los valores 2 y –2, ¿Qué forma toma $T(v)$? Explique.
c) Suponga que se tienen los siguientes vectores de $\mathbb{R}^2$: $v_1=(1,1)$, $v_2=(-1,-2)$, $v_3=(-2,4)$ y $v_4=(3,-1)$.

Si λ es igual a 2, ¿Qué sucede con cada uno de los vectores anteriores cuando se les aplica T? y ¿Si λ es igual a −2 que sucede con ellos? Explique.

d) Explique qué sucede si los valores de λ son positivos o negativos, grafique los vectores finales cuando se aplica T a los vectores $v_1=(1,1)$, $v_2=(-1,-2)$, $v_3=(-2,4)$ y $v_4=(3,-1)$. ¿Qué relación tienen con cada uno de los vectores iniciales?

Esta pregunta busca conocer las interpretaciones verbales, geométricas o algebraicas sobre el múltiplo escalar. La pregunta demanda describir el efecto sobre vectores particulares y generales. Cada ítem se caracteriza por preguntar de forma diferente sobre el múltiplo escalar. En el ítem b) se muestran valores específicos del escalar y se espera que el estudiante pueda pensar en vectores generales o particulares. Por otra parte, el ítem d) requiere formas de pensamiento generales sobre escalares y vectores, al mismo tiempo. A partir de las respuestas de los estudiantes se busca tener evidencias sobre cómo conciben la transformación *T*. La noción subyacente en esto es la idea de múltiplo. Para casos particulares se puede evidenciar una contracción de los vectores si $0<\lambda<1$, y dilatación si $\lambda>1$. Más aún, los mismos efectos, pero en sentido opuesto si $\lambda=-1$ y si $-1<\lambda<0$. Un caso donde se puede observar un aspecto geométrico conocido es para $\lambda=-1$, pues este corresponde a la rotación en 180º con centro en el origen para vectores en $\mathbb{R}^2$.

Pregunta 2: ¿Qué efecto ejercen las transformaciones que corresponden a multiplicar por un escalar un vector $v=(x,y)$ de $\mathbb{R}^2$?

El diseño de esta pregunta busca una descripción a nivel funcional de las transformaciones que equivalen a multiplicar por un escalar. Es decir, dada una determinada condición sobre el escalar, a este le asocia un efecto geométrico, ya sea contracción, dilatación, nulidad o cambio de sentido de algún vector. Se espera que los estudiantes piensen en otro tipo de transformaciones que pueden ser descritas mediante el múltiplo escalar.

Pregunta 3: Sea *R* la rotación 180º con centro en el origen ¿qué les sucede a los siguientes vectores de $\mathbb{R}^2$ si se aplica dicha transformación? Dibuje los vectores resultantes y explique sus procedimientos.

$$v=(2,3);\quad w=(-1,-2);\quad t=(2,4);\quad u=(3,-1)$$

¿Qué puede concluir de aplicar una rotación de 180º con centro en el origen a un vector k de $\mathbb{R}^2$?

Esta pregunta permite evidenciar las concepciones de los estudiantes sobre la rotación de un vector en $\mathbb{R}^2$ respecto al origen y su relación con el producto por un escalar; por tanto, es necesario que previamente haya construido el concepto de rotación de un vector con un punto de referencia y un ángulo de rotación en grados (concepción Acción). Así el estudiante puede aplicar *Acciones* determinando geométricamente cada vector solicitado o plantear una forma general que le permita encontrar los casos particulares. La interpretación de la función rotación 180º de un vector (x, y) como $-1(x, y)$ es evidencia de una estructura *Proceso* de la función rotación 180º.

Caso 2: Estudiantes universitarios de primer año, que en un primer curso de Álgebra Lineal abordaron el concepto de valor y vector propio con un enfoque algebraico. El instrumento para este caso estaba conformado por las preguntas del caso anterior y adicionalmente P5 y P6. Dicho cuestionario fue analizado para mostrar evidencias de las principales estructuras mentales de los estudiantes durante la investigación.

Pregunta 4: Suponga que tiene un vector de la forma $v=(x, y)$ en $\mathbb{R}^2$ dibuje y explique qué sucede en cada situación: si se pondera por 3, por $\frac{1}{3}$, por 0, por -1 y por -3. Describe todos los procedimientos. Con base en lo realizado, ¿qué le sucede al vector si se pondera por un escalar λ cualquiera?

Con esta pregunta, se busca que el estudiante dé cuenta del múltiplo escalar en un contexto algebraico, geométrico y funcional. Es decir, aquí el *Proceso* de estirar y encoger vectores es coordinado con la noción de función como correspondencia, lo que le permite dar cuenta de un nuevo *Proceso* $f(x,y)=(\lambda x, \lambda y)$ que transforma vectores de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$. En cada ítem se presentan las distintas posibilidades en donde los vectores se pueden dilatar, contraer, anular, y cambiar de sentido (Representación geométrica y algebraica). La finalidad es que el estudiante de cuenta de un rótulo algebraico y geométrico para cada uno de los casos que se proponen en los ítems, esto puede ser evidencia de la construcción del *Proceso* de múltiplo escalar. Por otro lado, puede que los estudiantes den cuenta de una explicación parcial, solo geométrica o puramente algebraica sin lograr una conexión entre ambas, esto indicaría que persiste una estructura *Acción* del múltiplo escalar, por sobre el *Proceso.*

Pregunta 5: Escriba de forma matricial el efecto de transformación de la ponderación escalar de un vector $v=(x, y)$ en $\mathbb{R}^2$ por un escalar $\lambda \in \mathbb{R}$. Explique dicha relación de forma geométrica.

La comprensión del múltiplo escalar como una relación de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$, puede promover su construcción en términos matriciales. Previo a la formulación de esta pregunta, los estudiantes han determinado el producto de una matriz A con vectores específicos, además han analizado el efecto geométrico. Mediante la interiorización de la *Acción* producto de una matriz por un vector el estudiante puede imaginar o describir sin realizar explícitamente los cálculos, la transformación que realiza determinada matriz. La coordinación entre la *Acción* anterior interiorizada y el *Proceso* de imagen de una transformación a partir de la comparación, les permite a los estudiantes asociar matrices a ciertos tipos de transformaciones o efectos geométricos. Particularmente pueden asociar la matriz $\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$ a la transformación de multiplicar un vector por el escalar λ.

> *Pregunta 6:* Escriba de forma matricial la transformación de rotar un vector $v = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ en 180° respecto al origen. ¿Qué relación existe con la ponderación por un escalar?

Esta pregunta fue diseñada con el propósito de evidenciar si los estudiantes reconocen la transformación de rotar vectores 180° en términos de una matriz y su relación con la matriz de producto por un escalar λ. Se espera que los estudiantes mediante la comparación del resultado de multiplicar un vector por dicha matriz y multiplicar el vector por el escalar –1 construyan la igualdad. Consideramos que los estudiantes que pueden hacer dicha comparación de igualdad, pueden reconocer que se tiene el mismo efecto, aunque la operación realizada sea de diferente naturaleza.

4. Análisis de datos

El análisis de las respuestas de los estudiantes, conjuntamente con los comentarios que ellos hicieron en estas respuestas, permitió identificar las construcciones mencionadas en los modelos cognitivos descritos en la sección anterior.

Se analizaron los resultados obtenidos de la aplicación del instrumento por los investigadores, quienes los negociaron en términos de las estructuras y mecanismos descritos en los modelos hipotéticos DG_0 y DG_1.

4.1. *Caso 1: Estructuras y mecanismos evidenciados por estudiantes de enseñanza secundaria respecto a los conceptos previos*

Multiplicación por un escalar como una transformación que estira y contrae vectores: en las respuestas de algunos estudiantes aparecen con frecuencia los términos: estirar, alargar, aumenta su longitud, encoger, achicar y disminuir su longitud, como una interpretación del múltiplo escalar. En la pregunta 1, E2 hace el dibujo presentado en la Figura 4 y escribe "*Es el doble del vector original, es como estirar sobre la misma recta una vez más"*. Lo anterior aparece como argumento, cuando E2 trata de explicar lo que sucede para el caso de $\lambda = 2$ en la pregunta 1.

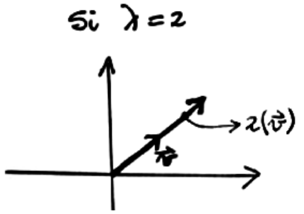


Figura 4. E2 interpretando el múltiplo escalar de un vector *v*

En la pregunta 2, E4 se refiere al múltiplo escalar de un vector (x, y) de $\mathbb{R}^2$ como: *"En algunos casos aumenta la longitud, también puede disminuir o cambiar de sentido"*. Esta forma de pensar de E4, le permite centrar su atención en ciertos intervalos, de tal manera, que pueden precisar condiciones parciales de λ asociadas a efectos geométricos de estirar o encoger. La Figura 5 muestra evidencia de un establecimiento parcial de las condiciones relacionadas con el múltiplo escalar. E4 reconoce que al tomar un vector y aplicarle diferentes valores de λ en la multiplicación por un escalar, los vectores resultantes están sobre la misma recta que pasa por el origen. Aunque E4, piensa en valores negativos para el escalar, no menciona explícitamente que la transformación múltiplo escalar en este caso cambia el sentido del vector resultante. Sin embargo, E4 puede establecer explícitamente los intervalos para valores de $\lambda > 0$ tal que los vectores resultantes *"achica(n) su magnitud"* o *"aumenta(n) su magnitud"*.

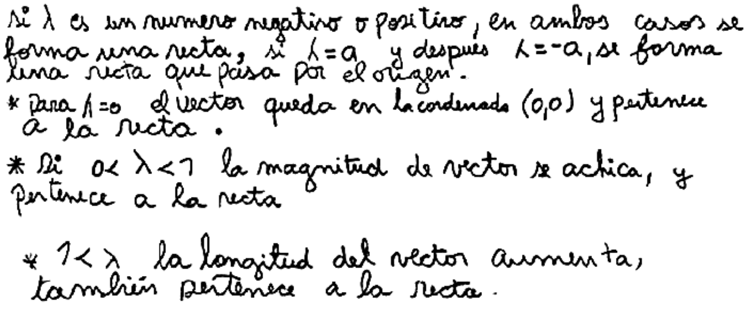

si λ es un numero negativo o positivo, en ambos casos se forma una recta, si λ=a y despues λ=-a, se forma una recta que pasa por el origen.
* para λ=0 el vector queda en la cordenada (0,0) y pertenece a la recta.
* si 0<λ<1 la magnitud de vector se achica, y pertenece a la recta
* 1<λ la longitud del vector aumenta, también pertenece a la recta.

Figura 5. E4 estableciendo condiciones sobre el múltiplo escalar de un vector *v* de $\mathbb{R}^2$

Concepción Proceso de la Rotación 180º con centro en el origen: la aplicación de la *Acción* rotar 180° con centro en el origen sobre la interpretación geométrica, permite que los estudiantes reflexionen sobre las características generales de la Rotación 180º. Por ejemplo, E3 escribe: "*En los planos se observa que los vectores cambian de cuadrante y cambia su sentido. Esto es como aplicar una rotación 180º*". La concepción *Proceso* de la rotación 180º, permite que E3 le asigne a un vector *v* el vector –*v* y lo rotule para que describa una relación funcional desde la interpretación geométrica presentada. E3 escribe: "*Si el vector que se rota es de la forma* (*x, y*) *este al ser rotado 180º quedará de la forma* (–*x,* –*y*)". La conclusión general es que E3 construye y evidencia la estructura *Proceso* de Rotación, que se muestra en la Figura 6.

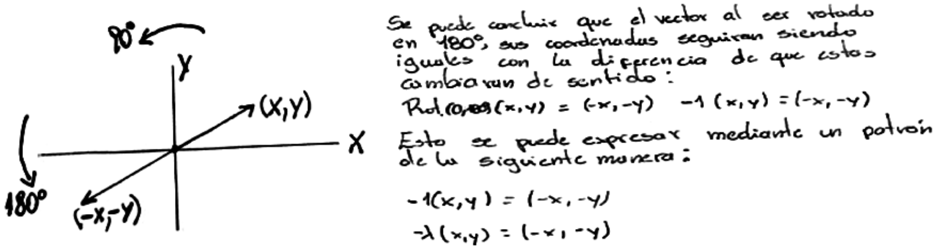


Figura 6. E3 determinando vectores a través de una Rotación en 180º

Algunos de los estudiantes muestran no haber construido el *Proceso* de rotación y la razón de esto parece estar asociada con no poder relacionar a (*x*, *y*) con su inverso aditivo, lo que implicaba la construcción de una relación funcional de correspondencia.

Concepción Proceso de la función $f(x, y) = (\lambda x, \lambda y)$ *vectores que se estiran y contraen (Proceso P2)*: la construcción de este *Proceso* implica que los estudiantes logren construir una relación funcional asociada al múltiplo escalar, es decir, deben ser consciente de todos los valores reales que puede tomar el escalar λ y que puede ser multiplicada por cualquier vector $v = (x, y)$ de $\mathbb{R}^2$. La reflexión sobre la correspondencia entre un escalar y un vector con el vector resultante, generan la construcción del *Proceso* como una función de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$.

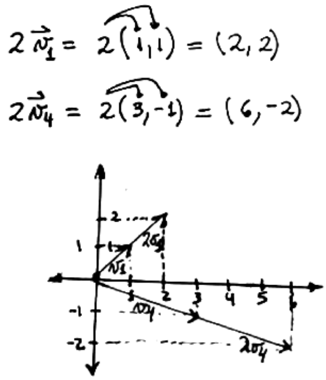


Figura 7. E3 generando la construcción de vectores que se estiran y contraen, como una función.

Las *Acciones* que realiza el estudiante E3 en la Figura 7 están asociadas con la pregunta 1. Después de analizar y resolver la pregunta 4 plantea la siguiente reflexión:

> E3: Si consideramos un vector $\vec{s}$, donde sus coordenadas son (x, y). Entonces:
>
> $$f(\vec{s}) = \lambda\,(\vec{s}) = \lambda\,(x, y) = (\lambda x, \lambda y)$$
>
> Donde λ multiplica a cada coordenada y puede disminuir o aumentar la magnitud del vector.

El trabajo realizado por el estudiante E3, muestra la relación que establece entre las diferentes interpretaciones de la construcción de la función *f*, la concepción *Proceso* de dicha función le permite a E3 dar paso a la construcción *Proceso* de múltiplo escalar.

Coordinación entre Proceso P2 y Proceso de rotación de 180° *con centro en el origen*: E5 al igual que E3 muestra haber construido el *Proceso* de la función *f*, sin embargo, adicionalmente evidencia una estructura *Proceso* de rotación de 180° y la coordinación entre dichos *Procesos*. En relación con esto último, las reflexiones presentadas por E5 en la pregunta 4, muestran que puede coordinar esos *Procesos* y describir de forma más clara el múltiplo escalar. A continuación, se muestra lo que escribe E5 en sus conclusiones.

> E5: En conclusión, tenemos que cuando ponderamos, modificamos las magnitudes del vector, –o sea sus coordenadas–. Esto se expresa como una función: si tenemos un vector $\vec{v}$ como coordenadas (x, y) entonces $f(\vec{v}) = (\lambda x, \lambda y)$.
>
> Donde si el valor de λ está entre $0 < \lambda < 1$ el vector disminuye su magnitud.
>
> Donde si el valor de λ es mayor a 1 el vector aumenta su magnitud.
>
> Donde si el valor de λ es negativo el vector rota en 180º y puede aumentar o disminuir su magnitud.
>
> Se puede concluir que la ponderación nos entrega los múltiplos de un vector.

El mecanismo de coordinación que evidencia E5 en sus conclusiones pone juntos los *Procesos P2* y la rotación de 180° en uno *Proceso* único, definido como el *Proceso* múltiplo escalar de un vector.

En general el trabajo realizado por los estudiantes del Caso 1, muestra la importancia del mecanismo de *coordinación* para evidenciar características geométricas, analíticas y algebraicas del múltiplo escalar como *Proceso*. En algunas respuestas de los estudiantes no se identificaron evidencias de una concepción *Proceso* de múltiplo escalar y esto parece estar relacionado con el dominio de conjuntos numéricos. En la medida que los estudiantes piensen y reflexionen en escalares más allá de los números enteros, pondrán estructurar cómo actúa la función múltiplo escalar para valores en el conjunto de los números reales. Desde la enseñanza secundaria, esto último lo hemos considerado un avance hacia la comprensión integral de los conceptos de valor y vector propio en $\mathbb{R}^2$ en el primer año de universidad.

4.2. *Caso 2: Estructuras y mecanismos evidenciados por estudiantes de primer año de universidad*

Concepción Proceso de multiplicación por un escalar como "generador" de rectas con parámetro λ: En general, la ecuación vectorial de la recta en el plano que pasa por el punto P_0 y tiene la dirección del vector *v*, se puede escribir $r = P_0 + tv$, $t \in \mathbb{R}$. En particular, si consideramos una recta que pasa por el punto $P_0 = (0, 0)$, la ecuación se reduce a $r = tv$. Esto último desde el punto de vista del Álgebra Lineal es un tipo de combinación lineal (con $v \neq 0$), en la cual el conjunto $\{tv: t \in \mathbb{R}\}$ representa el conjunto de combinaciones lineales del vector *v*, conocido como espacio generado por *v*, que en este caso corresponde a una recta. En este escenario la construcción del producto de un valor propio λ por un vector propio *v* se interpreta entonces, como la generación de una recta con vector director *v*, siendo asimilada como copias re-escaladas del mismo vector *v*.

Esta interpretación se destaca en el trabajo realizado por los estudiantes universitarios. De hecho, en las conclusiones de la pregunta 4, E7 (ver Figura 8) relaciona el múltiplo escalar con la idea de "generador" de una recta. Mediante la imagen presentada en la Figura 8, E7 evidencia al escalar λ como un parámetro, que al asignarle distintos valores reales multiplica cierto vector *v* generando una recta que pasa por el origen y coincide con ambos sentidos del vector. E7 al ubicar el vector inicial *v* en el primer cuadrante, encuentra una semirrecta con valores positivos de λ cuyo sentido está dado por el vector *v* y para los negativos una semirrecta con valores negativos de λ, cuyo sentido está dado por una rotación de 180° del vector *v*. Como se muestra en la Figura 8, E7 a estos los define como "Recta" en el primer y tercer cuadrante, E7 explica: "estos vectores generan una recta". Esta explicación dada por E7 permite reconocer que su forma de pensamiento es dinámica, esto es, E7 puede imaginar que cualquier múltiplo escalar de un vector *v* está contenido en una misma recta.

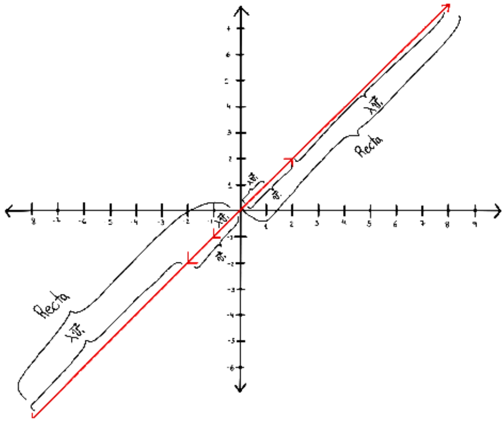


Figura 8. E7 generando una recta a partir de un vector

Coordinación del Proceso *multiplicación por un escalar y* Proceso *de producto de una matriz-vector* (Proceso 3): las respuestas de la pregunta 5 y 6 solo provienen de los estudiantes de primer año de universidad y sus explicaciones permitieron identificar otros conceptos característicos de un primer curso de Álgebra Lineal. En relación con esto último, E8 muestra haber construido el *Proceso* de la función múltiplo escalar, como se muestra en la primera línea de la Figura 9, E8 puede expresar el efecto de transformación para cualquier vector *v*. E8 muestra la relación que ha estructurado entre la forma funcional de la transformación múltiplo escalar y la matriz que describe dicho efecto. En la línea 2 de la Figura 9, E8 continua su desarrollo lógico de izquierda-derecha y de arriba-abajo. E8 reconoce que la transformación identidad tiene asociada la matriz identidad, $\lambda(x,y)=\lambda\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$. Al finalizar sus procedimientos escribe: “La forma matricial estará dada por la matriz $\begin{bmatrix}\lambda&0\\0&\lambda\end{bmatrix}$”. Todo esto evidencia que E8 ha construido el *Proceso* producto matriz-vector dado que puede pensar en dicha operación como una transformación de vectores. Gracias al mecanismo de coordinación bajo la relación de igualdad, E8 puede expresar (en figura 9) la equivalencia del efecto de transformación entre el producto matriz-vector y el múltiplo escalar.

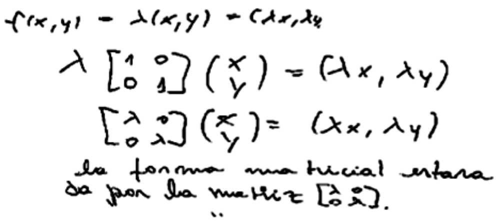


Figura 9. Razonamiento de E8 para describir el efecto de la multiplicación por un escalar mediante una matriz.

Coordinación del Proceso *rotación 180º y el* Proceso *matriz-vector* (Proceso 3): Ahora E8 muestra evidencia de haber construido el *Proceso* de rotación de 180° dado que puede pensar en dicha transformación mediante su representación funcional, como se muestra en la primera línea de la Figura 10.

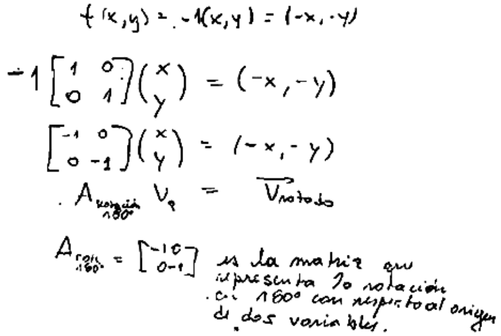


Figura 10. E8 identifica el *Proceso* rotación en 180º con una matriz

El razonamiento de E8 en sus respuestas a P5 y P6 evidencia que ha interiorizado la *Acción* de multiplicar una matriz por un vector y asociar este *Proceso* con representaciones funcionales de transformaciones lineales. Aunque el estudiante E8 no hace uso del concepto de base, muestra indicios de relacionar las transformaciones geométricas con las matrices. Los estudiantes del Caso 2, evidencian la construcción de *Procesos* asociados a los conceptos de valor y vector propio de $\mathbb{R}^2$ desde la interpretación de transformación lineal como función y como matriz. La reflexión sobre las *Acciones* múltiplo escalar y producto matriz-vector son fundamentales en la construcción del concepto de valor propio de $\mathbb{R}^2$. En la medida que los estudiantes construyan los *Procesos* asociados a estas *Acciones*, pueden comparar mediante la igualdad las transformaciones generadas y entender que, aunque son transformaciones de diferente naturaleza existen casos en los cuales la transformación realizada a un vector es la misma.

Un aspecto para destacar en esta investigación es el rol articulador que muestra ser la geometría en un acercamiento a la construcción de los valores y vectores propios. Como se modela en las DG`s propuestas, ellas inician la construcción con la aplicación de *Acciones* sobre *Objetos* geométricos, y en los casos de estudio analizados, los estudiantes con base en esas construcciones geométricas iniciales muestran desarrollar construcciones más complejas.

5. Discusión y conclusiones

Los resultados de esta investigación muestran las construcciones y mecanismos mentales que modelan el aprendizaje de los valores y vectores propios en $\mathbb{R}^2$, desde un primer acercamiento con estudiantes de educación secundaria DG_0, hacia uno de enseñanza universitaria de primer año DG_1. En el primer modelo se destaca la rotación 180º con centro en el origen como un *Proceso* que permite obtener el inverso aditivo de un vector y el *Proceso* de múltiplo escalar, como una construcción importante para iniciar con el concepto de valor y vector propio en $\mathbb{R}^2$ en estudiantes universitarios de primer año. En el segundo modelo, se ponen de relive la transformación lineal como *Proceso* y el efecto geométrico que ciertas matrices tienen sobre vectores de $\mathbb{R}^2$.

A continuación se muestran los modelos cognitivos refinados –por eso la R como subíndice– DG_{R0} y DG_{R1}, que dan cuenta del trabajo realizado por los estudiantes y por tanto se constituyen en DG´s refinadas que validan las estructuras y mecanismos mentales en la construcción de los conceptos de valor y vector propio en $\mathbb{R}^2$.

5.1. *DG_0 Refinada:* $\mathrm{DG}_{\mathrm{R0}}$

Los conocimientos previos para iniciar la construcción de los conceptos de valor y vector propio de $\mathbb{R}^2$ en la enseñanza secundaria son: la rotación de 180° con centro en el origen, la multiplicación por un escalar de vectores y su efecto geométrico para vectores en $\mathbb{R}^2$. Las estructuras y los mecanismos que los estudiantes en educación secundaria deben desarrollar sobre dichos conceptos, se muestran en la Figura 11 y se describen sintéticamente en la misma.

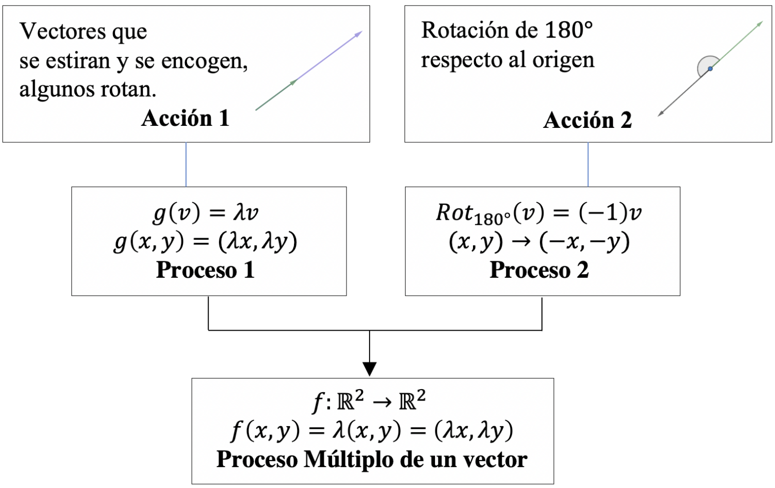


Figura 11. DG_{R0} de los conocimientos previos para la construcción del concepto valor y vector propio en $\mathbb{R}^2$: Interiorización de Acciones y coordinación de Procesos.

La construcción de los conceptos previos comienza con la *Acción* encontrar múltiplos escalares de vectores específicos, sin embargo, la reflexión sobre dicha *Acción* acompañada de una noción estable de número real permite la interiorización en el *Proceso 1*. Esta estructura se evidencia cuando se establece una correspondencia entre intervalos de valores para el escalar y el efecto geométrico que sufren. Por otra parte, la *Acción 2* interiorizada *(Proceso 2)* de rotar un vector v de $\mathbb{R}^2$ en 180° respecto al origen, implica reconocer dicho efecto como una transformación que asocia a cada vector su inverso aditivo, esto es $v \to (-1)v$ como una función $Rot_{180}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $Rot_{180}(v) = (-1)v$.

En la figura 11 se muestra que el *Proceso* múltiplo escalar resulta de la coordinación entre el *Proceso 1* y el *Proceso* rotación 180° con centro en el origen (*Proceso 2)*. Dicha coordinación permite entender todos los casos en los cuales el múltiplo escalar de un vector tiene una transformación particular, es decir, reconocer que λ está condicionado: si $\lambda = 1$ el vector se mantiene igual; si $\lambda = -1$ el vector rota un ángulo de 180º; si $0 < \lambda < 1$ el vector se contrae un valor λ; si $-1 < \lambda < 0$ el vector se contrae un valor λ y gira un ángulo de 180º; si $\lambda > 1$ el vector se estira; y si $\lambda < -1$ el vector se estira y rota 180º. Con base en las evidencias mostradas por los Casos de estudio, la interiorización de las *Acciones 1* y *2*, permite que los estudiantes estructuren la ponderación por un escalar de un vector v como un parámetro λ que determina una recta y que contiene al vector v que pasa por el origen. En relación con esto último, una recta en $\mathbb{R}^2$ que pasa por el origen puede ser entendida como el espacio generado por un vector $v \in \mathbb{R}^2$.

5.2. *DG_1 Refinada:* DG_{R1}

Se presenta un modelo cognitivo que busca explicar cómo estudiantes universitarios de primer año pueden construir desde una perspectiva geométrica el concepto de valor y vector propio en $\mathbb{R}^2$. En la Figura 12 se muestra que la construcción comienza con la realización de las *Acciones 1, 2* y *3* pero en correspondencia con la transformación lineal y el producto matriz-vector. La interiorización de la *Acción 1* permite reconocer que tal producto transforma vectores en vectores, a veces rotándolos y otras estirándolos o comprimiéndolos. De las evidencias mostradas por los Casos de estudio, se obtuvo que la interiorización de las *Acciones 1* y *2* se torna fundamental para que el estudiante pueda caracterizar las transformaciones con base a sus conocimientos previos; es decir, identificar aquellas transformaciones que verifican las condiciones de linealidad y las que no. El *Proceso* de transformación lineal en este contexto le permite al estudiante discriminar y diferenciar la transformación de desplazamiento y rotación, la primera no es lineal y la segunda sí. Las transformaciones lineales que se identificaron pueden compararse con la transformación que genera el producto matriz-vector, es decir, mediante la igualdad es posible coordinar el *Proceso* de transformación lineal y el *Proceso* de producto matriz-vector a través de la matriz $A=[T(1,0)\ T(0,1)]$. El estudiante puede relacionar cada transformación lineal con una matriz, que describe el mismo efecto.

El *Proceso* de matriz asociada implica entender que ciertos valores en las entradas de una matriz $A\in M_{2\times 2}$ determinan efectos geométricos al multiplicar vectores con dicha matriz. Por ejemplo, la matriz $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ rota un vector de $\mathbb{R}^2$ en un ángulo $\frac{\pi}{2}$ y en sentido horario. Por otra parte, el *Proceso* de múltiplo escalar se relaciona con identificar la colinealidad entre el vector y su transformación. Ahora, mediante la comparación por la igualdad es posible identificar algunos casos en los cuales la deformación de vectores bajo una matriz o una transformación lineal coincide con el efecto de multiplicar por un escalar. Tales escalares con sus respectivos vectores que verifican la igualdad pueden denominarse e identificarse como valores y vectores propios de una transformación lineal o de la matriz asociada a ella en $\mathbb{R}^2$.

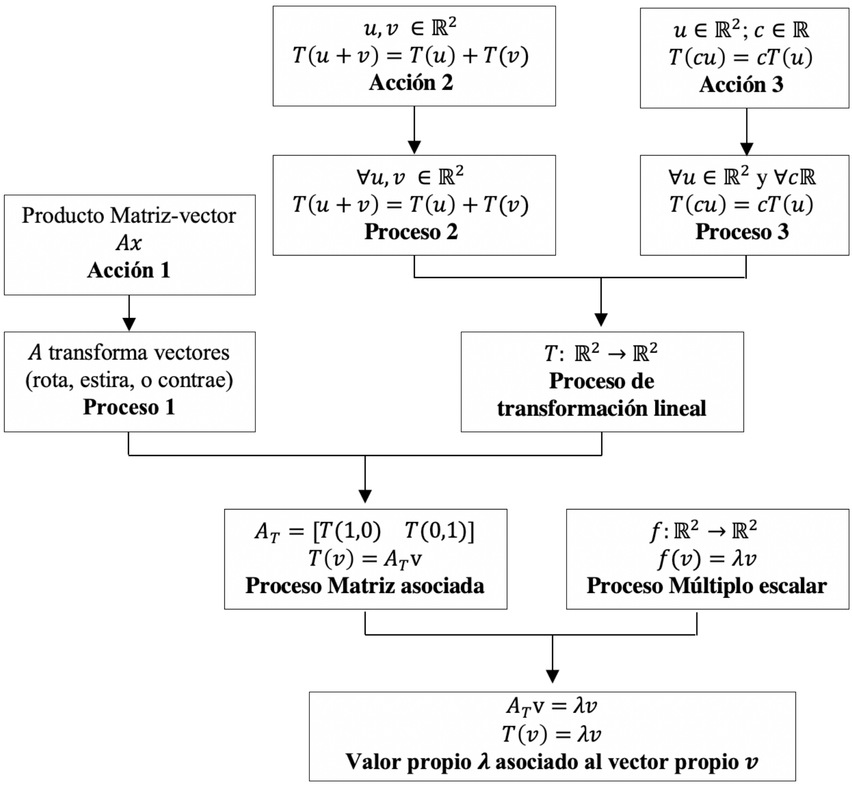


Figura 12. DG_{R1} un modelo cognitivo de la construcción de valores y vectores propios en $\mathbb{R}^2$.

5.3. *Reflexiones finales*

Los modelos cognitivos descritos en las Figuras 11 y 12, son el resultado de la aplicación del Ciclo de Investigación planteado por la teoría APOE en el nivel de secundaria para DG_0 y en nivel universitario (estudiantes de Pedagogía en Matemáticas de primer año) para DG_1. El diseño permanente de actividades para la clase y su validación permitió determinar los elementos expuestos en ambos modelos y sus relaciones.

El análisis de los resultados muestra que los estudiantes que logran la construcción del concepto previo rotación de 180º respecto al origen como un *Proceso 2* en DG_0, logran estructurar el *Proceso de* Múltiplo de un vector en $\mathbb{R}^2$. Las estructuras *Proceso rotación en 180º* y *Proceso de* Múltiplo de un vector en $\mathbb{R}^2$, resultan fundamentales para que los estudiantes de primer año de universidad construyan el concepto de valor y vector propio en $\mathbb{R}^2$. Estas pueden fundamentar la construcción abstracta del concepto para transformaciones lineales definidas de un espacio vectorial de dimensión finita en él mismo.

Como resultado de esta investigación, se proponen los modelos DG_{R0} y DG_{R1} a la comunidad interesada en el aprendizaje del concepto de valor y vector propio. Estos modelos de acuerdo con las evidencias presentadas, representan una ruta cognitiva viable, desde la enseñanza secundaria hasta la universitaria, con base en una perspectiva geométrica que fomenta la construcción de formas más abstractas desde la visualización, tal como lo señala para la Transformación Lineal Oktaç, (2018), lo que tributa a proporcionar recomendaciones didácticas para superar dificultades que han sido expuestas en la literatura (Hillel, Sierpinska & Dreyfus, 1998; Dorier, Robert, Robinet y Rogalski, 2000; Dorier y Sierpinska, 2001; Soto, 2005; Klasa, 2010; Parraguez y Oktaç, 2010; Rensaa, Hogstad y Monaghan, 2020; Arnon, Cottril, Dubinsky, Oktaç, Roa-Fuentes, Trigueros & Weller, 2014; Rach y Fillebrown, 2016; Parraguez, Lezama y Jiménez, 2016; Harel, 2017; González y Roa-Fuentes, 2017; Bouhjar, Andrews-Larson, Hadier y Zandieh, 2018; Oktaç, 2019) de cómo se construyen y aprenden los conceptos del Álgebra Lineal. Sumado a lo anterior, para los propósitos de Educación STEM, que apuntan a profundizar la comprensión conceptual de la matemática, el manejo de la concepción geométrica de los conceptos se torna fundamental, para ampliar su comprensión a través de su uso social y contextos STEM culturalmente relevantes (Roehrig, Moore, Wang and Park, 2012).

Los resultados de este estudio, sin embargo, van más allá de la validación o refinación de los modelos cognitivos expuestos. Se puede señalar el estudio de valores y vectores propios en $\mathbb{R}^2$ desde la rotación en 180º y la homotecia (Multiplicación por un escalar). Además, se ponen de relieve las construcciones que resultan indispensables: la construcción *Proceso* de la rotación en 180º con centro en el origen como una función (que dado un vector v entrega por resultado el vector $-v$) y de la multiplicación por un escalar con su efecto geométrico. Estas construcciones muestran la importancia del *Proceso T*, el rol de T como función (pegunta 2) y su desempeño en la construcción *Proceso* de valores y vectores propios en $\mathbb{R}^2$, como paso fundamental para su comprensión. Esta investigación proporciona nueva evidencia de que el uso de las estructuras de la teoría APOE permite determinar las construcciones que subyacen a las dificultades de los estudiantes y a sus estrategias, para construir conceptos matemáticos.

Reconocimientos

Este trabajo ha sido subvencionado parcialmente por el proyecto Fondecyt 1180468.

Al Proyecto *C-2018-01* y el Programa de movilidad de la *Vicerrectoría de Investigación y Extensión* (VIE–UIS) de la *Universidad Industrial de Santander* (Colombia).

Los autores agradecen la buena disposición de los participantes en la investigación.

Referencias bibliográficas

Arnon, I., Cottril, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Roa-Fuentes, S., Trigueros, M. y Weller, K. (2014). *APOS Theory. A framework for research and curriculum development in mathematics education.* New York: Springer. Doi: 10.1007/978-1-4614-7966-6.

Beltrán-Meneu, M., Murillo-Arcila, M. y Albarracin, L. (2017). Emphasizing visualization and physical *applications* in the study of eigevectors and eigenvalors. *Teaching Mathematics and its applications* 36, 123- 135. Doi: 10.1093/teamat/hrw018.

Beltrán-Meneu, M., Murillo-Arcila, M. y Jordán, E. (2017). A teaching proposal for the study of eigevectors *and* eigenvalors. Jour*nal of Technology and Science Education 7*(1), 100 - 113. Doi: 10.3926/jotse.260.

Bouhjar K., Andrews-Larson C., Haider M. y Zandieh M. (2018). Examining Students' Procedural and *Conceptual* Understanding of Eigenvectors and Eigenvalues in the Context of Inquiry-Oriented Instruction. In: Stewart S., Andrews-Larson C., Berman A., Zandieh M. (eds) Challenges and Strategies in Teaching Linear Algebra. *ICME-13 Monographs*. Springer, Cham. Doi:10.1007/978-3-319-66811-6_9.

Cook, K.L. & Bush, S. B. (2018). Design thinking in integrated STEAM learning: Surveying the landscape and exploring exemplars in elementary grades. *School Science and Mathematics*, *118*(3-4), pp. 93-103. 2018. ISSN: 1949-8594. DOI:10.1111/ ssm.12268.

Dorier, J., Robert, A., Robinet, R. y Rogalski, M. (2000) The Obstacle of Formalism in Linear Algebra. En J.-L. Dorier (Ed.). *On the Teaching of Linear Algebra*. Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Dorier, J. L. & Sierpinska, A. (2001). Research into the teaching and learning of linear algebra, in: D. Holton (Ed.), *The Teaching and Learning of Linear Algebra at University Level*, on ICMI Study, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands, 2001, pp. 255–274.

Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking, in (D. Tall, ed.) *Advanced Mathematical Thinking*, Dordrecht: Kluwer, 95-126.

Dubinsky, E., Weller, K., McDonald, M. & Brown, A. (2005). Some historical issues and paradoxes regarding the concept of infinity: An APOS analysis: Part I. *Educational Studies in Mathematics*, *58*(3), 335-359.

González, D. y Roa-Fuentes, S. (2017). Un esquema de transformación lineal: construcción de objetos *abstractos* a partir de la interiorización de acciones concretas. *Enseñanza de las Ciencias 35*(2), 89 - 107. Doi: 10.5565/rev/ensciencias.2150.

Harel, G. (2017) The learning and teaching of linear algebra: observations and generalizations. *The Journal of Mathematical Behavior*, 46, 69–95. Doi: 10.1016/j.jmathb.2017.02.007.

Hillel, J., Sierpinska, A., & Dreyfus, T. (1998). *Investigating linear transformations with Cabri*. In Proceedings of the International Conference on the Teaching of Tertiary Mathematics.

Klasa, J. (2010). A few pedagogical designs in linear algebra with Cabri and Maple. *Linear algebra and its applications*, *432*(8), 2100-2111.

Lay, D. (2007). *Álgebra lineal y sus aplicaciones* (3ª Ed.). México: Pearson educación.

McDonald, M., Mathews, D. y Strobel, K. (2000). Understanding sequences: A tale of two objects. Research in Collegiate mathematics education IV. *CBMS issues in mathematics education* (Vol. 8, pp. 77–102). Providence, RI: American Mathematical Society.

Moore, G. H. (1995). The axiomatization of linear algebra: 1875-1940. *Historia Mathematica*, 22, 262-303.

Oktaç, A. (2018). *Understanding and Visualizing Linear Transformations*. In: Kaiser, G., Forgasz, H., Graven, M., Kuzniak, A., Simmt, E., Xu, B. (eds) Invited Lectures from the 13th International Congress on Mathematical Education. ICME-13 Monographs. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-319-72170-5_26

Oktaç, A. (2019). Mental constructions in linear algebra. *ZDM.* Doi: 10.1007/s1185-019-01037-9.

Parraguez M., Lezama, J. y Jiménez, R. (2016). Estructuras mentales para modelar el aprendizaje del *teorema* de cambio base de vectores. *Enseñanza de las Ciencias*, *34*(2), 129-150. Doi: 10.5565/rev/ensciencias.1950.

Parraguez, M., y Oktaç, A., (2010). Construction of the vector space concept from the view point of APOS Theory. *Linear Algebra and its Applications*, 432(8), 2112-2124. DOI: 10.1016/j.laa.2009.06.034.

Poole, D. (2011). *Álgebra Lineal. Una introducción Moderna* (3º Ed.). México: Thomson.

Rash, A. y Fillebrown, S. (2016). Courses on the Beauty of Mathematics: Our Version of General Education Mathematics Courses, *PRIMUS*, 26:9, 824-836. Doi: 10.1080/10511970.2016.1191572.

Rensaa, R., Hogstad, N. y Monaghan, J. (2020). Perspectives and reflections on teaching linear algebra, *Teaching Mathematics and its Applications: An International Journal of the IMA*, hraa002. DOI: 10.1093/teamat/hraa002.

Roa-Fuentes, S. y Oktaç, A. (2010). Construción de una descomposición genética: análisis teórico del concepto transformación lineal. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, RELIME, *13*(1),89-112.

Robinet, J. (1986). Les réels: quels modeles en ont les éléves? *Educational Studies in Mathematics*, 17, 359-386.

Rodríguez, M., Parraguez, M. y Trigueros, M. (2018). Construcción Cognitiva del Espacio Vectorial R^2. RELIME: *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *21*(1), 57-86.

Roehrig, G., Moore, T., Wang. H. H. & Park, M. S. (2012). Is Adding the E Enough? Investigating the Impact of K-12 Engineering Standards on the Implementation of STEM Integration. *School Science and Mathematics*, 112(1), 31-44. ISSN: 1949-8594. DOI: 10.1111/j.1949-8594.2011.00112.x.

Salgado, H. y Trigueros, M. (2015). Teaching eigenvalues and eigenvectors using models and APOS theory. *The Journal of Mathematical Behavior*, *39*, 100–120. Doi: 10.1016/j.jmathb.2015.06.005.

Stake, R. E. (2010). *Investigación con estudio de casos*. (5ª Ed.). Barcelona: Labor.

Soto, J. L. (2005). Algunas dificultades en la conversión gráfico-algebraica de situaciones de vectores. En Lezama, Javier; Sánchez, Mario; Molina, Juan Gabriel (Eds.), Acta Latinoamericana de Matemática Educativa (pp. 193-199).

Tall, D. (1991). The psychology of advanced mathematical thinking. En Tall, D. (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 3-21). Kluwer Academic Publisher: Dordrecht/Boston/London.

Thomas, M. O. y Stewart, S. (2011). Eigenvalues and eigenvectors: Embodied, symbolic and formal thinking. *Mathematics Education Research Journal, 23*(3), 275-296.

Yáñez, A. (2015). *Construcción de los conceptos de valores y vectores propios en* R^2 *y* R^3 *desde la teoría APOE.* Tesis de Maestría no publicada, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. Chile.

Autores

Marcela Parraguez González. Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. Chile.
0000-0002-6164-3056 marcela.parraguez@pucv.cl

Solange Roa-Fuentes. Universidad Industrial de Santander, Colombia.
0000-0001-8580-2763 sroa@matematicas.uis.edu.co

Raúl Jiménez Alarcón. Universidad Católica del Norte, Chile.
0000-0001-6429-9820 rjimen@ucn.cl

Alexander Betancur Sánchez. Universidad Industrial de Santander, Colombia.
0000-0003-2404-289X albetsan@correo.uis.edu.co

Jorge Andrés Labra Peña, Carlos Mario Vanegas Ortega

DESARROLLO DEL RAZONAMIENTO GEOMÉTRICO DE ESTUDIANTES DE ENSEÑANZA MEDIA CUANDO ABORDAN EL CONCEPTO DE HOMOTECIA

Development of Geometric Thought in High School students, when they learn the concept of homothecy

RESUMEN

El objetivo de este estudio es caracterizar el desarrollo de los niveles de razonamiento geométrico de estudiantes chilenos de primer año de enseñanza media, cuando abordan el concepto de homotecia a partir de una secuencia de actividades basada en el modelo de Van Hiele. Se utilizó una metodología cualitativa con un diseño no experimental, para describir cómo varía el concepto de homotecia, y con ello, los niveles de razonamiento geométrico. Se utilizó un pre-test y un post-test para robustecer las comprensiones cualitativas. Los resultados muestran que las actividades propuestas lograron que los estudiantes desarrollaran de forma completa el Nivel 0 y, avanzaran hacia los primeros grados de adquisición del Nivel 1. Este logro se ve potenciado gracias a los recursos manipulativos y virtuales utilizados, el trabajo colaborativo entre los estudiantes y a la secuenciación de las actividades trabajadas.

PALABRAS CLAVE:

- *Didáctica de la geometría*
- *Razonamiento geométrico*
- *Modelo de Van Hiele*

ABSTRACT

The aim of this study is to characterize the development of levels of geometric thought in twelfth-grade chilean students, when they learn the concept of homothecy through a didactic sequence based on Van Hiele model. A qualitative methodology with a non-experimental design was used in this study for describing how the concept of homothecy transforms, and thus the geometric thought. A pretest-posttest design was used to evaluate the acquisition of the Van Hiele levels to strengthen the analysis of the qualitative data. The main results show a complete acquisition of Level 0 for most students. In addition, the proposed activities allowed the development of Level 0, and enabled the development of the first levels of acquisition of Level 1. This achievement is enhanced thanks to the manipulative and virtual resources used, the collaborative work among students and the sequencing of activities worked.

KEY WORDS:

- *Teaching of geometry*
- *Geometric thought*
- *Van Hiele model*

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (2022) *25* (1): 93 - 120.
Recepción: Mayo 30 2020 / Aceptación: Agosto 5, 2022. DOI: 10.12802/relime.22.2514

RESUMO

O objetivo deste estudo é caracterizar o desenvolvimento dos níveis de raciocínio geométrico de alunos chilenos do ensino médio, quando abordam o conceito de homotecia a partir de uma sequência de atividades baseada no modelo de Van Hiele. Foi utilizada uma metodologia qualitativa, com desenho não experimental, para descrever como o conceito de homotecia varia e, com ele, os níveis de raciocínio geométrico. Um pré-teste e um pós-teste foram utilizados para fortalecer os entendimentos qualitativos. Os resultados mostram que as atividades propostas conseguiram desenvolver totalmente o Nível 0, por grande parte dos alunos, e se encaminharam para os primeiros níveis de aquisição do Nível 1. Essa conquista é aprimorada graças aos recursos manipulativos e virtuais usados, os trabalho colaborativo entre os alunos e o seqüenciamento das atividades trabalhadas.

PALAVRAS CHAVE:

- *Ensino de geometria*
- *Raciocínio geométrico*
- *Modelo de Van Hiele*

RÉSUMÉ

L'objectif de cette étude est de caractériser le développement des niveaux de raisonnement géométrique des lycéens chiliens, lorsqu'ils abordent le concept d'homotecia à partir d'une séquence d'activités basées sur le modèle de Van Hiele. Pour cela, une méthodologie qualitative au design non expérimental a été utilisée pour décrire comment le concept d'homotécie varie, et avec lui, les niveaux de raisonnement géométrique. Un pré-test et un post-test ont été utilisés pour renforcer les compréhensions qualitatives. Les résultats montrent que les activités proposées ont réussi à développer pleinement le niveau 0, par une grande partie des étudiants, et se sont dirigées vers les premiers niveaux d'acquisition du niveau 1. Cette réalisation est renforcée grâce aux ressources manipulatrices et virtuelles utilisées, la le travail collaboratif entre les étudiants et le séquencement des activités travaillées.

MOTS CLÉS:

- *Enseignement de la géométrie*
- *Pensée géométrique*
- *Modèle de Van Hiele*

1. Introducción

Dentro de la Matemática, la Geometría tiene un importante rol formador del individuo, tanto en lo académico como en lo cultural, pues se aplica en diversos contextos, desarrolla el razonamiento lógico y contribuye al desarrollo de habilidades como visualizar, pensar críticamente, intuir, resolver problemas, conjeturar, razonar deductivamente y argumentar de forma lógica (Gamboa y

Ballestero, 2010). Sin embargo, la mayoría de los docentes relaciona la Geometría con aspectos métricos o simplemente limitan sus clases a definir figuras o relaciones geométricas con dibujos (García y López, 2008; Yi, Flores y Wang, 2020).

El enfoque tradicional con el que se orienta la enseñanza de la Geometría, tiene como consecuencia que los estudiantes tengan dificultades en la comprensión de conceptos y procesos geométricos (Aires, Campos y Poças, 2015; Ramírez-Uclés, Flores Martínez y Ramírez-Uclés, 2018), y más delicado aún, bajos niveles en el desarrollo de procesos de razonamiento geométrico, perdiendo así oportunidades para mejorar capacidades esenciales como la visualización, la elaboración, análisis y comprensión de representaciones, la exploración, la modelización, la argumentación y la demostración (Aravena y Caamaño, 2013; Figueiras, Molero, Salvador y Zuasti, 2000; Saorin Villa, Torregrosa Gironés y Quesada Vilella, 2019).

Los bajos niveles en el desarrollo de procesos de razonamiento geométrico se podrían explicar, en gran medida, porque se ha privilegiado la memorización de fórmulas, definiciones, teoremas y propiedades apoyadas en construcciones mecánicas y descontextualizadas. Esto tiene como consecuencia, que los estudiantes perciban la Geometría como una disciplina compleja y poco relacionada con la realidad (Gamboa y Ballestero, 2010; Ramírez-Uclés et al., 2018; Vargas y Gamboa, 2013).

A nivel internacional, es reconocido que, una manera de favorecer el desarrollo del razonamiento geométrico es mediante el diseño, implementación y evaluación de secuencias didácticas basada en el modelo de Van Hiele (Abreu y Barot, 2017; Aires et al., 2015; Aravena y Gutiérrez, 2016; Baiduri, Ismail y Sulfiyah, 2020; Gamboa y Ballestero, 2010; Iglesias y Ortiz, 2015; Proenza y Leyva, 2008; Pujawan, Suryawan y Prabawati, 2020; Rodríguez et al., 2013; Vargas y Gamboa, 2013), que contemplen diversos recursos para el aprendizaje matemático, así como el contexto y las experiencias previas de los estudiantes (Yi, Flores y Wang, 2020).

Según Antonini y Martignone (2011), una forma de promover el razonamiento geométrico de los estudiantes, es mediante la utilización de herramientas geométricas, como el pantógrafo, pues se destaca por sus bondades en la enseñanza de la demostración matemática, debido a que su implementación promueve en los estudiantes la formulación de conjeturas y de argumentaciones, cuando se trabajan transformaciones geométricas como la homotecia.

Por otra parte, Galleguillos y Candia (2011) encontraron que el uso de recursos tecnológicos como el procesador geométrico GeoGebra, tienen un carácter constructivista que permite a los estudiantes explorar, conjeturar, verificar propiedades geométricas, entre otros atributos que, sumados a un trabajo colaborativo entre estudiantes y a un rol de facilitador por parte del docente, generarían como resultado una mayor comprensión de los conceptos y, en consecuencia, un mayor desarrollo del razonamiento geométrico de los estudiantes. Por tanto, los antecedentes muestran que el uso de recursos manipulativos y digitales, en el estudio de las transformaciones geométricas, posibilitan a los estudiantes trabajar procesos de visualización, exploración, argumentación y demostración, que resultan fundamentales en el desarrollo su razonamiento geométrico.

En Chile, este panorama internacional no es muy distinto, pues una de las áreas de la matemática que ha presentado mayores dificultades en las últimas décadas es la Geometría, y esto se debe a que en los establecimientos educacionales se trabaja escasamente, por lo cual, es urgente mejorar la preparación de los profesores chilenos en los conocimientos geométricos y su enseñanza (Aravena y Gutiérrez, 2016). Este hecho se ve reflejado en los resultados que obtienen los estudiantes en evaluaciones nacionales e internacionales, donde se evidencian serias dificultades en la comprensión de los problemas y en los procesos argumentativos-deductivos relacionados con nociones geométricas (Aravena y Caamaño, 2013; Organisation for Economic Co-operation and Development [OECD], 2019).

A pesar de las reformas que se han impulsado en Chile desde fines del siglo pasado, en cuanto a la formación inicial y continua de los profesores en Geometría, estas dificultades persisten (Aravena y Caamaño, 2013). En una investigación que buscaba relacionar y caracterizar las prácticas de enseñanza de la geometría en el aula escolar, se encontró que los profesores demuestran gran habilidad en operatoria, cuando se trata sobre resolución de problemas clásicos. Sin embargo, presentan un débil dominio y articulación de conceptos geométricos y deficiencias en la resolución de situaciones que involucran distintos contenidos geométricos. Además, sus procesos de enseñanza están enfocados mayormente en la transferencia de operatorias y procedimientos que los estudiantes debían replicar, por lo cual, hay escasa promoción del razonamiento geométrico (Rodríguez, Carreño y Muñoz, 2013). Estos antecedentes revelan la crisis existente en Chile en torno a la enseñanza de la Geometría, poniendo en tensión al profesorado de matemática para que reflexione y trabaje, en la búsqueda de soluciones que favorezcan el desarrollo del razonamiento geométrico de los estudiantes.

Dentro de las investigaciones sobre transformaciones geométricas, los procesos de enseñanza y aprendizaje del concepto de homotecia, han sido escasamente reportados, focalizando su uso en áreas del conocimiento distintos al educativo (González y Arias, 2017), lo que refuerza la necesidad de investigar los efectos que tiene el diseño de secuencias didácticas para la enseñanza del concepto de homotecia, basadas en recursos manipulativos y virtuales, sobre el desarrollo del razonamiento geométrico de estudiantes de enseñanza media.

A partir de lo anterior, surge la necesidad de realizar contribuciones a la enseñanza de la Geometría, en particular, a la enseñanza del concepto de homotecia. Para ello, en esta investigación se busca caracterizar el desarrollo de los niveles de razonamiento geométrico de estudiantes chilenos de primer año de enseñanza media, cuando abordan el concepto de homotecia a partir de una secuencia de actividades basada en el modelo de Van Hiele.

2. Marco Conceptual

Con base en Proenza y Leyva (2008), en este estudio se define el razonamiento geométrico como un proceso complejo que supone explorar conscientemente el espacio, comparando los elementos observados, estableciendo relaciones entre esos elementos y expresando de forma verbal y escrita las acciones realizadas y las propiedades que se obtienen a partir de la observación. Así, como consecuencia de todas esas acciones, se lograría la adquisición de los conocimientos, la deducción de propiedades, la habilidad de construir modelos y la elaboración de conclusiones que permitan formular leyes generales y resolver problemas.

Para Samper, Leguizamón y Camargo (2001), existen diferentes aspectos del razonamiento geométrico, destacando en particular el razonamiento visual, que va más allá del ejercicio visual, pues implica aprender a mirar las figuras matemáticamente, lo que supone lograr establecer relaciones entre conceptos o información geométrica conocida, argumentar acerca de relaciones o propiedades geométricas, comprender los elementos que conforman una teoría geométrica, comprender los conceptos o procedimientos geométricos y comunicar los resultados obtenidos a partir de las indagaciones en geometría.

Por tanto, la visualización juega un rol fundamental en el razonamiento geométrico (Baiduri et al., 2020; Gutiérrez, 2013; Marmolejo y González Astudillo, 2015), por lo que es importante lograr un cambio en el paradigma de la enseñanza de la geometría y buscar nuevas estrategias que apunten a la visualización y el razonamiento visual (Samper et al., 2001; Saorin Villa et al., 2019), seguidos de procesos de sistematización y generalización a lo largo del estudio de los contenidos geométricos (Proenza y Leyva, 2008), que se obtienen promoviendo estrategias argumentativas durante su enseñanza (Samper et al., 2001).

Dada la complejidad del proceso de desarrollo del razonamiento geométrico, Van Hiele (1986) propone un modelo teórico compuesto de niveles de maduración que se alcanzan de manera gradual (Gutiérrez, 2013; Pujawan et al., 2020), que en la actualidad ha demostrado ser una de las teoría más efectivas en lo que respecta a la enseñanza de la geometría y en la evaluación del aprendizaje comprensivo de los estudiantes (Iglesias y Ortiz, 2015; Vargas y Gamboa, 2013; Venegas, 2015; Yi, Flores y Wang, 2020). Evidencia de esto, es la variedad de investigaciones que han utilizado esta teoría para medir, evaluar o describir la evolución de los niveles de razonamiento de los estudiantes y caracterizar el grado de adquisición de dichos niveles (Aravena y Gutiérrez, 2016; Aires et al., 2015).

El modelo plantea que el aprendizaje de la geometría transita por cinco niveles consecutivos (Van Hiele, 1986): la visualización, el análisis, la clasificación, la deducción formal y el rigor. Sin embargo, dadas las características de los estudiantes, en algunos contextos escolares el quinto nivel se ha estimado como inalcanzable, incluso se han reportado investigaciones que demuestran que estudiantes no universitarios, a lo sumo, alcanzan los tres primeros niveles (Fouz, 2005; Pujawan et al., 2020). En este sentido, el trabajo de Fouz (2005) permite establecer un conjunto de características del desempeño de los estudiantes que se relacionan con los niveles de razonamiento de Van Hiele (Tabla I).

TABLA I
Características de desempeño asociadas a los niveles de razonamiento de los estudiantes (Fouz, 2005)

Nivel	*Característica*
0	A) Los objetos se perciben en su totalidad como una unidad, sin diferenciar sus atributos y componentes.
	B) Se describen por su apariencia física mediante descripciones meramente visuales y asemejándolas a elementos familiares del entorno. No hay lenguaje geométrico básico para llamar a las figuras por su nombre correcto.
1	C) Se perciben las componentes y propiedades (condiciones necesarias) de los objetos y figuras. Esto lo obtienen tanto de la observación como de la experimentación.
	D) De una manera informal pueden describir las figuras por sus propiedades, pero no de relacionar unas propiedades con otras, o unas figuras con otras. No pueden elaborar definiciones.
2	E) Se describen las figuras de manera formal, es decir, se señalan las condiciones necesarias y suficientes que deben cumplir. Esto es importante pues conlleva entender el significado de las definiciones dentro de la geometría y los requisitos que siempre se requieren.
3	F) Se realizan deducciones y demostraciones lógicas y formales, por lo que se comprende la naturaleza axiomática de la matemática.
4	G) Se logra comprender la existencia de distintos sistemas axiomáticos, y con ello, analizar distintas geometrías.

El modelo de Van Hiele se compone de dos partes: una parte descriptiva, donde se explica cómo razonan los estudiantes, definiendo *niveles de razonamiento*; y otra parte prescriptiva, en donde se dan directrices a los profesores sobre cómo ayudar a los estudiantes a alcanzar un mayor nivel de razonamiento, a través de la definición de *fases de aprendizaje* (Jaime y Gutiérrez, 1990). En la Figura 1 proponemos una síntesis de la relación entre componentes y características del modelo (Aravena y Gutiérrez, 2016; Fouz, 2005; Vargas y Gamboa, 2013).

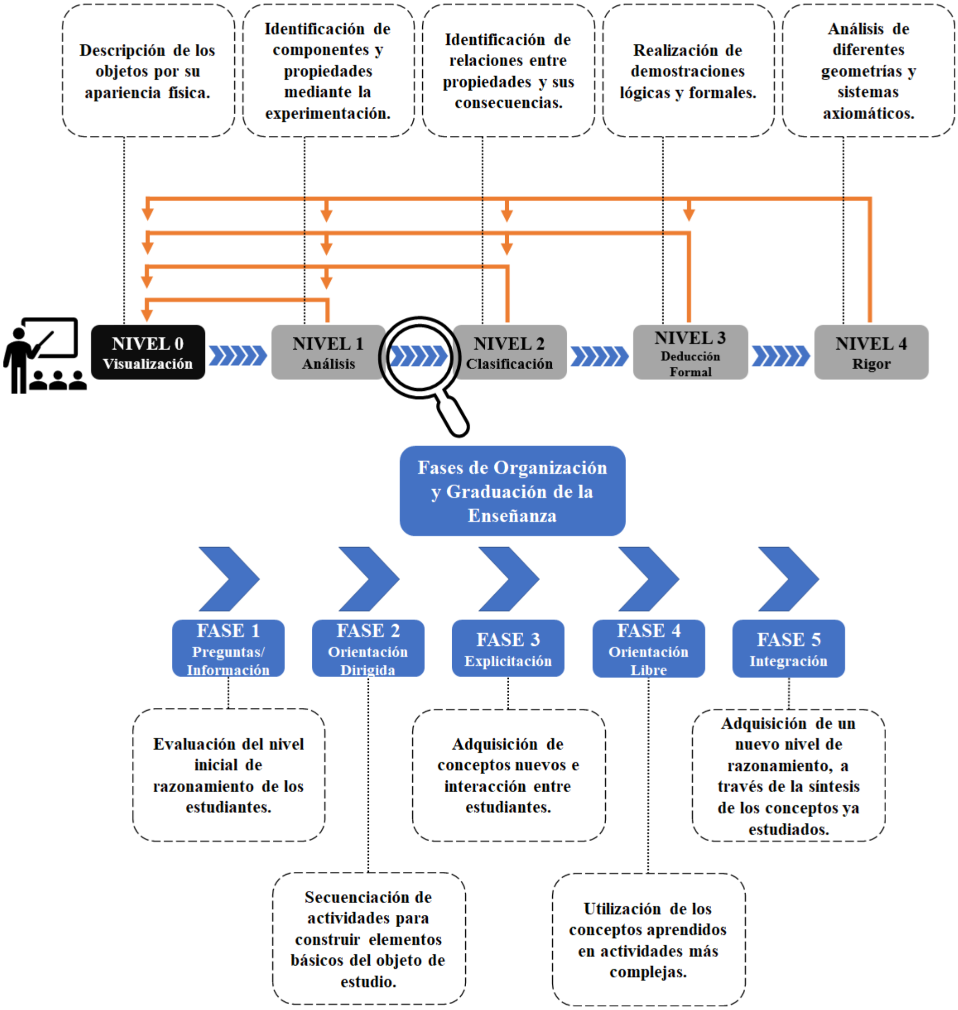


Figura 1. Relación entre los componentes del Modelo del Van Hiele.
Fuente: elaboración propia

En primer lugar, se pueden observar los cinco niveles de razonamiento por los que deben transitar los estudiantes al enfrentar un nuevo aprendizaje geométrico. Se destaca el Nivel 0, pues es donde se construyen las bases para avanzar hacia los niveles superiores. Esta idea alude, implícitamente, a la primera característica del modelo, denominada *localidad*, es decir, un estudiante puede razonar desde distintos niveles (un nivel para un concepto y otro nivel para otro concepto), por lo que, el nivel inicial dependerá de las áreas de la geometría que esté trabajando y de sus experiencias previas.

Las flechas azules representan las cinco fases de aprendizaje por las que transitan los estudiantes para alcanzar el siguiente nivel de razonamiento. Esta relación deja entrever otras tres características del modelo. Una de ellas es la *secuencialidad* de los niveles, es decir, solo se puede pasar al siguiente nivel de razonamiento, si se ha logrado un grado de adquisición completa del nivel anterior. La siguiente característica corresponde a la *continuidad* entre un nivel y otro, esto es, que la progresión entre los niveles se hace de forma continua y pausada, mediante pequeños avances que permiten llegar al logro del nivel. Otra característica es la *especificidad del lenguaje* que existe en cada nivel de razonamiento, es decir, el desarrollo del razonamiento no solo se relaciona con la habilidad de resolver problemas, sino que el vocabulario matemático o la forma en que se expresan ideas es determinante en cada nivel, por lo que debe formar parte de la transposición didáctica, la adecuación del vocabulario matemático, considerando el nivel inicial de los estudiantes y el nivel que se quiere trabajar.

Las flechas anaranjadas muestran la relación entre un nivel y los anteriores a este, lo cual hace alusión a la *recursividad* entre los niveles, esto significa, que el logro de un nivel de razonamiento siempre dependerá de la asimilación de las estrategias del nivel anterior. Esta idea sugiere que, en los procesos de razonamiento, se deben aprovechar las estrategias adquiridas en los niveles anteriores para mejorarlas y robustecerlas, o para descubrir nuevas formas de aproximarse al objeto de estudio.

3. Metodología

La investigación se desarrolló desde una perspectiva mixta (Denzin y Lincoln, 2005; Sandín Esteban, 2003; Yilmaz, 2013), pues se centra en análisis cuantitativos y cualitativos para caracterizar los niveles de razonamiento geométrico de los estudiantes chilenos de primer año medio, cuando abordan el concepto de homotecia. La forma de lograr ese objetivo es a través de la descripción del desarrollo de los niveles de razonamiento geométrico, cuando los estudiantes abordan el concepto de homotecia. Para ello, se realiza un análisis del contenido (Menéndez y Rodríguez, 2012; Santander, 2011; Tójar Hurtado, 2006) de las respuestas dadas por los estudiantes en cuatro sesiones de clase y dos test de razonamiento geométrico. Cada uno de los instrumentos fueron validados a través de juicio de expertos (Erazo-Jiménez, 2011).

Se realizó un muestreo intencionado (Menéndez y Rodríguez, 2012; Bravin y Pievi, 2008) que permitió llevar a cabo el estudio con 33 estudiantes de primer año medio del sistema educativo chileno (12-13 años), pertenecientes a la Región

Metropolitana de Santiago de Chile. Se consideraron los siguientes criterios de selección: voluntariedad y disposición del niño y de los padres para participar de la investigación, cursar una asignatura de geometría (adicional a la asignatura de matemática) y haber obtenido resultados favorables en los aprendizajes de polígonos, cuadriláteros y triángulos.

El diseño de esta investigación es no experimental y longitudinal panel (Flick, 2014), debido a que se trabajó con los mismos estudiantes durante todo el proceso. Como muestra la Figura 2, el estudio se estructuró en tres fases que fueron implementadas por los investigadores: Evaluación Inicial, Intervención y Evaluación Final. Las fases de Evaluación Inicial y Final consisten en dos test que se analizaron cuantitativamente de acuerdo con Corberán et al. (1994), pues pretendían medir el grado de adquisición de los diferentes niveles de razonamiento geométrico, antes y después de la aplicación de la unidad didáctica para la enseñanza del concepto de homotecia. Para la cuantificación de los grados de adquisición de los niveles de razonamiento geométrico, en el pre y post test se utilizaron técnicas cuantitativas de recolección de datos, de tal manera que la estadística descriptiva permita hacer más robustas las comprensiones cualitativas (Hart, Smith, Swars y Smith, 2009).

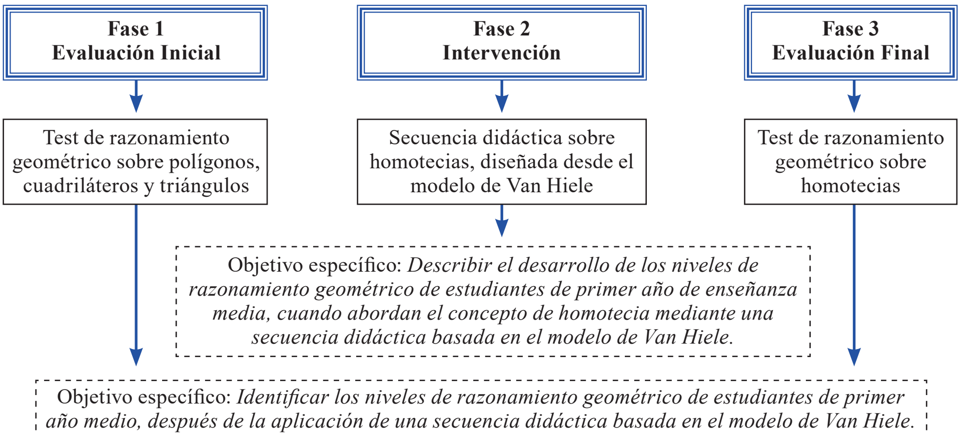


Figura 2. Fases del diseño de la investigación

Por otro lado, en la Fase de Intervención se aplicó la secuencia didáctica en torno al concepto de homotecia, construida a partir de los lineamientos dados en el modelo de Van Hiele. Como muestra la Tabla II, la secuencia didáctica consta de cuatro sesiones de 90 minutos cada una, en donde se trabajó con una guía de apoyo basada en el modelo de Van Hiele, junto con otros recursos manipulativos. Cabe destacar que los estudiantes trabajan en grupos de forma colaborativa.

TABLA II
Síntesis de la estructura de la secuencia didáctica

Sesión	*Descripción*	*Nivel de Razonamiento Esperado*	*Resultado Esperado*	*Tipos de Preguntas de las Guías de Trabajo*
1	En esta primera sesión, se introduce el concepto de homotecia, en particular, las homotecias directas. Para esto, los estudiantes visualizan y analizan el funcionamiento del pantógrafo, para construir una primera definición de Homotecia.	Nivel 0	Los estudiantes definen homotecia como una *transformación geométrica* que genera una *figura semejante a una dada*, tal que su *posición se aleja (o acerca) a un punto fijo*, dependiendo de un *factor de ampliación (o reducción).*	¿Qué tienen en común las figuras que se construyen con el pantógrafo? ¿Qué ocurre con la posición de las figuras obtenidas con ampliaciones (o reducciones) cada vez más grandes (o pequeñas)? ¿En qué posición debe anclarse el pantógrafo para ampliar (o reducir) una figura en un área determinada?
2	En esta sesión, se presenta otro tipo de homotecia: las homotecias inversas. Para esto se trabaja con la cámara oscura. El objetivo era que, con base en las nuevas características que identificaban, elaboraran una nueva definición de homotecia que incluyera también las características observadas en el funcionamiento del pantógrafo.	Nivel 0	Los estudiantes definen homotecia como una *transformación geométrica* que genera una *figura semejante a una dada*, pudiendo incluso estar *invertidas.* La *posición de esta figura se aleja (o acerca) a un punto fijo*, dependiendo de un *factor de ampliación (o reducción).*	¿Cómo son las sombras de los objetos que se proyectan en la cámara oscura? ¿Qué ocurre con las sombras de distintos objetos al acercarlos (o alejarlos) de la cámara oscura? ¿A qué distancia de la cámara oscura se debe ubicar un objeto, para que la altura de su proyección sea una medida determinada (por ejemplo, el doble de la original)?

3	En esta sesión, se pretende que reconozcan los elementos que componen una homotecia, a partir de lo trabajado con el pantógrafo y la cámara oscura, para lograr una definición del concepto que fuera matemáticamente más rigurosa.	Nivel 1	Los estudiantes definen homotecia como una transformación geométrica que genera una *figura semejante a una dada*, tal que, a partir de un punto fijo, llamado *centro de homotecia*, multiplica las distancias hasta sus vértices por un mismo factor, llamado *factor de homotecia*.	¿Qué ocurre al unir los vértices homólogos de las diferentes ampliaciones y reducciones generadas con el pantógrafo? Considerando una figura y su homotética obtenida con el pantógrafo, ¿qué relación existe entre las distancias que tienen los puntos homotéticos y los originales hasta el punto de anclaje del pantógrafo? ¿Cómo sería el diagrama que representa el funcionamiento de la cámara oscura, al poner un objeto a una determinada distancia de esta? ¿Qué tienen en común el funcionamiento del pantógrafo y la cámara oscura? ¿Qué diferencias existen en el funcionamiento del pantógrafo y la cámara oscura?
4	En esta última sesión, los estudiantes ya han trabajado implícitamente con los tipos	Nivel 2	Los estudiantes definen homotecia como una transformación geométrica que genera una *figura*	¿Con qué valores de la razón de homotecia, se obtiene una figura homotética más grande (o más

de homotecias, prescindiendo de las propiedades particulares de cada una, por lo que en esta sesión se crean las condiciones para hacerlas explícitas mediante la utilización de GeoGebra, para clasificar los tipos de homotecia y elaboraran una última definición del concepto que incluyera la mayor cantidad de propiedades.		*semejante a una dada*, tal que, a partir de un punto fijo llamado *centro de homotecia*, multiplica las distancias hasta sus vértices, por un mismo factor, llamado *factor de homotecia*. Además, sus *segmentos homólogos siempre son paralelos.* Existen homotecias directas e inversas. Las *homotecias directas* son aquellas cuya *razón de homotecia es positiva*. Este tipo de homotecia conserva la orientación de la figura original, ampliándola cuando la razón es mayor a 1 y reduciéndola cuando la razón es mayor a 0 y menor a 1. Las *homotecias inversas* son aquellas cuya *razón de homotecia es negativa*. Este tipo de homotecia invierte la orientación de la figura original, ampliándola cuando la razón es menor a -1 y reduciéndola cuando la razón es menor a 0 y mayor a -1.	pequeña) que la original? ¿Con qué valores de la razón de homotecia, se obtiene una figura homotética del mismo tamaño que la original? ¿Con qué valores de la razón de homotecia, se obtiene una figura homotética con la misma orientación (o distinta orientación) que la original? ¿Qué relación existe entre los lados de la figura homotética y los lados de la figura original? ¿Qué tipo de homotecia se puede construir con el pantógrafo? ¿Por qué? ¿Qué tipo de homotecia se modela con la cámara oscura? ¿Por qué?

Para el análisis de esta fase, se consideraron las definiciones de homotecia que los estudiantes construyeron en cada guía trabajada en la secuencia didáctica. Para organizar estos datos cualitativos, se utilizó una matriz en donde se fragmentó cada respuesta de los estudiantes en unidades de significado más pequeñas (Menéndez y Rodríguez, 2012; Santander, 2011; Tójar Hurtado, 2006). En la Tabla III se muestra el análisis de la definición de homotecia de un grupo de estudiantes, construida en la segunda guía de la secuencia didáctica.

TABLA III
Ejemplo del análisis del concepto de homotecia de un grupo de estudiantes

Respuesta Textual	*Unidad de Análisis*	*Significado*	*Característica del Nivel de Razonamiento*	*Nivel de Razonamiento Alcanzado*
Es el cambio de tamaño de figuras según su distancia. Al acercarse se achican y al alejarse se agrandan. La figura nueva es semejante a la original.	Es el cambio de tamaño de figuras	Describe apariencia física.	B	Nivel Transición 0-1
	según su distancia	Reconoce un componente de la homotecia, a partir de lo experimentado.	C	
	al acercarse se achican y al alejarse se agrandan	Describe apariencia física	B	
	la figura nueva es semejante a la original	Identifica la semejanza como condición necesaria.	C	

A cada unidad de análisis se le asignó un significado, y a este úlimo, se le asoció una de las características propuestas por Fouz (2005) asociada a los niveles de razonamiento de Van Hiele (Tabla I). Cuando una definición apunta a características de un mismo nivel de razonamiento, entonces el nivel de razonamiento alcanzado será ese mismo. En caso de que la definición apunte a características de dos niveles de razonamiento consecutivos, entonces el nivel de razonamiento alcanzado se establecerá como un *Nivel de Transición* de los niveles involucrados. En el ejemplo de la Tabla II, los estudiantes construyeron una definición que respondía a características tanto del Nivel 0 como del Nivel 1, por lo tanto, su nivel de razonamiento alcanzado se definió como Nivel de Transición 0-1.

4. Análisis de Resultados

En esta primera parte del análisis de los resultados se busca *describir el desarrollo de los niveles de razonamiento geométrico de estudiantes chilenos de primer año de enseñanza media, cuando abordan el concepto de homotecia mediante una secuencia didáctica basada en el modelo de Van Hiele*. Para ello se consideraron las definiciones de homotecia que construyeron los estudiantes en cada una de las sesiones de la secuencia didáctica, para luego dividir cada respuesta en unidades de significado más simples (Menéndez y Rodríguez, 2012; Santander, 2011), con el objetivo de caracterizarlas de acuerdo con alguno de los descriptores de cada nivel de razonamiento geométrico (Fouz, 2005). Así, las definiciones que respondían a las características de un único nivel de razonamiento se clasificaron en tal nivel, y en aquellos casos que se evidenciaban características de dos niveles distintos, se clasificaron en un nivel de transición entre los niveles involucrados.

La primera sesión de trabajo se enfocó en introducir el concepto de homotecia mediante el uso del pantógrafo. Para ello, los estudiantes realizaron distintas construcciones, que permitieran reflexionar en torno a su funcionamiento. Por tanto, esta actividad estaba dirigida a concretar el Nivel 0 de Visualización.

El 67% de las definiciones construidas por los estudiantes, luego de esta experimentación, se situaron en el Nivel 0 pues se centraban en aspectos visuales, es decir, descripciones físicas generales, que tendían a no diferenciar componentes propios de la homotecia. Un ejemplo de ello ocurrió cuando un grupo planteó que homotecia es "*agrandar o achicar el dibujo*". Por otro lado, el 33% restante apuntó más allá de los aspectos únicamente visuales pues, además identificaron alguna propiedad importante de la homotecia, como se puede apreciar en la Figura 3.

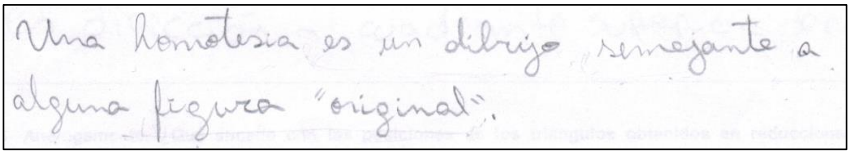

Una homotesia es un dibujo „semejante a alguna figura "original".

Figura 3. Ejemplo de respuesta de Nivel de Transición 0-1 en la Guía N°1

Este caso es interesante porque el grupo de estudiantes define el concepto de homotecia como "*un dibujo*", lo cual representa un aspecto físico (Nivel 0), pero luego agregan "*semejante a alguna figura original*", y esto evidencia dos aspectos importantes: el primero es la relación de semejanza y el segundo es que identifican la necesidad de disponer de una figura previa sobre la cual se aplica la homotecia. Estos últimos elementos ponen de manifiesto características propias del siguiente nivel de razonamiento, el Nivel 1 de Análisis, en donde los estudiantes perciben propiedades o condiciones necesarias del concepto, ya sea mediante la observación o la experimentación. Por lo tanto, este 33% de estudiantes cuyas respuestas se enmarcaban en el Nivel 0, pero que además cumplían con características del Nivel 1, se clasificaron en el Nivel de Transición 0-1. A partir de lo anterior, se puede concluir que el trabajo con el pantógrafo posibilitó que una parte de los estudiantes lograra percibir el concepto de semejanza como condición necesaria en una homotecia.

La segunda sesión tenía como propósito continuar desarrollando el Nivel 0, a través de otro recurso: la cámara oscura, que es un instrumento óptico que permite obtener una imagen plana proyectada a partir de una imagen real. Este nuevo recurso permitió tener otra perspectiva del concepto de homotecia, pues adiciona elementos propios de una homotecia inversa, a diferencia del pantógrafo que construye únicamente homotecias directas.

El concepto de homotecia construido posterior al trabajo con la cámara oscura, correspondió al Nivel 0 en solo el 11% de los casos. Ejemplo de ello, se aprecia en la Figura 4.

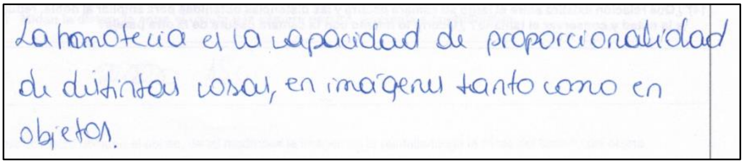

La homotecia es la capacidad de proporcionalidad de distintas cosas, en imágenes tanto como en objetos.

Figura 4. Ejemplo de respuesta de Nivel 0 en la Guía N°2

En este caso, la definición menciona la "*capacidad de proporcionalidad de distintas cosas*", que hace referencia a que las figuras obtenidas en una homotecia son siempre semejantes, sin embargo, al no existir un lenguaje geométrico adecuado para referirse a este hecho, dicha respuesta corresponde al Nivel 0 de razonamiento.

El 78% de las definiciones se encontraron en el Nivel de Transición 0-1, como la que se observa en la Figura 5.

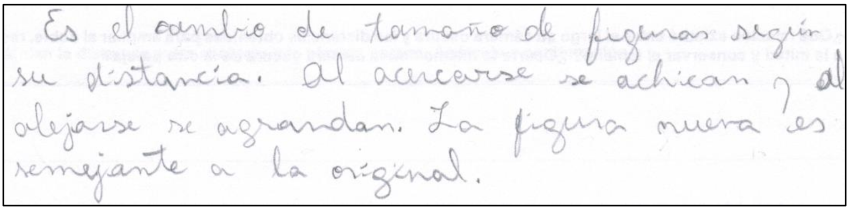

Es el cambio de tamaño de figuras según su distancia. Al acercarse se achican y al alejarse se agrandan. La figura nueva es semejante a la original.

Figura 5. Ejemplo de respuesta de Nivel de Transición 0-1 en la Guía N°2

Esta respuesta, inicialmente solo hace referencia al tamaño de las figuras homotéticas, siendo un aspecto puramente visual de Nivel 0, sin embargo, más adelante añaden elementos de Nivel 1 (“*según su distancia*”), haciendo alusión a la distancia entre cada vértice de una figura y el centro de homotecia, lo cual resulta ser un componente importante en una homotecia, completando con que “*al acercarse se achican y al alejarse se agrandan*”. Para terminar, plantean que “*la nueva figura es semejante a la original*”, lo cual corresponde a la identificación de una condición necesaria de una homotecia. Por lo anterior, estos tipos de respuestas quedan clasificadas en el Nivel de Transición 0-1.

Por último, el 11% restante de estudiantes logró identificar componentes más significativos desde el punto de vista matemático; sin embargo, no logran elaborar una definición matemáticamente coherente, quedando clasificados en el Nivel 1. La Figura 6 muestra un ejemplo de ello.

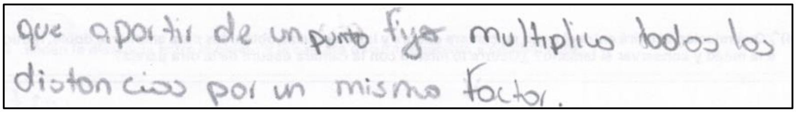

que apartir de un punto fijo multiplica todas las distancias por un mismo factor.

Figura 6. Ejemplo de respuesta de Nivel 1 en la Guía N°2

Como se puede observar, este grupo de estudiantes logra percibir la existencia de un punto fijo, que sería el centro de homotecia, incluso de manera incompleta, identifican que en una homotecia se “*multiplica todas las distancias por un mismo factor*”, entendiéndose que las distancias que existen entre cada vértice de una figura y el centro de homotecia se ponderan por un mismo factor, es decir, por la razón de homotecia.

En la tercera sesión se retomó lo trabajado con el pantógrafo y la cámara oscura, con el objetivo de identificar y formalizar los elementos comunes de ambas experiencias, y con ello, lograr una definición más completa y formal del concepto de homotecia. Por tanto, esta parte de la secuencia tenía como propósito alcanzar el Nivel 1.

El 20% de las definiciones de homotecia contenían características del Nivel 0. Ejemplo de ello, es la que se presenta en la Figura 7.

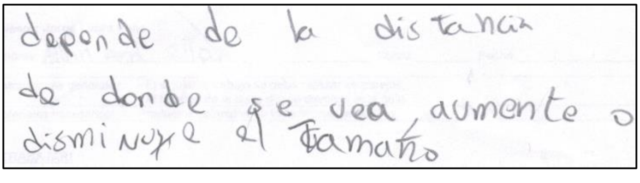

depende de la distancia de donde se vea aumente o disminuye el tamaño

Figura 7. Ejemplo de respuesta de Nivel 0 en la Guía N°3

En esta definición de homotecia se aprecian elementos relacionados con la percepción visual, en donde se alude solamente a un cambio de tamaño, dependiendo del punto de vista del observador, lo que no es suficiente para alcanzar el nivel esperado.

En cuanto al Nivel de 1, éste fue alcanzado por el 80% de los estudiantes, construyendo definiciones como la de la Figura 8.

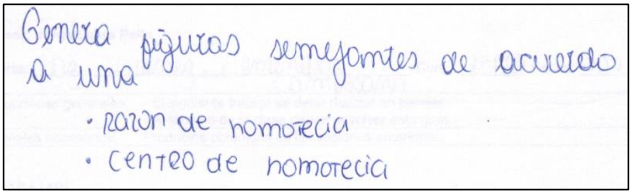
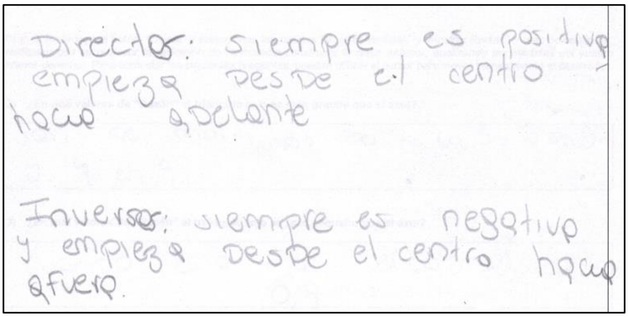

Genera figuras semejantes de acuerdo a una
· razon de homotecia
· centro de homotecia

Figura 8. Ejemplo de respuesta de Nivel 1 en la Guía N°3

Se puede apreciar que aparecen conceptos fundamentales como: "*figuras semejantes*", "*razón de homotecia*" y "*centro de homotecia"*. Sin embargo, lo enunciado no tiene la estructura de una definición, motivo por el cual, queda clasificada en tal nivel.

En la última sesión de la secuencia didáctica, se utilizó como recurso digital la aplicación GeoGebra, con el fin de generalizar algunas propiedades de la homotecia, y poner en evidencia, la existencia de diferentes tipos de homotecia: directas e inversas; es decir, se trata de establecer condiciones necesarias y suficientes para cada uno de estos tipos de homotecia, lo que es coherente si se tenía como propósito que los estudiantes alcanzaran el Nivel 2 de razonamiento geométrico (Fouz, 2005; Van Hiele, 1986).

Posterior a este trabajo, el 23% de las definiciones continuaron en el Nivel 0, como se puede ver en la Figura 9.


Directo: siempre es positivo empieza des de el centro hacia adelante

Inverso: siempre es negativo y empieza desde el centro hacia afuera.

Figura 9. Ejemplo de respuesta de Nivel 0 en la Guía N°4

Si bien se clasifican los dos tipos de homotecia, predominan aspectos visuales como "*empieza desde el centro hacia adelante*" o "*empieza desde el centro hacia afuera*", sin enunciar alguna propiedad geométrica relevante. Esto puede significar que este grupo de estudiantes no logró completar con éxito las tareas que involucraron el uso del pantógrafo y la cámara oscura, pues fue en esas actividades en donde debieron haber adquirido un vocabulario básico sobre los conceptos claves relacionados con la homotecia, junto con la visualización de sus propiedades.

Solo el 8% de las definiciones quedó en el Nivel de Transición 0-1, como se puede observar en la Figura 10.

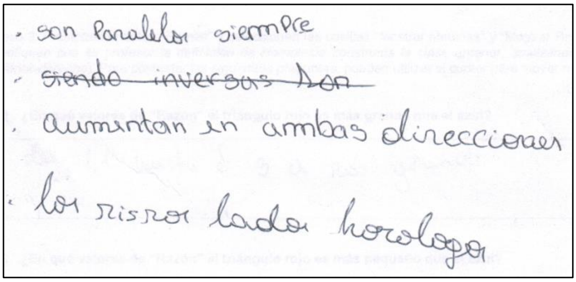

· son Paralelos siempre
· ~~siendo inversos son~~
· aumentan en ambas direcciones
· los mismos lados homologos

Figura 10. Ejemplo de respuesta de Nivel de Transición 0-1 en la Guía N°4

A pesar de no hacer una distinción entre los dos tipos de homotecia y de explicitar elementos visuales (Nivel 0), que no aportan a la constucción del concepto, sí se logra identificar una propiedad geométrica importante a partir de la manipulación de la aplicación (Nivel 1): "*son paralelos siempre*", haciendo referencia al paralelismo de los lados homólogos de las figuras homotéticas. Este cruce entre dos niveles de razonamiento justifica su clasificación en el Nivel de Transición 0-1.

El 31% de las definiciones alcanzó el Nivel 1, como se puede ver en la Figura 11.

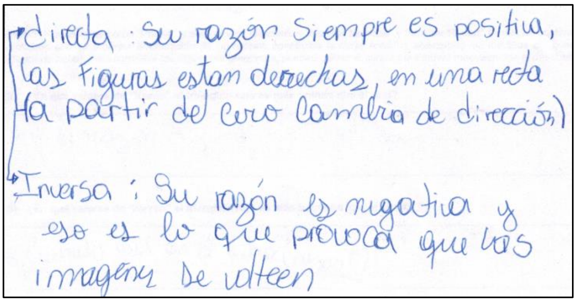
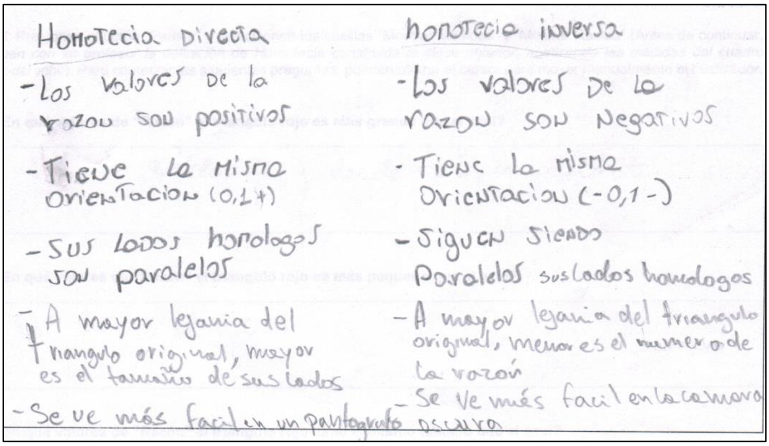

directa: Su razón Siempre es positiva, las Figuras estan derechas, en una recta (a partir del cero cambia de dirección)
Inversa: Su razón es negativa y eso es lo que provoca que las imagenes se volteen

Figura 11. Ejemplo de respuesta de Nivel 1 en la Guía N°4

La respuesta anterior queda clasificada en el Nivel 1 porque se logra realizar una clasificación de la homotecia directa e inversa, a través de componentes derivados de la observación, pero utilizando un lenguaje informal. Esto se aprecia claramente cuando se dice que en la homotecia directa "*las figuras están derechas*" y en la homotecia inversa "*las imágenes se voltean*". Esto pudo haber ocurrido porque no lograron identificar las características propias de cada tipo de homotecia, las cuales se analizaron en el uso del pantógrafo, la cámara oscura y la manipulación del GeoGebra, por lo que solo se centraron en la relación entre la razón de homotecia y la disposición de la figura en el plano.

El 8% de las respuestas transita entre los niveles 1 y 2 (Nivel de Transición 1-2). Ejemplo de ello se puede observar en la Figura 12.


Homotecia directa
- Los valores de la razon son positivos
- Tiene la misma orientacion (0,1+)
- Sus lados homologos son paralelos
- A mayor lejania del triangulo original, mayor es el tamaño de sus lados
- Se ve más facil en un pantografo

homotecia inversa
- Los valores de la razon son Negativos
- Tiene la misma Orientacion (-0,1-)
- Siguen siendo Paralelos sus lados homologos
- A mayor lejania del triangulo original, menor es el numero de la razón
- Se ve más facil en la camara oscura

Figura 12. Ejemplo de respuesta de Nivel de Transición 1-2 en la Guía N°4

En este caso, existe una clasificación de los tipos de homotecia, donde se muestran características comunes, que serían condiciones necesarias, como que "*sus lados homólogos son paralelos*", y otras condiciones que son suficientes para cada tipo de homotecia, como por ejemplo, que "*los valores de la razón son positivos*", en el caso de la homotecia directa, y "*los valores de la razón son negativos*", en el caso de la homotecia inversa. Hasta este punto todo apunta a una adquisición del Nivel 2, sin embargo, en los últimos dos puntos de cada columna se hace alusión a aspectos obtenidos a partir de la manipulación de todos los recursos utilizados en la secuencia, empleando para ello, un lenguaje más informal, que correspondería a características del Nivel 1. Por esta combinación de características de ambos niveles de razonamiento, se clasifica en el Nivel de Transición 1-2.

Finalmente, el 31% de las respuestas logró identificar las condiciones necesarias y suficientes de cada tipo de homotecia, como se muestra en la Figura 13.

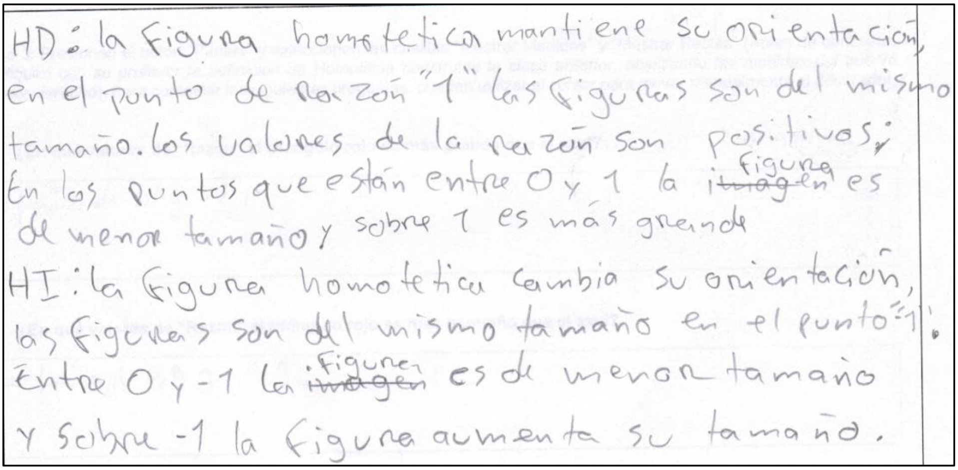

HD: la figura homotetica mantiene su orientación, en el punto de razón "1" las figuras son del mismo tamaño. los valores de la razón son positivos; En los puntos que están entre 0 y 1 la ~~imagen~~ figura es de menor tamaño y sobre 1 es más grande
HI: la figura homotetica cambia su orientación, las figuras son del mismo tamaño en el punto "-1". Entre 0 y -1 la ~~imagen~~ figura es de menor tamaño y sobre -1 la figura aumenta su tamaño.

Figura 13. Ejemplo de respuesta de Nivel 2 en la Guía N°4

En la respuesta anterior se puede ver claramente la clasificación de cada tipo de homotecia, pues se describe lo que ocurre con la orientación y el tamaño de una figura, de acuerdo con los distintos valores que puede tomar la razón de homotecia, lo que en conjunto constituyen condiciones suficientes para identificar cada tipo de transformación. Además, en la descripción de cada tipo de homotecia, se aprecia la utilización de lenguaje matemático, donde se reconocen conceptos claves como "*figura homotética*", *"razón"* y *"orientación*", respondiendo así al nivel esperado en esta última parte de la secuencia.

A partir del Gráfico 1, se puede inferir que las dos primeras actividades de la secuencia didáctica, enfocadas en el Nivel 0, no solo permitieron a los estudiantes explorar y construir el concepto de homotecia a través de la visualización, sino que también resultó ser una oportunidad para identificar propiedades geométricas importantes que apuntan al nivel siguiente, como la relación de semejanza entre las figuras homotéticas y la disposición de éstas de acuerdo con su tamaño.

Gracias a la manipulación del pantógrafo, la cámara oscura, el procesador geométrico GeoGebra y las preguntas orientadoras de cada guía de trabajo, se logró promover el razonamiento y la construcción de un concepto de homotecia que evolucionó sostenidamente a lo largo de la secuencia, logrando obtener casi un 70% de estudiantes entre los niveles 1 y 2.

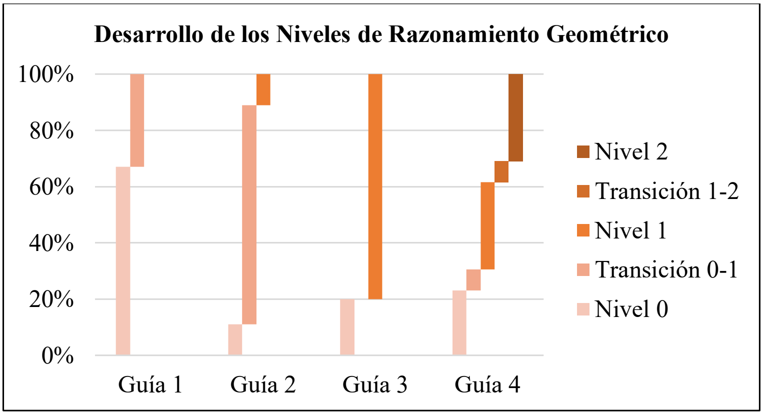


Gráfico 1. Desarrollo de los niveles de razonamiento geométrico en la secuencia didáctica

En la segunda parte del análisis de los resultados se busca *identificar los niveles de razonamiento geométrico de estudiantes de primer año medio, después de la aplicación de una secuencia didáctica basada en el modelo de Van Hiele*. La Tabla IV muestra, a modo de resumen, los grados de adquisición de cada nivel de razonamiento, tanto del pre-test como del post-test, con el objetivo de establecer algunas inferencias respecto el impacto de la secuencia didáctica en el desarrollo de los niveles de razonamiento de los estudiantes de la muestra.

TABLA IV

Resumen de los grados de adquisición de los niveles de razonamiento en el pre-test y post-test

Grados de Adquisición	*Nivel 0*		*Nivel 1*		*Nivel 2*	
	Pre-test	Post-test	Pre-test	Post-test	Pre-test	Post-test
Nula	13%	0%	22%	15%	53%	65%
Baja	25%	10%	34%	60%	25%	20%
Intermedia	0%	30%	25%	5%	16%	10%
Alta	16%	20%	19%	15%	3%	5%
Completa	47%	40%	0%	5%	3%	0%

A simple vista, no parecieran existir diferencias significativas en la adquisición alta y completa. Además, en ninguna de estas pruebas se logran resultados sobresalientes en los niveles 1 y 2. Sin embargo, el modelo de Van Hiele (1986) no permite realizar comparaciones simples entre el pre-test y el post-test, dado que el objeto geométrico sobre el que se mide el razonamiento es diferente en cada test (polígonos, cuadriláteros y triángulos en el pre-test, y homotecias en el post-test); por tanto, es necesario hacer el análisis sobre los grados de adquisición al interior de cada nivel (Aravena y Gutiérrez, 2016; Fouz, 2005; Vargas y Gamboa, 2013).

A continuación, el Gráfico 2 presenta los grados de adquisición del pre-test y post-test, respecto al Nivel 0.

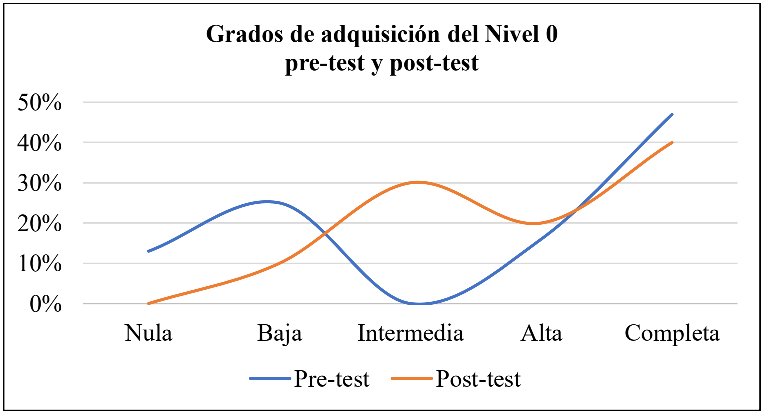


Gráfico 2. Grados de adquisición del Nivel 0 en el pre-test y post-test

El gráfico anterior evidencia que, las adquisiciones nula y baja presentan mayores porcentajes en el pre-test, lo que es positivo en cuanto al impacto de la secuencia didáctica, puesto que los porcentajes de las adquisiciones intermedia y alta son ampliamente mejores en el post-test, y esto es favorable en términos del desarrollo del razonamiento porque el avance entre niveles se realiza de forma gradual, lo cual implica que estos estudiantes tendrían mayores probabilidades de alcanzar grados de adquisición superiores; en contraposición de la gran concentración de estudiantes que obtienen nula o baja adquisición en el pre-test, que tendrían menos probabilidades de alcanzar una adquisición completa del Nivel 0. Esto se explicaría por la propiedad de *continuidad* del razonamiento geométrico (Vargas y Gamboa, 2013). Respecto a la adquisición completa del Nivel 0, la diferencia es levemente mejor en el pre-test, puesto que, polígonos, cuadriláteros y triángulos son conceptos geométricos con los que están familiarizados desde la educación parvularia.

A continuación, el Gráfico 3 muestra los grados de adquisición obtenidos en el Nivel 1.

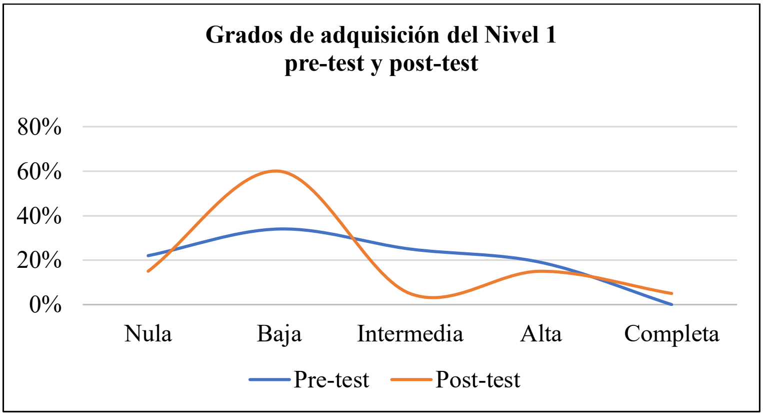


Gráfico 3. Grados de adquisición del Nivel 1 en el pre-test y post-test

En este gráfico se evidencian mejores resultados en el pre-test, por el hecho de ser más homogéneos sus resultados, en contraposición de los grados de adquisición del post-test, donde existe una mayor dispersión, esto es, un gran porcentaje de estudiantes en nula y baja adquisición y una cantidad considerablemente menor de estudiantes en los grados superiores, lo que implica la necesidad de movilizar a una mayor cantidad de estudiantes para lograr alcanzar tales grados. Respecto al éxito de la secuencia didáctica en este nivel, se podría decir que faltaron actividades que potenciaran el análisis conjunto del funcionamiento del pantógrafo y la cámara oscura.

Por último, se presenta el Gráfico 4 en donde se pueden observar los grados de adquisición obtenidos en el Nivel 2.

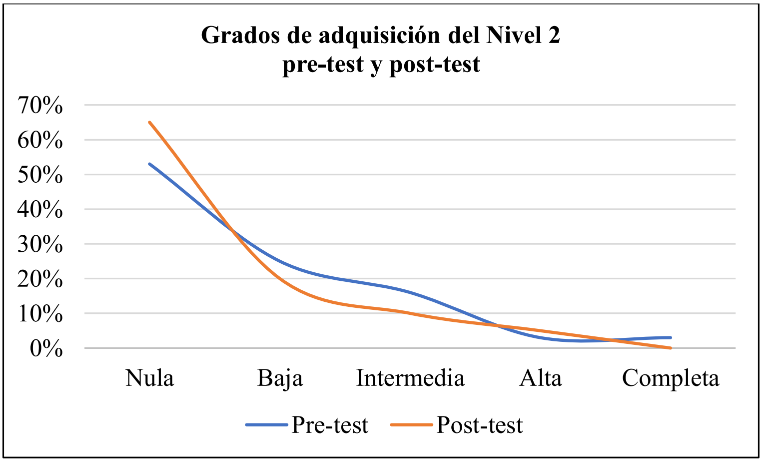


Gráfico 4. Grados de adquisición del Nivel 2 en el pre-test y post-test

En este caso los resultados son igualmente deficientes en ambos test, es decir, ni en el estudio de polígonos, cuadriláteros y triángulos, ni en el estudio del concepto de homotecia, se lograron resultados satisfactorios en la adquisición alta y completa del Nivel 2. Por el contrario, se logran elevados porcentajes en las adquisiciones nula y baja en ambas pruebas.

Respecto a la secuencia didáctica, al no existir una satisfactoria transición entre el Nivel 0 y Nivel 1, alcanzar el Nivel 2 se convierte en un objetivo difícilmente alcanzable, esto debido a la *secuencialidad* de los niveles de razonamiento (Vargas y Gamboa, 2013).

En resumen, de acuerdo con el análisis de las definiciones de homotecia que construyeron los estudiantes, en la secuencia didáctica se obtuvo un alto porcentaje con razonamiento geométrico entre los Niveles 1 y 2. Sin embargo, este logro se ve menoscabado por los resultados del post-test, en donde estos porcentajes disminuyen considerablemente con respecto a los grados de adquisición de esos niveles. Las causas de estos resultados pueden deberse a la falta de actividades de *orientación libre*, en donde los estudiantes deben aplicar lo aprendido en cada fase, con el objetivo de lograr un mejor razonamiento y lenguaje geométrico (Jaime y Gutiérrez, 1990).

5. Conclusiones

Los resultados del pre-test mostraron que los estudiantes tenían altas probabilidades de enfrentar con éxito el Nivel 0 en otras experiencias de aprendizajes sobre geometría, pues en la mayoría de los estudiantes su razonamiento geométrico alcanza una adquisición alta y completa. En cuanto al Nivel 1, los resultados dan cuenta de una iniciación de este nivel y solo la mitad de ellos logra una adquisición intermedia y alta. Por último, en el Nivel 2, la mayoría de los estudiantes logra una nula o baja adquisición del nivel, lo que predecía bajas probabilidades de lograr adquisición completa de este nivel (Vargas y Gamboa, 2013), al menos en el corto plazo.

Durante el desarrollo de las actividades de la secuencia didáctica, se logró caracterizar las definiciones de homotecia que construyeron los estudiantes de forma colaborativa. El análisis de estas respuestas permitió reconocer el rol de las actividades dirigidas al Nivel 0 de Visualización, que no solo se limitaron al desarrollo de tal nivel, sino que se destacaron por posibilitar el desarrollo de habilidades correspondientes al Nivel 1 de Análisis, gracias a las actividades con el pantógrafo y la cámara oscura, permitiendo a los estudiantes, a través de la experimentación, identificar propiedades de la homotecia. Por lo tanto, coherente con lo que plantea la literatura (Pujawan et al., 2020; Jaime y Gutiérrez, 1990), las fases de *orientación dirigida* y *explicitación* fueron un factor clave en todas las actividades de la secuencia didáctica.

Los resultados del post-test lograron ratificar el rol de las actividades de visualización, pues movilizaron a la gran mayoría de estudiantes hacia grados de adquisición altos, respecto al Nivel 0, e iniciales, en el Nivel 1, situación que ocurrió en menor grado en el pre-test. Por tanto, las actividades de la secuencia didáctica permitieron, a la mayoría de los estudiantes, avanzar hacia la adquisición completa del Nivel 0 de razonamiento geométrico y, en consecuencia, apropiarse de los primeros grados de adquisición del nivel 1.

En cuanto al nivel 2, el post-test no evidencia los mismos avances logrados durante la aplicación de la secuencia didáctica, y esto se puede explicar por las siguientes dos razones: i) dado que en el post-test no se lograron altos o completos grados de adquisición del Nivel 1, la característica de *secuencialidad* de los niveles de razonamiento (Vargas y Gamboa, 2013) plantea que es natural no obtener buenos resultados en el Nivel 2; ii) hay mejores resultados en la fase 2 de la investigación porque allí se analizan razonamientos geométricos tanto individuales como grupales, es decir, el trabajo colaborativo permitió a los estudiantes dar cuenta de mejores grados de apropiación tanto del Nivel 1 como del Nivel 2.

En consecuencia, se puede decir que la visualización tuvo un rol predominante en el proceso (Baiduri et al., 2020; Gutiérrez, 2013), junto con la utilización de distintos recursos manipulativos, que ayudaron a iniciar el razonamiento visual, pues los estudiantes, además de observar lo que hacían estos instrumentos, lograron establecer propiedades que en un inicio estaban implícitas (Antonini y Martignone, 2011; Samper et al., 2001). En coherencia con Yi, Flores y Wang (2020), las decisiones del profesorado son fundamentales a la hora de diseñar experiencias de aprendizaje, debido a que son ellos quienes debe secuenciar las actividades, de tal modo que los estudiantes logren construir los conceptos y reconocer las propiedades. Generar interacción entre ellos les permite (contra) argumentar sus ideas y sistematizar los conocimientos.

A partir de los resultados, se puede afirmar que el desarrollo de los niveles de razonamiento geométrico se realiza de forma gradual en el tiempo, por lo que los profesores deben generar procesos de enseñanza que permitan mejorar los grados de adquisición de cada nivel, para asegurar mejores resultados en el siguiente. Por ejemplo, la secuencia didáctica diseñada para este estudio, favoreció el desarrollo del Nivel 0, por lo que sería necesario implementar más actividades que permitan a los estudiantes lograr desarrollar sus grados de adquisición en los Niveles 1 y 2. Además, se debe tener en cuenta que cuando se alcanza cierto nivel de razonamiento en una determinada área de la Geometría, este no se transfiere a otras nociones geométricas, aunque entrega una idea de qué tan probable es alcanzar ese mismo nivel en otras áreas, siempre y cuando se acompañe con un proceso de enseñanza coherente y contextualizado para tal fin.

Los resultado y proyecciones de este estudio deben leerse a la luz de sus limitaciones. En primer lugar, al ser un estudio aplicado a una muestra acotada de un contexto particular, sus resultados no pueden ser generalizados, pero se abren posibilidades para generar nuevas propuestas que permitan desarrollar el razonamiento geométrico de otros conceptos matemáticos, que sean extensibles a otros niveles de la enseñanza media. En segundo lugar, la secuencia didáctica propuesta en este estudio estuvo acotada a cuatro sesiones, lo cual supone una oportunidad de generar nuevas secuencias de aprendizaje en esta línea, cuya duración sea mayor, y así permitir al estudiantado alcanzar y apropiarse de los Niveles 1 y 2, y quizás transitar a los primeros grados del Nivel 3.

Para finalizar, este trabajo se constituye en una invitación a los docentes de matemática para considerar el modelo de Van Hiele como un marco teórico útil para diseñar y organizar la enseñanza de la Geometría (Yi, Flores y Wang, 2020), pues promueve en los estudiantes la visualización, la exploración, la formulación de conjeturas y la argumentación, procesos que resultan ser fundamentales para desarrollar su razonamiento geométrico.

Reconocimientos

A la Universidad de Santiago de Chile, proyecto USA 1756, por el apoyo y financiamiento de la investigación.

Referencias Bibliográficas

Abreu, J. y Barot, M. (2017). *Desarrollo del pensamiento geométrico.* Recuperado de http://arquimedes.matem.unam.mx/jlabreu/DesarrolloDelPensamientoMatematico.pdf.

Aires, A. P., Campos, H. y Poças, R. (2015). Raciocínio geométrico versus definição de conceitos: a definição de quadrado com alunos de 6.º ano de escolaridade. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa, 18*(2), 151-176. http://dx.doi.org/10.12802/relime.13.1821.

Antonini, S. y Martignone, F. (2011). *Pantographs for geometrical transformatios: An explorative study on argumentation.* Recuperado de https://www.semanticscholar.org/paper/PANTOGRAPHS-FOR-GEOMETRICAL-TRANSFORMATIONS%3A-AN-ON-Antonini/cb503f8c46e150e28151e767743f4b7f993ea90f.

Aravena, M. y Caamaño, C. (2013). Niveles de razonamiento geométrico en estudiantes de establecimientos municipalizados de la región del Maule. Talca, Chile. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 139-178. https://dx.doi.org/10.12802/relime.13.1621.

Aravena, M. y Gutiérrez, A. (2016). Estudio de los niveles de razonamiento de Van Hiele en alumnos de centros de enseñanza vulnerables de educación media en Chile. *Enseñanza de las ciencias*, 107-128. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.1664.

Baiduri, B., Ismail, A. D. y Sulfiyah, R. (2020). Understanding The Concept Of Visualization Phase Student In Geometry Learning. *International Journal of Scientific & Technology Research, 9*(2), 2353-2359. Recuperado de http://www.ijstr.org/final-print/feb2020/Understanding-The-Concept-Of-Visualization-Phase-Student-In-Geometry-Learning.pdf.

Bravin, C. y Pievi, N. (2008). *Documento metodológico orientador para la investigación educativa.* Argentina: OEI.

Corberán, R., Gutiérrez, A., Huerta, M., Jaime, A., Margarit, J., Peñas, A. y Ruiz, E. (1994). *Diseño y evaluación de una propuesta curricular de aprendizaje de la geometría en enseñanza secundaria basada en el modelo de razonamiento de Van Hiele.* Madrid: Centro de Publicaciones del Ministerio de Educación y Ciencia.

Denzin, N. y Lincoln, Y. (2005). *The Sage handbook of qualitative research, Third Edition*. Thousand Oaks: Sage.

Erazo Jiménez, M. S. (2011). Rigor científico en las prácticas de investigación cualitativa. *Ciencia, docencia y tecnología*(42), 107-136. Recuperado de https://www.redalyc.org/pdf/145/14518444004.pdf.

Figueiras, L., Molero, M., Salvador, A. y Zuasti, N. (2000). Una propuesta metodológica para la enseñanza de la Geometría a través de los fractales. *SUMA*, 45-54. Recuperado de https://revistasuma.es/IMG/pdf/35/045-054.pdf.

Flick, U. (2014). *La gestión de la calidad en investigación cualitativa*. Madrid, España: Morata.

Fouz, F. (2005). Modelo de Van Hiele para la didáctica de la Geometría. En Ibáñez y Macho, Ciclo de Conferencias *Un paseo por la Geometría 2004-2005*, (pp. 67-82). Universidad del País Vasco, España.

Galleguillos, J. y Candia, L. (2011). Uso de herramientas interactivas en el aprendizaje de homotecias. *XIII Conferencia Interamericana de Educación Matemática (CIAEM).* Recife.

Gamboa, R. y Ballestero, E. (2010). La enseñanza y aprendizaje de la geometría en secundaria, la perspectiva de los estudiantes. *Revista Electrónica Educare, 14(*2*)*, 125-142. Recuperado de https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=5414933.

García, S. y López, O. (2008). *La enseñanza de la Geometría* (Primera ed.). México D.F.: Intituto Nacional para la Evauación de la Educación.

González, Y. y Arias, I. (2017). *Análisis didáctico del concepto de homotecia para su enseñanza y aprendizaje en octavo año de la Educación General Básica en Costa Rica* (Tesis no publicada). Universidad Nacional, Heredia, Costa Rica.

Gutiérrez, S. (2013). El pensamiento geométrico en los estudiantes de primer grado de secundaria. *Visión Educativa IUNAES, 7*(15), 83-91. Recuperado de https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=4713493.

Hart, L., Smith, S., Swars, S. y Smith, M. (2009). An examination of research methods in mathematics education (1995-2005). *Journal of Mixed Methods Research*, *3*(1), 26-41. https://doi.org/10.1177%2F1558689808325771.

Iglesias, M. y Ortiz, J. (2015). *Investigaciones en educación matemática. Aportes desde una unidad de investigación.* Recuperado de http://riuc.bc.uc.edu.ve/bitstream/123456789/2749/4/ISBN-9789802336036.pdf.

Jaime, A. y Gutiérrez, A. (1990). Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la geometría: El modelo de Van Hiele. En S. Llinares, y M. Sanchez, *Teoría y práctica en educación matemática* (pp. 295-384). Sevilla: Alfar. Recuperado de https://www.uv.es/Angel.Gutierrez/archivos1/textospdf/JaiGut90.pdf.

Marmolejo, G. A. y González Astudillo, M. T. (2015). Control visual en la construcción del área de superficies planas en los textos escolares. Una metodología de análisis. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 18*(3), 301-328. http://dx.doi.org/10.12802/relime.13.1831.

Menéndez, M. A. y Rodríguez, I. S. (2012). *Metodología de la investigación social: técnicas innovadoras y sus aplicaciones*. Síntesis.

Organisation for Economic Co-operation and Development [OECD]. (2019). *Chile - Country Note - PISA 2018 Results*. Recuperado de https://www.oecd.org/pisa/publications/PISA2018_CN_CHL.pdf.
Proenza, Y. y Leyva, L. (2008). Aprendizaje desarrollador en la matemática: estimulación del pensamiento geométrico en escolares primarios. *Revista Iberoamericana De Educación, 48*(1), 1-7. Recuperado de https://rieoei.org/RIE/article/view/2249.
Pujawan, I. G. N., Suryawan, I. P. P. y Prabawati, D. A. A. (2020). The Effect of Van Hiele Learning Model on Students' Spatial Abilities. *International Journal of Instruction, 13*(3), 12-33. Recuperado de http://www.e-iji.net/dosyalar/iji_2020_3_32.pdf.
Ramírez-Uclés, R., Flores Martínez, P. y Ramírez-Uclés, I. (2018). Análisis de los errores en tareas geométricas de argumentación visual por estudiantes con talento matemático. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 21*(1), 29-56. https://doi.org/10.12802/relime.18.2112.
Rodríguez, B., Carreño, X. y Muñoz, V. (2013). *¿Cuánto saben de matemática los docentes que la enseñan y cómo se relaciona ese saber con sus prácticas de enseñanza?*. Recuperado de https://centroestudios.mineduc.cl/wp-content/uploads/sites/100/2017/07/Informe-Final-F611150-PUC-Beatriz-Rodr%C3%ADguez.pdf.
Samper, C., Leguizamón, C. y Camargo, L. (2001). Razonamiento en Geometría. *Revista EMA, 6*(2), 141-158. Recuperado de http://funes.uniandes.edu.co/1126/.
Sandín Esteban, M. P. (2003). *Investigación cualitativa en educación: Fundamentos y tradiciones*. Madrid: McGraw-Hill.
Santander, P. (2011). Por qué y cómo hacer Análisis de Discurso. *Cinta de moebio*, (41), 207-224. http://dx.doi.org/10.4067/S0717-554X2011000200006.
Saorin Villa, A., Torregrosa Gironés, G. y Quesada Vilella, H. (2019). Razonamiento configural y organización discursiva en procesos de prueba en contexto geométrico. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 22*(2), 213-244. https://doi.org/10.12802/relime.19.2224.
Tójar Hurtado, J. C. (2006). *Investigación cualitativa: Comprender y actuar*. Madrid: La Muralla.
Van Hiele, P. M. (1986). *Structure and Insight. A Theory of Mathematics Education*. London: Academic Press Inc.
Vargas, G. y Gamboa, R. (2013). El modelo de Van Hiele y la enseñanza de la geometría. *UNICIENCIA, 27*(1), 74-94. Recuperado de https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=4945319.
Venegas, M. (2015). *Niveles de razonamiento geométrico de Van Hiele al resolver problemas geométricos: un estudio con alumnos de 13 a 16 años en Cantabria* (Tesis no publicada). Universidad de Cantabria, Cantabria, España.
Yi, M., Flores, R. y Wang, J. (2020). Examining the influence of van Hiele theory-based instructional activities on elementary preservice teachers' geometry knowledge for teaching 2-D shapes. *Teaching and Teacher Education, 91*, 103038. https://doi.org/10.1016/j.tate.2020.103038.
Yilmaz, K. (2013). Comparison of Quantitative and Qualitative Research Traditions: epistemological, theoretical, and methodological differences. *European Journal of Education, 48*(2), 311-325.

Autores

Jorge Andrés Labra Peña. Universidad de Santiago de Chile, Chile.
0000-0001-8819-4142 jorge.labra@usach.cl

Carlos Mario Vanegas Ortega. Universidad de Santiago de Chile, Chile.
0000-0002-5364-0664 cmariov@gmail.com

La Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (*Relime*) es la publicación oficial de investigación del Comité Latinoamericano de Matemática Educativa (Clame AC). Se edita tres veces por año. Acepta artículos en español, portugués, inglés y francés. Está dirigida a investigadores en Matemática Educativa, a profesores de matemáticas y ciencias, y estudiantes de licenciatura y posgrado interesados en conocer los resultados recientes de las investigaciones y en profundizar en el conocimiento de un tema en particular.

Objetivos:

1. *Relime* pretende ser un foro abierto a las diversas escuelas del pensamiento (paradigmas, teorías, metodologías, métodos, enfoques) en nuestra disciplina, la Matemática Educativa, sin definir perspectivas únicas y con un profundo respeto a las tradiciones educativas y los contextos de los diversos sistemas educativos de nuestra región.
2. Dar a conocer resultados de investigación original en Matemática Educativa que se realizan en América Latina y el Caribe y en el resto del mundo.
3. Contribuir al proceso de profesionalización de la Matemática Educativa en nuestra región.
4. Fomentar una cultura de divulgación e investigación entre los distintos grupos de investigación en nuestra región.
5. Propiciar el debate y la reflexión profunda sobre problemas de investigación que fortalezca la disciplina en nuestra área geográfica.
6. Fortalecer la calidad de la investigación en Matemática Educativa y la vinculación entre comunidades nacionales e internacionales.

INSTRUCCIONES TÉCNICAS PARA AUTORES

Las contribuciones

Toda contribución propuesta a Relime se somete a un estricto proceso de arbitraje. Las contribuciones deberán ser resultado de investigaciones teóricas o experimentales, estudios de caso, etnográficos, etc., en formato de artículo. Estas contribuciones deberán ser trabajos inéditos de investigación, no estar en arbitraje en otra revista ni tratarse de traducciones previamente publicadas en su lengua original.

Características de los manuscritos

Relime publica artículos en castellano, portugués, inglés y francés. Acepta ensayos teóricos originales así como propuestas que sean resultado de estudios experimentales, de casos, de observación, etnográficos, etc.

Los artículos deberán tener un máximo de nueve mil palabras, incluyendo referencias, figuras, cuadros y anexos. En caso de que su propuesta exceda esta extensión, el Comité de Redacción decide si considera la posibilidad de publicarlo siempre que tal propuesta no ocupe todo el espacio disponible en un número de la revista.

En el caso de reportes de estudios experimentales, de casos, de observación, etnográficos, etcétera, recomendamos que los escritos contengan:

1) Resumen del trabajo, deberá tener un máximo de 10 renglones escrito en español, portugués, inglés y francés y de 5 palabras clave en las cuatro lenguas. Resumen, título y palabras clave deben ser escritos en los cuatro idiomas.
2) Una exposición del problema de investigación (su pertinencia y relevancia en el tema que se aborda).
3) Indicaciones globales acerca de la estructura teórica del reporte.
4) Justificación de la metodología usada.
5) Desarrollo de algunos ejemplos y análisis de resultados.
6) Referencias bibliográficas.

Si se trata de ensayos teóricos y filosóficos, nuestra recomendación es la siguiente:

1) Iniciar con una exposición del problema de investigación (su pertinencia y relevancia en el tema que se aborda).
2) Revisión de la literatura que incluya trabajos importantes que sustenten la investigación, en el que se refleje una variedad de resultados actuales. Esta revisión debe incluir investigaciones internacionales pertinentes y no limitarse a estudios de un solo país.
3) Ofrecer indicaciones sobre la estructura teórica o filosófica en la cual se desarrolla el tema del artículo.
4) Exposición detallada de la posición del autor dentro del tema o los temas de exposición. Esto debe reflejarse a través del desarrollo de ideas, más que de una lista de reflexiones.

5) Implicaciones o consecuencias de la investigación en el área.
6) Referencias bibliográficas.

PROCESO DE EVALUACIÓN EN RELIME

Los artículos propuestos a Relime serán leídos por dos miembros del Comité de Redacción, y si el contenido atiende a la originalidad y satisface los criterios anteriores, así como a la claridad de la presentación e interés para la comunidad de matemática educativa, serán evaluados en forma "ciega" por dos investigadores reconocidos y con experiencia dentro del área. En el proceso de evaluación se garantizará el anonimato de autores y evaluadores.

El resultado del dictamen puede ser:

A. Sugerencia de publicar el artículo sin modificaciones.
B. Sugerencia de publicar el artículo bajo reserva de hacer ligeras modificaciones.
C. Sugerencia de reestructurar el artículo atendiendo a los comentarios, lo que precisaría una nueva revisión.
D. Sugerencia de rechazo del artículo.

FORMATO DE LAS CONTRIBUCIONES

Todas las contribuciones deberán estar escritas en procesador de texto Word 6.0 o superior, tipo de letra Times New Roman, tamaño 11 y utilizar un espacio anterior y posterior de 4 pt, lo que significa que no se requiere dar espacio entre un párrafo y otro. Los cuatro márgenes de la página deberán ser de 2.5 cm. Para las expresiones matemáticas debe usarse el editor de ecuaciones.

ENCABEZADOS PRINCIPALES

El estilo de letra para los encabezados principales es tipo VERSALES en formato minúsculas, utilizando un espacio anterior de 36pt y el posterior de 12pt, lo que significa que no se requiere dar espacio entre un encabezado y los párrafos subsecuentes. Enumerar las secciones de los encabezados principales (usando 1, 2, 3, etc.) y utilizar el estilo de alineación centrada.

Subtítulos

El estilo de letra para los subtítulos del artículo es tipo Times New Roman, tamaño 11 y cursiva. La primera letra debe escribirse con mayúsculas. Utilizar un espacio anterior de 24 pt y el posterior de 10 pt, lo que significa que no se requiere dar espacio entre un subtítulo y los párrafos subsecuentes. Los subtítulos deberán enumerarse 1.1., 1.2, 1.3, etc., según corresponda en estilo tipo Normal. Los subtítulos posteriores a un encabezado principal deben tener un espacio anterior y posterior de 6 pts.

Estilo para las tablas

Las tablas deben tener una alineación centrada. El estilo de letra del texto en el interior de la tabla debe ser tipo Times New Roman, Normal, tamaño 10 y con un espacio anterior y posterior de 2 pto. Enumerar las tablas, usando tipo de letra VERSALES tamaño 10, en formato minúscula: TABLA I, TABLA II, TABLA III, etc., utilizando un espacio anterior de 6 pto y posterior de 0 pto. El número de la tabla debe escribirse en la parte superior y su título debajo, utilizando un estilo de alineación centrada y tipo de letra normal tamaño 10.

Estilo para las figuras e imágenes

Las figuras e imágenes deben tener una alineación centrada. El estilo de letra debe ser tipo Times New Roman, tamaño 10 y tipo Cursiva y Normal. Escribir el número de la figura o imagen en formato tipo cursiva y el título en formato tipo normal. Utilizar un espacio anterior de 2 pt y el posterior de 4 pt. Las imágenes y figuras deberán adjuntarse en un archivo independiente al manuscrito en formato de alta resolución.

Transcripciones

Para las transcripciones usar el estilo de letra normal, tipo Times New Roman tamaño 10. Utilizar un interlineado sencillo.

Usar estilos de transcripción como los siguientes:

Estudiante: Para graficar utilicé uno de los métodos que vimos en clase. Me pareció que era el más simple para resolverlo
Profesor: ¿Por qué consideras que ese método es más simple?

Si las líneas de la transcripción requieren ser numerados, entonces usar el estilo de transcripción enumerada como sigue:

[122] Entrevistador: En la primera actividad se te propuso determinar la función velocidad ¿Podrías explicar cómo la hallaste?
[123] Alumno: Hum... pues...

En el caso de que no se requiera hacer referencia a los números, se sugiere usar el primer estilo de transcripción (indicada párrafos arriba).

Reconocimientos

Los reconocimientos a personas, fondos, asociaciones, etc. deberán colocarse en una sección separada antes de las referencias bibliográficas. Los nombres de organizaciones financieras deberán escribirse completos.

Bibliografía, referencias y notas

Solicitamos emplear el estilo de la APA (Publication Manual of the American Psychological Association, 6th ed., 2009) para las citas de pie, notas, referencias textuales y bibliografía. (Pueden apoyarse en el siguiente link: http://www.apastyle.org/learn/tutorials/basics-tutorial.aspx; o bien, consultar el Manual).

La bibliografía deberá escribirse en forma de lista sin enumerar y en orden cronológico. El estilo de letra debe ser Times New Roman 9. Para escribir una referencia debe usarse alineación justificada para el primer renglón. A partir del segundo renglón deberán establecer una sangría especial de 0.63 cm.

Las notas deberán escribirse al final de cada página del documento. El estilo de letra que deberá usarse es Times New Roman 9 en formato normal.

Información complementaria

1) No se devolverán los artículos originales.
2) El editor se reserva el derecho de hacer algunas modificaciones necesarias para mantener el estilo de la publicación.
3) Los textos pueden ser publicados en otro órgano editorial previo permiso expreso, por escrito, y haciendo referencia explícita de la fuente.
4) Los autores recibirán gratuitamente dos ejemplares del número en que se haya publicado su artículo.
5) No se realizarán pagos a los autores por los artículos que se publiquen en *RELIME*. Para mayores informes, puede visitar la página web: http://www.clame.org.mx/relime.htm o bien el correo electrónico:

relime@clame.org.mx

SUSCRIPCIÓN A RELIME

Costo del volumen 25 (tres números)

Suscripción Institucional:
Volumen US$ 120
Cada número US$ 50

Suscripción Individual:
Volumen US$ 50
Cada número US$ 20

Suscripción Miembros Clame:
Volumen US$ 20
Cada número US$ 10

Estos costos NO aplican a *números especiales*,
NO incluyen gastos de envío, NI comisión bancaria por transferencias
o depósitos de cheques emitidos fuera de México

Las suscripciones deberán solicitarse al correo electrónico
suscripcion@relime.org

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa

Volumen 25, Número 1

Diseño digital:
LDG. Emilio Serna Hernández
Recrea. Soluciones infinitas
sernandem@yahoo.com.mx

Se imprimió en los talleres de
Editorial Progreso S.A. de C.V.
Sabino # 275
Col. Santa María la Ribera
Alcaldía Cuauhtémoc
06400, CDMX, México

Marzo de 2022
Tiraje: 1000 ejemplares más sobrantes