RELIME 25-2

9 771665 243002 02502

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa

Vol. 25, Núm. 2, julio 2022

ISSN 1665-2436

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa

RELIME

Vol. 25, Núm. 2, 2022

Clame Comité Latinoamericano de Matemática Educativa

Publicación oficial de investigación del Comité Latinoamericano de Matemática Educativa

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa

Directora Editorial: GISELA MONTIEL-ESPINOSA

Equipo Editorial:
DIANA WENDOLYNE RÍOS JARQUÍN
MELVIN CRUZ AMAYA
CRISTIAN PAREDES CANCINO
SELVIN NODIER GALO ALVARENGA

Departamento de Matemática Educativa – Cinvestav
AP 14-740, México 07000, CDMX
M É X I C O

Comité Científico

Luis Carlos Arboleda, *Universidad del Valle*, COLOMBIA • Abraham Arcavi, *Weizmann Institute*, ISRAEL • Michèle Artigue, *Université Cité Paris*, FRANCE • Fernando Cajas, *Universidad de San Carlos*, GUATEMALA • Terezinha Carraher, *University of Oxford,* UNITED KINGDOM • Francisco Cordero, *Cinvestav*, MÉXICO • Bruno D´Amore, *Università di Bologna*, ITALIE • João Pedro da Ponte, *Universidade de Lisboa*, PORTUGAL • Rosa María Farfán, *Cinvestav*, MÉXICO • Enrique Galindo, *Indiana University*, USA • Delia Lerner, *Universidad Nacional de Buenos Aires*, ARGENTINA • Luis Montejano, *Universidad Nacional Autónoma de México*, MÉXICO • Luis Radford, *Université Laurientenne*, CANADA • Luis Rico, *Universidad de Granada*, ESPAÑA • Ana Sierpinska, *Concordia University*, CANADA.

Comité de Redacción

Juan Antonio Alanís, *Instituto Tecnológico de Estudios Superiores de Monterrey,* MÉXICO • David Block, *Cinvestav*, MÉXICO • Marcelo Borba, *Universidade Estadual Paulista en Rio Claro,* BRASIL • Gabriela Buendía, *Red de Centros de Investigación en Matemática Educativa,* MÉXICO • Alberto Camacho, *Instituto Tecnológico de Chihuahua II*, MEXICO • Ida Ah Chee, *Faculty of Education The University of Hong Kong*, CHINA • Cecilia Crespo, *Instituto del Profesorado J. V. González*, ARGENTINA • Evangelina Díaz, *Universidad Nacional de Heredia,* COSTA RICA • Leonora Díaz, *Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación,* CHILE • Crisólogo Dolores, *Universidad Autónoma de Guerrero,* MÉXICO • Javier Lezama, *Universidad Autónoma de Guerrero,* MÉXICO • Maria Laura Magalhães, *Universidade Federal de Minas Gerais*, BRASIL • Gustavo Martínez, *Universidad Autónoma de Guerrero,* MÉXICO • Cristina Ochoviet, *Instituto de Perfeccionamiento y Estudios Superiores*, URUGUAY • Martín Socas, *Universidad de La Laguna,* ESPAÑA • Marta Valdemoros, *Cinvestav*, MÉXICO • Paola Valero, *Aalborg University,* DENMARK.

Coordinación técnica: Janet Ramírez Sandoval
Martha Maldonado Rosales

Formación y diseño: Emilio Serna Hernández
Portada: «Opus 1» de Oscar Reutersvärd en 1934. Reproducida con permiso de los herederos del artista.

Publicación oficial de investigación del Comité Latinoamericano de Matemática Educativa, Clame A.C. Consejo Directivo: *Presidenta:* Dra. Carmen Evarista Matías Pérez; *Secretaria:* Lic. Elizabeth Mariscal Vallarta; *Tesorera:* Mg. Santa Daysi Sánchez González; *Vocal Norteamérica:* Dra. Evelia Reséndiz; *Vocal Caribe:* Dra. Anelys Vargas Ricardo; *Vocal Centroamérica:* Rodolfo Fallas Soto; *Vocal Sudamérica:* Mg. Mónica Marcela Parra - Zapata.

Publicación cuatrimestral, se publica en los meses de marzo, julio y noviembre. Editada por el Colegio Mexicano de Matemática Educativa A.C., con reservas de derechos al uso exclusivo, con No. 04-2016-110914351000-102, del ISSN: 1665-2436 y, con No. 04-2016-110413025500-203, del e-ISSN: 2007-6819, otorgados por el Instituto Nacional del Derecho de Autor en México.

Contribuciones e información: editorial@relime.org

Relime es una revista indizada en:
ISI Web of Knowledge, SSCI – Social Sciences Citation Index y Journal Citation Reports • ERIH – European Reference Index for the Humanities • Conacyt – Índice de Revistas Mexicanas de Investigación Científica y Tecnológica - Scopus – Elsevier Database • International Bibliography of Periodical Literature in the Humanities and Social Sciences • DOAJ – Directory of Open Access Journals • Clase – Citas Latinoamericanas en Ciencias Sociales y Humanidades • Iresie – Índice de Revistas de Educación Superior e Investigación Educativa • Latindex – Sistema Regional de Información en Línea para Revistas Científicas de América Latina, el Caribe, España y Portugal • Redalyc – Red de Revistas Científicas de América Latina y el Caribe, España y Portugal • EBSCO – Information Services • Dialnet • Scielo-México.

2022 Impresa en México

Volumen 25 – Número 2 – 2022

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa

Clame
Comité Latinoamericano de Matemática Educativa

Publicación oficial del Comité Latinoamericano de Matemática Educativa

DIRECTORA EDITORIAL:
G. MONTIEL-ESPINOSA, *CDMX, México*

EQUIPO EDITORIAL:
D. W. RÍOS JARQUÍN, *CDMX, México*
M. CRUZ AMAYA, *CDMX, México*
C. PAREDES CANCINO, *CDMX, México*
S. N. GALO ALVARENGA, *CDMX, México*

COMITÉ CIENTÍFICO

L. C. ARBOLEDA, *Bogotá, Colombia*
A. ARCAVI, *Rehovot, Israel*
M. ARTIGUE, *París, Francia*
F. CAJAS, *San Carlos, Guatemala*
T. CARRAHER, *Oxford, Inglaterra*
F. CORDERO, *CDMX, México*
B. D´AMORE, *Bologna, Italia*
J. P. DA PONTE, *Lisboa, Portugal*
R. M. FARFÁN, *CDMX, México*
E. GALINDO, *Indiana, EUA*
D. LERNER, *Buenos Aires, Argentina*
L. MONTEJANO, *Querétaro, México*
L. RADFORD, *Sudbury, Canadá*
L. RICO, *Granada, España*
A. SIERPINSKA, *Montreal, Canadá*

COMITÉ DE REDACCIÓN:

J. A. ALANÍS, *Monterrey, México*
D. BLOCK, *CDMX, México*
M. BORBA, *Río Claro, Brasil*
G. BUENDÍA, *CDMX, México*
A. CAMACHO, *Chihuahua, México*
I. A. CHEE, *Hong Kong, China*
C. CRESPO, *Buenos Aires, Argentina*
E. DÍAZ, *Heredia, Costa Rica*
L. DIAZ, *Santiago de Chile, Chile*
C. DOLORES, *Chilpancingo, México*
J. LEZAMA, *CDMX, México*
M. L. MAGALHÃES, *Belo Horizonte, Brasil*
G. MARTÍNEZ, *CDMX, México*
C. OCHOVIET, *Montevideo, Uruguay*
M. SOCAS, *La Laguna, España*
M. VALDEMOROS, *CDMX, México*
P. VALERO, *Aalborg, Denmark*

2022

Volumen 25 Número 2 Julio de 2022

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa

EDITORIAL

ARTÍCULOS

REVISTA LATINOAMERICANA DE INVESTIGACIÓN EN MATEMÁTICA EDUCATIVA, RELIME, es la publicación de investigación oficial del Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C., editada por el Colegio Mexicano de Matemática Educativa, A. C., Dirección fiscal: Norte 79-A, No. 221. Col. Clavería, Alcaldía Azcapotzalco, C. P. 02080. Ciudad de México, México., www.relime.org. Directora responsable: Gisela Montiel-Espinosa, direccion@relime.org.

Reservas de Derechos al Uso Exclusivo, No. 04-2016-110914351000-102, con ISSN: 1665-2436, para el formato impreso; y No. 04-2016-110413025500-203, con e-ISSN: 2007-6819, para el formato digital; otorgados por el Instituto Nacional del Derecho de Autor. Derechos Reservados © Colegio Mexicano de Matemática Educativa, A. C. RFC: CMM 040505 IC7. Publicación cuatrimestral. Se publica en los meses de marzo, julio y noviembre, con el financiamiento del Clame.

Las opiniones expresadas por los autores no necesariamente reflejan la postura del editor de la publicación.

Todos los artículos de la Relime están bajo la Licencia Creative Commons Reconocimiento - No Comercial (CC BY-NC 4.0)
https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/

EDITORIAL

TAMBIÉN OTRA COMUNICACIÓN DE LA CIENCIA ES POSIBLE

Also another communication of science is possible

Gisela Montiel-Espinosa
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados, México

Desde nuestra editorial en el número 24(1) (Cantoral, 2021) se vislumbró la complejidad del panorama de la publicación científica en nuestra disciplina, al menos en el contexto regional, a propósito del requisito de publicación para la graduación en los programas de posgrado. Esta exigencia va fortaleciendo el proceso de naturalizar un sistema que ejerce presión –laboral más que académica– para favorecer la contratación, continuidad o promoción de quienes publican.

Per se la publicación no tendría que representar una carga extraordinaria del trabajo académico, por el contrario, es una pieza fundamental del proceso de investigación: el de comunicar el quehacer científico. Sin embargo, se ha convertido en ello por la exigencia de hacerlo continuamente y casi de forma exclusiva en las revistas con el mayor factor de impacto. En su mayoría, los sistemas de evaluación han volcado su atención en el *Journal Citation Reports* (JCR) y en el *SCImago Journal & Country Rank* (SJR) llegando a extremos tales que, las instituciones y sistemas de evaluación científica de algunos países otorgan valor al trabajo científico, ya no solo por el índice al que pertenece la revista donde se publica (*Web of Science*, *Scopus* o el correspondiente nacional), sino por el cuartil, que es un indicador que cuantifica su importancia -en términos de citas- en relación con revistas de su área dentro del mismo índice.

Entre los distintos actores –autores, revistas e instituciones– se desarrollaron estrategias para lograr que cada vez más investigadores lograran la publicación en las revistas de alto impacto y cada vez más revistas ingresaran a dichos índices. Muchas estrategias fueron relativas a la dirección académica y formativa, lo

CC BY NC
Montiel-Espinosa, G. (2022). También otra comunicación de la ciencia es posible. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 25*(2), 131-134. https://doi.org/10.12802/relime.22.2520

cual resultó en el fortalecimiento de disciplinas y comunidades; sin embargo, también emergieron diversos fenómenos que ya se han reportado y caracterizado en la literatura como *conductas no éticas* en la investigación científica. Entender cada una nos puede ayudar a identificar cómo estamos reaccionando ante la presión del sistema, en ocasiones y sin darnos cuenta, a nivel personal, colectivo o disciplinar. Por ejemplo, en su revisión de literatura, Reyes-Carrillo y Eudave-Muñoz (2022) recuperan diversos factores que llevan a este tipo de conductas, entre ellos: la falta de tiempo por el exceso de trabajo, la presión para la obtención de promociones y recompensas, el sistema de evaluación, la falta de competencia o el desconocimiento de las políticas institucionales relacionadas con la integridad de la investigación.

Si bien estas conductas suelen visibilizarse con mayor frecuencia en la autoría, no son exclusivas de ella, pues pueden presentarse en cualquier fase del proceso de publicación (ver Rozo y Pérez-Acosta, 2019) y por ello resulta fundamental tener una política editorial que guíe a todos quienes participan de dicho proceso; más aún es necesario actualizar constantemente dichas políticas con base en las discusiones y acuerdos de la comunidad científica en general, disciplinar en particular y editorial.

Hace cinco años, cuando se rediseñó el sitio web de la Relime, hubo una actualización importante en su política editorial; con ella se esperaba orientar a la comunidad en relación con una serie de criterios relevantes para identificar si la revista es la indicada para enviar una propuesta de artículo o si ésta cumple con el enfoque, las normas editoriales y las consideraciones éticas de la revista. Ahora entendemos que la actualización y su sola difusión no son suficientes porque no se trata de cumplir requisitos sino de promover toda una cultura académica en torno al quehacer y la comunicación científica.

Los análisis y reportes de conductas no éticas coinciden en que una estrategia para tener un ecosistema académico sano es modificar el sistema de producción y evaluación científica. Movimientos como *Slow Science* (The Conversation, 2019; Stengers, 2018) e iniciativas como el Manifiesto de Leiden (Hicks *et al*, 2015) y la declaración DORA (por las siglas de la *Declaration On Research Assessment (DORA, s. f.*), han organizado e integrado a una buena parte de la comunidad en esa dirección; sin embargo, la gran mayoría de las instituciones y sistemas de financiamiento y evaluación se han mantenido en la dirección de priorizar las métricas cuantitativas.

Claramente esta estrategia no puede recaer en acciones individuales aisladas y es necesario acompañarla de prácticas académicas que de forma integral vayan construyendo un ecosistema que nos permita un sano desarrollo científico, tecnológico y de innovación basado en conocimiento. Sumarnos a estos movimientos y cambiar nuestras prácticas académicas es una responsabilidad que debemos asumir como comunidad académica para hacerlo apropiadamente, es decir, aportando desde las particularidades del quehacer disciplinar y las dinámicas de la región.

En esta dirección, hemos emprendido el proyecto de actualización editorial y técnica de la Relime. Si bien lo haremos de la mano de un equipo editorial especializado, también propiciando espacios de discusión y reflexión con la comunidad académica, es decir, con quienes participamos de las acciones del *Comité Latinoamericano de Matemática Educativa* (Clame) para reconocer tales particularidades. Nuestra expectativa es que este proceso de actualización sea efectivamente continuo y se alimente del proceso editorial mismo, así como de las acciones organizadas por nuestra comunidad.

No solo con la publicación del artículo estamos haciendo un ejercicio de comunicación de la ciencia, lo que sucede es que ésta es la más visible. El proceso de evaluación *por pares* debe poder verse y vivirse como un diálogo y un proceso de aprendizaje para todas las partes, incluyendo a la editorial, aunque tenga más un rol mediador en el proceso. Así, vamos a incentivar diálogos profundos en los procesos de evaluación para fortalecer la calidad de los artículos y, como consecuencia natural, la de la revista. Aunado a ello, buscaremos formatos de difusión que resalten las aportaciones científicas y a sus autores, porque queremos acercar a lectores y nuevos autores que dialoguen con lo que se va publicando.

Como señala Buendía (2022), la escritura académica es un medio para *comunicar a las futuras generaciones* qué hacemos y qué hemos propuesto en nuestro campo, lo que nos da una responsabilidad aún mayor: la ciencia que hacemos, a quiénes formamos y el contexto que les dejamos. Por ello buscaremos que el impacto de los artículos vaya más allá del número de citas, queremos apoyar al impacto social de la investigación que lo respalda o al impacto formativo del proceso que acompaña.

Con ésta, iniciamos una serie de editoriales con las que iremos reflexionando sobre algunos fenómenos identificados en los procesos editoriales que, como los analistas de las conductas no éticas señalan, se deben al desconocimiento de las políticas relacionadas con la integridad de la investigación. Nuestro objetivo es ir (in)formando, sobre todo a las nuevas generaciones, cómo la comunidad científica y editorial ha acordado actuar en torno a estas conductas y con ello esperamos fortalecer la comunicación científica antes, durante y después de la publicación… porque sí, también otra forma de comunicación de la ciencia es posible.

 BY-NC

Referencias

Buendía, G. (2022). Participando en comunidades de investigación. ¿Por qué importa publicar? *Investigación e Innovación en Matemática Educativa*, *7*. https://doi.org/10.46618/iime.126

Cantoral, R. (2021). Notas sobre la publicación e inserción de posgraduados en Matemática Educativa. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 24*(1), 5-8. https://doi.org/10.12802/relime.21.2410

Declaration On Research Assessment (s. f.). *Declaración de San Francisco sobre la evaluación de la investigación*. Recuperado el 13 de marzo, 2023, de: https://sfdora.org/read/read-the-declaration-espanol/

Hicks, D., Wouters, P., Waltman, L., de Rijcke, S. y Rafols, I. (2015). El Manifiesto de Leiden sobre indicadores de investigación. *Revista Iberoamericana de Ciencia, Tecnología y Sociedad*, *10*(29), 275-280. Recuperado de: https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=92438580012

Reyes-Carrillo, S. y Eudave-Muñoz, D. (2022). Conductas no éticas en la investigación científica: prevalencia, causas asociadas y estrategias de prevención. Una revisión sistemática. *Revista Innovaciones Educativas*, *24*, 105-125.

Rozo Castillo, J. A. y Pérez-Acosta, A. M. (2019). Ética e investigación científica: una perspectiva basada en el proceso de publicación. *Persona*, *22*(1), 11-25. https://doi.org/10.26439/persona2019.n022(1).4080

The Conversation (2019, 5 de mayo). *La ciencia necesita tiempo para pensar: el movimiento que quiere acabar con la cultura de "publicar o morir"*. Recuperado de: https://theconversation.com/la-ciencia-necesita-tiempo-para-pensar-el-movimiento-que-quiere-acabar-con-la-cultura-de-publicar-o-morir-116367

Stengers, I. (2018). *Another science is possible. A manifesto for slow science*. Polity Press.

Autora

Gisela Montiel-Espinosa. Centro de Investigacón y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional (Cinvestav), México. gmontiele@cinvestav.mx

https://orcid.org/0000-0003-1670-9172

Seydel Bueno, María Burgos, Juan D. Godino, Olga Pérez

SIGNIFICADOS INTUITIVOS Y FORMALES DE LA INTEGRAL DEFINIDA EN LA FORMACIÓN DE INGENIEROS

Intuitive and formal meanings of the definite integral in engineering education

RESUMEN

La integral definida es un concepto central en las aplicaciones del cálculo a las ciencias experimentales e ingeniería por lo que es un tema de investigación didáctica relevante. En este trabajo se analizan los diversos significados de la integral definida aplicando herramientas teóricas del Enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática, en particular, la interpretación del significado en términos de sistemas de prácticas operativas y discursivas relativas a la resolución de tipos de problemas y el modelo de niveles de algebrización de la actividad matemática. Se identifican tipos de situaciones-problemas y configuraciones de prácticas, objetos y procesos que permiten caracterizar y articular los diversos significados parciales de la integral definida (geométrico-intuitivo, como límite de sumas de Riemann y función acumulativa) así como de sus extensiones al caso de integral dobles (como caso particular de las múltiples) y de línea, desde los más intuitivos a los más formales. El análisis permite identificar los grados de generalidad de los objetos del cálculo integral y el papel del álgebra en la caracterización de los significados de la integral definida, que deben considerarse en la planificación y gestión de los procesos de enseñanza y aprendizaje del cálculo integral en las carreras de ingeniería.

PALABRAS CLAVE:

- *Integral de Riemann*
- *Significados intuitivos y formales*
- *Niveles de algebrización*
- *Comprensión*

ABSTRACT

The definite integral is a central concept in the applications of calculus to experimental sciences and engineering, and consequently, a relevant didactic research topic. This paper analyses the different meanings of the definite integral by applying theoretical tools of the ontosemiotic approach to mathematical knowledge and instruction, particularly, the interpretation of meaning in terms of systems of operational and discursive practices related to the resolution of types of problems and the algebraization levels model of mathematical activity. Types of problem-situations and configurations of practices, objects, and processes are identified that allow us to

KEY WORDS:

- *Riemann integral*
- *Intuitive and formal meanings*
- *Algebraization levels*
- *Understanding*

Bueno, S., Burgos, M., Godino, J. D. y Pérez, O. (2022). Significados intuitivos y formales de la integral definida en la formación de ingenieros. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 25*(2), 135-168. https://doi.org/10.12802/relime.22.2521. Recepción: Mayo 3, 2020 / Aceptación: Marzo 1, 2023

characterize and articulate the various partial meanings of the definite integral (geometric-intuitive, as a limit of Riemann sums and cumulative function) as well as its extensions to the case of the double integral (as a particular case of the multiple) and the line, from the most intuitive to the most formal. The analysis allows us to identify the generality degrees of the objects of integral calculus and the role of algebra in the characterization of the meanings of the definite integral, which must be considered in the planning and management of the processes of teaching and learning of integral calculus in engineering degrees.

RESUMO

A integral definida é um conceito central nas aplicações de cálculo para as ciências experimentais e engenharia, tornando-o um tópico relevante de pesquisa didática. Este trabalho analisa os diferentes significados do integral definido aplicando ferramentas teóricas da abordagem ontosemiótica ao conhecimento e à instrução matemática, em particular a interpretação do significado em termos de sistemas de práticas operacionais e discursivas relacionadas com a resolução de tipos de problemas e o modelo de níveis de algebrização da atividade matemática. São identificados tipos de situações problemáticas e configurações de práticas, objectos e processos que nos permitem caracterizar e articular os vários significados parciais da integral definida (geométrico-intuitiva, como limite das somas de Riemann e função cumulativa), bem como as suas extensões ao caso da integral dupla (como caso particular do múltiplo) e da linha, desde a mais intuitiva até à mais formal. A análise permite-nos identificar os graus de generalidade dos objectos de cálculo integral e o papel da álgebra na caracterização dos significados da integral definida, que devem ser tidos em conta no planeamento e gestão dos processos de ensino e aprendizagem do cálculo integral nos graus de engenharia.

PALAVRAS CHAVE:

- *Integral de Riemann*
- *Significados intuitivos e formais*
- *Níveis de algebrização*
- *Compreensão*

RÉSUMÉ

L'intégrale définie est un concept central dans les applications du calcul aux sciences expérimentales et à l'ingénierie, ce qui en fait un sujet de recherche didactique pertinent. Cet article analyse les différentes significations de l'intégrale définie en appliquant les outils théoriques de l'approche ontosémiotique de la connaissance et de l'enseignement des mathématiques, en particulier l'interprétation de la signification en termes de systèmes de pratiques opérationnelles et discursives liées à la résolution de types de problèmes et le modèle des niveaux d'algèbre de l'activité mathématique. On identifie des types de situations-problèmes et des configurations de pratiques, d'objets et de processus qui permettent de caractériser et d'articuler les différentes significations partielles de l'intégrale définie

MOTS CLÉS:

- *Intégrale de Riemann*
- *Significations intuitives et formelles*
- *Niveaux d'algèbre*
- *Compréhension*

(géométrique-intuitive, comme limite des sommes de Riemann et fonction cumulative) ainsi que ses extensions au cas de l'intégrale double (comme cas particulier du multiple) et de la ligne, du plus intuitif au plus formel. L'analyse nous permet d'identifier les degrés de généralité des objets du calcul intégral et le rôle de l'algèbre dans la caractérisation des significations de l'intégrale définie, ce qui doit être pris en compte dans la planification et la gestion des processus d'enseignement et d'apprentissage du calcul intégral dans les diplômes d'ingénieur.

1. Introducción

En los últimos años ha aumentado considerablemente el número de estudios que examinan el papel de los cursos de matemáticas en la formación de ingenieros (González-Martín, Gueudet, Barquero y Romo-Vázquez, 2021). Por un lado, existe un consenso generalizado en la comunidad educativa en relación a la necesidad de que los estudiantes para ingenieros piensen matemáticamente y usen unas matemáticas sólidas para describir y analizar diferentes aspectos del mundo real que buscan modelar (Alper, 2013; Pepin, Biehler y Gueudet, 2021). Por otro, los resultados de la investigación ponen de manifiesto las dificultades que encuentran los estudiantes ante los cursos de matemáticas en los programas de ingeniería, algunas de las cuales derivan de una insatisfactoria preparación matemática y la falta de progresión de la educación secundaria a la universitaria (Rooch, Junker, Härterich y Hackl, 2016), así como de la brecha entre el contenido de los cursos de matemáticas y las habilidades matemáticas que requiere el ingeniero (Brito-Vallina, Alemán-Romero, Fraga-Guerra, Para-García y Arias-de Tapia, 2011; González-Martín y Hernandes, 2017).

El papel del cálculo en el desempeño profesional del ingeniero justifica que la mayoría de los programas de ingeniería lo incluyan como asignatura obligatoria, buscando proporcionar a los estudiantes herramientas que utilizarán durante el resto de su formación (Ellis, Larsen, Voigt y Kristeen, 2021; González-Martín, 2021). Así, desde los planes de estudio de ingeniería se insiste en que el ingeniero llegue a "asumir una concepción científica del mundo al interpretar los conceptos del Cálculo Diferencial e Integral", "caracterizar, interpretar, comunicar y aplicar los conceptos y principales resultados de la disciplina, mediante una correcta utilización del lenguaje matemático en sus formas: analítica, gráfica, numérica y verbal, centrando la atención en los modelos matemáticos" y desarrollar la capacidad de razonamiento y de las formas del pensamiento matemático, la comprensión de la demostración de teoremas, la identificación e interpretación

 CC BY-NC

de los conceptos matemáticos, la argumentación lógica de propiedades y “la demostración de resultados teóricos sencillos, mediante el empleo de los métodos analíticos, gráficos y/o numéricos” (Ministerio de Educación Superior, 2017, p. 28; 2018, p. 54).

En las revisiones elaboradas por Bressoud, Ghedams, Martinez-Luances y Törner (2016) y por González-Martín (2021) se describe la evolución y principales tendencias de la investigación sobre enseñanza y aprendizaje del cálculo, como son las dificultades de los estudiantes, el diseño de tareas, las prácticas de clase, el uso de la tecnología, etc. Estos autores resaltan la preocupación por las relaciones entre el pensamiento de los estudiantes sobre las nociones fundamentales del cálculo y las expectativas de aprendizaje establecidas en los currículos.

En este artículo nos centramos en uno de los contenidos clave del cálculo en los programas de formación de ingenieros (Ministerio de Educación Superior, 2017; 2018) y también de los que ocasionan más dificultades de comprensión a los estudiantes, la integral definida. Como objeto matemático, la integral definida se utiliza frecuentemente en el cálculo de ingeniería para resolver problemas relacionados con cantidades infinitesimales, en las que se requiere, por un lado, sumas infinitas de cantidades finitas, y por otro lado el desarrollo de los métodos de cuadratura (Puga y Miranda, 2021). La acumulación de áreas no se considera explícitamente en las estrategias didácticas que sugieren algunos planes de estudio, aunque, en cursos posteriores de matemáticas o de física que pertenecen a la formación básica del futuro ingeniero, la idea de función primitiva y la suma de la acumulación de cantidades son fundamentales para entender ciertos fenómenos como las leyes del movimiento de partículas, trabajo y energía, crecimiento poblacional, entre otros (Puga y Miranda, 2021).

Para lograr una buena comprensión de la integral definida los estudiantes de ingeniería deben ser capaces de establecer conexiones entre los múltiples conceptos (sumas de Riemann, límites, derivadas, áreas) y propiedades que forman parte del cálculo integral (Serhan, 2015). Sin embargo, la enseñanza de la integral no suele tener en cuenta la complejidad de estos objetos matemáticos (Contreras, Ordóñez y Wilhelmi, 2010; Robles, Tellechea y Font, 2014) y prioriza la aplicación de técnicas y la manipulación de fórmulas, en lugar de la adquisición de conceptos que son relevantes para la formación del ingeniero (Carvalho y Oliveria, 2018; Viol y Jacques, 2019). A los estudiantes se les enseñan procedimientos para calcular integrales, con un excesivo énfasis en el cálculo de anti-derivadas, ignorando el potencial del significado de la integral como función de acumulación para lograr una comprensión más profunda de este concepto (Bressoud *et al*., 2016). La conceptualización de la integral definida se reduce a la definición de la integral de Cauchy o la de Riemann y las integrales se calculan usando en cierta medida el Teorema Fundamental del Cálculo (Muñoz, 2000).

BY-NC

La aproximación o el mayor enfoque dado a uno u otro significado de la integral definida, influye en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las extensiones de la integral, fundamentales en las carreras técnicas. Resultados de investigaciones como las de Jones y Dorko (2015) ponen de manifiesto la importancia de las concepciones de integrales simples para la comprensión de tipos avanzados de integrales, entre ellas las múltiples. Para estos autores, la comprensión de las integrales múltiples que muestran los estudiantes está fuertemente arraigada con la de las integrales simples. Consideran que "la construcción de la comprensión de las integrales múltiples a partir de las concepciones de la integral simple no es una tarea trivial para los estudiantes" (p.167) y recomiendan articular y conectar las integrales múltiples con el significado de la integral como límite de sumas de Riemann (Jones y Dorko, 2015). Recientemente, en el trabajo de Jones (2020) se examinan las integrales de línea escalares y vectoriales, proporcionando un análisis conceptual de ambos tipos de integrales de línea en términos de cómo las formas teóricas de pensar sobre las integrales definidas resumidas en la literatura de investigación pueden aplicarse a la comprensión específica de las integrales. Como sugiere este autor, las integrales de línea son diferentes de sus integrales definidas homólogas (simples, dobles y triples) ya que pueden tomar como integrando funciones escalares o campos vectoriales. Sin embargo, como las integrales de línea siguen siendo integrales, han de aparecer articuladas en la trayectoria más amplia que va desde las integrales definidas simples hasta otros tipos más avanzados de integrales como las integrales de superficie o la integral de Lebesgue (Jones, 2020).

Así, para planificar y gestionar los procesos de enseñanza y aprendizaje de la integral definida en las carreras de ingeniería es preciso describir un significado global que oriente el desarrollo del currículo y articule significados parciales implicados (Contreras y Ordónez, 2006). En el marco del Enfoque Ontosemiótico (EOS) del conocimiento y la instrucción matemáticos (Godino, Batanero y Font, 2007), se han desarrollado diversas investigaciones (Burgos, Bueno, Godino y Pérez, 2021; Contreras y Ordóñez, 2006; Contreras, Ordóñez y Wilhelmi, 2010; Gordillo y Pino-Fan, 2016; Robles *et al*., 2014; Pino-Fan, Font, Gordillo, Larios, y Breda; 2018, entre otras) que tienen en cuenta la naturaleza y complejidad de los objetos matemáticos que configuran los significados de la integral definida, como factor explicativo de las dificultades en su enseñanza y aprendizaje.

Contreras *et al*., (2010), identifican cuatro configuraciones desde el punto de vista epistémico para la integral definida: geométrica, resultado de un proceso de cambio, inversa de la derivada y aproximación al límite. En la configuración geométrica la integral definida aparece en la determinación del área bajo una curva y el eje de abscisas. Los cálculos de longitudes, áreas y volúmenes asociados hacen referencia a un contexto geométrico estático, ausente de movimiento. La integral como inversa de la derivada, se asocia a los trabajos de Newton y Leibnitz,

 CC BY-NC

con los que el conjunto de funciones integrables es cada vez más extenso. Por último, la configuración epistémica de aproximación al límite aparece directamente relacionada con la formalización iniciada por Cauchy.

Posteriormente, Robles *et al.*, (2014) describen el diseño de una secuencia didáctica de tareas para la enseñanza del Teorema Fundamental del Cálculo que, asumiendo la complejidad y la articulación de los objetos matemáticos asociados (variación, acumulación, derivada, integral, función, límite), promueva mediante un acercamiento intuitivo y la conjetura, el descubrimiento de dicho teorema, así como el papel esencial que desempeña en el estudio del cálculo.

Gordillo y Pino-Fan (2016) presentan una propuesta de reconstrucción del *significado holístico de referencia para la antiderivada, mostrando su relación con* la derivada y la integral. Para ello, los autores describen las configuraciones epistémicas asociadas a las prácticas matemáticas desarrolladas para resolver diferentes situaciones-problemas que contribuyeron al origen histórico y formalización de la antiderivada como objeto matemático. Esto los lleva a identificar y caracterizar cuatro significados parciales para la antiderivada, *desde lo puramente geométrico hasta lo formal (tangentes-cuadraturas, fluxiones-fluentes, sumatorias-diferencias y funciones elementales) que* conforman el significado holístico. Este modelo de referencia se aplica en el trabajo de Pino-Fan *et al.*, (2018) para identificar y caracterizar los significados de la antiderivada que estudiantes de ingeniería, utilizan en sus prácticas matemáticas. Entre los resultados, los autores identifican dos de los tipos de significados parciales de la antiderivada descritos por Gordillo y Pino-Fan (2016): sumatorias – diferencias y fluxiones – fluentes, según las prácticas se desarrollen en un entorno intra-matemático, o en situaciones vinculadas a fenómenos físicos de variación o velocidad, en la actividad matemática de los estudiantes y observan que estos dieron a la antiderivada el significado de proceso inverso de derivación desde un punto de vista más procedimental que conceptual. Es decir, cuando los participantes aplicaron las reglas de integración para obtener la antiderivada de una función (función derivada), muchos de ellos pensaron que iban a obtener la función concreta de la que procedía dicha función derivada, sin entender lo que realmente ocurría con el proceso inverso.

En Burgos *et al.*, (2021) se complementan estos trabajos realizados en el marco del EOS con la intención de precisar los conocimientos institucionales requeridos para comprender los diversos significados del concepto de integral definida. Para avanzar en la discusión entre lo intuitivo y lo riguroso en la enseñanza del cálculo integral, se confronta el análisis ontosemiótico de la presentación informal que hace Starbird (2006) de la integral con el de la construcción formal general del texto de Stewart (2016). Además, se identifican potenciales conflictos semióticos relacionados particularmente con los procesos de generalización que se realizan, con frecuencia de manera implícita, en la definición de la integral.

En este trabajo, continuamos con esta dialéctica entre lo informal y lo formal profundizando en la naturaleza y complejidad de los objetos matemáticos que configuran los significados de la integral definida que se espera que los estudiantes comprendan y usen. En el EOS el significado (pragmático) de un contenido matemático, como puede ser la integral definida, se entiende en términos de los sistemas de prácticas operativas y discursivas relativas a la resolución de tipos de problemas en los que este interviene (Godino *et al.*, 2007). En dichas prácticas se ponen en juego objetos y procesos matemáticos que pueden hacerlo con distinto grado de algebrización, esto es, de generalidad, formalización y ostensión (Godino, Aké, Gonzato y Wilhelmi, 2014; Godino, Neto, Wilhelmi, Aké, Etchegaray y Lasa, 2015). Aplicar el modelo de los niveles de algebrización desarrollado en el EOS (Godino *et al.*, 2014; Godino *et al.*, 2015) a las prácticas matemáticas asociadas a distintos significados de la integral definida, permite reconocer la progresión de la actividad matemática desde los niveles aritméticos y protoalgebraicos hasta los niveles más elevados de razonamiento algebraico.

Así nuestro objetivo es identificar los niveles de algebrización implicados en las prácticas matemáticas características de los distintos significados de la integral definida, desde los más intuitivos a los más formales. Incluimos además las extensiones a las integrales doble y de línea, que son un importante objeto de estudio en los programas de cálculo integral para ingeniería.

Antes de esto, en la sección 2 describimos las nociones del EOS que usamos en este trabajo: las de significado pragmático y configuración de prácticas, objetos y procesos, así como el modelo de niveles de algebrización, que permitirá identificar los grados de generalidad de los objetos del cálculo integral y el papel del álgebra en la caracterización de los significados de la integral definida. Para ello empleamos la metodología de análisis ontosemiótico de las prácticas matemáticas puestas en juego en la resolución de problemas vinculados a los distintos significados de la integral definida: geométrico-intuitivo, como límite de las sumas de Riemann y como función acumulativa, así como de extensiones de la aplicación de la integral de Riemann al caso de integral dobles (como caso particular de las múltiples) y de línea. El resultado de este análisis, desde el punto de vista de los niveles de formalización involucrados, se muestra en la sección 3. El artículo termina con una discusión y conclusiones sobre la contribución de este estudio.

2. Marco teórico y método

El EOS entiende las matemáticas como una actividad de las personas implicadas en la solución de cierta clase de situaciones-problemas, e interpreta el significado institucional y personal de los objetos matemáticos en términos de los sistemas de prácticas operativas y discursivas que se ponen en juego en la solución de

 CC BY-NC

dichas situaciones. El modelo de los niveles de algebrización desarrollado en el EOS (Godino *et al*., 2014, Godino *et al*., 2015) permite modelizar el conocimiento institucional que se pone en juego en el cálculo integral, en tanto describe la actividad matemática bajo la perspectiva de objetos y procesos característicos del álgebra, admitiendo que un mismo problema se puede abordar de diversas maneras, implicando grados de razonamiento algebraico diferentes.

2.1. *Significado pragmático y configuración ontosemiótica*

El EOS asume una concepción de la matemática de tipo antropológico y, en consecuencia, la noción de práctica matemática ocupa un lugar central. Se considera práctica matemática a "toda actuación o expresión (verbal, gráfica, etc.) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución obtenida, validarla o generalizarla a distintos contextos y problemas" (Godino y Batanero, 1994, p. 334). Dado que un objeto matemático, en su versión institucional se concibe como "emergente del sistema de prácticas sociales asociadas a un campo de problemas" (p. 335), el significado de un objeto queda determinado por el "sistema de prácticas institucionales asociadas al campo de problemas de las que emerge el objeto en un momento dado" (p. 338).

La matemática, además de ser una actividad, es también un sistema lógicamente organizado de objetos. Para el EOS, *objeto matemático* es cualquier entidad material o inmaterial que interviene en la práctica matemática, apoyando y regulando su realización. Esta idea general de objeto es útil cuando se complementa con una tipología de objetos matemáticos al tener en cuenta sus diferentes roles en la actividad matemática. Se proponen los siguientes tipos de objetos primarios:

- *Situaciones-problema:* aplicaciones intramatemáticas o extramatemáticas, entendidas como las tareas que inducen la actividad matemática.
- *Lenguajes:* términos y expresiones matemáticas; notaciones, símbolos, representaciones gráficas en sus diversos registros (gestual, oral, escrito).
- *Conceptos:* entidades matemáticas que pueden ser introducidas mediante descripción o definición.
- *Proposiciones:* propiedades o atributos; enunciados sobre conceptos.
- *Procedimientos:* técnicas de cálculo, operaciones y algoritmos.
- *Argumentos:* enunciados requeridos para justificar las proposiciones o explicar los procedimientos.

Los objetos matemáticos que emergen de los sistemas de prácticas matemáticas se relacionan entre sí. Así, las situaciones–problemas son la razón de ser de la actividad matemática; el lenguaje constituye el instrumento de trabajo matemático y representa las demás entidades; los argumentos fundamentan los procedimientos y las proposiciones que relacionan los conceptos matemáticos entre sí. Estos objetos, considerados como primarios, pueden ser contemplados desde diversos puntos de vista duales: ostensivos (materiales, perceptibles) – no ostensivos (abstractos, inmateriales); extensivos (particulares) – intensivos (generales); unitarios (objetos considerados globalmente como un todo) – sistémicos (sistemas formados por componentes estructurados), entre otros (Godino *et al*., 2007; Font, Godino y Gallardo, 2013).

La noción de *configuración ontosemiótica* (de prácticas, objetos y procesos) responde a la necesidad de analizar minuciosamente las entidades que aparecen en la actividad matemática, su naturaleza y como se relacionan entre sí. Las configuraciones pueden ser *epistémicas* (institucionales) —redes de objetos y procesos que intervienen y emergen de las prácticas necesarias desde un punto de vista experto para resolver un tipo de tareas matemáticas— o *cognitivas* (personales)—redes de objetos y procesos matemáticos que ponen en juego los estudiantes para resolver un tipo de tareas matemáticas— (Godino *et al*., 2007).

2.2. *Niveles de algebrización*

Desde el EOS se entiende el razonamiento algebraico como el sistema de prácticas operativas y discursivas puestas en juego en la resolución de tareas en las cuales intervienen objetos y procesos algebraicos: relaciones binarias y sus propiedades; operaciones y sus propiedades sobre elementos de conjuntos diversos; funciones; estructuras y sus propiedades (Godino *et al*., 2014). En el caso de las prácticas algebraicas los procesos de particularización–generalización tienen una importancia especial, dado el papel de la generalización como uno de los rasgos característicos del razonamiento algebraico (Godino *et al*., 2014). La generalización se entiende en el EOS en términos de la identificación de objetos intensivos que intervienen en las prácticas, lo que proporciona un análisis más profundo de dicho proceso y su caracterización en las prácticas consideradas algebraicas. Mediante el proceso inverso de particularización se obtiene un objeto extensivo, esto es, que interviene en la práctica matemática como un ejemplar particular.

En Godino *et al*., (2014) se propone un modelo de razonamiento algebraico para la Educación Primaria basado en la distinción de tres niveles de algebrización. Los criterios para delimitar los niveles están basados en los objetos y procesos matemáticos implicados en la actividad matemática: a) generalización (de la que emergen objetos intensivos en relación dialéctica con los correspondientes extensivos), b) unitarización (reconocimiento explícito de intensivos como entidades unitarias), c) formalización y ostensión (nombramiento mediante diferentes sistemas de representación, en particular, expresiones simbólico–literales), d) transformación (intervención de objetos intensivos en procesos de cálculo analítico y nuevas generalizaciones).

– *Nivel 0.* Se opera con objetos intensivos de primer grado de generalidad, usando lenguajes natural, numérico, icónico, gestual.

 CC BY-NC

- *Nivel 1.* Involucra objetos intensivos de segundo grado de generalidad, propiedades de la estructura algebraica de N y la igualdad como equivalencia.
- *Nivel 2.* Se usan representaciones simbólico-literales para referir a objetos intensivos reconocidos ligados a la información espacial y contextual; en tareas funcionales se reconoce la generalidad, pero no se opera con las variables para obtener formas canónicas de expresión.
- *Nivel 3.* Los símbolos se emplean de forma analítica. Se realizan operaciones con indeterminadas o variables y se formulan de manera simbólica y descontextualizada reglas canónicas de expresión de funciones y patrones.

Dado que los números naturales son también objetos intensivos (entidades generales) que emergen de colecciones de objetos perceptibles y de las acciones que se realizan con ellos, se les atribuye un primer grado de generalidad o intensión. Así, en el nivel 0 de algebrización se opera con objetos intensivos de primer grado de generalidad, usando los lenguajes natural, numérico, icónico y gestual. La asignación de carácter algebraico a una práctica supone la intervención de intensivos de, al menos, un segundo grado de generalización, es decir, clases de intensivos de grado 1.

En Godino *et al.* (2015) se extiende el modelo de algebrización a la actividad matemática propia de niveles educativos superiores. El uso y tratamiento de parámetros permite definir niveles superiores de algebrización, al estar vinculado a la presencia de familias de ecuaciones y funciones, y, por tanto, implicar nuevos niveles de generalidad. El lenguaje empleado en estos niveles es simbólico-literal; los símbolos se usan de forma analítica, sin referir a información contextual.

- *Nivel 4.* Primer encuentro con parámetros y coeficientes variables que implica la función paramétrica, esto es, la función que asigna a cada valor del parámetro una función o ecuación específica. Se opera con coeficientes variables, pero no con parámetros.
- *Nivel 5.* Tratamiento de parámetros. Se realizan cálculos analíticos (sintácticos) en los que intervienen uno o más parámetros, junto con otras variables. Las operaciones con parámetros y el establecimiento de relaciones entre ellos, ponen en juego a los objetos algebraicos del nivel anterior (familia de ecuaciones, familia de funciones).
- *Nivel 6.* Introducción de algunas estructuras algebraicas (como la de espacio vectorial, o grupo) y el estudio del álgebra de funciones.

2.3. *Método*

En Godino (2002) se desarrolla una técnica para el análisis ontosemiótico que facilita la caracterización de los significados institucionales que sirvan de referencia para el diseño del proceso instruccional. En este análisis se comienza con la selección de las situaciones–problemas y distintas maneras de abordar su resolución, en las cuales interviene el objeto bajo estudio de manera crítica. En las prácticas operativas y discursivas que se deben realizar para resolver tales problemas intervienen, además, otros objetos lingüísticos, conceptuales, procedimentales, proposicionales y argumentativos que ponen en juego diferentes grados de generalidad y formalización. Su reconocimiento permite establecer relaciones jerárquicas entre ellos en función de su complejidad e interdependencia.

Optamos por elegir para nuestro análisis el texto de Stewart (2012a, 2012b) ampliamente utilizado a nivel internacional en carreras científico– técnicas. Además, es el texto recomendado en el Plan de Estudios E propuesto por el Ministerio de Educación Superior para diversas carreras de ingeniería (Ministerio de Educación Superior, 2017, 2018). La lección sobre *Integrales* (Stewart, 2012a) comienza con una primera sección en la que se presentan y resuelven problemas sobre áreas y distancias aplicando procesos de cálculo de límites de sumas de Riemann. Esta sección sirve de contexto y fundamento para introducir seguidamente la definición general de integral definida. En la lección sobre *Integrales múltiples* (Stewart, 2012b) el autor extiende la idea de integral definida a integrales dobles y triples de funciones de dos y tres variables. Finalmente dedica la lección de *Calculo Vectorial* a las integrales de línea y de superficie, que conecta con las integrales simples, dobles y triples por medio de "las versiones de dimensiones más altas del teorema fundamental del cálculo: el teorema de Green, el teorema de Stokes y el teorema de la divergencia" (Stewart, 2021b, p.1055). En todo momento existe un fuerte apoyo de representaciones gráficas.

De dichos textos seleccionamos, para los distintos significados de la integral definida reconocidos en la literatura, problemas característicos y significativos del cálculo integral en las carreras de ingeniería[1], donde uno de los autores lleva años impartiendo su docencia. Además de los significados geométrico intuitivo, límite y función acumulativa, consideramos por su importancia en la formación de ingenieros, las extensiones de la integral de Riemann doble y de línea. En cada caso, los problemas se escogieron según su representatividad dentro de las tareas frecuentes en el cálculo de ingeniería, y su potencialidad para mostrar la conexión de la integral definida con otros contextos más cercanos a la realidad profesional del ingeniero (por ejemplo, el estudio de la distancia recorrida por un móvil, la

[1] Aunque se siguió el programa de ingeniería industrial, los problemas son también característicos del cálculo integral estudiado en otras carreras de ingeniería en la Universidad de Camagüey, como la eléctrica, mecánica, civil, informática o agronomía.

 CC BY-NC

estimación de la carga eléctrica o la masa de un alambre) y que permiten una aproximación intuitiva de la misma.

Una vez seleccionados los problemas, estos fueron analizados por el equipo investigador. Las prácticas operativas y discursivas que se proponen como solución de las situaciones-problema, son prácticas expertas (desarrolladas y revisadas por los investigadores) para poner de manifiesto las diversas configuraciones de objetos matemáticos, asociados a los distintos niveles de algebrización.

3. Análisis y resultados

El concepto de integral se ha generado y evolucionado, a lo largo de la historia de las matemáticas, partiendo de sus aplicaciones a la solución de problemas, entre los que destacan los relacionados con la física y la geometría (integración geométrica). Tras un período donde el énfasis estaba en el cálculo de primitivas, la integración estuvo enmarcada por su fundamentación con la elaboración de definiciones precisas basadas en el paso al límite e independientes de la geometría y, finalmente llegó su generalización apoyada en la teoría de la medida, progresando hacia el elevado grado de abstracción existente en la actualidad.

El análisis de los significados de la integral definida que mostramos a continuación se basa en los niveles de algebrización de las prácticas matemáticas que se ponen en juego en la solución de los tipos de problemas que se abordan en el cálculo integral.

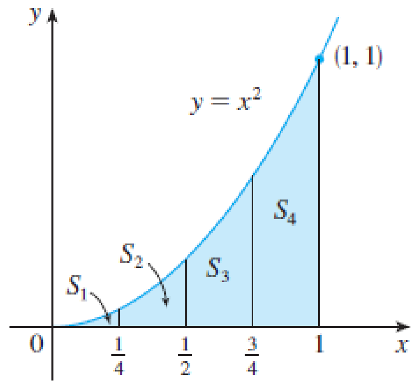
3.1. *Significado geométrico intuitivo*

El punto de vista sobre la integral que se estudia en las carreras universitarias de ingeniería es el de Riemann, en la que el área ya no es un objeto de naturaleza geométrica, sino el resultado de un cálculo según un procedimiento dado. El estudiante debe así relacionar el área con el proceso que permite sumar infinitas cantidades *infinitamente pequeñas*, sin que se le haya atribuido ningún significado al concepto de cantidad infinitamente pequeña.

Un razonamiento de tipo intuitivo, basado en la aproximación del área de una región plana a partir del área de rectángulos, supone un primer acercamiento necesario a la integral definida. El significado geométrico-intuitivo de la integral se pone de manifiesto en las prácticas operativas y discursivas que se realizan para resolver la situación-problema de la Figura 1:

Problema 1.

Utilice rectángulos para estimar el área bajo la parábola $y = x^2$ desde 0 hasta 1 (región S en la imagen).



Solución. Para aproximar el área de S, $A(S)$, se considera S dividida en cuatro regiones, S_1, S_2, S_3 y S_4, de forma que cada una de ellas se puede aproximar por el área de rectángulos, tomando como base las divisiones del intervalo [0,1] y como altura los valores de la función $f(x) = x^2$ en los extremos inferiores de los intervalos $[0,\frac{1}{4}]$, $[\frac{1}{4},\frac{1}{2}]$, $[\frac{1}{2},\frac{3}{4}]$ y $[\frac{3}{4},1]$. Así, una aproximación, por defecto, al área de S vendría dada por

$$\tfrac{1}{4}.0^2 + \tfrac{1}{4}.(\tfrac{1}{4})^2 + \tfrac{1}{4}.(\tfrac{1}{2})^2 + \tfrac{1}{4}.(\tfrac{3}{4})^2 = \tfrac{7}{32} = 0{,}21875$$

Si en lugar de considerar como altura de los rectángulos el valor de la función en los extremos inferiores consideramos los extremos superiores, obtendríamos una aproximación por exceso del área de S:

$$\tfrac{1}{4}.(\tfrac{1}{4})^2 + \tfrac{1}{4}.(\tfrac{1}{2})^2 + \tfrac{1}{4}.(\tfrac{3}{4})^2 + \tfrac{1}{4}.1^2 = \tfrac{15}{32} = 0{,}46875$$

Así,

$$0{,}21875 \leq A(S) \leq 0{,}46875.$$

Figura 1. Significado geométrico intuitivo (Stewart, 2012a, p. 360)

En una solución como la anterior, intervienen los siguientes objetos:

Conceptos: función, región, rectángulo, cantidades de magnitud, área.

Procedimientos: descomposición de la región, determinación de áreas de rectángulos, aproximación de medidas.

Proposiciones:

P1: el área de la región S bajo la curva es la suma de las áreas de las subregiones S_1, S_2, S_3 y S_4,

 BY-NC

P2: el área de un rectángulo es el producto de la longitud de su base por la longitud de su altura.

P3: $0{,}21875 \leq A(S) \leq 0{,}46875$.

Argumentos: Si todos los rectángulos quedan debajo de la gráfica de la función obtenemos una aproximación por defecto y si la curva queda por debajo de la altura de los rectángulos, la aproximación será por exceso.

La actividad matemática desarrollada en la resolución del problema pone en juego principalmente objetos aritméticos y geométricos particulares. Sin embargo, en el enunciado interviene la función parabólica $y = x^2$; el área bajo la curva es un valor desconocido expresada como $A(S)$, lo que supone un carácter algebraico incipiente, en tanto la relación funcional general se reconoce en un lenguaje simbólico. Dado que no se opera con esta incógnita, la actividad matemática se puede calificar como protoalgebraica de nivel 2.

Este planteamiento intuitivo mostrado en la primera situación (figura 1) lleva, por un lado, a la necesidad de contar con dos medidas, una por defecto, de manera que el aumento de las subdivisiones en el intervalo, es decir, del número de rectángulos empleados en la partición, permitan acotar con un error cada vez menor el valor del área desconocido.

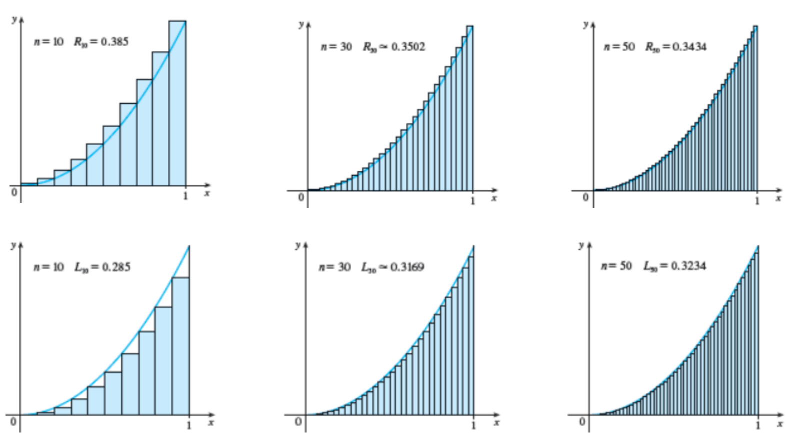


Figura 2. Estimaciones por exceso y defecto del área bajo la curva incrementando el número de subintervalos (Stewart, 2012a, p.363)

Por otro lado, la *exhaución* de la sección parabólica por medio de rectángulos sugiere el uso de un polígono de una gran cantidad de lados que cubra el área bajo la curva que se desea conocer, es decir, podríamos obtener mejores estimaciones al área al incrementar el número n de franjas (figura 2). Esta primera aproximación, se acerca a la definición de integral de una función continua en un intervalo como *el valor al que tienden* las sumas de áreas de rectángulos bajo la curva cuando las "particiones son cada vez más finas".

BY-NC

3.2. *La integral definida como límite*

Cauchy (1789-1857) define la integral de una función f: $[a, b] \rightarrow R$ continua en $[a, b]$ como límite de las sumas,

$$s(f, P) = \sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1})(x_k - x_{k-1})$$

Estas sumas están asociadas a cada partición $P = \{a = x_0, x_1, ..., x_{n-1}, x_n = b\}$ del intervalo $[a, b]$ cuando $||P|| = sup\{|x_k - x_{k-1}|: 1 \leq k \leq n\}$ tiende a 0. Usando la continuidad (uniforme) de f en $[a, b]$, Cauchy demuestra la existencia de este límite.

Riemann (1826-1866) parte de la misma definición de Cauchy, pero considerando la totalidad de todas las funciones integrables (aquellas para las que existe el límite de las sumas asociadas a particiones) y después establece condiciones necesarias y suficientes de integrabilidad.

Dada f: $[a, b] \rightarrow R$ función acotada, para toda partición $P = \{a = x_0, x_1, ..., x_{n-1}, x_n = b\}$ del intervalo $[a, b]$, existen $M_k = sup\, f([x_{k-1}, x_k])$ y $m_k = inf\, f([x_{k-1}, x_k])$. Los números

$$I(f, P) = \sum_{k=1}^{n} m_k (x_k - x_{k-1}) \ y \ S(f, P) = \sum_{k=1}^{n} M_k (x_k - x_{k-1})$$

se llaman, respectivamente, *suma inferior* y *suma superior* de la función f para la partición P. El conjunto de sumas inferiores $I(f, P)$ para todas las particiones posibles de $[a, b]$, $P \in P([a, b])$, está acotado superiormente. De igual manera, el conjunto de sumas superiores $S(f, P)$ para todas las particiones posibles P de $[a, b]$, está acotado inferiormente. Una función f es Riemann – integrable en $[a, b]$ si y sólo si, $sup\, \{I(f, P): P \in P([a, b])\} = inf\, \{S(f, P): P \in P([a, b])\}$.

Dicho número real se designa como $\int_a^b f(x)dx$ y se llama integral (de Rieman) de f en $[a, b]$. Evidentemente, toda función continua y toda función monótona en un intervalo $[a, b]$ es integrable en el sentido Riemann.

Si f es positiva, la integral definida $\int_a^b f(x)dx$ puede interpretarse como el área bajo la curva desde a hasta b. Si f toma valores tanto positivos como negativos entonces $\int_a^b f(x)dx$ puede interpretarse como área neta (Stewart, 2012a, p. 373).

 CC BY-NC

En estas prácticas discursivas que conducen a la definición general de la integral de Riemann intervienen objetos y procesos característicos de un nivel 4 de algebrización (Godino *et al.*, 2015). En efecto, aparecen conceptos y propiedades propios de la teoría de conjuntos (partición, supremo, ínfimo; existencia de supremo y de ínfimo en un conjunto acotado superior o inferiormente, respectivamente) y de funciones (dominio, acotación, signo, monotonía; integrabilidad de una función continua y monótona). Estos se formalizan y hacen ostensivos mediante un registro simbólico. La integral se define sobre un intensivo: la clase de funciones acotadas en un intervalo arbitrario, dado en términos de los parámetros *a* y *b*, aunque estos no intervienen en procesos de cálculo analítico.

Para facilitar la comprensión de esta definición general es necesario planificar en la enseñanza un significado más intuitivo, como el que se pone en juego en el problema 2. Se trata de ejemplificar las sumas de Riemann y el paso al límite para determinar el valor al que *tiende* la suma de áreas de rectángulos bajo la gráfica de $f(x) = x^2$ en el intervalo [0, 1] (Figura 3).

Problema 2. *¿Cuál es el límite de las sumas de las áreas de los rectángulos de aproximación superiores para la región S? (Figura 2)*

Solución. Sea R_n la suma de las áreas de *n* rectángulos que aproximan el área S por exceso (figura 2). Cada rectángulo tiene un ancho de 1/n, y las alturas son los valores de la función $f(x) = x^2$ en los puntos 1/n, 2/n, 3/n, ..., n/n; es decir, las alturas son $(1/n)^2$, $(2/n)^2$, $(3/n)^2$, …, $(n/n)^2$. De este modo,

$$R_n = \frac{1}{n}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{1}{n}\cdot\left(\frac{2}{n}\right)^2 + \frac{1}{n}\cdot\left(\frac{3}{n}\right)^2 + \dots + \frac{1}{n}\cdot\left(\frac{n}{n}\right)^2 = \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n^2}\left(1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2\right)$$
$$= \frac{1}{n^3}\cdot\left(1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2\right)$$

Como la suma de los cuadrados de los *n* primeros enteros positivos es,

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

sustituyendo esta expresión en R_n, obtenemos que:

$$R_n = \frac{1}{n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}.$$

El límite de R_n cuando $n\to\infty$ será finalmente,

$$R_n = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

Figura 3. Aproximación a la integral como límite de sumas de las áreas los rectángulos (adaptado de Stewart, 2012a, p.362)

En las prácticas que componen una solución del problema 2 como la anterior, intervienen los siguientes objetos:

Conceptos: Magnitud área, función parabólica, partición, sumas de cuadrados de números naturales, límite de una sucesión.

Lenguajes: Natural y alfanumérico.

Procedimientos: Cálculo del límite de una sucesión de números reales.

Proposiciones:

P1: Suma de los cuadrados de los primeros n números naturales.

P2: El límite de las sumas de las áreas de los rectángulos de aproximación superiores para la región S es $1/3$.

Argumentos: Deductivo, aplicando las propiedades aritméticas que intervienen en el cálculo del límite.

La actividad matemática desarrollada supone un nivel consolidado de algebrización (nivel 3): se generan objetos intensivos representados de manera simbólica literal y se opera de manera sintáctica en las expresiones conservando la equivalencia (se aplican reglas de cálculo de límites en la variable *n*).

El área bajo una curva no es únicamente un problema de interés geométrico, sino que responde a necesidades científicas o económicas, que también pueden ayudar para introducir distintos contextos de uso de la integral definida de forma intuitiva.

Problema 3. *Estima la distancia recorrida por un objeto si la gráfica de la velocidad/tiempo es la dada en la siguiente gráfica.*

Solución. La distancia recorrida por un móvil en un intervalo de tiempo a velocidad constante es el producto de la velocidad por el tiempo. Por tanto, el área de cada cuadrado en la trama nos da una medida del espacio que recorrería un movil en cada segundo de duración con velocidad constantemente 1 m/s. Podemos estimar la distancia contando los cuadrados que quedan por debajo de la gráfica, es decir, aproximadamente, 30m.

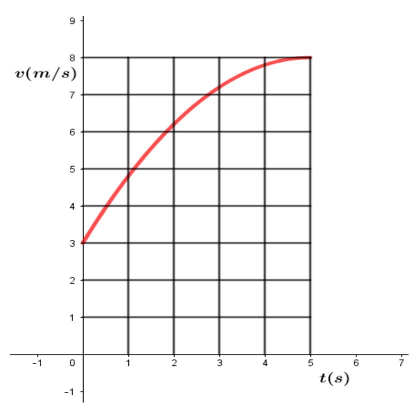


Figura 4. Estimación de la distancia recorrida por un móvil. (Elaboración propia. Inspirado en Stewart, 2012a, p. 369)

La solución al problema planteado en la figura 4, involucra una actividad puramente aritmética (nivel 0 de algebrización), que involucra los objetos:

 BY-NC

Conceptos: Área, velocidad constante, tiempo, distancia recorrida, tiempo.

Lenguajes: Natural y alfanumérico.

Procedimientos: Estimar inferiormente contando cuadrados en la trama bajo la función.

Proposiciones:

P1: La distancia recorrida por un móvil en un intervalo de tiempo a velocidad constante es el producto de la velocidad por el tiempo.

P2: El área de cada cuadrado en la trama mide el espacio que recorrería un movil en cada segundo con velocidad constante1 m/s.

Argumentos: Basados en la interpretación intuitiva de la distancia recorrida en cada unidad temporal como área de los cuadrados bajo la función (producto de las medidas de las longitudes de los lados: tiempo y velocidad constante).

Permite conectar el cálculo de la distancia con el área bajo la curva velocidad en función del tiempo[2]. La búsqueda del cálculo exacto de la distancia recorrida por un objeto en un intervalo determinado de tiempo conocida su velocidad en función del tiempo (figura 5), pone en juego el cálculo de límite de sumas de Riemann, lo que supone un grado mayor de formalización.

En las prácticas operativas y discursivas que se ponen en juego en la solución del problema 4, intervienen los siguientes objetos:

Conceptos: área, distancia, tiempo y velocidad.

Procedimientos: reconocimiento de las sumas de Riemann, paso al límite.

Proposiciones:

P1. La distancia recorrida durante el intervalo $[a, b]$ es aproximadamente

$$\sum_{i=1}^{n} f(t_{i-1})\Delta t$$

P2. La distancia recorrida es igual al área bajo la gráfica de la función velocidad.

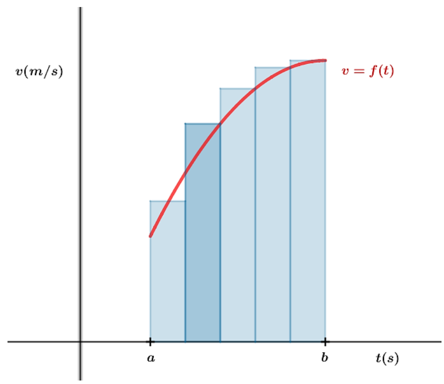
Argumentos: Basados en la relación entre espacio, velocidad y tiempo y las propiedades de los límites.

[2] Similarmente, el área bajo la curva potencia funcionando en cada instante proporciona la energía consumida, o el área bajo la gráfica de las ganancias en función del tiempo representa las ganancias acumuladas.

Se requieren de un lenguaje simbólico y de la intervención de variables (en la definición de la función velocidad) y parámetros (para denotar los extremos del hipotético intervalo de tiempo), pero no se opera con estos últimos, por lo que la actividad matemática desarrollada en la solución supone un nivel 4 de algebrización.

Problema 4. *¿Cómo hallar la distancia recorrida por un objeto durante cierto período de tiempo, si se conoce su velocidad en todo momento?*

Solución.
Supongamos que un objeto se mueve con velocidad $v = f(t)$ y $f(t) \geq 0$ (de modo que el objeto siempre se mueve en la dirección positiva). Para un intervalo concreto de tiempo, $[a, b]$, tomamos lecturas de la velocidad en los instantes $t_0 (= a)$, t_1, t_2, ..., $t_n (= b)$. Si estos instantes están equiespaciados, entonces el tiempo entre lecturas consecutivas es



$$\Delta t = \frac{b-a}{n}.$$

Tomando como valor estimado de la velocidad en cada subintervalo, el correspondiente al extremo inferior, durante el primer intervalo de tiempo, la distancia recorrida es aproximadamente $f(t_0)\Delta t$. De manera análoga, la distancia recorrida durante el segundo intervalo de tiempo se puede aproximar por $f(t_1)\Delta t$ y la distancia total recorrida durante el intervalo $[a, b]$ es aproximadamente

$$f(t_0)\Delta t + f(t_1)\Delta t + \ldots + f(t_{n-1})\Delta t = \sum_{i=1}^{n} f(t_{i-1})\Delta t .$$

Cuanto mayor es la frecuencia con que se mide la velocidad (es decir, cuanto más fina sea la partición del intervalo de tiempo), más exactas son las estimaciones, de manera que la distancia d recorrida en un intervalo de tiempo $[a, b]$ se puede obtener como el límite de esas expresiones

$$d = \sum_{i=1}^{n} f(t_{i-1})\Delta t = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\frac{(b-a)}{n} .$$

Así, la distancia recorrida es igual al área bajo la gráfica de la función velocidad $v = f(t)$

Figura 5. Distancia recorrida como límite de sumas tipo Riemann (Stewart, 2012a, p. 369)

 CC BY-NC

3.3. *La integral como función acumulativa*

Este tercer significado proviene de la relación entre derivada e integral y su conexión mediante el Teorema Fundamental del Cálculo (TFC), que tuvo sus orígenes en los trabajos de Newton y Leibnitz, donde la integral definida, entendida como función acumulativa, básicamente es la suma de un número grande de muchos términos pequeños (Robles *et al*., 2014).

Para una función integrable f: $[a, b] \rightarrow R$ podemos definir una nueva función F: $[a, b] \rightarrow R$, dada por $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, para todo $x \in [a, b]$. El TFC, permite recuperar la función f a partir de su función área, F, relacionando el concepto de área y el de tangente a una curva. Dicho teorema establece que la función F es continua en $[a, b]$ y que en todo punto $c \in [a, b]$ en el que f sea continua, se cumple que F es derivable con $F(c) = f(c)$. En particular, si f es continua en $[a, b]$ entonces F es derivable en $[a, b]$ y $F(x) = f(x)$, para todo $x \in [a, b]$. En esta primera parte del TFC la integral definida pasa a tener un nuevo significado; ahora no es un valor numérico específico de una cantidad de magnitud, sino que es una función, que puede participar en nuevas prácticas, procesos o transformaciones de manera sintáctica, dando lugar a nuevos objetos intensivos. Dada la generalidad del razonamiento, que se aplica a cualquier función continua $f(x)$ y el cálculo analítico con variables y parámetros, la actividad matemática implicada en esta demostración supone un nivel 5 de algebrización.

En la segunda parte del TFC, también conocida como Regla de Barrow, la integral definida vuelve a tomar el significado de un número específico, dependiente de los extremos de integración $[a, b]$. Cualquier función G: $[a, b] \rightarrow R$, continua en $[a, b]$ y derivable en $]a, b[$ tal que $G(x) = f(x)$ para todo $x \in [a, b]$, se llama primitiva de f en $[a, b]$. El TFC, asegura por tanto que la función es una primitiva de f. La Regla de Barrow, establece que para toda función integrable f: $[a, b] \rightarrow R$ y cualquier primitiva G de f,

$$\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a).$$

La aplicación de la Regla de Barrow y del cálculo de derivadas para obtener el área bajo una función (figura 6), involucra una configuración de objetos característica de este nuevo significado.

Problema 5. *Determine el área bajo la parábola* $y = x^2$ *desde* 0 *hasta* 1.

Solución. La función $G(x) = \frac{x^3}{3}$ es una primitiva de $f(x) = x^2$, dado que $G(x) = f(x)$, para todo $x \in]0, 1[$ Por la Regla de Barrow, $\int_0^1 x^2\, dx = G(1) - G(0) = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3}$.

Figura 6. Aplicación de la Regla de Barrow en el cálculo de áreas (Stewart, 2012a, p. 392)

En la solución propuesta en la figura 6, intervienen los siguientes objetos matemáticos:

Conceptos: función, derivada, primitiva, integral definida.

Procedimientos: cálculo analítico con funciones, primitivas y derivadas.

Proposiciones: La función $G(x) = \frac{x^3}{3}$ es una primitiva de $f(x) = x^2$; $\int_0^1 x^2\, dx = \frac{1}{3}$.

Argumentos: basados en el TFC (Regla de Barrow) y en las propiedades del cálculo de derivadas.

La actividad matemática realizada para resolver de este modo (figura 6) el problema supone un nivel 3 de algebrización, en tanto es característico de este nivel la aplicación de la noción de función y de las técnicas de resolución basadas en sus propiedades. En efecto, para determinar $\int_0^1 x^2\, dx$, es necesario conocer una primitiva de $f(x) = x^2$, por ejemplo, $G(x) = \frac{x^3}{3}$. Esto requiere un procedimiento de cálculo inverso de derivadas, que precisa de un conocimiento previo de reglas de cálculo de derivación, sus propiedades básicas, así como disponer de un *conjunto básico de primitivas inmediatas*. El cálculo de la integral por medio de la evaluación de esta primitiva se argumenta en base a la segunda parte del TFC (regla de Barrow).

Starbird (2006, p. 18-21) ofrece una presentación intuitiva de la integral definida, mediante la cual llega finalmente a justificar las sumas de Riemann para el caso de calcular la distancia recorrida por un móvil con una velocidad variable. El autor comienza considerando el caso en que el coche se mueve a velocidad constante y después a velocidad constante a trozos. A continuación, contempla el caso en que el coche se mueve con velocidad variable (en cada tiempo t a la velocidad $2t$ millas por minutos), mostrando que la distancia exacta recorrida no se puede encontrar con una única división del intervalo de tiempo, sino que

 CC BY-NC

"se obtiene mirando las *infinitas aproximaciones* progresivamente mejoradas". "Este proceso infinito es la segunda idea fundamental del cálculo - la integral. Si conocemos la velocidad de un coche en cada momento en un intervalo de tiempo, la integral nos dice la distancia recorrida durante ese intervalo" (p. 20). Finalmente considera el caso en que el espacio es función del tiempo ($p(t) = t^2$) y la velocidad variable $v(t) = 2t$. El proceso integral implica dividir el intervalo de tiempo en pequeños incrementos, ver qué distancia recorrería el coche si hubiera ido a velocidad constante durante cada intervalo pequeño de tiempo, de manera que "haciendo subdivisiones cada vez más pequeñas y tomando límites, llegamos al valor de la integral" (p.21).

3.4. *Extensiones de la integral de Riemann*

En esta sección presentamos dos extensiones de la integral definida de Riemann fundamentales en la formación de un ingeniero. La ampliación de funciones reales de variable real a funciones reales de variable vectorial origina las integrales múltiples (dobles y triples). Por otro lado, cuando el intervalo de integración $[a, b]$ se reemplaza por una curva en el espacio real n-dimensional R^n ($n \geq 2$) la extensión de la noción de integral definida origina las integrales de línea de un campo escalar (o de un campo vectorial) definido y acotado sobre esa curva (camino de integración). De forma similar, la consideración de superficies sobre las que integrar campos escalares (o vectoriales) da lugar a la integral de superficie.

3.4.1. *La integral doble como caso particular de las integrales múltiples*

Un razonamiento de tipo geométrico, similar al desarrollado para aproximar el área de una región plana a partir del área de rectángulos, supone un primer acercamiento necesario a la integral doble, a través de la aproximación del volumen de un sólido. Así, para una función f de dos variables dada en un rectángulo f: $[a, b]\times[c, d]\to R$, positiva, la gráfica de f determina una superficie en el espacio $z = f(x, y)$. Para determinar el volumen del sólido Ω determinado bajo la gráfica de f, $\Omega = \{(x, y, z)\in R^3 : a\leq x\leq b;\ c\leq y\leq d;\ 0\leq z\leq f(x, y)\}$ es posible aproximar el volumen de S mediante sumas de volúmenes de prismas, cuyas bases vengan dadas por subdivisiones del rectángulo $[a, b]\times[c, d]$ en subrectángulos y sus alturas estén determinadas por los valores de la gráfica de f en dichos subrectángulos.

Para una función f continua de dos variables definida en un rectángulo f: $[a, b]\times[c, d]\to R$, sendas particiones $P = \{a = x_0, x_1, ..., x_{n-1}, x_n = b\}$ del intervalo $[a, b]$ y $Q = \{c = y_0, y_1, ..., y_{m-1}, y_m = d\}$ del intervalo $[c, d]$, determinan una partición del rectángulo $[a, b]\times[c, d]$ en subrectángulos, $[x_{i-1}, x_i]\times[y_{j-1}, y_j]$, donde $0\leq i\leq n$, $0\leq j\leq m$. Escogiendo puntos $(s_i, t_j)\in[x_{i-1}, x_i]\times[y_{j-1}, y_j]$, se pueden definir las sumas de Riemann de f para la partición $P\times Q$ de $[a, b]\times[c, d]$,

$$\sum_{0\leq i\leq n,\ 0\leq j\leq m} f\left(s_i, t_j\right)\cdot\left(x_i - x_{i-1}\right)\cdot\left(y_j - y_{j-1}\right).$$

Cuando la mayor de las longitudes de los intervalos de las particiones P y Q (esto es, su norma) tiende a 0, las sumas de Riemman, se aproximan tanto como se quiera a un número real, que por definición es la integral de f en el rectángulo $R = [a, b]\times[c, d]$, $\iint_R f(x, y)d(x, y)$. De aquí, se observa que si $f(x, y)\geq 0$ el volumen del sólido Ω determinado bajo la gráfica de f, viene dado por $V(\Omega) = \iint_R f(x, y)d(x, y)$.

De manera similar a como se ha definido la integral doble, se puede establecer la definición de integral (de Riemann) para campos escalares de tres variables, consideradas inicialmente en un ortoedro f: $[a, b]\times[c, d]\times[u, v]\rightarrow R$, como límite de sumas de Riemann asociadas a particiones cuyas normas tienden a 0, $\iiint_R f(x, y, z)d(x, y, z)$. Las definiciones de la integral doble y triple se pueden extender de manera natural a dominios acotados en R^2 y R^3, respectivamente, si bien para el trabajo que realizan los estudiantes de carreras técnicas suele ser suficiente con considerar rectángulos y ortoedros como dominios de integración.

Una de las aplicaciones más frecuentes de la integral doble en el cálculo integral para ingenieros es el cálculo de la masa (o de la carga eléctrica) de láminas con densidad (de carga) variable. Así, si una lámina ocupa una región D del plano y su densidad (unidad de masa por unidad de área) en un punto (x, y) de D está dada por una función continua $\rho(x, y)$ en D, podemos considerar $\rho(x, y)$ definida en un rectángulo $R = [a, b]\times[c, d]$ que contenga a D, de forma que $\rho(x, y) = 0$ en $R\backslash D$. Para cada partición $P = \{a = x_0, x_1, ..., x_{n-1}, x_n = b\}$ de $[a, b]$ y $Q = \{c = y_0, y_1, ..., y_{m-1}, y_m = d\}$ de $[c, d]$, una estimación para la masa de la lámina vendría dada por

$$\sum_{0\leq i\leq n,\ 0\leq j\leq m} \rho(s_i, t_j)\cdot(x_i - x_{i-1})\cdot(y_j - y_{j-1})$$

Incrementando el número de subrectángulos, se obtiene la masa total m de la lámina como el valor límite de las aproximaciones, es decir, $m = \iint_D \rho(x, y)d(x, y)$.

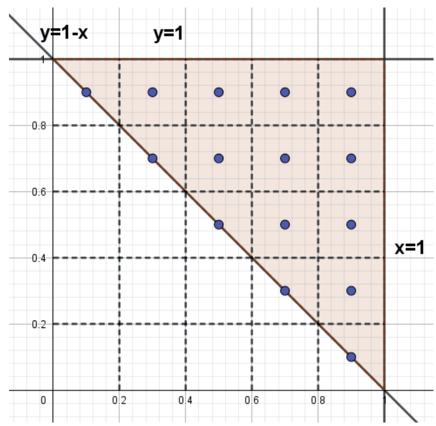
De manera similar, si se distribuye una carga eléctrica sobre una región D y la densidad de carga (en unidades de carga por unidad de área) está dada por $\sigma(x, y)$ en un punto (x, y) en D, entonces la carga total Q está dada por $Q = \iint_D \sigma(x, y)d(x, y)$.

 CC BY-NC

La actividad matemática que se pone en juego en una presentación general de los conceptos de integral doble y triple supone un grado de abstracción que puede ser mayor del que los estudiantes de carreras técnicas puedan lograr. En la figura 7 incluimos el enunciado y solución de un problema que permite un acercamiento informal al cálculo de la carga eléctrica. Puede ser un primer encuentro con la integral doble que ayude al estudiante a comprender que las aproximaciones son tanto mejores cuanto más pequeños sean los rectángulos en que se divida la región y conectar con las sumas de Riemann que estudió previamente con las integrales simples.

Problema 6. *La carga eléctrica está distribuida sobre la región triangular D limitada por las rectas $y = 1$, $x = 1$ y $y = 1-x$ de modo que la densidad de carga en (x, y) es $\sigma(x, y) = xy$, medida en coulombs por metro cuadrado (C/m^2). Estime la carga total en el triángulo.*

Solución. La región D se divide como aparece en la figura adjunta. Para aproximar la carga total sobre la región D, con función de densidad $\sigma(x, y) = xy$, la consideramos dividida en la trama de cuadrados, todos ellos de área, $0.4m^2$ y evaluamos la función de densidad en los puntos dados por los medios de las particiones,



$$Q \approx \sigma(0.1,0.9)\cdot 0.4+\sigma(0.3,0.9)\cdot 0.4+\sigma(0.5,0.9)\cdot 0.4+\sigma(0.7,0.9)\cdot 0.4+.....+\sigma(0.9,0.1)\cdot 0.4=0.222$$

Figura 7. Estimación de la carga eléctrica (Adaptado de Stewart, 2012b, p.1004)

La solución al problema 6 supone un primer acercamiento intuitivo a la integral doble, como límite de sumas de Riemann donde la función involucrada tiene dos variables, en este caso la densidad de carga en cada punto de la región. Intervienen los siguientes objetos matemáticos:

Conceptos: función, región, área, densidad de carga, carga total

Procedimientos: descomposición de la región, determinación de áreas de cuadrados, evaluación de la función densidad de carga, cálculos aritméticos, representación de rectas en el plano cartesiano.

Proposiciones:

P1: la carga total de D se puede aproximar como la suma de las cargas en las regiones en las que se divide D.

P2: la carga en cuadrado se aproxima por el producto de la densidad de carga en el centro del cuadrado por el área del cuadrado

P3: $Q \approx 0.222\ C/m^2$.

Argumentos: Se conviene una división de la región y se acepta aproximar la carga asumiendo que fuera constante en cada subregión de D.

La actividad matemática desarrollada corresponde a un nivel 3 de algebrización, pues interviene una función de dos variables, expresada de manera simbólica (no depende de parámetros), que debe ser evaluada en determinados puntos escogidos en la partición del dominio D. Este dominio aparece representado por medio del registro gráfico.

Si un sólido Ω es tal que los planos π_x paralelos al plano YZ, cortan a Ω en secciones, Ω(x) cuya área es una función continua de x, el volumen del sólido Ω se puede aproximar por sumas de las áreas de sus secciones por planos paralelos a uno dado.

Para la región $\Omega = \{(x, y, z)\in R^3: a\le x\le b;\ c\le y\le d;\ 0\le z\le f(x, y)\}$, si $P = \{a = x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n = b\}$ es una partición del intervalo $[a, b]$, la sección de comprendida entre los planos perpendiculares al eje OX por los puntos $(x_{k-1}, 0{,}0)$ y $(x_k, 0{,}0)$ se puede aproximar por un cilindro de altura $x_k - x_{k-1}$ y base $\Omega(x_k)$, cuyo volumen es $A(\Omega(x_k))(x_k - x_{k-1})$. La suma de los volúmenes de estos cilindros

$$\sum_{k=1}^{n} A(\Omega(x_k))(x_k - x_{k-1})$$

es una aproximación del volumen del sólido, que coincide con la suma de Riemann de la función f: $[a, b]\to R$, $f(x) = A(\Omega(x))$, continua en $[a, b]$. Así, el volumen de Ω se obtiene como

$$V(\Omega) = \int_a^b f(x)dx = \int_a^b A(\Omega(x))dx.$$

El cálculo de volúmenes a través de secciones planas es un caso particular del Teorema de Fubini. Sin embargo, puede ser útil presentarlo antes de introducir la definición formal de integral doble, sus técnicas y propiedades fundamentales (figura 8).

Problema 7. *¿Cómo podemos determinar el volumen de un elipsoide?*

Solución. Para un valor $\bar{x}$ el plano $\pi_{\bar{x}}$ cortan al elipsoide $\Omega\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ en la elipse $\Omega(\bar{x})$: $\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{\bar{x}^2}{a^2}$.

Teniendo en cuenta la fórmula del área de la elipse,

$$A(\Omega(x)) = \pi bc\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right);\ V(\Omega) = \int_{-a}^{a} A(\Omega(x))dx = \pi bc\int_{-a}^{a}\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)dx = \pi bc\left[x - \frac{x^3}{3a^2}\right]_{-a}^{a} = \frac{4}{3}\pi abc\ .$$

Figura 8. Cálculo del volumen de un elipsoide (elaboración propia)

 BY-NC

En la determinación del volumen de un elipsoide genérico incluida en la figura 8, intervienen objetos de una elevada complejidad semiótica: familias de ecuaciones descritas por medio de parámetros (elipsoides y elipses obtenidas como cortes con los planos). Además, se opera con variables y parámetros (fórmula del área de las elipses obtenidas al seccionar el elipsoide y determinación del volumen como integral de las funciones área) por lo que el nivel de algebrización en la solución descrita es 5.

El teorema de Fubini permite calcular una integral doble haciendo dos integrales simples. Así establece que para una función f: $R \to R$ continua en un rectángulo $R = [a, b] \times [c, d]$,

$$\iint_R f(x,y)d(x,y) = \int_a^b \int_c^d f(x,y)dydx = \int_c^d \int_a^b f(x,y)dxdy.$$

Dicho teorema permitirá determinar de forma exacta la carga eléctrica Q distribuida sobre la región triangular D del problema 6:

$$Q = \iint_D \sigma(x,y)d(x,y) = \int_0^1 \int_{1-x}^1 xydydx = \int_0^1 x\left[\frac{y^2}{2}\right]_{y=1-x}^{y=1} dx = \int_0^1 \frac{x}{2}(1^2 - (1-x)^2)dx = \int_0^1 \frac{x}{2}\left[1^2 - (1-x)^2\right]dx = \frac{1}{2}\int_0^1 \left(2x^2 - x^3\right)$$

En este caso, una vez establecida que la carga total es la integral doble sobre el recinto D y que, en base a la continuidad de la función de carga eléctrica, es posible determinar ésta como integral iterada, los procedimientos involucrados requieren determinar los límites de integración de las integrales, siendo uno de ellos función de la variable x y el cálculo de integrales definidas. Es necesario un proceso de generalización que permita obtener integrales definidas cuyos límites dependen de una variable, así la integral definida pasa a ser una nueva función. Esto supone un mayor nivel de algebrización (nivel 5) que el desarrollado en la solución aproximada incluida en la figura 7.

3.4.2. *Integral de línea*

Las integrales de línea surgieron a principios del siglo XIX para resolver problemas relacionados con la energía potencial, el flujo de calor, el cambio en la entropía, la circulación de un fluido y otras cuestiones que involucran el comportamiento de un campo escalar o vectorial a lo largo de una curva. En los programas y manuales de estudio del cálculo se pretende que los estudiantes lleguen a comprender la integral de línea en su mayor grado de generalidad, para lo cual se debe poner en juego un lenguaje altamente algebrizado. Como se muestra a continuación la curva sobre la que se integra viene expresada por sus ecuaciones paramétricas por lo que se identifica un nivel de algebrización de la actividad matemática 5, acorde al modelo de Godino *et al.* (2015).

Dada una curva γ: $[a, b]\to R^n$ con derivada continua y f: $A\to R$ un campo escalar continuo definido en un subconjunto A que contiene a la imagen de γ, la integral de línea de f sobre la curva viene dada por la integral,

$$\int_\gamma f = \int_a^b f(\gamma(t))\left\|\gamma'(t)\right\|dt.$$

En particular, si $n = 2$ y $\gamma(t) = (x(t), y(x))$ la integral anterior, se expresa como

$$\int_\gamma f = \int_a^b f(x(t), y(t))\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\,dt.$$

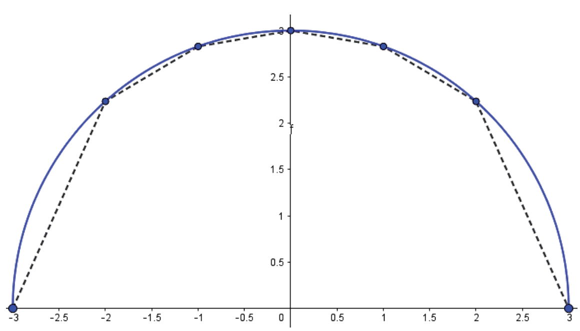
Si la función que se integra es la constante igual a 1,

$$\int_\gamma 1 = \int_a^b \left\|\gamma'(t)\right\|dt = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\,dt$$

es la longitud de la curva γ: $[a, b]\to R^2$.

Problema 8. *¿Cómo podemos estimar la masa de un alambre fino cuya forma es la de una semicircunferencia de radio 3, cuya densidad lineal (es igual al cuadrado de su abscisa?*

Solución.
La forma del alambre es la semicircunferencia $x^2 + y^2 = 9$ con $y\geq 0$. Para estimar su masa, consideramos una poligonal que aproxime a la semicircunferencia y asumimos que la densidad es uniforme en cada segmento de dicha poligonal con valor el cuadrado de la abscisa del extremo final del segmento.



La aproximación a la masa m del alambre es la suma de la masa en cada segmento, producto de su longitud por su densidad:

$$m \approx (-2)^2 \times 2.45 + (-1)^2 \times 1.16 + 0 \times 1.01 + 1^2 \times 1.01 + 2^2 \times 1.16 + 3^2 \times 2.45 = 38.66\,gr$$

Figura 9. Estimación de la masa de un alambre (Adaptado de Stewart, 2012b, p.1073, ejercicios 33 y 34)

 CC BY-NC

En el problema de la figura 9 se plantea una primera aproximación informal a la integral de línea basada en una aplicación frecuente al cálculo para ingenieros: si $f(\gamma(t))$ es la densidad lineal en el punto $\gamma(t)$ de un alambre cuya forma viene dada por la curva γ, la integral nos da la masa total del alambre.

La integral de línea permite obtener de manera exacta la masa del alambre descrito en el problema anterior. Escogemos la parametrización de la curva que modeliza el alambre, $\gamma(t) = (x(t), y(t)) = (3cos(t), 3sen(t))$ definida en $[0, \pi]$. Dado que la densidad del alambre viene dada por $f(x, y) = x^2$, la masa del alambre se obtiene a partir de la integral de línea anterior, la cual se expresa como

$$m = \int_0^{\pi} f(x(t), y(t))\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\,dt = \int_0^{\pi} 9cos^2(t)\sqrt{9(sen^2(t) + cos^2(t))}dt = \int_0^{\pi} 27cos^2(t)dt = 27[\frac{sen(t)coscos\,(t) + t}{2}]_{t=0}^{t=\pi} = 27\frac{\pi}{2}gr.$$

Donde para obtener una primitiva de la función $cos^2(t)$, se puede emplear la igualdad $cos^2(t) = \frac{1}{2}(1 + cos(2t)$.

La solución al problema 8 es contiene un acercamiento intuitivo y formal a la integral de línea, como aproximación de sumas de Riemann y en función de una integral simple, donde la densidad lineal depende de dos variables, en cada punto de la curva. Intervienen los siguientes objetos matemáticos:

Conceptos: función, intervalo, longitud, norma, densidad lineal, masa.

Procedimientos: descomposición de la curva, determinación de longitudes de segmentos, evaluación de la función densidad lineal, cálculos aritméticos, representación de segmentos de rectas en el plano cartesiano.

Proposiciones:

P1: La aproximación a la masa m del alambre es la suma de la masa en cada segmento, producto de su longitud por su densidad.

P2: La masa del alambre se calcula exactamente mediante una integral de línea.

P3:. $m \approx 38.66\,gr$

P4:. $m = \frac{27\pi}{2}gr.$

Argumentos: Se conviene una división de la curva y se acepta aproximar la masa asumiendo que fuera constante en cada segmento de la curva.

La actividad matemática desarrollada corresponde a un nivel 5 de algebrización, ya que intervienen una función de dos variables, parametrizaciones de una curva, y cálculos analíticos como la distancia de un segmento y de un vector.

4. Discusión y conclusiones

La preocupación por la formación matemática de los futuros ingenieros ha llevado a diversos investigadores a abordar cómo se deben tratar las diferentes nociones matemáticas en los contextos de la ingeniería, analizar el tipo de problemas utilizados para introducir los conceptos, el impacto de los recursos tecnológicos, los libros de texto de matemáticas para ingenieros o la motivación de los estudiantes (Pino-Fan *et al.*,2018). Sin embargo, "los trabajos de investigación internacionales que se centran en el uso de las matemáticas en cursos de ingeniería (y cómo este uso se relaciona con las prácticas "matemáticas") son todavía escasos, a pesar de la necesidad de estudios que examinen los contenidos necesarios para las disciplinas que las demandan" (González-Martín *et al.*, 2021 p. 216). Al examinar cómo se utilizan las matemáticas en los cursos de ingeniería, podemos averiguar formas de hacer que la enseñanza del cálculo sea más relevante para los estudiantes de ingeniería (González-Martín *et al.*, 2021).

Uno de los problemas fundamentales que se encuentran los estudiantes de carreras de ingeniería tiene que ver con el grado de formalización y abstracción de los contenidos matemáticos que se espera logren conocer y aplicar de manera pertinente y para los que su formación previa puede no ser suficiente. En particular, aquellos relativos al cálculo integral. Como afirma Starbird (2006) "los conceptos fundamentales del cálculo pueden entenderse sin los conocimientos técnicos que tradicionalmente se exigen en los cursos de cálculo" (p.1) Una de las bases del potencial del cálculo reside en el hecho de que "muchas cuestiones en muchas disciplinas son equivalentes cuando se ven en el nivel apropiado de abstracción" (Starbird, 2006, p.2). Sin embargo, lograr acercar a los estudiantes de ingeniería a este nivel de abstracción no es tarea fácil y puede ser conveniente acercarse a las nociones fundamentales desde un punto de vista más intuitivo, menos formal, no sólo a la idea de área bajo una curva, o de *paso al límite* en el caso de la integral definida, también a la integral doble o integral de línea, empleando incluso, como hemos visto, situaciones de "otras disciplinas" como indica Starbird, en las que las técnicas surgen de manera intuitiva y en un contexto cercano al ingeniero.

Para que esa mejora en la enseñanza y aprendizaje del cálculo integral sea efectiva, como sugiere Serhan (2015), es importante que los formadores revisen cómo se presenta y se enseña la integral definida en clase, haciendo hincapié en las múltiples representaciones y cómo los estudiantes pueden utilizar las conexiones entre sumas de Riemann, límites, derivadas, área y muchos otros conceptos para mejorar su comprensión estructural de la integral definida como objeto sistémico y dinámico (Boigues, Llinares y Estruch, 2010; Serhan, 2015). Es decir, reflexionar sobre la naturaleza y complejidad de los objetos matemáticos que configuran los significados de la integral definida que se espera que los estudiantes comprendan y apliquen (Contreras y Ordóñez, 2006; Gordillo y Pino-Fan, 2016; Robles *et al.*, 2014).

 CC BY-NC

Por este motivo, en este trabajo se han analizado los diversos significados de la integral definida propuestos por otros autores (Contreras y Ordóñez, 2006; Contreras *et al.*, 2010; Gordillo y Pino-Fan 2016; Robles *et al.*, 2014; Pino-Fan, Font *et al.*, 2018): geométrico intuitivo, como límite de sumas de Riemann y como función acumulativa, abordando también sus extensiones al caso de integral dobles (como caso particular de las múltiples) y de línea, aplicando el modelo de razonamiento algebraico propuesto en el EOS (Godino *et al.*, 2014; Godino *et al.*, 2015). Los niveles de algebrización han permitido modelizar el conocimiento institucional que se pone en juego en las prácticas operativas y discursivas implicadas en la resolución de problemas de cálculo integral relevantes para la formación de ingenieros, describiendo la actividad matemática bajo la perspectiva de objetos y procesos característicos del álgebra, admitiendo que un mismo problema se puede abordar de diferentes maneras en un momento dado con niveles de algebrización diferentes.

Esta investigación se podría continuar en diversas líneas. En primer lugar, múltiples investigaciones sugieren la importancia del significado variacional en la enseñanza de la integral definida (Jones, 2020; Kouropatov y Dreyfus, 2013) que en ocasiones queda oculto por el tratamiento meramente analítico de los conceptos del cálculo en la enseñanza superior (Contreras *et al.*, 2010) y en particular en los estudios de ingeniería (Carracelas, García y Oca, 2022). En este sentido, es conveniente analizar y profundizar en el Teorema Fundamental del Cálculo, articulado alrededor de las nociones de variación y acumulación (Robles *et al.*, 2014). Para lograr una enseñanza "suficientemente representativa de la complejidad de los objetos matemáticos integral y derivada y, más en general, de la complejidad del Cálculo", (p. 70), el profesor no debe conformarse con que el estudiante entienda la conexión entre derivada e integral. Un estudio de los niveles de razonamiento algebraico implicados en la construcción del Teorema Fundamental del Cálculo podría facilitar el diseño de secuencias de instrucción que lleven a los estudiantes a asomarse a la idea de variación acumulada para después inferir la existencia de una función que describe la variación de dicha acumulación y llegar a obtener la integral como función acumulativa desde un razonamiento variacional.

En segundo lugar, analizando las implicaciones que el tipo de análisis mostrado tiene para los profesores de los programas de ingeniería. Es necesario conocer sus conocimientos sobre los significados de la integral y su competencia para abordar las tareas prototípicas con diferentes niveles de algebrización. Esto puede llevar a diseñar e implementar acciones formativas con los profesores en carreras técnicas, para desarrollar en ellos la competencia de análisis ontosemiótico y reconocimiento de niveles de algebrización[3] que les permita planificar secuencias formativas que

3 Este tipo de acciones formativas se ha implementado con futuros profesores de matemáticas, por ejemplo, ver Burgos y Godino (2022).

progresen desde las aproximaciones más intuitivas a las más formales en la enseñanza del cálculo integral.

En tercer lugar, analizando los niveles de razonamiento algebraico desarrollado por estudiantes[4] de ingeniería al resolver los problemas característicos de los significados de la integral definida contemplados en este trabajo. Esto permitiría, por un lado, observar cómo se emplea este tipo de herramienta para analizar el grado de algebrización alcanzado por los estudiantes y por otro, tomar decisiones para el diseño de las acciones formativas con profesores.

El estudio desarrollado en este trabajo permite identificar el grado de formalización y el papel que desempeña el razonamiento algebraico en la caracterización de los diferentes significados de la integral definida. Consideramos que los ejemplos descritos ayudarán a los profesores de los programas de ingeniería a analizar el grado de generalidad en la actividad matemática involucrada en la resolución de problemas, la planificación de los procesos de instrucción y el desarrollo de instrumentos de evaluación que contemplen la complejidad intrínseca al cálculo integral. De manera específica, la identificación de prácticas, objetos y procesos matemáticos mostrada les permitirá valorar en qué momento y de qué forma se puede abordar el estudio de los diferentes componentes del cálculo integral según los diversos niveles de algebrización, teniendo en cuenta los conocimientos necesarios en cada momento y las competencias matemáticas que deben lograr los estudiantes de ingeniería.

Agradecimientos

Investigación realizada con apoyo del Grupo de Investigación FQM-126 (Junta de Andalucía, España).

Referencias

Alpers, B. (Ed.). (2013). *A framework for mathematics curricula in engineering education* (a report of the mathematics working group). Brussels: European Society for Engineering Education. https://www.sefi.be/publication/a-framework-for-mathematics-curricula-in-engineering-education/

Boigues, F., Llinares, S. y Estruch, V. (2010). Desarrollo de un esquema de la integral definida en estudiantes de ingenierías relacionadas con las ciencias de la naturaleza. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *13*(3), 255-282.

[4] Se puede observar el análisis de los niveles de algebrización en las producciones de alumnos de educación primaria en Burgos y Godino (2019).

 BY-NC

Bressoud, D., Ghedams, I., Martinez-Luances, V. y Törner, G. (2016). *Teaching and learning of Calculus*. Berlin: Springer.

Brito-Vallina, M. L., Alemán-Romero, I., Fraga-Guerra, E., Para-García, J. L. y Arias-De Tapia, R. I. (2011). Papel de la modelación matemática en la formación de los ingenieros. *Ingeniería Mecánica, 14*(2), 129-139.

Burgos, M., Bueno, S., Godino, J. D. y Pérez, O. (2021). Onto-semiotic complexity of the Definite Integral. Implications for teaching and learning Calculus. *REDIMAT – Journal of Research in Mathematics Education, 10*(1), 4-40. https://doi.org/10.17583/redimat.2021.6778

Carracelas, G. G., García, S. B. y Oca, N. M. de. (2022). Situaciones didáctico-matemáticas para el tratamiento de los procesos de variación y acumulación del cálculo integral en problemas ingenieriles. *PARADIGMA*, *43*(2),341-363. https://doi.org/10.37618/PARADIGMA.1011-2251.2022.p341-363.id1249

Carvalho, P. y Oliveira, P. (2018). Mathematics or mathematics for engineering? *Proceedings of 2018 3rd International Conference of the Portuguese Society for Engineering Education* (CISPEE), Aveiro, Portugal. https://ria.ua.pt/bitstream/10773/25337/1/CISPEE2018_final.pdf

Contreras, A. y Ordóñez, L. (2006). Complejidad ontosemiótica de un texto sobre la introducción a la integral definida. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *9*(1), 65-84. https://www.scielo.org.mx/scielo.php?pid=S1665-24362006000100004&script=sci_abstract

Contreras, A., Ordóñez, L. y Wilhelmi, M. R. (2010). Influencia de las pruebas de acceso a la universidad en la enseñanza de la integral definida en el bachillerato. *Enseñanza de las Ciencias, 28*(3), 367-384. https://doi.org/10.5565/rev/ec/v28n3.63

Ellis, B., Larsen, S., Voigt, M. y Kristeen, W. (2021). Where calculus and engineering converge: an analysis of curricular change in calculus for engineers. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education, 7,* 379–399. https://doi.org/10.1007/s40753-020-00130-9

Font, V., Godino, J. D. y Gallardo, J. (2013). The emergence of objects from mathematical practices. *Educational Studies in Mathematics, 82*(1), 97–124. https://doi.org/10.1007/s10649-012-9411-0.

Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques 22* (2-3), 237-284.

Godino, J. D., Aké, L., Gonzato, M. y Wilhelmi, M. R. (2014). Niveles de algebrización de la actividad matemática escolar. Implicaciones para la formación de maestros. *Enseñanza de las Ciencia*s, *32*(1), 199-219. http://dx.*doi*.org/10.5565/rev/ensciencias.965

Godino, J. D. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *14*(3), 325-355. https://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/03_SignificadosIP_RDM94.pdf

Godino, J. D. Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education* 39 (1-2), 127-135. https://doi.org/10.1007/s11858-006-0004-1

Godino, J. D., Neto, T., Wilhelmi, M. R., Aké, L., Etchegaray, S. y Lasa, A. (2015). Niveles de algebrización de las prácticas matemáticas escolares. Articulación de las perspectivas ontosemiótica y antropológica. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, *8,* 117-142. https://doi.org/10.35763/aiem.v1i8.105

González-Martín, A. S. (2021). $V_B - V_A = \int_a^b f(x)dx.$ The Use of Integrals in Engineering Programmes: a Praxeological Analysis of Textbooks and Teaching Practices in Strength of Materials and Electricity and Magnetism Courses. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education, 7,* 211–234. https://doi.org/10.1007/s40753-021-00135-y

González-Martín, A. S., Gueudet, G., Barquero, B. y Romo-Vázquez, A. (2021). Mathematics and other disciplines, and the role of modelling. En V. Durand-Guerrier, R. Hochmut, E. Nardi, y C. Winsløw (Eds.), *Research and Development in University Mathematics Education* (pp. 169–189). Routledge ERME Series: New Perspectives on Research in Mathematics Education. https://doi.org/10.4324/9780429346859-12

González-Martin, A. S y Hernandes, G. (2017). How are Calculus notions used in engineering? An example with integrals and bending moments. *CERME 10*. Dublin, Ireland. https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01941357

Gordillo, W. y Pino-Fan, L. (2016). Una propuesta de reconstrucción del significado holístico de la antiderivada. *BOLEMA: Boletim de Educação Matemática, 30* (55), 535-558. http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v30n55a12

Jones, S. R. (2020). Scalar and vector line integrals: A conceptual analysis and an initial investigation of student understanding. *Journal of Mathematical Behavior, 59,* 100801. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2020.100801

Jones, S. R. y Dorko (2015). Students' understandings of multivariate integrals and how they may be generalized from single integral conceptions. *Journal of Mathematical Behavior, 40,* 154-170. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2020.100801

Kouropatov, A. y Dreyfus, T. (2013). Constructing the integral concept on the basis of the idea of accumulation: Suggestions for a high school curriculum. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 44*(5), 641–651. https://doi.org/10.1080/0020739X.2013.798875

Ministerio de Educación Superior (2017). Plan de Estudios "E". Carrera Ingeniería Informática.

Ministerio de Educación Superior (2018). Plan de Estudios "E". Carrera Ingeniería Industrial.

Muñoz, O. G. (2000). Elementos de enlace entre lo conceptual y lo algorítmico en el Cálculo Integral. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 3(2), 131-170. http://funes.uniandes.edu.co/9599/1/Mu%C3%B1oz2000Elementos.pdf

Pepin, B., Biehler, R. y Gueudet, G. (2021). Mathematics in engineering education: a review of the recent literature with a view towards innovative practices. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education, 7,*163–188. https://doi.org/10.1007/s40753-021-00139-8

Pino-Fan, L., Font, V., Gordillo, W., Larios, V. y Breda, A. (2018). Analysis of the meanings of the antiderivative used by students of the first engineering courses. *International Journal of Science and Mathematics Education, 16*(6), 1091-1113. https://doi.org/10.1007/s10763-017-9826-2

Puga, K. y Miranda, E (2021). Construcción del esquema mental para la apropiación del concepto de la integral. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, *25,* 113-122. http://funes.uniandes.edu.co/4136/1/PugaConstrucci%C3%B3nALME2012.pdf

Robles, M. G., Tellechea, E. y Font, V. (2014). Una propuesta de acercamiento alternativo al teorema fundamental del cálculo. *Educación Matemática, 26*(2), 69-109. https://www.redalyc.org/pdf/405/40532665004.pdf

Rooch, A., Junker, P., Härterich, J. y Hackl, K. (2016). Linking mathematics with engineering applications at an early stage – implementation, experimental set-up and evaluation of a pilot project. *European Journal of Engineering Education, 41*(2), 172–191. https://doi.org/10.1080/03043797.2015.1056095

Serhan, D. (2015). Students' understanding of the definite integral concept. *International Journal of Research in Education and Science,* 1(1), 84-88. http://dx.doi.org/10.21890/ijres.00515

Starbird, M. (2006). *Change and motion: Calculus made clear*, 2nd Edition. Chantilly, Virginia: The Teaching Company.

Stewart, J. (2016). *Calculus. Early transcendentals*. Boston: Cengage Learning.

 CC BY-NC

Stewart, J. (2012a). *Cálculo de una variable. Trascendentes tempranas*. (7ª edición). México: Cendage Learning.

Stewart, J. (2012b). *Cálculo de varias variables. Trascendentes tempranas*. (7ª edición). México: Cendage Learning.

Viol, J. y Jacques, A. (2019). Ensino e Aprendizagem do Teorema Fundamental do Cálculo: algumas reflexões a partir de uma revisão sistemática de literatura. *Educacão Matemática Pesquisa, 21*(2), 239–263. https://doi.org/10.23925/1983-3156.2018v21i2p239-263

Autores

Seydel Bueno. Universidad de Camagüey, Cuba. seydel.bueno@reduc.edu.cu

https://orcid.org/0000-0001-5608-5507

María Burgos. Universidad de Granada, España. mariaburgos@ugr.es

https://orcid.org/0000-0002-4598-7684

Juan D. Godino. Universidad de Granada, España. jgodino@ugr.es

https://orcid.org/0000-0001-8409-0258

Olga Pérez. Universidad de Camagüey, Cuba. olga.perez@reduc.edu.cu

https://orcid.org/0000-0003-4475-814X

Tânia Cristina Rocha Silva Gusmão, Vicenç Font Moll

ANÁLISIS METACOGNITIVO DE UN AULA DE MATEMÁTICA SOBRE MEDIDA DE SUPERFICIES

Metacognitive analysis of a mathematics class on surface measurement

RESUMEN

Este estudio tiene por objetivo analizar las prácticas que realiza un profesor con sus estudiantes para resolver un problema de medida de superficies en las que intervienen aspectos de carácter metacognitivo. Se diseñó una propuesta didáctica, basada en una metodología de enseñanza por diagnóstico, en la que el profesor propone una tarea para hacer aflorar diferentes significados personales acerca de las magnitudes longitud y superficie, utilizando el tangram de Fletcher. La instrucción fue llevada a cabo en una clase de 26 estudiantes de 14 años que cursaban 2º año de la Educación Secundaria Obligatoria en España. Para el análisis se tomaron, como referente teórico, constructos de metacognición y del Enfoque Ontosemiótico. Entre las conclusiones está que cognición y metacognición pueden ser mejoradas con una instrucción bien planeada y responsablemente ejecutada.

PALABRAS CLAVE:
- *Cognición*
- *Metacognición*
- *Medida de Superficie*
- *Resolución de Problema*
- *Prácticas Docentes*

ABSTRACT

The objective of this study is to analyze the practices that a teacher carries out with his students to solve a surface measurement problem in which aspects of a metacognitive nature intervene. A didactic proposal was designed, based on a diagnostic teaching methodology, in which the teacher proposes a task to bring out different personal meanings about the length and surface magnitudes, using Fletcher's tangram. The instruction was carried out in a class of 26 14-year-old students who were in the 2nd year of Compulsory Secondary Education in Spain. For the analysis, constructs of metacognition and the Ontosemiotic Approach were taken as theoretical reference. Among the conclusions is that cognition and metacognition can be improved with well planned and responsibly executed instruction.

KEY WORDS:
- *Cognition*
- *Metacognition*
- *Surface Measurement*
- *Problem Solving*
- *Teaching Practices*

CC BY NC

Gusmão, T. y Font, V. (2022). Análisis metacognitivo de un aula de matemática sobre medida de superficies. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 25*(2), 169-196. https://doi.org/10.12802/relime.22.2522. Recepción: Mayo 11, 2020 / Aceptación: Noviembre 30, 2022

RESUMO

O objetivo deste estudo é analisar as práticas que um professor realiza com seus alunos para resolver um problema de medida de superfície em que intervêm aspectos de natureza metacognitiva. Foi elaborada uma proposta didática, baseada em uma metodologia de ensino por diagnóstico, na qual o professor propõe uma tarefa para trazer à tona diferentes significados pessoais sobre as grandezas de comprimento e superfície, utilizando o tangram de Fletcher. A instrução foi realizada em uma turma de 26 alunos de 14 anos do 2º ano correspondente ao Ensino Fundamental II, na Espanha. Para a análise, tomaram-se como referencial teórico os construtos da metacognição e do Enfoque Ontossemiótico. Entre as conclusões está que a cognição e a metacognição podem ser melhoradas com uma instrução bem planejada e executada com responsabilidade.

PALAVRAS CHAVE:

- *Cognição*
- *Metacognição*
- *Medidas de Superfície*
- *Resolução de Problemas*
- *Práticas de Ensino*

RÉSUMÉ

L'objectif de cette étude est d'analyser les pratiques qu'un enseignant met en œuvre avec ses élèves pour résoudre un problème de mesure de surface dans lequel interviennent des aspects de nature métacognitive. Une proposition didactique a été conçue, basée sur une méthodologie d'enseignement diagnostique, dans laquelle l'enseignant propose une tâche pour faire ressortir différentes significations personnelles sur les grandeurs de longueur et de surface, en utilisant le tangram de Fletcher. L'instruction a été réalisée dans une classe de 26 élèves de 14 ans qui étaient en 2e année de l'enseignement secondaire obligatoire en Espagne. Pour l'analyse, les constructions de la métacognition et l'approche ontosémiotique ont été prises comme référence théorique. Parmi les conclusions, il y a que la cognition et la métacognition peuvent être améliorées avec un enseignement bien planifié et exécuté de manière responsable.

MOTS CLÉS:

- *Cognition*
- *Métacognition*
- *Mesure de Surface*
- *Résolution de Problèmes*
- *Pratiques Pédagogiques*

1. Introducción

A finales del siglo XIX el estudio de la mente y de su funcionamiento se constituyó como una disciplina empírica, destacándose los experimentos de Wundt en 1879 y de William James en 1890. Sin embargo, años más tarde, algunos teóricos (Por ejemplo, Watson, 1930 y Skinner, 1970), desde la perspectiva del behaviorismo, obvian en sus estudios las nociones mentalistas, lo que contribuyó a que éstas fuesen relegadas a un segundo plano. El desarrollo de una nueva psicología mentalista comienza a partir de los años 50 con los trabajos de Newall y Simon observando a personas resolviendo problemas para inferir la estructura mental existente detrás de sus estrategias (Schoenfeld, 1992; Ferreira, 2003). A partir de los años 80 las teorías del comportamiento humano observan que los agentes o procesos internos, por ejemplo, de "conciencia" y "control del pensamiento", pasan a desempeñar un papel importante en el comportamiento humano. Del estudio de tales procesos internos también se ocupa el área conocida como "metacognición" que ha contribuido mucho al desarrollo de los mismos.

En los años 70, el tema empieza a generar interés, en paralelo al declive de las investigaciones sobre QI, y se comienza a pensar en enseñar estrategias metacognitivas a las personas (Ferreira, 2003). En 1980 el término empieza a ganar espacio en los textos académicos y pronto se relacionó con dominios específicos (la lectura, comprensión, atención, interacción social, comunicación etc.). De esta manera, aparece la necesidad de definir la metacognición teórica y operacionalmente (Mayor, Suengas y González, 2003).

En la revisión de la literatura pertinente (Wellman, 1985; Schoenfeld, 1985, 2012; Gonçalves, 1996; González, 1996; Jiménez y Puente, 2014; Díaz *et al.* 2017; Kambita y Hamanenga, 2018 entre otros), observamos que muchos de los estudios que se preocupan por comprender las relaciones entre los procesos cognitivos y metacognitivos se apoyan (y aquí nos incluimos) en las ideas de Flavell (1976, 1979, 1981, 1987). La mayoría de las investigaciones suelen delimitar dos significados diferentes para el término metacognición (todavía estrechamente relacionados): 1) la concibe como un "producto o contenido cognitivo" y 2) la asimila a "procesos u operaciones cognitivas". La metacognición como producto o contenido cognitivo también suele ser referida por *conocimiento declarativo*, *auto-conocimiento* o simplemente *conocimiento sobre la cognición*; se refiere al conocimiento que las personas adquieren en relación con su propio funcionamiento cognitivo y el de los demás, o conocimiento sobre las "personas", las "tareas" y las "estrategias" (Flavell, 1987). La metacognición en la acepción de procesos u operaciones cognitivas suele ser interpretada como *mecanismo autorregulatorio, autorregulación de la conducta, conocimiento procedimental* o simplemente *regulación*. Pero sobre todo esta acepción se refiere a los procesos de supervisión y regulación que ejercemos sobre nuestra propia actividad cognitiva. Un ejemplo de esta última acepción seria favorecer el aprendizaje de un contenido buscando hacer un esquema de tipo mapa conceptual. También es un

 CC BY-NC

saber relativo a la cognición. Resumidamente, la metacognición suele ser definida como el conocimiento que uno tiene acerca de los propios procesos y productos cognitivos y, este conocimiento, es acompañado de componentes que poseen la función de planear, organizar, supervisar, regular y evaluar el conocimiento cognitivo (Gusmão, 2009).

También, con base en los estudios de Flavell, se diferencian las estrategias cognitivas de las metacognitivas: las estrategias son cognitivas cuando son empleadas para hacer progresar la actividad cognitiva hacia una meta, y son metacognitivas cuando su función es supervisar ese progreso. Las estrategias metacognitivas "hacen que el sujeto lleve a la conciencia su propio proceso de aprendizaje, teniendo en cuenta sus propias características como aprendiz" (Jiménez y Puente, 2014). Considerado un conocimiento de nivel superior, la metacognición es necesaria para "llegar a ser un aprendiz eficaz" (Jiménez y Puente, 2014).

La metacognición aparece como agenda de investigación en la educación matemática en los años 80 (Desoete y De Craene, 2019) y, actualmente, ocupa un lugar destacado en la investigación en esta área científica, relacionándose por ejemplo con la resolución de problemas (Schoenfeld, 1992, González, 1996; Gusmão, 2006; Díaz, *et al.*, 2017), el rendimiento académico (Kambita y Hamanenga, 2018) y, más reciente, relacionándose con factores externos al estudiante, como los recursos, las metodologías y prácticas docentes (Gusmão, 2006; Venancio, 2020; Balderas; Páez y Martínez, 2020). Por un lado, hay mucha investigación que busca dar respuestas a cómo los estudiantes regulan y controlan sus pensamientos o acciones a la hora de resolver un problema; por otro, aún son escasas las investigaciones que buscan discutir como los factores externos, por ejemplo, recursos, estrategias y metodología utilizadas por el profesor pueden impactar en el desarrollo de la metacognición de los estudiantes. Es en este contexto que este estudio se justifica y se sitúa su objetivo: analizar las prácticas que realiza un profesor con sus estudiantes para resolver un problema de matemáticas de medida de superficies, en un contexto de aula, en las que intervienen aspectos de carácter metacognitivo que las enriquecen.

Según Schoenfeld (1992), los fracasos de estudiantes resolviendo problemas matemáticos pueden ser explicados, en parte, por algún mal funcionamiento en el "control" y en los "sistemas de creencias", toda vez que los requisitos de conocimientos que poseen los estudiantes no son aplicados coherentemente, puesto que no saben cómo monitorear y evaluar sus decisiones. Las investigaciones de Schoenfeld (1985, 1992) como las de Gourgey (2001), constatan al igual que

Flavell, que, aunque los estudiantes tengan recursos para resolver problemas, son incapaces de aplicarlos con éxito si desconocen sus capacidades para regular sus pensamientos, mientras que, por el contrario, un buen control puede llevar al éxito, aunque se tenga pocos recursos cognitivos. Hegedus (1998, p.29), considera la metacognición como "un constructo relevante para comprender mejor las conductas de los estudiantes cuando resuelven problemas". Gourgey (2001), observa que estudiantes con pobres habilidades metacognitivas no solamente son pasivos sino también dependientes de los demás. La metacognición permite al estudiante regular su pensamiento y aprendizaje (Martínez, 2017; Baten, Praet y Desoete, 2017). Para Schraw (2001), el conocimiento y los procesos de monitoreo pueden aumentarse a través de prácticas de instrucción explícita en clase, de manera que los estudiantes usan las habilidades adquiridas para incrementar la eficacia de sus acciones. "El saber planificar, supervisar y evaluar qué técnicas, cuándo, cómo, por qué y para qué se han de aplicar (estrategias) a unos contenidos determinados con el objeto de aprender, hace que el aprendiz se vuelva estratégico" (Jiménez y Puente, 2014, p.12). De modo general, se espera con el desarrollo de la metacognición enseñar a los estudiantes a planificar, supervisar y evaluar sus acciones, favoreciendo el uso espontáneo y autónomo de dicho conocimiento.

Además de lo dicho, considerando que en la Didáctica de la Matemática, al igual que en otras disciplinas, muchos de los esfuerzos se dirigen a tratar de comprender las relaciones entre cognición y metacognición, y que los procesos de instrucción que llevan a cabo estos dos procesos al mismo tiempo contribuyen a aumentar las habilidades de los estudiantes para resolver problemas, incluso problemas poco familiares (Schoenfeld, 1992); entendemos que, para interpretar con mayor detalle la complejidad de los fenómenos asociados a la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en el contexto de resolución de problemas y, por ende, de la comprensión de las matemáticas, sería necesario considerar, explícitamente, aspectos cognitivos y metacognitivos de manera conjunta. Esto nos ha llevado a buscar marcos teóricos que tratan de explicar los fenómenos inherentes a la realización de una práctica. De ahí la decisión de utilizar el Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática (EOS).

El EOS es un enfoque que viene desarrollándose desde 1994 por Godino y colaboradores (Godino y Batanero, 1994; Godino, 2002; Godino, Batanero y Font, 2006, 2019; Godino *et al.*, 2017; Font, 2005; Gusmão, 2006; Gusmão, Font y Cajaraville, 2009; Gusmão *et al.*, 2014; Gusmão y Font, 2020; Breda, 2020, Breda *et al.*, 2021a, 2021b, Godino, 2022 entre otros). Propone un análisis de la noción de "significado" desde un punto de vista didáctico, dirigido, entre otras cosas, a apoyar los estudios sobre la evaluación de los conocimientos matemáticos.

 BY-NC

Para este análisis, el modelo teórico desarrollado se basa en los supuestos pragmáticos del significado de los objetos matemáticos desde una triple perspectiva: institucional, personal y temporal. La disparidad entre significados (sean personales o institucionales) en el EOS es llamada conflicto semiótico, mientras que en el lenguaje normal se hablaría de ambigüedad. Los objetos matemáticos son concebidos como entidades emergentes de sistemas de prácticas (operativas, discursivas y normativas). Se propone como constructo básico para el análisis "los sistemas de prácticas manifestados por un sujeto (o en el seno de una institución) ante una clase de situaciones - problemas" (Godino, 2002, p.242). El EOS ha desarrollado un conjunto de nociones teóricas que permiten el análisis de procesos de enseñanza y aprendizaje de temas específicos de matemáticas (Godino, 2012), nos proporcionan pautas para mirar con detalles las estrategias cognitivas manifestadas en la resolución de problemas, como es el caso de la configuración epistémica, que nos has inspirado y permitido elaborar un constructo paralelo, que hemos denominado *configuración metacognitiva* para servir de soporte para analizar e indagar estrategias metacognitivas (explícitas o implícitas) que utilizan profesores y alumnos en sus prácticas. En el cuadro 1, se resumen los elementos considerados para ambas configuraciones.

Así, para la realización de la práctica, como por ejemplo resolver un problema que le represente un grado de dificultad importante, un resolutor experto pondrá en funcionamiento una configuración epistémica (desde la perspectiva institucional) o cognitiva (desde la perspectiva personal), pero para ello tiene que tomar una serie de decisiones de gestión (metacognitivas) sobre componentes de la configuración epistémica a lo largo del proceso de resolución: coordinación, planificación / organización, supervisión / control, regulación y revisión / evaluación que pueden ser automáticas o declaradas en función del tiempo, instrumentos disponibles etc. Teniendo en cuenta una supuesta familiaridad con los elementos de la configuración epistémica, por parte del resolutor experto, para una tarea en concreto, podemos, de un modo general, decir que tal familiaridad también se extiende a los elementos de la configuración metacognitiva.

---

[1] "Los conceptos o propiedades son interpretados aquí como propone Wittgenstein, como "reglas gramaticales sobre el uso de símbolos y expresiones" para describir las situaciones y las acciones que realizamos ante dichas situaciones (Baker y Hacker 1985. p.285). Tales reglas cambian según la fenomenología, los juegos de lenguaje, las formas de vida, las instituciones. Otro uso habitual de "conceptos" es como sistema heterogéneo de objetos (situaciones, invariantes operatorios, representaciones), que se puede sustituir con ventaja por la noción de praxeología". (Godino, 2002, p.246)

CUADRO 1
Elementos de las Configuraciones Epistémica y Metacognitiva

Configuración Epistémica	*Configuración Metacognitiva*
Lenguaje (términos, expresiones, notaciones, gráficos): En un texto viene dado en forma escrita o gráfica, pero en el trabajo matemático pueden usarse otros registros (oral, gestual). Mediante el lenguaje (el ordinario y el específico matemático) se describen otros objetos no lingüísticos; *Situaciones* (problemas más o menos abiertos, aplicaciones extramatemáticas o intramatemáticas, ejercicios…): Son las tareas que inducen a la actividad matemática; *Procedimientos:* Son utilizados por el sujeto ante las tareas matemáticas (operaciones, algoritmos, técnicas de cálculo, ...); *Conceptos*[1]: Dados mediante definiciones o descripciones (número, punto, recta, función…); *Proposiciones* (propiedades, teoremas, corolarios, lemas, etc.); *Argumentos* que se usan para validar y explicar las proposiciones (sean deductivas o de otro tipo).	*Gestiones primarias (metacognición primaria):* La metacognición primaria en general va asociada a acciones del resolutor experto manifestadas de forma rápida, dada la supuesta familiaridad que se le supone con los conocimientos necesarios para la resolución de la situación (tarea). Los procesos de supervisión, regulación y evaluación son relativamente semiautomáticos y las acciones metacognitivas que se esperan serán, sobre todo, de *comprensión* y de *organización / planificación*. *Gestiones secundarias (metacognición secundaria):* Cuando no se trata de gestiones rápidas o automáticas debido a la complejidad del problema propuesto, serán necesarios periodos de espera y de nuevos planteamientos. Estos nuevos planteamientos implican gestiones deliberadas de supervisión, regulación y evaluación más reflexivas que las que se dan en la primera. 1) Una acción *supervisiva* es aquella en la que el resolutor, implícita o explícitamente, hace cuestionamientos del tipo “estoy siguiendo correctamente el plan previsto”. Tal supervisión le conduce (y garantiza) a un mayor rendimiento; 2) En una acción *regulativa* se supone cuestionamientos del tipo “si no consigo los objetivos o no cumplo las condiciones impuestas, qué puedo corregir o qué nuevo camino puedo emprender”. Se da cuenta de que se equivocó; 3) En una acción *evaluativa / verificativa* se supone cuestionamientos del tipo “estoy respondiendo correctamente a la tarea” ¿La solución que doy es la que resuelve el problema?”. Hay indicios de la existencia consciente de un proceso de evaluación / verificación final de las acciones emprendidas. *Gestiones para una metacognición ideal:* Lo que caracteriza este tercer nivel metacognitivo es el recurso deliberado de procesos cognitivos de características muy generales (pensamiento metafórico, analógico, particularización, generalización, transferencia, contextualización, descontextualización, cambio de representación, resolución alternativa, una solución original, etc.), los cuales se proponen como nuevas alternativas (mucho más conscientes y reflexivas) a las demandas de supervisión, regulación y evaluación anteriores.

Fuente: elaborado a partir de Godino (2002) y Gusmão (2006)

 CC BY-NC

Aunque hemos puesto los tres niveles de metacognición separados uno del otro, hay que pensarlos como un proceso continuo que se desarrolla en espiral. En muchos casos será suficiente el nivel primario de metacognición (cuando por ejemplo un resolutor experto se enfrenta a un problema que para él es simple).

Sólo aparecerán explícitamente los niveles secundario y terciario descritos anteriormente cuando el resolutor se enfrente a una situación problema cuya complejidad le obligue a ponerla en funcionamiento.

La configuración metacognitiva institucional (de un resolutor ideal), será tomada como referencia para evaluar las configuraciones metacognitivas personales de los estudiantes. Los niveles de metacognición necesarios para la resolución de un problema dependerán de la complejidad del problema y del nivel de conocimientos (cognitivos y metacognitivos) del resolutor.

Apoyado en los marcos aquí descriptos analizaremos un proceso de instrucción realizado por un profesor en el que participan 26 estudiantes de 14 años de la Educación Secundaria Obligatoria en España. El profesor no tenía, al menos explícitamente, intención de fomentar el desarrollo de procesos metacognitivos, aunque la instrucción estuviera bien organizada.

En este contexto, partimos de la premisa de que, incluso sin conocer explicitamente estrategias o indicadores de metacognición, los docentes, por medio de prácticas (operativas y discursivas) bien organizadas, que brindan orientación y medios necesarios para que sus alumnos tengan mejores resultados de aprendizaje (faceta cognitiva), logran la emergencia de procesos autónomos y regulados en sus alumnos y, por lo tanto, logran la emergencia de la metacognición.

La metodología del estudio fue de tipo diagnóstico y el análisis del proceso de instrucción tenía el propósito identificar y discutir aspectos metacognitivos que manifestaran los sujetos, sobre todo el profesor, durante el discurso en clase al resolver una situación-problema de matemáticas.

2. Materiales y métodos

2.1. *Diseño*

El fragmento de la práctica de aula que usamos para el análisis no fue observado y grabado directamente por los autores, pero a partir de un video, lo observamos, lo estudiamos y lo transcribimos para seguidamente analizarlo. El video, que está muy bien grabado, describe un proceso de instrucción que fue realizado por un profesor investigador, doctor del Departamento de Didáctica de las

Ciencias Experimentales y de las Matemáticas de la Universidad de Santiago de Compostela, España, que gentilmente colaboró, explicitando los objetivos e intenciones educativas. La trascripción del video fue acompañada y validada por este profesor que además recordaba con detalle la implementación realizada. Además, el texto final de análisis de esta aula fue aprobado por este profesor.

Así, fue diseñada una propuesta didáctica, basada en una metodología de enseñanza por diagnóstico, en la que el profesor propone una tarea determinada y, sobre ella, formula preguntas a las que los alumnos aportan sus respuestas, que se discuten, argumentan y, en su caso, consensuan. En este proceso interactivo, se demandaban acuerdos o desacuerdos argumentados con respecto a cualquier tesis que formulara en particular un determinado alumno. En el análisis de esta práctica, nos detendremos, en particular, *en identificar y discutir aspectos metacognitivos,* que pueden estar presentes sobre todo en el discurso (y actitudes) del profesor. Consideramos, además, que la mutua interrelación entre profesor-alumno condiciona los discursos y las actitudes de ambos en tanto que sujetos participantes (emisor y receptor) del discurso en clase.

Conviene aclarar que la metodología empleada (por diagnóstico) fue considerada en este trabajo como una opción metodológica para promover la reflexión y la actividad matemática de los estudiantes, descubrir sus posibles lagunas y dificultades y esperar hipotéticamente que surjan evidencias suficientes para analizar los conocimientos cognitivos que se ponen en juego, mediante una práctica organizada. Vale aclarar que fue un proceso de instrucción considerado por el profesor (y por la institución) como formal y, en este momento, el profesor no tenía la intención (al menos conscientemente) de desarrollar capacidades metacognitivas en sus alumnos(as). Por eso, formulamos la premisa, anunciada anteriormente, de que, incluso sin conocer explicitamente los procesos metacognitivos los docentes pueden lograr la emergencia de los mismos.

2.2. *Ambiente y participantes*

El proceso de instrucción fue llevado a cabo en una clase de 26 estudiantes de 14 años que cursaban 2º año de la Educación Secundaria Obligatoria en una institución pública en la ciudad de Santiago de Compostela, España. La instrucción fue desarrollada por un profesor universitario con el consentimiento de la institución y del profesor de matemáticas de la clase y duró aproximadamente 1 hora y 20 minutos. Fueran hechas grabación en vídeo y audio. Se trata de una clase experimental, desarrollada en el contexto de las prácticas escolares de alumnos de Magisterio en el Colegio de Prácticas anexo a la Universidad. Por tanto, el profesor que dirige la experiencia no es el profesor de matemáticas habitual ni, por tanto, el responsable de la clase.

 CC BY-NC

2.3. *Recogida y análisis de dados*

El objetivo central de la práctica del profesor era hacer aflorar diferentes significados personales acerca de las relaciones entre las magnitudes longitud y superficie, utilizando como recurso didáctico el tangram de Fletcher.

El tangram de Fletcher es una especie de puzle compuesto por 7 piezas: 4 triángulos, 2 cuadrados de tamaños diferentes y un paralelogramo. La cantidad de figuras que se pueden formar con este tangram es menor a las que se pueden formar con el tangram tradicional.

Con anterioridad los estudiantes habían recibido instrucción sobre propiedades básicas relacionadas con fórmulas de áreas de triángulos y cuadriláteros y, en particular, habían estudiado el teorema de Pitágoras.

Así que, se realizó, al principio, una práctica con el tangram para observar las piezas, manipularlas y establecer las equivalencias entre ellas. Los alumnos disponían cada uno de un juego de tangram y habían realizado distintas construcciones para observar dichas equivalencias. Tenían varias copias en cartulina del triángulo pequeño (pieza base del tangram) y podían manipular libremente las piezas. Por ejemplo:

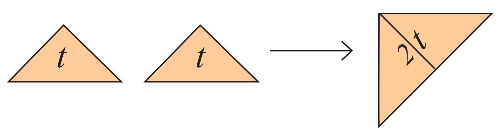


Figura 1. Piezas del tangram de Fletcher

Se realizó juntamente con ellos una construcción que incluye todas las piezas del tangram, observando distintas formas de realizarla, bajo simetrías o giros de las piezas. Transcurridos unos 25 minutos del aula (del video), se les planteó el siguiente problema, que actúa como motor de la situación didáctica:

Cálculo del área del triángulo sombreado

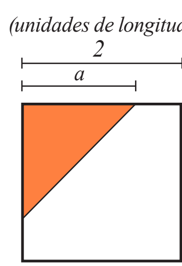


Figura 2. Cuadrado y triángulo sombreado

CC BY-NC

Si el lado del cuadrado de la figura mide 2 unidades de longitud. ¿Cuánto vale el área del triángulo sombreado?

A continuación, presentamos las acciones operativas y discursivas de los sujetos ante la situación-problema planteada.

3. Descripción y análisis de los datos

3.1. *Las prácticas operativas y discursivas entre profesor y alumnos*

Segmento 1 (*SG1*): Posicionamiento de los estudiantes acerca del valor del área del triángulo:

1. PROFESOR (P): *El lado del cuadrado de la figura mide 2 unidades de longitud. A mí me gustaría saber cuánto vale el área del triángulo sombreado. ¿Tenéis alguna opinión así, a ojo, de lo que puede valer?*
2. ALUMNO 1 (A1): *Unas 5 unidades cuadradas.*
3. A2: *Yo pienso que 3.*
4. A3: *Yo creo que 6.*
[Pausa. Algunos alumnos manipulan el juego del tangram que tienen a su disposición]
5. P: *A ver, a ver ¿cuántos se apuntan a cada una de las 3 respuestas?*
[A mano alzada, 8 estudiantes se adhieren a la respuesta “3”. Los demás no se manifiestan. Algunos siguen manipulando las piezas del tangram y otros dialogan entre sí]

Trayectoria argumentativa

Tesis 1: “unas 5 unidades cuadradas”. A1, Episodio 2 (EP2)
Tesis 2: “3 unidades cuadradas”. A2, EP3
Tesis 3: “6 unidades cuadradas”. A3, EP4.
Argumentos: No hay, salvo las adhesiones a cada tesis: ninguna a las tesis 1 y 3, ocho a la tesis 2.

Se constata, pues, que existen muchas dudas en relación con la validez de sus respuestas, debido a la escasa reflexión metacognitiva inicial en que las han basado.

SG2: Primera regulación de la tarea por parte del profesor, solicitando justificación para las tesis anteriores.

6. P: *A ver.* (refiriéndose a A2), *¿cómo has obtenido tu respuesta?*

 CC BY-NC

7. A2: *Si el lado a* [del triángulo] *vale más de una unidad* [lo que se evidencia en la figura] *y los dos catetos son iguales, entonces he sumado y creo que aproximadamente da 3*: *"1+1+el resto"*.
8. P: *¿Cuántos están de acuerdo con este razonamiento?*
[Levantan la mano 6 alumnos, mostrando su acuerdo con A2]
9. P: *¿Por qué dices "catetos"?*
10. A2: *Son los lados más pequeños.*
11. P: *¿Todos los triángulos tienen catetos?*
12. A2: *Sí.*
13. A4: [corrigiendo a A2]: *No. Sólo los triángulos rectángulos.*
14. P: *¿De acuerdo todos?*
15. VARIOS ALUMNOS, [al unísono] (VA): *Sí.*
16. P: *¿De acuerdo A2*?
17. A2: *Sí*... [dubitativo].
18. P: *Volvamos al problema. ¿Crees que el "resto" de la longitud del lado pequeño (a) es la mitad de 1?*
19. A2: *Sí, aproximadamente.*

Argumento apoyando la tesis 2: "he sumado los catetos y creo que aproximadamente da 3: 1+1+resto". A2, EP7., y seis alumnos que se adhieren a este argumento.
Tesis 4: "Los dos catetos son iguales", A2, EP7.
Tesis 5: "Todos los triángulos tienen catetos". A2, EP12.
Argumentos que invalidan la tesis 5: "No. Sólo los triángulos rectángulos". A4, EP13, y varios alumnos que apoyan este argumento. A2 parece aceptar este argumento, pero sin mucho convencimiento (EP 17).
Tesis 6: "Aproximadamente el 'resto' de la longitud del cateto es ½", A2, EP19.

A2 ha interpretado que la interpelación tiene que ver con la determinación del valor de *a* y, metacognitivamente, decide que la estrategia adecuada para responder al problema es sumar las longitudes de los dos catetos, dando un valor aproximado aceptable, inicialmente, para dicha suma. El profesor intenta averiguar el significado personal, el conocimiento cognitivo, de A2 sobre la noción de "cateto" al que ha hecho referencia, confirmando que el significado de "cateto" para A2, está relacionado con "lado más corto" de un triángulo cualquiera. El profesor detecta que un número significativo de estudiantes o no han entendido cuál es el objetivo de la tarea (calcular el área del triángulo), o muestran conflictos semióticos (Godino, 2002), relacionados con la confusión perímetro / área. Por ello, retoma la pregunta original.

SG3: Segunda regulación y evidencia de la aparición de una estrategia.

20. P: *Bien. Yo había preguntado por el área del triángulo sombreado, no por la suma de los catetos.*
21. VA: *El área vale 2 unidades cuadradas.*
22. A6: *Vale 1 unidad cuadrada.*
23. A7: *Vale 1 y "un poquito".*
[la mayoría de los estudiantes siguen indecisos].
24. P: *A ver, ¿quién se adhiere a cada respuesta?*
[Hay mayoría, ahora, que se adhieren a la respuesta "2 unidades cuadradas"]
25. P: *A7 ¿por qué dices que vale 1 y "un poquito"?*
26. A7: [dibujando la siguiente figura]:

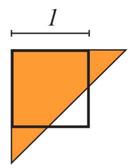


Figura 3. Dibujo del alumno A7

Hay un cuadrado de 1 unidad cuadrada que se puede construir dentro del triángulo, pero sobra algo. Lo que sobra no equivale a las partes del triángulo que quedan fuera del cuadrado.

27. A6: *Yo he pensado lo mismo, pero sí que equivale…* [y por tanto el área vale 1]

Tesis 7: "el área vale 2 unidades cuadradas". VA, EP21.
Argumentos: No hay argumentos, sino adhesiones de la mayoría a la tesis 7.
Tesis 8: "el área vale 1 unidad cuadrada". A6, EP22.
Argumentos a favor de la tesis 8: "se puede construir un cuadrado unidad cuya área equivale a la del triángulo, [con ayuda de representación gráfica]". A6, EP27.
Tesis 9: "el área vale 1 'y un poquito'", A7, EP23.
Argumento a favor de la tesis 9, que rebate la tesis 8: "lo que sobra [parte del cuadrado que sobresale al triángulo], no equivale a las partes del triángulo, que quedan fuera del cuadrado", A7, EP26.

A6 y A7 discuten entre ellas, pero no llegan a un acuerdo. Cada una mantiene su postura. La estrategia de descomposición/recomposición, elegida por estas dos alumnas no había sido, a priori, contemplada por el profesor (según su propia confesión) como una de las posibilidades para resolver la tarea. Se trata de una decisión metacognitiva incipiente en este nivel educativo, pero con un nivel de eficacia no despreciable. Al no disponer de medios "in situ" para recortar y componer trozos del triángulo, la estimación es diferente en A6 y A7 pero, en todo caso, les permite aproximarse de forma efectiva a la solución del problema.

 BY-NC

SG4: Supervisión de todo el proceso anterior y nueva regulación de la tarea, con la propuesta de una nueva estrategia que provoca conflictos semióticos en algunos estudiantes.

28. P: *La mayoría afirma, sin embargo, que el área es de 2 unidades cuadradas. ¿Quién se mantiene en esta postura? A ver, A3, tú que has sido uno de los que han afirmado esto ¿cómo lo justificas?*

29. A3: *Porque este triángulo equivale a dos triángulos pequeños del tangram. Si cada uno de ellos es la unidad de área, entonces este triángulo tiene 2 unidades*. [Se vale de una composición realizada al principio de clase IV]:

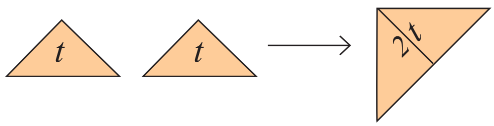


Figura 4. Piezas del tangram de Fletcher

30. P: *¿Alguien sabe una manera de conocer el área de un triángulo sabiendo cuáles son su base y su altura?*

31. VA: *Base por altura. (b x h)*

32. P: *¿Es base por altura?*

33. VA: [Autocorrigiéndose]: *Es base por altura partido por 2.*

34. P: [Escribiendo la fórmula *(b x h)/2* en una transparencia] *¿La mitad de la base por la altura?*
[Varios alumnos se ponen, en ese momento a hacer cálculos].

35. A4: *La base mide 1,3…. (1,3 x 1,3)/2=1,3.*

36. P: [escribiendo esa “igualdad” en la pizarra]: *¿Estáis de acuerdo?*

37. VA: *Sí.*

38. A7 y A8: *No. Eso sería si fuese (1,3+1,3)/2=1,3*

39. P: *¿Cuál de las dos expresiones es correcta?*
[Toda la clase parece adherirse a la expresión (1,3+1,3)/2=1,3, salvo A4 que parece dudar].

40. P: *A4, ¿lo tienes claro?*

41. A4: [Haciendo cálculos]. *Sí, es correcta la segunda. (1,3x1,3)/2=1,69/2=0,845* u^2
El área vale 0,845 u^2

42. P: [Escribiendo esta expresión en la transparencia]. *¿Quiénes defienden que el área del triángulo vale 0,845* u^2*?*
[Se produce el silencio, mientras algunos alumnos siguen haciendo cálculos]

Argumentos a favor de la tesis 7: “Porque este triángulo equivale a dos triángulos pequeños del tangram” A3, EP29.
Tesis 9: “el área del triángulo es base por altura. (b x h)”. VA, EP31.
Tesis 10: (que sustituye a la 9): “Es base por altura partido por 2”. VA, EP33.
No hay argumentos para justificar (o rebatir) las tesis 9 y 10.
Tesis 11: “La base mide 1,3…. (1,3 x 1,3)/2=1,3”. A4, EP35.

BY-NC

Varios alumnos se adhieren a esta tesis.
Argumentos que invalidan la tesis 11: "No. Eso sería si fuese (1,3+1,3)/2=1,3". A7, A8, EP38.
Toda la clase, incluso A4 que contra-ejemplifica, se adhiere a este último argumento.

A3 y los compañeros que opinan como él no tienen en cuenta un dato del problema (el valor del lado del cuadrado). Evidencian dificultades con el significado de "unidad de medida". Puesto que habían trabajado previamente con el triángulo base del tangram como unidad de medida de superficie (no convencional), lo extrapolan a la actual tarea y obvian que al lado del cuadrado (cantidad de longitud), se le ha asignado un valor numérico que indica cuántas unidades de longitud contiene -2-. Además, se trabaja simultáneamente con longitudes y superficies, mientras que, al principio, se hacía sólo con superficies. Han aplicado una "analogía directa", sin considerar que hay una transformación de la misma debida al uso de diferentes magnitudes (longitud y superficie). Sin embargo, de haber considerado que la longitud del cateto del triángulo base del tangram fuese la unidad de longitud, entonces podrían haber llegado a la conclusión de que el cateto del triángulo sombreado (equivalente a la hipotenusa del triángulo base) mide $\sqrt{2}$, lo que les podría haber permitido deducir que el área de este triángulo sería $(\sqrt{2} \times \sqrt{2})/2=1\ u^2$ (solución correcta).

El profesor, a la vista de que ningún estudiante hace referencia a la fórmula usual del área de un triángulo, a pesar de discutir valores para *a*, ("vale más que una unidad" o 1,5 (A2)) y, por tanto, no intentar buscar una fórmula para determinar el área, reconduce la situación introduciendo esta estrategia, en la que se evidencian dudas con la fórmula del área de un triángulo que se salvan al compartirse los conocimientos. Sin embargo, esta *regulación* tiene más que ver con la memorización de una fórmula que con su comprensión efectiva. También emerge, en varios estudiantes, el obstáculo *(bxb)/2=b* por analogía con *(b+b)/2=b*. En el caso de A4, contra-ejemplifica para reconocer su error. La nueva pregunta del profesor (EP 42) produce un bloqueo.

SG5: Nueva regulación del proceso con la propuesta de otra nueva estrategia para deshacer una situación de bloqueo.

43. P: *¿Veis alguna otra forma de calcular el área del triángulo?*
[No hay nuevas respuestas; los estudiantes siguen haciendo cálculos. Luego de un intervalo de aproximadamente 1 minuto el profesor pregunta]:

44. P: *El cuadrado de la figura (original), ¿a cuántos triángulos (como el sombreado) equivale?*
[No hay respuesta. El profesor anima a que manipulen las piezas del tangram, pero no surgen nuevas estrategias. Entonces el profesor compone la siguiente figura 5]:

 CC BY-NC

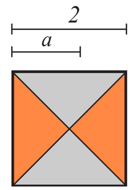


Figura 5. Piezas del tangram formadas por el profesor

45. TODOS LOS ALUMNOS: *¡A cuatro!*
46. P: *A ver. Los que decían que el área del triángulo valía 2, ¿cuál es el área del cuadrado?*
47. VA: *Vale 8* u^2 [4 x 2].
48. P: *¿Alguna otra opinión?*
49. MAYORÍA DE ALUMNOS: *¡Es 4!.*
50. P: (refiriéndose a A9 -uno de los que afirman que vale 4-) *¿En que te basas para decir que vale 4* u^2*?*
51. A9: *Por que el área del cuadrado es* lado x lado *y el lado del cuadrado mide 2, entonces su área es 4* u^2.
52. P: *Entonces ¿cuánto mide el área del triángulo sombreado?*
53. A9: *Mide 1* u^2.

Tesis 12: "el cuadrado equivale a 4 triángulos". EP45.
Argumentos a favor: por la simple visualización de la figura.
Tesis 13: "el área del cuadrado vale *8* u^2 [4 x 2]". VA, EP47.
Argumentos que invalidan la tesis 13: "¡Es 4!", "por que el área del cuadrado es *lado x lado* y el lado del cuadrado mide 2, entonces su área es 4 u^2". VA, A9, EP49 y 51.
Tesis 14: "el área del triángulo sombreado mide 1 u^2". A9, EP53.

Se constata que los alumnos no han derivado estrategias eficientes de pavimentación de superficies, a partir de su trabajo previo, manipulando las piezas del tangram (en este caso, la más rápida y eficaz). Esta estrategia no ha surgido, en este caso, de las acciones de los estudiantes y ha tenido que ser introducida por el profesor. Probablemente, si se hubiera dado más tiempo, podría haber aparecido, pero las estrategias que eligieron siguieron otro rumbo.

SG6: Supervisión de las distintas acciones emergentes de las diversas estrategias puestas en juego.
54. P: *Entonces, ¿por qué antes A4 había deducido que el área valía 0,845* u^2*?*
55. VA: *Porque el lado del triangulo mide más de 1,3.*
56. P: *¿Mucho más?*
57. A2: *1,5.* [haciendo cálculos] *(1,5 x 1,5)/2=2,25/2=1,125. Sobra.*
58. P: *Así que con 1,3 falta y con 1,5 sobra…*
59. VA: *1,4*

BY-NC

60. A2: *1,3 y medio* (tiene dificultades para expresar 1,35)
[El profesor va escribiendo en la transparencia todas las opciones que dan los alumnos y confecciona una lista con ellos].
1,3 → 0,845
1,5 → 1,125
1,4 → 0,98
61. P: *¿Entre qué valores estará comprendida la longitud del cateto?*
62. VA: *Entre 1,4 y 1,5.*
63. P: *Con esta forma de proceder, podríamos, por tanteo, aproximarnos poco a poco al valor de esta longitud, pero quiero que inventemos alguna estrategia nueva que nos permita calcularlo con más exactitud. Como los catetos del triángulo son iguales, entonces la base y la altura ¿Cómo son?*
64. VA: *Iguales.*
65. P: *Bien, entonces $b=h$ y $(b \times h)/2$ ¿cuánto vale?*
66. VA: *El área del triangulo, 1 u^2.*
67. P: *Entonces, si la mitad de $b \times h$ vale 1, ¿cuánto vale b y cuánto vale h?*
68. A6: *$b \times h$ vale 2.*
69. P: *Muy bien A6. ¿Sabeis decirme dos números cuyo producto sea 2?*
70. VA: *$b=1$, $h=2$; $b=2$, $h=1$.*
El profesor construye una tabla con estos valores.
71. P: *¿Alguna otra posibilidad?*
[Se produce un silencio prolongado]

Argumento que apoya la tesis 14: "el área vale más de 0,845 u^2 porque el lado del triangulo mide más de 1,3". VA, EP55.
Se realizan tanteos para aproximar el valor de un cateto.
Tesis 15: "la longitud del cateto está comprendida entre 1,4 y 1,5". VA, EP62.
Tesis 16: "la base y la altura del triángulo son iguales". VA, EP64.
Tesis 17: "si *$b \times h$ vale 2* entonces *$b=1$, $h=2$ ó $b=2$, $h=1$*". VA, EP70.

En el segmento anterior se constata que los estudiantes han descubierto una estrategia para ir acotando los posibles valores de la longitud del cateto, expresada en números decimales, que les permitiría aproximar cada vez más el valor de *a.* En lugar de proseguir con esta estrategia, el profesor les anima a buscar otra, más eficaz, usando conocimientos de otras técnicas.

Los estudiantes de este nivel todavía presentan resistencias para pensar en más tipos de números que los enteros, a pesar de que acababan de hacerlo en episodios anteriores. La costumbre institucional escolar adquirida de asignar valores enteros a las variables, en una fórmula, se revela como aquí como un obstáculo.

SG7: Nueva regulación que permite la emergencia de un nuevo problema: resolver $b^2=2$, y supervisión de las acciones de los estudiantes enfrentados a dicho problema.
72. P: *Estos valores ¿se adecúan a nuestro caso?*

 CC BY-NC

73. A6: *No, porque* $b = h$

74. P: *Muy bien, ¿entonces, que otros valores podemos considerar?*
De nuevo silencio.

75. P: *Como* $b = h$*, podemos poner, en lugar de* $b x h$, $b x b$

76. A2: *2b.*

77. VA: *No, no...* $b x b = b^2$.

78. A5: *1,42.* [haciendo cálculos] *(1,42x1,42)/2=1,008*

79. P: *¡Qué cerca andamos!. Pero quiero que todavía nos acerquemos más. Pensad en estas igualdade:* $b x b = 2$*, o sea* $b^2 = 2$*. Si* $b^2 = 2$ *¿cuánto debe valer b?*

80. A2: *1*

81. P: *¿Cuál es el cuadrado de 1?*

82. A2: *No...no...*[reconoce su error]
Rumores en clase. Intercambio de ideas basadas en resultados de cálculos.

83. VA: *No hay ningún número cuyo cuadrado sea 2.*

84. P: *¿No? A ver. Fijaros en el triángulo:*

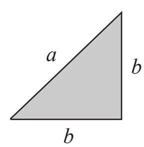


Figura 6. Triángulo dibujado por el profesor

¿Conocéis como medir la longitud de la hipotenusa *a*, conociendo la longitud de los catetos?
[Silencio prolongado].

85. P: *¿No os suena el teorema de Pitágoras?*
[silencio]

86. P: *Bien, os lo recuerdo.* $b^2 + b^2 = a^2$ *(en nuestro caso* $a = 2$*) Volvamos a donde estábamos ¿creéis posible encontrar un número cuyo cuadrado sea 2?*

87. A6: *Raíz cuadrada de 2.*

88. P: *¿Podéis decirme, en el dibujo, a quien representa exactamente ese número?*

89. A5: $\sqrt{2} = 1,42$

90. A6: *No hay*

91. A10: *Es un número muy largo*

92. A2: *Tiene 7 cifras decimales*

93. A10: *¡Tiene más!*

94. P: *¿Cuántas más?*

95. VA: *Tiene infinitas.*

96. A6: √2 *no existe.*
97. P: *¿Cómo que no existe? ¿Y la longitud de este lado* (señalando a uno de los catetos del triángulo) *cuánto vale?*
98. A5: √2
99. P: *Entonces ¿existe o no existe √2?*
[Silencio prolongado, con el que finaliza la clase].

Tesis 18: “*b x b=2b*”. A2, EP76.
Argumentos que invalidan la tesis 18: “No, no... $b x b=b^2$”. VA, EP77.
Argumentos sobre el valor del cateto: “1,42. (haciendo cálculos) (1,42 x 1,42)/2=1,008”. A5, EP78.
Tesis 19: “No hay ningún número cuyo cuadrado sea 2”. VA, EP83.
Argumentos que invalidan la tesis 19: “Raíz cuadrada de 2”. A6, EP87. (consecuencia de los argumentos del profesor). EP86.
Argumentos que niegan la existencia de la raíz cuadrada de 2: EP90 y 96.
Argumentos que revelan concepciones acerca de la raiz cuadrada de 2: EP91-3 y 95.

De nuevo aparece en A2 un error algebraico típico: *“bxb=2b”*, que rápidamente es corregido por otros compañeros. En este momento llamamos la atención sobre el papel que desempeñan los compañeros en el proceso metacognitivo, ora examinando ora regulando interactivamente las actividades de los demás.

El profesor va marcando, poco a poco y en todo el proceso instruccional, su papel de conducir a los alumnos a reflexionar sobre las acciones que realizan.

La tesis 19, así como los episodios 90 y 96, ponen de manifiesto el obstáculo epistemológico (Brousseau, 1998) de la existencia de irracionales. Los estudiantes, al no encontrar valores enteros ni decimales que cumplan la condición $b2=2$, niegan su existencia.

Los estudiantes admiten que no recuerdan un teorema (Pitágoras) que había sido estudiado en clase recientemente. Ello refleja que no han dotado de significado a dicho resultado, incluso en contexto similar al estudiado, pero formulado en otros términos “longitud de la hipotenusa, en función de la longitud de los catetos”. No entienden la expresión. Se produce, otro conflicto semiótico, una discrepancia entre expresión y contenido (Godino, 2002).

El silencio con que finaliza la clase revela que los estudiantes no parecen haber percibido el sentido de la pregunta de la existencia de raíz cuadrada de 2 como una longitud concreta. Aún no pueden relacionar (en este caso) un irracional con una cantidad de longitud.

 CC BY-NC

3.2. Las estrategias metacognitivas en la práctica docente del profesor

3.2.1. *Decisiones del Profesor*

A pesar de que el profesor declara no haber incluido en sus objetivos, de forma explícita, el desarrollo de conocimientos metacognitivos en sus alumno(a)s, lleva a cabo determinadas acciones, brindando apoyo y orientaciones encaminadas a lograr el objetivo de la tarea (conseguir que los estudiantes pongan en práctica estrategias adecuadas para la resolución del problema), proporcionando condiciones óptimas para emergencia de procesos y estratégias metacognitivas en sus alumnos conforme han mencionado diferentes estudios (Schraw y Gutierrez, 2015; Díaz *et al.* 2017; Balderas *et al.*, 2020). Así, las acciones del profesor activan decisiones de gestión (planificación, supervisión / control, regulación, revisión / evaluación) que deben ser consideradas como acciones "a priori", cuando diseña la tarea; "en acto", cuando se trata del momento de la realización de la práctica en clase con sus alumnos; y "a posteriori", cuando se trata de evaluar su propia práctica (auto-evaluación) y la práctica de sus alumno(a)s. Se trata de gestiones en las que se ponen en juego sus conocimientos metacognitivos y podrían ser descriptos de la siguiente forma:

Cuadro 2
Configuración metacognitiva del profesor

Gestiones primarias / preliminares (metacognición a priori)
1) El profesor planificó una tarea abierta que promueve la reflexión y abre la posibilidad de utilizar diversas estrategias de solución.
2) Tuvo conciencia previa de posibles dificultades y conflictos por parte de los alumnos al enfrentar la tarea, derivados de la existencia de una tipología de errores y obstáculos en el trabajo con medidas de longitud y superficie.
3) Hizo una auto-*evaluación previa de la tarea.* Al planificar la tarea y prever las posibles estrategias y dificultades que los alumnos puedan tener con ella, el profesor estará haciendo una auto-evaluación de la misma.
Gestiones secundarias durante la instrucción (metacognición en acto)
Parece haber *supervisado, regulado y evaluado* constantemente sus acciones en función del diálogo consigo mismo y con los alumnos durante el proceso de instrucción.
Gestiones ideales/finales (metacognición a posteriori)
Una vez finalizado el proceso de instrucción, el profesor declaró haber evaluado las estrategias, dificultades, errores y obstáculos surgidos durante la ejecución de la tarea, reflexionando, a su vez, sobre las posibles implicaciones de sus propias acciones sobre este proceso de instrucción.

CC BY-NC

Gestiones Preliminares

El profesor se ha fijado como meta que los estudiantes reflexionen sobre sus conocimientos previos para resolver una determinada tarea, valiéndose de un material didáctico (como el tangram) que posibilite la emergencia de estrategias alternativas de solución. El profesor es consciente de que los conocimientos previos que supone, a priori, adquiridos por los estudiantes, pueden no corresponderse con los que en realidad poseen. Por ello, uno de los objetivos previstos en la planificación de la tarea fue tratar de hacer visible esta discrepancia hipotética y prever posibles conflictos semióticos, errores y obstáculos. En consecuencia, diseña y planifica esta práctica con varios objetivos:

a) *Planificar una tarea abierta*

El profesor se ha decidido por una tarea de tipo abierta y, en este sentido, puede hacer surgir en los estudiantes la aparición de distintas estrategias tanto cognitivas como metacognitivas. La pregunta inicial *cómo obtener un valor estimativo del área del triángulo a partir del dato del problema* tiene por objeto provocar la reflexión en los estudiantes.

b) *Conciencia previa de posibles dificultades y conflictos:*

El profesor es consciente de los conflictos y obstáculos que existen en relación con la confusión perímetro / área, evidenciada en múltiples investigaciones. Para poder evidenciar este posible conflicto, introduce un distractor: la longitud del cateto del triángulo rectángulo isósceles: *a*, cuya determinación permitiría calcular directamente el área del triángulo. Este distractor puede, a su vez, ser fuente de emergencia de estrategias alternativas para resolver la tarea. Por otra parte, la "colocación" del triángulo dentro del cuadrado intenta que el problema no resulte demasiado sencillo, como en el caso de que la figura de partida fuese:

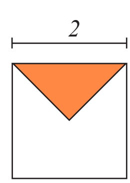


Figura 7. Cuadrado y pieza de triángulo sombreado

(que con seguridad se relacionaría directamente con la cuarta parte del área del cuadrado)

c) *Auto-evaluación previa:*

El profesor considera, a priori, que una posible *estrategia* de los alumnos puede consistir en manipular el triángulo dentro del cuadrado, hasta obtener una figura como la última (para ello disponen del tangram), lo que les conduciría a

 BY-NC

una respuesta rápida y eficiente. De ser ésta la estrategia elegida, se evidenciaría un aprendizaje de determinación de superficies mediante pavimentado, por repetición de una unidad de medida. Al mismo tiempo, permitiría reconocer que la hipotenusa del triángulo rectángulo tiene la misma medida que el lado del cuadrado.

Otra estrategia posible estaría basada en intentar calcular el valor de a, para, a continuación, aplicar la conocida fórmula del área del triángulo, que ya han manejado en múltiples ocasiones en etapas académicas anteriores. En este caso, dicho cálculo podría conducir a aplicar el teorema de Pitágoras, para obtener el valor de a. Estas dos estrategias formarían parte del constructo "configuración epistémica" elaborado en el Enfoque Ontosemiótico.

Otros tipos de estrategias que podrían surgir durante la realización de la práctica, no fueron previstas "a priori", ya que el profesor consideró que sería el propio desarrollo de la discusión en clase el que las pondría en evidencia.

Gestiones durante la instrucción

Decisiones sobre el desarrollo de la tarea (supervisión, regulación y evaluación)

A *nivel de supervisión* y, de modo general, de control de las estrategias que puedan surgir de los alumnos, el profesor decide focalizar sus acciones en moderar el debate que pueda acontecer en el desarrollo de la tarea, realizando preguntas, aclarando terminología y fomentando nuevas discusiones, intentando que afloren el mayor número de estrategias posibles, tanto si evidencian progresos en la solución de la tarea, como si –y sobre todo- plasman conflictos y dificultades cognitivas.

A *nivel de regulación*, el profesor pretende fomentar la reflexión en sus alumno(a)s, demandando justificaciones de sus estrategias y acciones; sugiere alguna nueva estrategia (en caso de producirse bloqueo generalizado en la consecución de la meta propuesta) para que sea tenida en cuenta y discutida en clase, con el fin de deshacer dicho bloqueo y está atento a la aparición de nuevos problemas, relacionados con la tarea propuesta, para garantizar la regulación (y supervisión) de las nuevas estrategias y acciones que emprendan los estudiantes para resolver estos problemas paralelos.

A nivel de *evaluación*, el profesor, de forma simultánea, evalúa las estrategias empleadas por sus alumno(a)s analizando su pertinencia o detectando los conflictos, errores y obstáculos que impiden o dificultan alcanzar el objetivo de resolver correctamente la tarea, valorando las distintas opciones, las tesis y argumentos presentes en el discurso de los estudiantes, que le permitan controlar los aprendizajes logrados y detectar las carencias cognitivas (y metacognitivas), para proceder en consecuencia.

Estos tres aspectos le permiten, al profesor, determinar la configuración cognitiva desarrollada por el grupo - clase.

Gestiones de Reflexión

Para valorar la consecución de los objetivos propuestos, el profesor reflexiona sobre sus propias acciones durante el proceso de instrucción a la hora de intervenir en el desarrollo de la tarea: formula preguntas, sugiere nuevas estrategias, provoca la discusión de nuevos problemas derivados de las propias respuestas y estrategias usadas por los estudiantes etc.

La trayectoria argumentativa derivada de las prácticas realizadas en clase, que hemos desarrollado anteriormente, permite ejemplificar las diferentes fases de la configuración metacognitiva del profesor que acabamos de exponer.

En todo este contexto, percibimos que al utilizar fundamentalmente las herramientas teórico-metodológicas del campo de la metacognición para comprender las prácticas de profesores y estudiantes en el contexto de nuestras tareas, hemos constatado que, de forma aislada, los constructos de la metacognición no permitían explicar las dificultades y conflictos puestos de manifiesto por los estudiantes en la realización de una práctica para resolver problemas. Tal reflexión nos enfrenta con la problemática de la evaluación de este conocimiento y de problematizar lo que sería de orden cognitivo o metacognitivo.

4. Conclusiones derivadas del proceso de instrucción

El desarrollo de la clase ha mostrado que:

a) El profesor no ha tenido la intención, al menos explícita, de desarrollar conocimientos metacognitivos en sus alumno(a)s. Sin embargo, los comentarios que podemos hacer de esa práctica abarcan un sentido general, toda vez que apreciamos que una clase o una práctica bien planeada y bien intencionada para desarrollar el conocimiento cognitivo de los estudiantes (teniendo en cuenta las competencias deseables y asequibles para un nivel de estudios concreto, así como la competencia que debe tener el profesor en el uso de recursos didácticos basados en la investigación didáctico-matemática y el dominio del contenido de las matemáticas que se están manipulando), hace que, paralelamente, se desarrollen competencias metacognitivas. Podemos reafirmar así las interacciones entre cognición y metacognición, aunque posiblemente con grados de desarrollo distintos (Gusmão, 2006; Gusmão, 2014).

b) Podemos observar que el profesor, al animar a los estudiantes a manipular las piezas del tangram, a fin de que descubran algunas estrategias alternativas, sugiriéndoles que intenten averiguar a cuántos

 BY-NC

triángulos equivale el cuadrado superpuesto, está estimulando la reflexión metacognitiva de los estudiantes. Pero, en algunos momentos, la iniciativa fracasa, y se produce un bloqueo, por lo que es el propio profesor el que indica expresamente dicha estrategia. Su puesta en práctica, sin embargo, parece no ser interpretada adecuadamente por varios estudiantes, que siguen defendiendo una postura previa: el área del triángulo es de 2 unidades cuadradas (basada en una concepción restrictiva del concepto de unidad de medida: 1 triangulo "grande" = 2 triángulos "pequeños") que extrapolan ahora, ante la evidencia de que el cuadrado equivale a 4 triángulos, afirmando que el área del cuadrado es de 8 unidades (no teniendo en cuenta que su lado mide 2). Otra parte de la clase, basándose más en criterios algorítmicos que en cuestiones de significado, pasan a deducir que el área del cuadrado es de 4 unidades, por lo que el área del triángulo es de 1 unidad.

c) La constatación, por parte del profesor, de que la solución correcta no está consensuada, al existir sobre el papel varias posibles respuestas, hace que la supervisión de los diferentes procesos puestos en juego (fórmula del área con valores aproximados, equivalencia entre 4 triángulos y el cuadrado, triángulo "grande" = 2 triángulos "pequeños, composición / recomposición de A6 y A7), motiva la intervención del profesor para que los estudiantes reflexionen sobre la relación entre las dos primeras estrategias mencionadas, surgiendo así una nueva estrategia relacionada con la búsqueda de valores aproximados más precisos para la longitud de la base (y de la altura). En este punto, cabe destacar que la estrategia tiene cierto éxito, obteniéndose valores aproximados de $\sqrt{2}$ aceptables como 1,42.

d) La reflexión que hacen los estudiantes sobre los propios conocimientos que deben poner en práctica para elaborar un plan para resolver la tarea es, en general, deficiente, si bien debemos resaltar el caso de las alumnas A6 y A7, elaborando una estrategia para dar respuesta al problema, que podemos considerar original, en la medida en que no había sido objeto de discusión previa. El estudiante A3 ha elaborado un discurso que pone de manifiesto sus significados personales de las nociones de cateto, suma de longitudes de catetos y área de un triángulo, que permiten detectar conflictos y errores relacionados con la confusión perímetro / área. Este estudiante y otros compañeros también evidencian conflictos derivados de un significado personal de la noción de "unidad de medida", todavía poco elaborado. Las decisiones iniciales que toman no son reflejo de un discurso justificado, sino que hay que interpretarlas como una emisión de juicios poco reflexivos acerca de la cuestión que se les plantea. No obstante, podemos observar que a pesar de tener un dominio primario (incipiente) de la metacognición, éste no fue suficiente para garantizar el éxito de los estudiantes (el caso específico de A3) en la tarea. El error de A3 no se debe a carencias metacognitivas (aunque elementales) que posee, puesto que supo transferir o usar la estrategia basada en la "analogía" con la tarea anterior (en donde se mostraba la equivalencia entre triángulos "grande" y "pequeño"), pero el hecho de que aplique la analogía en este nuevo contexto no garantizó un aprendizaje contextualizado y, por tanto, no le permite resolver el problema. Así que el error de A3 se debe básicamente a su configuración cognitiva (dificultades con el significado de "unidad de medida", cuando se manipulan cantidades de longitud y superficie). Este caso, en particular, nos sugiere justificar que la metacognición, por sí sola, no permite explicar la realización de una práctica y, por tanto consideramos que se verifica la afirmación de Gusmão (2006) de que *el hecho de que uno tenga adquirido y controle aspectos del* conocimiento metacognitivo *suficiente para afrontar una nueva tarea, no siempre es garantía de éxito, y puede que no consiga resolverla, debido a carencias de conocimientos cognitivos* (p. 294).

e) También queremos remarcar el papel que desempeña la interacción con los compañeros en el desarrollo o incremento de aspectos metacognitivos, bien a través de sus argumentaciones con estilos de razonamiento (aprendizaje) variados, bien haciendo correcciones puntuales a los demás e incluso a través de preguntas dirigidas al profesor.

f) Se evidencian dificultades para usar, en este contexto, la fórmula usual del área de un triángulo, conocidas su base y su altura, como una estrategia posible que tiene que ser sugerida por el profesor. La puesta en práctica de la misma, hace surgir en la clase un interesante debate, alrededor de los valores estimados para la longitud de la base y la altura, manifestándose conflictos derivados del uso inapropiado de la analogía (debido a obstáculos en la configuración cognitiva que poseen), para realizar cálculos aritméticos con fracciones. El uso de la fórmula permite obtener un valor aproximado para el área del triángulo, que no concuerda con decisiones previas tomadas sobre este valor, lo que produce una situación de cierto desconcierto y bloqueo entre los estudiantes, ante la falta de acuerdo sobre lo que debe medir su superficie.

g) Resulta notoria la dificultad para usar el teorema de Pitágoras en un contexto en principio nada extraño, ya que se ve con claridad que se trata de un triángulo rectángulo. La ausencia de referentes cognitivos y/o metacognitivos para establecer conexiones entre contextos próximos se observa aquí con nitidez. Por otra parte, hay que incidir en la dificultad de interpretar los números irracionales como medidas en este nivel educativo, las dificultades que crea la noción de infinito (Cornu, 1991) y las dudas consecuentes para reconocer la existencia de números irracionales.

Este proceso de instrucción nos ha mostrado que aspectos metacognitivos fueron activados y, a pesar de una instrucción responsable que los estimula, dichos aspectos fueron limitados. Pensamos que éstos podrían haber sido

 BY-NC

mejorados (incluso comprometiendo el avance del contenido) si el profesor fuera consciente de los mismos prestándoles una mayor atención. Así, consideramos, en conformidad con Balderas, Páez y Martínez (2020), la necesidad de estudios centrados en la práctica del profesor y de los estudiantes en la clase de matemáticas, que documenten de qué manera y en qué situaciones se puede promover y mejorar el aprendizaje metacognitivo en los estudiantes. Todo esto nos hace pensar que urge un trabajo más transparente y explícito de estos procesos; de modo que resaltamos la necesidad de investigar el aula y de concienciar al profesorado. En ese sentido se podrían fomentar investigaciones futuras.

La metacognición aún viene ocupando poco espacio en los sistemas educativos. La importancia de trabajar la metacognición abiertamente en clase fue resaltada por muchos investigadores (por ejemplo, Fernandes, 1988; Gusmão, 2006) y aunque la bibliografía que concierne a los procesos de aprendizaje de las matemáticas privilegia la metacognición (Cabral, 1998, entre otros), nos parece que las cosas están en el plano de la investigación, de las propuestas, de las ideas, pero no en el plano de la práctica. El aula aún parece distanciarse de lo que se afirma o sugiere en la teoría. Necesitamos, todavía, una mayor apertura y atención para los procesos metacognitivos en el aprendizaje de las matemáticas.

Finalmente hacemos la siguiente reflexión, considerando que la premisa de este estudio fue en parte confirmada: una instrucción bien planeada, intencionadamente cognitiva y responsablemente ejecutada consigue activar aspectos metacognitivos, aunque de forma limitada. El profesor, dispuesto a reconocer la relevancia educativa de las habilidades metacognitivas ¿no debería remodelar la planificación y ejecución de la instrucción, en aras de una decidida activación y desarrollo de dichas habilidades?

Agradecimientos

Somos imensamente gratos al Profesor Doutor José António Cajaraville Pegito (in-memoria), responsable por dirigir el processo de instrucción mencionado, por su contribución en las discusiones del texto, pero sobretodo por su dedicación y amor à la Educación Matemática.

Este texto es um recorte de la tesis doctoral de la primera autora presentado en el Programa de Didactica de las Ciencias Experimentales y de las Matemáticas de la Universidade de Santiago de Compostela.

Referencias

Baten, E., Praet, M. y Desoete, A. (2017). The relevance and efficacy of metacognition for instructional design in the domain of mathematics. *ZDM - The International Journal on Mathematics Education, 49*(4), 613–623. https://doi.org/10.1007/s11858-017-0851-y

Balderas, M. J. C., Páez, D. A. y Martínez M. G. P. (2020). Discusión teórica sobre las prácticas docentes como mediadoras para potencializar estrategias metacognitivas en la solución de tareas matemáticas. *Educación Matemática*, 32(1), 221-240. http://www.revista-educacion-matematica.org.mx/descargas/vol32/1/10REM32-1.pdf

Breda, A. (2020). Características del análisis didáctico realizado por profesores para justificar la mejora en la enseñanza de las matemáticas. *Bolema*, *34*(66), 69-88. https://doi.org/10.1590/1980-4415v34n66a04

Breda, A., Hummes, V. B., Silva, R. S. y Sánchez, A. (2021a). The Role of the Phase of Teaching and Observation in the Lesson Study Methodology. *Bolema* (Rio Claro), 35(69), 263-288. https://doi.org/10.1590/1980-4415v35n69a13

Breda, A., Seckel, M. J., Farsani, D., Silva, J. F., y Calle, E. (2021b). Teaching and learning of mathematics and criteria for its improvement from the perspective of future teachers: a view from the Ontosemiotic Approach. Mathematics *Teaching Research Journal*, 13(1), 31-51 https://commons.hostos.cuny.edu/mtrj/wp-content/uploads/sites/30/2021/04/v13n1-Teaching-and-learning-of-mathematics-and-criteria.pdf

Brousseau, G. (1998). *La téorie des situations didactiques*. Grenoble: La Pensée Sauvage.

Cornu, B. (1991). Limits. In David Tall (Ed.) *Advanced Mathematical Thinking*. (Dordrecht: Kluwer Academic Publisher), 153-166.

Cornu, B. (1991). Limits. In David Tall (Ed.) *Advanced Mathematical Thinking*. (Dordrecht: Kluwer Academic Publisher), 153-166.

Díaz, A., Pérez, M., González-Pienda, J. y Núñez, J. (2017). Impacto de un entrenamiento en aprendizaje autorregulado estudiantes universitarios. *Perfiles Educativos*, *39*(157), 87–104. https://perfileseducativos.unam.mx/iisue_pe/index.php/perfiles/article/view/58442

Flavell, J. (1976). Metacognitive aspects of problem solving. In L. Resnick (Ed.). *The nature of intelligence*. (Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates).

Flavell, J. (1979). Metacognition and cognitive monitoring: a new area of cognitive-developmental inquirí. *American Psychologist*, 34, 906-911. https://psycnet.apa.org/record/1980-09388-001

Flavell, J. (1981). Monitoring social cognitive enterprises: something else that may develop in the area of social cognition. In Flavell J. y Ross L. (Eds.), *Social cognitive development: frontiers abd possible future*. (New York: Cambridge University Press), 272-287.

Flavell, J. (1987). Speculation about the motive and development of metacognition. In Weinert, F. & Klowe, R. (Eds.). *Metacognition, Motivation and Understanding*. (Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers), 21-29.

Font, V. (2005). Una aproximación ontosemiótica a la didáctica de la derivada. En A. Maz, B. Gómez y M. Torralbo (Eds): *Investigación en Educación Matemática. Noveno Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática*. (Córdoba: Universidad de Córdoba), 109-128. http://funes.uniandes.edu.co/1303/

Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 22, (2/3): 237–284. https://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/04_enfoque_ontosemiotico.pdf

Godino, J. D. (2022). Emergencia, estado actual y perspectivas del enfoque ontosemiótico en educación matemática. *Revista Venezolana de Investigación en Educación Matemática (REVIEM)*, 2(2), 1-24 - e202201. http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/documentos/Godino_Emergencia_EOS_REVIEM_2021.pdf

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2019). The Onto-semiotic Approach: implications for the prescriptive character of didactics. *For the Learning of Mathematics, 39*(1), 37-42. https://www.jstor.org/stable/26742011

Godino, J. D., Giacomone, B., Batanero, C., & Font, V. (2017). Enfoque ontosemiótico de los conocimientos y competencias del profesor de matemáticas. *Bolema,* 31(57), 90-113. https://doi.org/10.1590/1980-4415v31n57a05

 BY-NC

Gonçalves, Mª. C. M. (1996). *A influência da Metacognição na aprendizagem: uma intervenção realizada na aula de matemática*. [dissertaçao/dissertação de mestrado, Lisboa, Portugal]: Universidade Católica Portuguesa.

González, F. (1996). Acerca de la Metacognición. *Paradigma, XIV al XVII*, n.1, pp. 109 -135, jun.

Gusmão, T. C. R. S. (2006). *Los procesos metacognitivos en la comprensión de las prácticas de los estudiantes cuando resuelven problemas matemáticos: una perspectiva ontosemiótica*. [tesis/tesis doctoral, Santiago de Compostela, España]: Universidade de Santiago de Compostela. http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/documentos/Tesis_doctoral_Tania_Gusmao.pdf

Gusmão, T. C. (2009). A estreita relação entre os modelos de resolução de problemas e a metacognição: uma questão de circunstancias. *Boletim GEPEM* / 54, 77-92. Rio de Janeiro. https://periodicos.ufrrj.br/index.php/gepem/article/view/318

Gusmão, T. C.; Font, V. y Cajaraville, J. A. (2009). Análises cognitivo e metacognitivo de práticas matemáticas de resolução de problemas: o caso Nerea. Revista *Educação Matemática Pesquisa*, 11(1), 79-116, São Paulo. https://revistas.pucsp.br/emp/article/view/2134

Gusmao, T. C. R. S., Cajaraville, J. A., Font, V. y Godino, J. D. (2014). El Caso Victor: dificultades metacognitivas en la resolución de problema. *Bolema* [online], 28(48), 255-275. Rio Claro, São Paulo. https://www.scielo.br/j/bolema/a/W4CxvyxGxdFnq8zBdH4LxQQ/abstract/?lang=es

Jiménez R. V.; Puente F. A. (2014). Modelo de estrategias metacognitivas. *Revista de Investigación Universitaria*, 3 (1), 11-16. doi.org/10.17162/riu.v3i1.36

Kambita, D. y Hamanenga, J. (2018). The impact of problem solving approach on students' performance in mathematical induction: A case of Mukuba University. *Journal of Education and Practice, 9*(5), 97–105.

Martínez, X. (2017). Pedagogías metacognitivas y la construcción de un foro dialógico. *Innovación Educativa, 17*(74), 8–10.

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving.* London, United Kingdom: Academic Press Inc. (London) Ltd.

Schraw G. y Gutierrez A. P. (2015). Metacognitive Strategy Instruction that Highlights the Role of Monitoring and Control Processes. In: Peña-Ayala A. (eds) *Metacognition: Fundaments, Applications, and Trends*. Intelligent Systems Reference Library, vol 76. Springer, Cham. doi:10.1007/978-3-319-11062-2_1

Wellman H. (1985). The origins of metacognition. In Forrest-Pressley, Mackinnon y Waller (Eds). *Metacognition, cognition, and human performance* Vol.1, Theoretical Perspectives. (London: Academia Press, Inc), 1-31.

Venancio, M. A. S. (2020). Metacognição: um estudo exploratório com o game educacional A Fazendinha Matemática aplicado em estudantes do ensino fundamental. [Dissertação, Vitória da Conquista, Brasil]: Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia. http://www2.uesb.br/ppg/ppgen/wp-content/uploads/2021/03/DISSERTA%C3%87%C3%83O-MARCIO-ANTONIO-S.-VENANCIO-1.pdf

Autores

Tânia Cristina Rocha Silva Gusmão. Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia (UESB), Brasil. Bolsista produtividade CNQop-PQ-2. professorataniagusmao@gmail.com

https://orcid.org/0000-0001-6253-0435

Vicenç Font Moll. Departamento de Educação Lingüística, Literaria e Didactica de las Ciencias Experimentales y Matematicas: Universitat de Barcelona. España. vfont@ub.edu

https://orcid.org/0000-0003-1405-0458

Anahí Huencho, Eugenio Chandía, Francisco Rojas, Guillermo Williamson

TERCER ESPACIO: MODELO DE TAREAS MATEMÁTICAS CON RESPONSABILIDAD CULTURAL DESDE EL CONTEXTO INDÍGENA[1]

Third space: Model of mathematical tasks with cultural responsibility from the indigenous contexts

RESUMEN

La enseñanza de las matemáticas en contextos indígenas suele desconocer el conocimiento matemático y los estilos de enseñanza de las comunidades, posicionando el dominio escolar occidental. Las consecuencias de esto ameritan formular una propuesta que se levante desde los pueblos indígenas, por lo que esta investigación construye un modelo de tareas matemáticas con responsabilidad cultural (TMRC) desde el contexto mapuche en tres territorios indígenas de Chile y sus respectivas escuelas. El trabajo con cada establecimiento y su contexto familiar, se realiza bajo los ciclos de investigación y el proceso de investigación de acción participativa, desde donde se configura un modelo de TMRC con artefactos matemáticos, objetivos, actividades y gestión de clase como estructuras fundantes de un tercer espacio integrado de forma dialógica paralela entre la cultura local y la escolar.

PALABRAS CLAVE:

- *Tarea Matemática*
- *Responsabilidad Cultural*
- *Tercer Espacio*
- *Modelo*

ABSTRACT

The mathematics teaching in indigenous contexts often ignores the mathematical knowledge and teaching styles of the communities, positioning the western school domain. The consequences of this, merit formulating a proposal that is raised from indigenous peoples, so this research builds a model of mathematical tasks with cultural responsibility (MTCR) from the Mapuche context in three indigenous territories of Chile and their respective schools. The work with each establishment and its family context is carried out under the research cycles and the participatory action research process, from which a modelo MTCR is configured with mathematical artifacts, objectives, activities and class management as a founding structures of a third space integrated in a parallel dialogical way between local and school culture.

KEY WORDS:

- *Mathematical Tasks*
- *Cultural Responsibility*
- *Third Space*
- *Model*

[1] Esta investigación se ha desarrollado dentro del proyecto número 21130915 subvencionado por CONICYT-PFCHA/Doctorado Nacional; y dentro del proyecto número 15110006 subvencionado por CONICYT/FONDAP.

CC BY NC

Huencho, A., Chandía, E., Rojas, F. y Williamson, G. (2022). Tercer espacio: Modelo de tareas matemáticas con responsabilidad cultural desde el contexto indígena. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 25*(2), 197-222. https://doi.org/10.12802/relime.22.2523. Recepción: Junio 8, 2020 / Aceptación: Marzo 9, 2023

RESUMO

O ensino das matemáticas em contextos indígenas desconhece, em geral, o conhecimento matemático e os estilos de ensino das comunidades, posicionando o domínio escolar ocidental. As consequências de esta questão levam a formular uma proposta que se levante dos povos indígenas, por isso esta pesquisa construiu-o o modelo de tarefas matemáticas com responsabilidade cultural (TMRC) no e do contexto mapuche em três territórios indígenas do Chile e as suas respectivas escolas. O trabalho com cada estabelecimento e o seu contexto familiar, realiza-se sob os ciclos de pesquisa e o processo de pesquisa ação participativa, a partir da qual se configura um modelo de TMRC com artefatos matemáticos, objetivos, atividades e gestão de aula como estruturas fundantes de um terceiro espaço integrado de forma dialógica paralela entre a cultura local e a escolar.

PALAVRAS CHAVE:

- *Tarefa Matemática*
- *Responsabilidade Cultural*
- *Terceiro Espaço*
- *Modelo*

RÉSUMÉ

Dans les communautés Mapuche du Chili, l'enseignement des mathematiques suit le traitement habituel indiqué par les programme d'enseignement du pays, donc les connaissances mathématiques et les styles d'enseignement propres à la culture mapuche, ils sont normalement ignorés. Les conséquences que cela entraîne, méritent une reformulation de l'enseignement, tenant compte des aspects ethniques. Cette recherche présente un modèle de tâches mathématiques, qui prend en compte la culture propre des communautés mapuches (TMRC). L'expérimentation a été réalisée dans des écoles primaires, de trois territoires mapuches. Ont été utilisés le cadre "des cycles de recherche" et du "processus de recherche d'action participative", pour construire un modèle de TMRC avec des artefacts mathématiques, objectifs, activités et gestion de classe, comme structures fondatrices d'un troisième espace, intégrant ainsi la culture locale et la culture scolaire.

MOTS CLÉS:

- *Tâche Mathématique*
- *Responsabilité Culturelle*
- *Troisième Espace*
- *Modèle*

1. Introducción

En los últimos 40 años la investigación de las matemáticas situadas ha evidenciado al menos tres focos en el ámbito educativo: a) construcción de curriculum flexibles a las demandas de una ciudadanía críticar, b) promoción de cambios didácticos en la forma de enseñar las matemáticas escolares centrada en lo local,

BY-NC

y c) dificultades para establecer metodologías de modelamiento matemático que incluya la resolución de problemas desde una perspectiva intercultural (Bernardi y Caldeira, 2012; Greer, 2013). Esto evidencia que, si bien existe la intención de fortalecer las matemáticas situadas, la interculturalidad desafía a las propuestas metodológicas. Al respecto, Greer (2013) y Pais (2011) concuerdan que las intervenciones en el aula intercultural suelen acabar perdiendo el objetivo situado, al valorar únicamente las matemáticas occidentales. Lo cual ha generado en las comunidades indígenas un rechazo absoluto a las nuevas propuestas, al considerarlas verdaderas "encomiendas" para invadir, conquistar y servirse del conocimiento cultural (Semali, Hristova y Owiny, 2015).

Este continuo intento de abordar la enseñanza de las matemáticas de forma situada en el aula intercultural ha dejado en evidencia diferentes barreras, tales como: a) políticas centradas solo en la promoción y rescate de la lengua indígena en el aula, sin la formación necesaria para los docentes y educadores tradicionales (Peña-Cortés, Huiliñir-Curío, Pincheira-Ulbrich, Quintriqueo, Quilaqueo, Gutiérrez y Morales, 2018). Lo cual se traduce en carencia de metodologías y estrategias didácticas para integrar el conocimiento y cultura de los pueblos indígenas y el occidental; b) predominio de un currículo occidental y monocultural (Mansilla Llancavi, Mieres y Montanares, 2016); c) falta de reconocimiento y participación de la comunidad y familia (Williamson, 2008), d) menoscabo de la integración de relatos orales y el conocimiento territorial; e) recursos didácticos o pedagógicos que subordinan los contenidos de los pueblos al currículo occidental (Peña-Cortés *et al*., 2018). Sin embargo, estas dificultades se convierten en oportunidades para los modelos de educación intercultural de integración paralela, los cuales comprenden el aula como un fenómeno de interacción entre dos espacios que se intersecan en un tercero (Aikenhead, 1997; Bhabha, 1994; Mpofu, Otulaja y Mushayikwa, 2014).

En este esfuerzo por comprender el fenómeno del aula intercultural, y aunque puede ser limitado por las posiciones y disposiciones de los autores y la complejidad del fenómeno (Wences, 2021), el modelo del tercer espacio afirma que las culturas que interactúan en el aula presentan elementos comunes (Bhabha, 1994). Aunque algunos más críticos, plantean que la intersección no es más que la interpretación de una misma realidad, pero desde diferentes culturas y marcos conceptuales (Aikenhead, 1997; Walsh, 2015). En este sentido, se reconoce la complejidad del sistema de conocimiento indígena como la comprensión local exclusiva de una cultura que se ha adquirido a través de la acumulación de experiencias y percepciones íntimas con el entorno. Este se ha perpetuado a través de prácticas desarrolladas por cada pueblo al interactuar con su medio natural, y

 BY-NC

desempaquetado en un conglomerado de subsistemas de conocimiento que va desde las ciencias, tecnología, religión, lenguaje, filosofía, matemática, política a sistemas duales como el socioeconómico (Ogunniyi, 2007).

Esta comprensión converge con las orientaciones sobre la exigencia de un diálogo descolonizador no jerarquizado y dominante, que reconoce la necesidad de una simetría de las culturas en el aula intercultural (Wences, 2021), y que va más allá de las políticas interculturales estandarizadas al servicio de las imposiciones neoliberales (Zuchel y Henríquez, 2020). Así, el modelo resultante comprende las limitaciones, alcances y la movilidad de la cultura para expresar las tecnologías dispuestas en las prácticas de los pueblos indígenas como el mapuche (Walsh, 2018), pero visualiza en ésta una forma de contribuir al desarrollo de las culturas indígenas dentro de las aulas de clases.

En educación matemática, uno de los modelos que sigue una orientación del tercer espacio es la Enseñanza de las Matemáticas Culturalmente Responsable definida por Bonner (2014), quien la describe como aquella que provee acceso a ideas matemáticas, mediante el conocimiento de la cultura y su identidad en cada comunidad. Esto implica, que las competencias profesionales del docente incorporen el conocer metodologías de aproximación a la comunidad y a su cultura, y metodologías didácticas para crear un tercer espacio justo dentro de sus procesos de enseñanza escolar (Mpofu *et al*., 2014).

Chile, reconocido como laboratorio neoliberal, ha establecido una serie de políticas educativas para la integración cultural en el aula (Zuchel y Henríquez, 2020). Sin embargo, éstas carecen de orientaciones que capaciten y entreguen herramientas al sistema escolar para construir una escuela intercultural. Lo cual ha invisibilizado la discriminación y reproduciendo de nociones hegemónicas de la cultura occidental, imposibilitando la condición de igualdad necesaria para sustentar un proyecto intercultural (Stefoni, Stang y Riedemann, 2016).

En esta misma línea, las propuestas en Educación Matemática han presentando movilización únicamente desde las traducciones al mapudungun del conocimiento matemático curricular escolar, sin cuestionar su pertenencia a la cultura del pueblo tanto local como temporal de la praxis de éstos (Huencho, Chandia, Rojas y Williamson, 2021). En la actualidad, la Educación Matemática de Chile carece de una política de formación inicial y continua de docentes y educadores tradicionales al alcance de un tercer espacio.

Así, esta investigación aborda la necesidad de generar un tercer espacio, tomando en cuenta el conocimiento y cultura del pueblo mapuche, específicamente el situado en la región rural de la Araucanía. Por tanto, el propósito es generar una propuesta de comprensión dispuesto en un modelo de integración cultural basado en la Enseñanza de las Matemáticas Culturalmente Responsable, que permita crear condiciones para fortalecer las capacidades de los docentes que están en contextos de interculturalidad con foco el diseño de tareas matemáticas. Con esto, la propuesta resultante no trata de homogeneizar las culturas que se encuentran en el aula intercultural, ni establecer una relación funcional, si no que reconoce la desigualdad existente y redistribuye el conocimiento en función de un Tercer Espacio justo para la comunidad escolar (Zuckel y Henríquez, 2020).

De esta forma, en el marco conceptual de este reporte de investigación se presentan los tópicos referidos a la Enseñanza Culturalmente Responsable, para luego adentrarse en la Educación Matemática bajo esta premisa. En la metodología, se describe las comunidades donde se llevó a cabo el estudio, las técnicas de recolección y análisis de los datos. En los resultados, se describen las dimensiones de análisis: Definición de una tarea matemática con responsabilidad cultural, Implementación de la tarea y Pertinencia situada. Por último, se encuentra el apartado de discusiones y conclusiones, donde se establece un modelo en consecuencia de la comprensión de los resultados del estudio.

2. Marco conceptual

Una perspectiva cultural de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas parte con reconocer que la clase de matemática está inserta en un cuerpo educativo y contexto educacional que forma las oportunidades de aprender de los estudiantes. Esta comprensión ha llevado a explicar, representar y comprender el proceso observado en diferentes niveles educativos y culturales en las últimas tres décadas (Blömeke, Gustafsson y Shavelson, 2015; Brousseau, 2007; Shulman, 1987). Así, cada una de estas formas ha establecido aproximaciones de como se desarrolla la enseñanza y el aprendizaje en situaciones específicas para propósitos establecidos, es decir, han caracterizado un modelo explicativo de este (Borromeo y Lesh, 2013). Por tanto, cualquier forma de comprensión, como modelo, requiere de un marco conceptual para lograr establecer interpretaciones y representaciones del fenómeno observado. Marco que actúa como filtro para seleccionar, organizar, transformar o inferir patrones y regularidades bajo la superficie de lo que se quiere modelar (Lesh y Lehrer, 2003). De este modo, la perspectiva cultural e intercultural es modelable desde diferentes puntos de vista de los investigadores. Entre las diferentes aproximaciones, destacan aquellas que establecen un modelo

 BY-NC

desde perspectivas teóricas (Blömeke *et al*., 2015; Depaepe y König, 2018) y aquellas que lo establecen relacionando aspectos teóricos con empíricos de investigación (Shulman, 1987). Ejemplo de este último son los modelos de enseñanza culturalmente responsable (ECR).

2.1. *Enseñanza Culturalmente Responsable*

Operacionalizar la Enseñanza Culturalmente Responsable (ECR) implica el desarrollo de un perfil efectivo de enseñanza, que se contrapone al aula tradicional, donde es el profesor quién define lo que es central, apropiado y aceptable (Bishop, Berryman, Cavanagh y Teddy, 2009). La ECR va más allá de determinar qué y cómo se debe enseñar, ésta reconoce el rol que cumple la interacción social en el desarrollo cognitivo del estudiante (Boon y Lewthwaite, 2015).

El modelo de enseñanza bajo el enfoque ECR se constituye como un espacio donde los estudiantes y el conocimiento de su cultura es provocado e incorporado a la clase, aceptado y oficializado como objetivo de enseñanza, enmarcando procesos de gestión con sentido. De tal manera, el capital cultural de los estudiantes es el que proporciona la base del aprendizaje, el que se expande a nuevos campos de conocimiento a través de interacciones estructuradas con personas significativas del entorno (Bishop *et al*., 2009). La ECR se considera como un constructo multidimensional que toma en cuenta el contenido curricular, estrategias instruccionales, evaluación del logro y el clima de clase de un aula diversa culturalmente (Gay, 2010), considerando como base la idea de que la enseñanza y el aprendizaje son influenciados por la cultura del profesor, de la clase, de los estudiantes, de la escuela, y de la comunidad donde están insertas (Parker, Bartell y Novak, 2017). De este modo, Gay (2002) describe algunas prácticas observables en la ECR: Consciencia cultural crítica, donde el profesor es consciente de la cultura y del efecto que esta tiene en su conducta como profesional de la educación; clima de clase, donde se remueven los estereotipos y se crean condiciones de equilibrio y reconocimiento; comunidades de aprendizaje, donde se desarrolla un sentido de interdependencia, además de sentimientos de comunidad en la cual los estudiantes comprenden que sus vidas y destinos son cercanos, adquiriendo una obligación moral y política de responsabilidad de ayudar a sus pares a aprender; currículo Multicultural e instrucción culturalmente congruente, donde se apela a que el aprendizaje de los estudiantes mejora cuando el contenido es familiar, tiene alto interés para ellos, es desafiante, está directamente relacionado a su conocimiento prioritario y esta presentado en la forma de su modelo de aprendizaje de la cultura. De forma particular, la ECR

BY-NC

se puede observar en cada uno de los actores del aula escolar, así como en el ambiente de aprendizaje.

2.2. *Enseñanza de las Matemáticas Culturalmente Responsable*

El reconocimiento de la ECR permitió a los investigadores Nasir, Hand y Taylor (2008) afirmar que el conocimiento matemático está inherentemente relacionado a las prácticas culturales, identificando tres niveles de vinculación: (a) el conocimiento de las matemáticas como actividad cultural (las estructuras y el discurso de las matemáticas cotidianas frente a las matemáticas escolares), (b) el aprendizaje de las matemáticas como una empresa cultural (las estructuras y el discurso del aula frente al hogar y la comunidad local de los estudiantes), y (c) el sistema de educación matemática como sistema cultural (acceso y posicionamiento en el campo de las matemáticas).

A partir de esto, Bonner (2014) define la Enseñanza Matemática Culturalmente Responsable (EMCR) como aquella que provee acceso a las ideas matemáticas mediante la cultura y su identidad. El autor plantea que entre las prácticas precursoras de EMCR se encuentran el establecer relaciones entre el profesor, los estudiantes, la comunidad y la familia, para obtener conocimiento de su cultura y así incorporar en las prácticas del aula el conocimiento de la cultura de forma pedagógica. Para adquirir este tipo de conocimiento, los profesores deberían constantemente conversar con los estudiantes sobre sus modos de vida, lenguaje, valores, creencias y conocimiento adquirido para luego integrarlo al conocimiento clásico y así evidenciarlos en sus prácticas.

De esta forma, propone 5 dimensiones para el modelo EMCR: a) comunicación, donde los profesores reconocen que ellos deben ser capaces de comunicarse con los estudiantes, para dar acceso a las matemáticas, b) reflexión y revisión cultural, donde el profesor continuamente evalúa sus prácticas y revisa la conexión que tiene con la cultura de los estudiantes y la comunidad donde está inserta la escuela, c) pedagogía y disciplina, donde el profesor evoca los elementos de su competencia profesional, d) empoderamiento del estudiante, donde el profesor provee de oportunidades para que el estudiante consolide su conocimiento e identidad cultural en la clase, y e) establecimiento de espacios para el desarrollo y mantención de la identidad racial y cultural.

Así, y dado que el diseño de la tarea matemática a implementar es la que concreta el propósito de la enseñanza (Chandía, Huencho, Rivas y Ortíz, 2018), la EMCR se alcanzaría al diseñar y ejecutar tareas matemáticas con responsabilidad cultural.

 BY-NC

3. Metodología

Para el desarrollo de esta investigación se contempló una metodología cualitativa bajo el marco de los Ciclos de Investigación y Desarrollo (CID) (Goodchild, 2014) y el proceso de Investigación Acción Participativa (IAP) (Susman, 1983), en comunidades indígenas territorialmente circunscritas a tres escuelas primarias reconocidas por el estado chileno, lo cual se fundamenta en el hecho de que los métodos permiten hacer interactuar a las comunidades indígenas, la comunidad escolar e investigadores. En este sentido, el investigador actúa como pivote de situaciones y mediador para un proceso de integración paralela, así como recolectores de los elementos que debería tener el Tercer Espacio.

Participantes

En cada una de las tres escuelas participa su director, los profesores que realizan clases de matemáticas, los educadores tradicionales, todos los estudiantes y sus respectivas familias, quienes firmaron el consentimiento de participación, se describen en la Tabla I.

TABLA I
Participantes por comunidad y escuela

Escuela	*Comunidad*	*Director*	*Docentes*	*Educadores tradicionales*	*Estudiantes*	*Familias*
Botronhue	Lladquihue Norte, Labranza	1	1	1	7	7
San José	Lladquihue Sur, Labranza	1	2	1	14	14
Vega Larga	Peuman Mapu, Lautaro	1	2	1	24	24

Fuente: elaboración propia

La disposición geográfica de las comunidades donde se encuentran las escuelas da variabilidad (Peña-Cortés *et al.*, 2018) a los posibles elementos del Tercer Espacio (ver Figura 1).

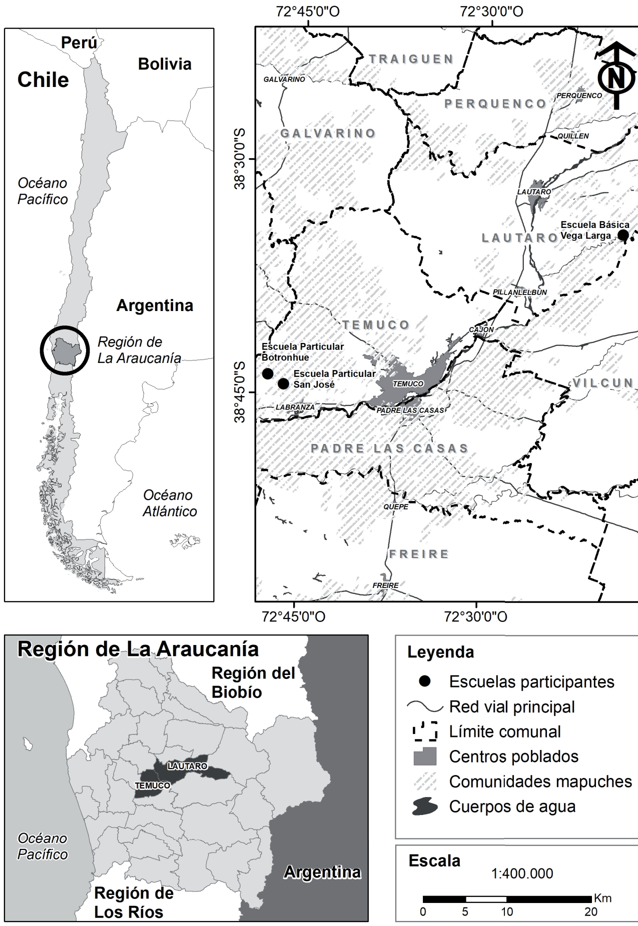


Figura 1. Ubicación geográfica de las comunidades

Procedimiento

Con el objeto de identificar los elementos del Tercer Espacio, se hizo necesario hacer interactuar a representantes de la cultura escolar, directivos y docentes, y de la cultura mapuche, estudiantes, familia de los estudiantes y educadores tradicionales. Para facilitar la interacción, participa un investigador quién favorece el diálogo y el establecimiento de acuerdos. En cada sesión el investigador incita el diálogo entre las partes con preguntas orientadoras. Cada pregunta sitúa y hace reflexionar sobre algún aspecto de la cultura local, o bien, en aspectos de la cultura escolar para el diseño y ejecución de tareas. Producido el diálogo, se trata de

 BY-NC

determinar los elementos del Tercer Espacio mediante la regulación cultural de acción participativa, elemento ajustado de los procesos de IAP. Con esta estructura se ejecuta un total de 54 sesiones de entre 2 y 4 horas distribuidas en tres etapas considerando los CID como se visualiza en la Figura 2.

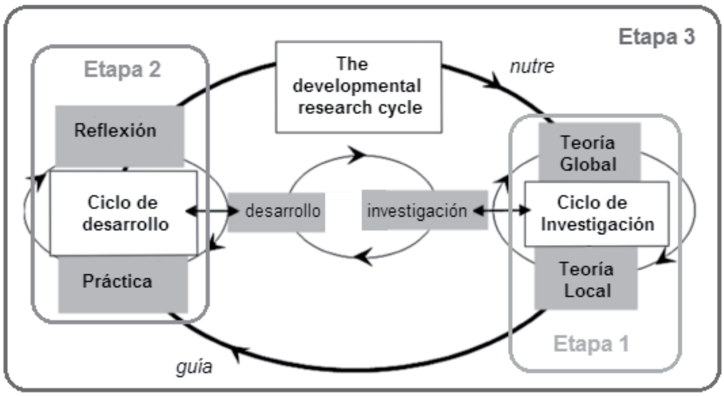


Figura 2. Adaptación de The developmental research cycle (Goodchild, 2014, p. 208)

- La primera etapa constituye un primer ciclo de un CID y tiene como objetivo acercarse al proceso de matematización compartido a partir del significado construido por las comunidades mapuche y por las escuelas, donde teorías locales (conocimiento construido por las comunidades) y globales (marco teórico del investigador y la cultura establecida por la escuela) se complementan para definir necesidades y demandas al proceso educativo de las matemáticas, y así construir una propuesta didáctica que los solvente.
- La segunda etapa corresponde a un ciclo de desarrollo del CID, donde la teoría se transforma por medio de la reflexión sobre los objetos de aprendizaje y el análisis epistemológico de las matemáticas locales y escolares, y se generan planes de acción a implementar. Entonces, de forma colaborativa, se implementa con los estudiantes una unidad didáctica en colaboración con sus familias. Posteriormente, se realiza una revisión y reflexión crítica del proceso para contrastar y fortalecer el modelo con un nuevo ciclo de desarrollo, lo que implica enfrentar la primera hipótesis del modelo teórico con el desarrollo de ésta y así construir una mejorada, es decir, un *modelo con sustento práctico.*
- La tercera etapa corresponde a un nuevo ciclo de investigación del CID con el objeto de valorar el modelo elaborado desde los ciclos de investigación y desarrollo anteriores. El objetivo de esta etapa es evaluar

cómo los productos obtenidos en la etapa de investigación y desarrollo se consideran un aporte al contexto educativo y social. Esta tercera etapa da sentido al criterio de validez científico para investigaciones cualitativas desarrolladas en entornos de comunidades específicas, donde la comunidad debe configurarse como árbitro de calidad del proyecto.

Recolección y análisis de datos

Desde el planteamiento de las preguntas orientadoras hasta el establecimiento de acuerdos, se reflejan las etapas de visualización, reflexión y acción de la IAP. Así, en cada sesión y de forma colaborativa se determinan a) los focos a visibilizar en el contexto propuesto, preguntas que guían cada sesión, necesidades entre los sujetos y la interacción y negociación de demandas; b) se generan reflexiones por medio de la interacción dialógica que permite saturación de ideas; y c) se establecen acciones, como acuerdos o desacuerdos resultantes del diálogo establecido. Esto permite recolectar los datos y analizarlos en las mismas sesiones entre todos los miembros representantes de ambas culturas.

4. Resultados

4.1. *Definición de una Tarea Matemática con Responsabilidad Cultural (TMRC)*

Para definir una TMRC pertinente a las necesidades del territorio se establece una primera Etapa de *Investigación* del Ciclo de Goodchild (2014), con el objeto de construir un prototipo que las aborde. Así, se desarrollan dos grupos de acciones denominadas "Organizando una TMRC" y "Co-construcción de la TMRC: Prototipo y modelación".

4.1.1. *Organizando una TMRC*

Las cuatro sesiones de *Organización* desarrolladas en cada una de las tres comunidades establecen un conjunto de necesidades que responden al ámbito local y global en el área académica de la educación matemática. El primer conjunto de necesidades hace referencia al nulo impacto que el aprendizaje de las matemáticas evidencia en el cotidiano de las actividades locales. Se explicita la

 CC BY-NC

distancia entre lo que se aprende en la escuela y las relaciones lógicas, tangibles y cotidianas que se realizan habitualmente en la comunidad, lo que se sustenta desde las apreciaciones dadas por los adultos de la comunidad:

> "Le digo que me corte un pedazo de madera que mida lo mismo que este coligue (madera) y él utiliza una huincha, mide el coligue y luego con la huincha pone la medida en el palo y en todo eso le queda más largo o más corto (…), no pueden resolver situaciones del día, se les debe dar la instrucción completa de lo que uno quiere que haga y cómo quiere que lo haga y como nunca están con nosotros, viendo lo que hacemos, no saben cómo hacer." (CM22[2])

Otra necesidad es la contribución de la asignatura lengua indígena[3], con foco en la lengua y cultura territorial, a las otras asignaturas de currículo, incluida la educación matemática.

> "No tenemos orientaciones para enseñar nuestra matemática (desde lo curricular). A lo más unas páginas donde se tratan los números en *mapudungun* (lengua mapuche) para aprender de memoria, es más vocabulario que otra cosa. (…) somos una isla, no conectamos ni tributamos a otra asignatura" (ET3)

En el mismo sentido, los docentes no visualizan el efecto de los recursos, metodologías y estrategias tradicionales de la enseñanza de las matemáticas en el aprendizaje de los estudiantes. Advierten que los esfuerzos desplegados no han movilizado el aprendizaje ni el gusto por la asignatura.

> "Nosotros tenemos recursos manipulativos para los estudiantes, usamos bloques, (…), autitos de diferentes colores (…) les decimos, si José tienen 4 autitos azules y Valeria tiene 3 autitos verdes, ¿cuántos autitos más tiene José?, y no hay caso, ellos suman todo, la palabra más (de la pregunta) los confunde, le hacemos la pregunta tal como viene en el libro, donde se muestran dibujados los autitos, cambiamos a bloques de color, autitos de juguete y nada…, no sabemos qué más hacer (…). luego viene SIMCE[4] y salimos mal." (PM1)

Dada la sistematización del proceso etnográfico previo al diseño de una TMRC, y su sociabilización en la comunidad escolar, se observa que el pueblo mapuche posee conocimiento matemático implícito en sus actividades cotidianas

[2] Nomenclatura: Comunidad Mapuche (CMnº), Educador Tradicional (ETnº), Profesor de Matemática (PMnº), Estudiante (Enº), Apoderado Mapuche (AMnº) e Investigadora (INV).

[3] Lengua indígena: asignatura implementada en los colegios chilenos con sobre un 20% de matrícula indígena asociadas a las lenguas Aymara, Quechua, Mapudungun y Rapa Nui, desde el años 2010 a la fecha.

[4] Prueba estandarizada nivel nacional. SIMCE: Sistema de Medición de la Calidad de la Educación.

y metodologías de enseñanza, las cuales podrían ser tratadas como actividades escolares. También acuerdan que este tipo de prácticas contribuiría al logro de los aprendizajes matemáticos escolares junto con fortalecer el conocimiento local y la identidad del educando.

> "El *püron* (nudo en lana) para registrar la edad de las personas (…) la luz y las estrellas nos determinan etapas del año y del tiempo dentro del día (…). El mapuche debe propiciar el *rakizuam* (desarrollo del conocimiento, resolver un problema) en el aprendiz, no sólo que copie y repita, sino que pueda apropiarse del concepto y su proceso y lo ponga a prueba y generar algo propio, nuevo, (pausa en silencio) así lo hacia la familia antes." (CM50)

Finalmente, las escuelas están dispuestas a generar estrategias educativas en matemáticas con RC siempre que se cumplan ciertas condiciones, como el acceso a información clave en la materia; recursos y medios para su enseñanza; apoyo desde la familia frente a las producciones escolares que fortalezcan y mantengan la pertinencia dentro de la lógica cultural situada; y gestionar un ambiente de aprendizaje recíproco.

4.1.2. *Co-construcción de la TMRC: Prototipo y modelación*

En siete sesiones de trabajo en cada establecimiento, se elaboró un prototipo de unidad didáctica en Matemáticas con Responsabilidad Cultural, que contempla una tarea matemática y su forma de enseñanza. Desde las sesiones emerge la riqueza de la enseñanza por proyectos desarrollados de forma colaborativa, donde la diversidad de habilidades dadas por los roles de cada integrante permite enriquecer las estrategias y alcanzar la meta establecida, tal como lo plantea un Educador Tradicional:

> "El mapuche, antes, hacia todo en comunidad, el territorio era importante, nada se hacía de forma individual y cada participante era reconocido por su conocimiento o habilidad en la tarea o por ser un apoyo, cualquier cosa era importante y se reconocía por igual…" (ET1).

De esta manera, los ET y profesores de matemáticas decidieron escoger una actividad cultural situada desarrollada con un artefacto matemático propio. Para esto, lo primero fue identificar las matemáticas que involucran conexiones con el conocimiento de la comunidad local, determinando *artefactos matemáticos culturales* (AMC) que se impregnan de procesos matemáticos con sentido en la vida cotidiana. Luego, se establece un propósito para favorecer las oportunidades de alcanzar la comprensión y el desarrollo de esta matemática con apoyo del conocimiento curricular a través del AMC.

 CC BY-NC

> "El *püron* es pura matemática, es nuestra forma de escribir los números, por lo que puede ser más fácil conectarlo con la lengua mapuche y la asignatura de matemática. Es una forma que ya no se suele ver entre nuestra gente y necesitamos darle uso para el hoy, que sea importante hoy." (ET1)

Así, el proyecto educativo se planeó en base a caracterizar el entorno escolar por medio de un sistema de registro numérico a través del *püron*, donde el conocimiento matemático presente en el AMC se establece como una variable mediadora entre el conocimiento cultural y el conocimiento curricular.

Con el objetivo de enseñanza planteado y el artefacto matemático cultural explícito en él, se determinan actividades, preguntas orientadoras, tiempo, lugar y forma en que el proceso de enseñanza se desplegará en concordancia con las demandas que el AMC requiera para su desarrollo. El marco que determina la tarea tiene relación con generar oportunidades de alcanzar el *rakizuam* pero considerando los elementos curriculares, evidenciando una interacción dialógica entre comunidad y escuela.

ET2: el territorio ya lo dijo, la gente dijo que la forma es el *rakizuam*.
PM2: si, y me parece bien, pero ¿cómo lo hacemos?
ET2: deben participar todos los niños (1ro a 6to básico) en algo común, que tenga sentido para ellos. Yo me acuerdo que antes si había que construir una *ruka*, todo el territorio se reunía a construirla, todos apoyaban, no se construía nada de forma individual. (…) obvio que las cosas se complican y se deben resolver situaciones y eso se resuelve con más de una cabeza pensando.
(pausa de silencio)
ET2: entonces, todos los estudiantes de 1ro a 6to básico deberían trabajar bajo un mismo objetivo y sus productos debieran servir para un producto mayor, uno como colegio.
PM2: me parece bien (sonriendo), pero cómo generamos que creen, que creen (repite para enfatizar) nuevo conocimiento desde el *püron*.
INV: ¿Qué registros son los que reconocemos en el *püron*? y ¿Cuáles parecen no tener solución a simple vista?
ET2: sabemos números chicos, yo no recuerdo nada que supere el 10
PM2: pero si el nudo es para registrar los números del mapuche y podemos decir números más grandes que 10 éstos se pueden registrar con nudos también ¿o no?
ET2: yo creo que sí, porque si se usaba para contar animales y antes el mapuche tenía muchos animales, así que se debiera poder, pero no sé cómo.

De la interacción, se establece la metodología, la estrategia y las actividades de enseñanza. La metodología se basará en proyectos. El inicio del proyecto se gestiona desde el educador tradicional quien ubica el artefacto dentro del pueblo respondiendo a quién, para qué y cómo lo usa / usaba, desde la manipulación

BY-NC

del artefacto y el relato de historias. El desarrollo del proyecto se articula desde el profesor de matemáticas que establece demandas con objeto de replicar y reconstruir un elemento matemático dentro del margen operacional del artefacto. El cierre del proyecto se articula en colaboración entre el profesor y el educador tradicional con objeto de provocar la comunicación y argumentación matemática del estudiante en torno a los productos alcanzados y su uso en la comunidad local.

> "Dado que el foco es que ellos construyan algo que nosotros no les hemos dicho como es o cómo puede ser, necesitamos pensar en las posibles soluciones que consideraremos correctas dentro de la lógica mapuche (…) por varias razones, entre ellas que la familia será un validador de las estrategias que el estudiante establezca (…) necesitamos saber si la proyección matemática que estamos pensando es adecuada para los parámetros de uso, (…) es vital el apoyo de nuestro educador tradicional." (PM3)

Establecidas las condiciones del proyecto, se generan estrategias de interacción entre el docente, los estudiantes y sus familias, de manera que promueva la negociación de significados, el aprovechamiento del error y el pensar desde la lengua. La interacción se gestiona desde un set de interrogantes que simplifican o amplifican la demanda con el fin de poner a prueba la argumentación lógica matemática detrás del producto establecido y orquestar la generalización de procesos.

Aunque la interacción permitió definir de forma proyectiva toda la clase, los docentes presentaron dudas de su propia gestión, "Tenemos todo lo necesario para desarrollar nuestras clases, tanto en el rol del educador tradicional, como el mío (profesor de matemática), pero no sé cómo actuar en la clase…" (PM1). Ante esto, la investigadora realiza una modelación de la totalidad de los procesos establecidos en la etapa de co-construcción, permitiendo conocer la trayectoria de producción de las respuesta que se esperan alcanzar; regular el nivel de desafío cognitivo de las demandas establecidas y de las que emergen producto de las contingencias del proceso; enriquecer conceptos matemáticos de la comunidad local usando el *purön* como medio; confirmar el alcance de los objetivos educativos planteados; evaluar el alcance del artefacto matemático cultural y su efecto en el aprendizaje.

4.2. *Implementación de una TMRC*

Una segunda Etapa denominada *Desarrollo* dentro del Ciclo de Goodchild (2014), pone en práctica el prototipo de TMRC diseñado. Así, se crean dos grupos de acciones denominadas "Aplicación y valoración de una TMRC" y "Artefacto y modelo de la TMRC".

 CC BY-NC

4.2.1. *Aplicación y valoración de una TMRC*

El proceso práctico de la etapa de desarrollo se realiza en cuatro sesiones de aplicación en aula y cuatro sesiones de valoración desde el contexto familiar en el hogar. Este proceso mostró un amplio entusiasmo e interés por el artefacto matemático situado en una práctica cotidiana antigua de gran valor histórico y social.

La clave de los productos alcanzados por los estudiantes se sustenta en la observación y escucha de relatos que posicionan al artefacto en un punto clave y mediático dentro del pueblo. La recreación y análisis de la situación, posicionan al AMC en demandas matemáticas complejas que impregna al grupo de estudiantes en un ambiente que desafía y motiva su actuar.

Así, el desarrollo del conocimiento matemático se orquesta desde la oportunidad de construir conocimiento dentro de una lógica estructural con sentido local, reconociendo los límites y alcances de las matemáticas con el artefacto. De esta manera, la construcción se desenvuelve en un ambiente de monitoreo constante, debido a la diversidad de caminos y productos que los estudiantes pueden escoger para resolver el desafío planteado. Por ejemplo, luego de solicitar el registro de la edad de una persona mayor en su hogar, se produce la siguiente interacción:

ET2: Amulen, ¿me enseñas lo que has registrado?
E6: (acción de entregar una lana con nudos)
ET2: Dame información que me permita leer tú registro
E6: tiene *püron* (nudo) grandes y simples, los grandes valen 10 y los simples 1
ET2: muy bien, entonces acá tenemos *mari* (10), *epu mari* (20), *küla mari* (30), (…) *pura mari kiñe* (91), *pura mari epu* (92), *pura mari küla* (93), (tocando cada nudo mientras realizaba el conteo) ¿es correcto?
E6: Sí.
ET2: la edad de quién es
E6: de mi abuelo José
ET2: ah, muy bien. ¿porqué tiene estos nudos aquí? (refiriéndose a nudos simple entre los nudos grueso)
E6: Me falto lana y allí me quedaba un espacio vacío.
ET2: Entiendo, muy bien hecho.
PM2: Amulen, ¿influye en algo que los nudos se mezclen, gruesos con simple en la lana?
E6: no, no influye.

El docente se anticipa a dos trayectos posibles: extraviar el objetivo de la demanda, o responder dentro de un proceso carente de lógica matemática. Para el docente, la primera situación comprende advertir y tratar, reinterpretando la demanda original; en cambio, en la segunda situación comprende entender hasta qué punto la toma de decisiones es coherente y planteando desafíos que los ayude a re-pensar la decisión tomada.

Por último, se gestionaron espacios de vinculación con el conocimiento familiar, recreándoles los productos generados, solicitándoles otras técnicas para una misma demanda, u otras demandas donde el artefacto tiene sentido. Los resultados muestran complicaciones por desconocimiento y desuso del artefacto, lo que llevó a las familias a reconocer entre ellas a las más conocedoras, para establecer vínculos, comunicarse y enriquecer el conocimiento local. Los abuelos tuvieron un mayor acercamiento a la práctica, validando la información que sustenta el artefacto y nutriendo a los estudiantes con nuevas historias familiares-locales asociadas. Por ejemplo, el padre de uno de los estudiantes indicó lo siguiente:

> "Mi abuelita era partera y yo sé que ella usaba una lana con nudos y con eso ella guiaba el tema del embarazo, la fecha de nacimiento, y permitía preparar la fecha de parto." (AM8)

4.2.2. *Artefacto y modelo de la TMRC*

Los Educadores Tradicionales coinciden en la satisfacción de promover un conocimiento que aporte a actividades de otras asignaturas, lo que otorga valor a su conocimiento y desempeño en el contexto escolar: "cuando iba a pensar que me iban a pedir apoyo para las matemáticas, me siento importante, se valora nuestro conocimiento" (ET2). Por su parte, el profesor de matemáticas reflexiona sobre el impacto del artefacto y las demandas planificadas para su desarrollo, el razonamiento matemático de los estudiantes, los procedimientos lógicos, la argumentación sobre la heurística, y las contingencias consideradas para resolver las diferentes problemáticas: "todo lo que pueden construir a partir de nudos y las formas en que argumentan sus productos los obliga siempre a moverse de su estatus de confort, debido a las tareas que les damos (…) solo apoyamos su proceso" (PM1). Concluyen con la idea que esta forma de hacer matemática moviliza al estudiante a esferas donde pone a prueba su conocimiento y su labor se centra en apoyar la continuidad del objetivo de trabajo planeado.

En cuanto a la percepción de las familias, en un inicio se cuestionaba el tratamiento de artefactos mapuche para enseñar matemáticas, aludiendo a que en clases se deben enseñar las matemáticas *winca* (no mapuche) "porqué les están enseñando eso, yo quiero que aprenda la matemática que el *winca* aprende" (AM12). Sin embargo, luego de la aplicación del diseño vinculado a los hogares de los estudiantes, su percepción se tornó positiva para los objetivos educativos planteados.

 BY-NC

El equipo de trabajo acuerda que la TMRC propuesta, es una fuente innegable de aprendizaje matemático que potencia los resultados favorables en pruebas estandarizadas nacionales, dado el fortalecimiento del razonamiento matemático desplegado. Sin embargo, advierten la necesidad de focalizar la TM dentro del formato lineal y parcelado del conocimiento dispuesto en el currículo escolar.

4.3. *Pertinencia situada de la TMRC*

Continuando con el ciclo, se despliega una nueva etapa de Investigación que se sustenta en las acciones generadas en el ciclo de desarrollo. Esta denominada Etapa 3 propone organizar un proceso coherente de exposición de la metodología de co-construcción, el método de enseñanza y los productos creados por los estudiantes dada la TMRC, para posibilitar el intercambio de opiniones, sugerencias y aportes de la comunidad local.

4.3.1. *Análisis de pertinencia situada de una TMRC*

Para desarrollar el intercambio de sugerencias desde la comunidad local, se planea el ilustrar secciones vivenciadas en el aula, expuestas por la comunidad escolar, en un ambiente natural para el pueblo mapuche como es la *ruka* (casa mapuche).

Iniciado el encuentro y en relación del AMC, la comunidad expresó gran interés en la representación utilizada para pequeñas cantidades "¡así lo usaba mi mamá! (…) hasta para enseñarme a tejer a telar, me dejaba nudos para saber cuántas hebras de cada color me faltaban" (CM40), frente a la exposición de lanas donde cada nudo representaba una unidad; para grandes cantidades, en cambio, surgieron dudas sobre el registro, siendo los estudiantes quienes debieron transmitir la forma de decodificar un número dentro de la unidad de mil. Los miembros de la comunidad se prestaron atentos, escuchando y replicando la manipulación del artefacto, expresando el desuso del artefacto dada la capacidad de registrar números en símbolos arábicos. Expresan que comprenden la lógica del código presentado, su coherencia lingüística con la lengua mapuche, la proyección que posee dentro del sistema numérico del pueblo y el sentido de lo que expresa, "nosotros ya no lo usamos, (…) los nudos están ordenados de la misma forma en que los decimos en *mapudungun*, (…) sirve para números más grandes aun" (CM2).

Las interacciones orales argumentativas sobre el AMC y el error en el constructo de nuevos contextos de uso, exige una labor docente centrada en guiar, movilizar las formas de razonar y promover múltiples respuestas acertadas.

BY-NC

Los docentes explicitan la capacidad de elaborar argumentos sustentados en razonamiento lógico matemático: “los niños pueden argumentar, hablar de producciones matemáticas, de razonamiento lógico, y lograron amplificar y generalizar en función de las tareas planeadas” (M2). Lo anterior, es evaluado dentro de las normas que posibilitan al estudiante vivenciar el *rakizuam* del pueblo. Así, la familia mapuche valora el diálogo entre el conocimiento conceptual y procedimental local con el escolar: “esto es lo que queremos, no sólo lo mapuche, queremos que aprendan la matemática del mapuche y del *winca* (persona no mapuche). Que se potencien.” (AM5).

Se valora la metodología de trabajo desarrollada desde lo local, su conocimiento ancestral y las formas en que se transmite para enriquecer la enseñanza académica. El educador tradicional y su labor dentro del proyecto, genera tranquilidad y cercanía dentro de la comunidad local, lo cual fortalece su posición al interior de la comunidad escolar. Destaca el compartir y opinar sobre los productos que se generan utilizando el conocimiento local al interior de la escuela,

> “Esto es bueno, lo que hicieron en clase es bueno, que ahora nos muestren lo realizado nos ayuda a fortalecer lo que ya casi hemos olvidado. Es importante que nuestros niños, nos ayuden a no olvidar.” (CM7)
>
> “Esto de contarles a todos mi historia, la que antes le conté sobre los nudos y cómo me enseñaron a mi, me llena de orgullo, me siento reconocido.” (CM10)

Finalmente, se concuerda que la forma de sustentar cada decisión del proyecto basado en las historias de vida de la comunidad mapuche de hoy y ayer, le otorga valor a su conocimiento y fortalece la identidad de los participantes de la sesión.

5. Discusión y conclusiones

Las implicancias de los resultados que emergen del diseño, aplicación y valoración de una TMRC, fueron estableciendo una serie de hitos, secuencias y conexiones que determinan el modelo que define y sustenta una TMRC como el principal componente del Tercer Espacio. Al interactuar comunidades locales y escolares, se encuentran sus culturas en un proceso de Investigación Acción Participativa, logrando con ello una integración paralela no dominante (Mpofu *et al.*, 2014). Luego, y para avanzar en la construcción, los ciclos de investigación y desarrollo, permiten la reflexión y la práctica en el diseño y ejecución de las TMRC (Goodchild, 2014). Esta metodología de diálogo, moviliza el conocimiento matemático hacia un producto de trascendencia temporal y social que construye

 BY-NC

una visión multicultural de su misma realidad, enriqueciendo ambas culturas y creando elementos de intersección (Bhabha, 1994; Wences, 2021).

Como parte de la intersección, el modelo centra su interés en el actuar del docente en su interacción constante con el contexto sociocultural que lo rodea, lo cual se evidencia en la fase de Organización y Co-construcción de la TMRC. Aquí, las necesidades / demandas del contexto y la generación de propuestas de actividades matemáticas situadas, permiten movilizar el conocimiento local hacia demandas locales y globales. Además, la participación de la comunidad local indígena facilita la caracterización del modelo de aula, dada la recreación tradicional e histórica de las formas de enseñanza del conocimiento en sus familias (Peña-Cortés *et al*., 2018). Ahora bien, pese a la valoración dada por la comunidad en el reconocimiento de su cultura, éstas validan la imposición histórica de un currículo monocultural, que les otorga una proyección social y económica, por lo que reconocen la influencia positiva que tiene en las trayectorias de vida de sus hijos e hijas (Mansilla *et al*., 2016).

En este sentido, el diseño y la ejecución de la TMRC cumple un rol formador de los actores de ambas culturas, dada la interacción de las mismas en cada una de las instancias de trabajo, respondiendo a una de las principales dificultades que enfrenta el aula multicultural (Peña-Cortés *et al*., 2018; Semali *et al*., 2015). Así mismo, tales instancias permiten crear un currículo que comprende un conocimiento desde una perspectiva multicultural (Williamson, 2008), impidiendo el dominio de alguna mediante la co-construcción de los objetivos matemáticos culturales y el diseño de las TMRC.

De esta manera, se establece un modelo (Ver Figura 3) que inicia con el reconocimiento de Prácticas Socioculturales (PS) con matemáticas intrínsecas en ellas, aquí es fundamental comprender la lógica de la praxis con un sentido matemático, dado que guiará las demandas conceptuales o procedimentales de un objeto denominado “Artefacto Matemático Cultural (AMC)” de aspecto tangible y/o conceptual, donde se involucran las matemáticas desde las visiones académicas escolares y socioculturales (Cantoral, Montiel y Reyes-Gasperini, 2015). Así, la necesidad de acudir a los insumos matemáticos propios del currículo escolar dependerá del conocimiento local que posea quien diseña las tareas matemáticas. Esto plantea un desafío, ya que en cuanto mayor sea la distancia respecto del conocimiento cultural local que tenga quién diseña, más requerirá del apoyo de un asesor cultural, de metodologías para el acceso a este conocimiento, y/o la creación de comunidades que se integran por actores representantes de ambas culturas y el establecimiento de diálogos en base a propósitos pertinentes y comunes (Zuchel y Henríquez, 2020).

BY-NC

Esto permite comprender la lógica matemática de la PS y el AMC emergente, como primer elemento del Tercer Espacio, columna central del modelo.

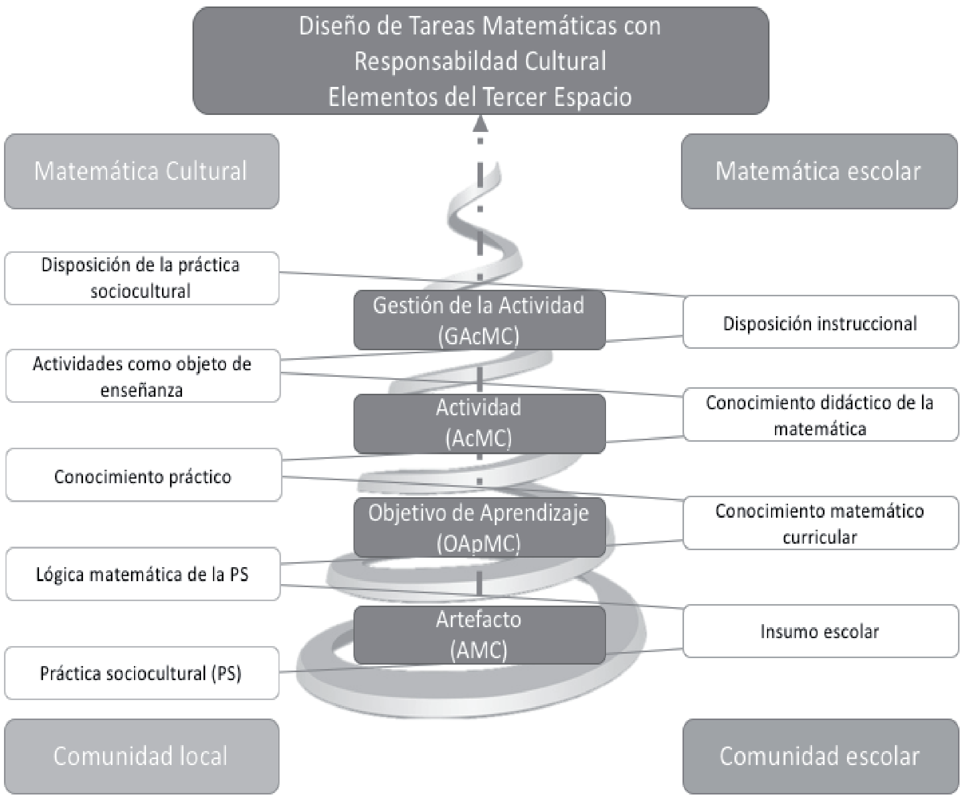


Figura 3. Modelo de Diseño de Tareas Matemáticas con Responsabilidad Cultural

El ciclo continúa relacionando el AMC con las matemáticas escolares, para posicionarla dentro de niveles educativos, ejes temáticos, contenidos específicos y/o objetivos de enseñanza acordes a su estructura conceptual y procedimental. Esto facilita su desarrollo y proyección a nivel de aula. Llegado a este punto, se debe considerar el riesgo de visualizar el AMC solamente para el beneficio del currículo escolar, por lo que es fundamental acudir al conocimiento práctico que condiciona la acción de él, para así establecer un objetivo conceptual y/o procedimental pertinente a las lógicas matemáticas propias, territoriales y temporales. Aquí nace el segundo componente del Tercer Espacio, el Objetivo de Aprendizaje Matemático Cultural (OApMC), compuesto por un contenido y una acción que responde a

 CC BY-NC

los requerimientos escolares y locales integrando los objetivos de aprendizajes propios del currículo dentro de una forma de proceder y razonar local.

Al diseñar un OApMC pueden ocurrir dos eventos diferentes, que la acción de la PS coincida con la solicitud curricular, o que se diferencien. En el primer caso se fortalece el conocimiento local y escolar. El segundo caso responde a una necesidad local, su conexión curricular se centra en habilidades matemáticas y/o en contenido desde formas lógicas locales, lo que permite tratar el conocimiento curricular nutriendo de significado lo conceptual y re-valorando lo local y por ende, enriqueciendo el contenido de manera multicultural (Aikenhead, 1997; Wences, 2021; Zuchel y Henríquez, 2020). En ambos casos se tratan las lógicas de razonamiento matemático locales, se actualizan los métodos de enseñanza y los contenidos matemáticos específicos escolares, tal como se desarrolló con la construcción de un código de representación numérica a través de nudos, *püron*, y su conexión con el sistema numérico mapuche.

Con el OApMC y el AMC explícito en él, se procede a configurar un posible set de actividades para los estudiantes que propicien el logro del objetivo planteado. Para ello se acude a las disposiciones inherentes a la Didáctica de las Matemáticas y a cada una de las dimensiones que determinan la construcción de una actividad. Como teorías de aprendizaje, demandas cognitivas, procesos instruccionales y gestión, modelos de interacción, recursos didácticos, etc., que proporcionan un marco de opciones de instrucción que condicionan los tipos de actividad y el conocimiento como Objeto de Enseñanza local (Huencho, Rojas y Webb, 2017). De lo anterior, se definen las Actividades Matemáticas Culturales (AcMC), como aquellas centradas en la enseñanza de la práctica sociocultural enfocada en el AMC, desde donde se configura un set de demandas que movilizan los diversos conceptos y propiedades inherentes al artefacto, determinando así, el tercer elemento del Tercer Espacio.

Definida la AcMC se procede a determinar cómo se gestionará el proceso de enseñanza. Se consideran las Disposiciones Instruccionales propias de los docentes y los contratos didácticos del aula escolar (Brousseau, 2007), proponiendo un margen de elementos a los que se accede. Además, se requiere de las Disposición de la práctica de la enseñanza sociocultural para definir cuál es la gestión de la AcMC y así responder a las lógicas del AMC, la práctica sociocultural y la comunidad escolar. Esto determina el último componente del Tercer Espacio para el modelo de diseño de TMRC, la Gestión de la Actividad Matemática Cultural (GAcMC). Esta determina la organización general del tiempo, espacio, lugar y estrategias de interacción entre el docente, los estudiantes y sus familias, para promover la negociación de significados, el aprovechamiento del error y la promoción del pensamiento a través de la lengua indígena. La GAcMC modifica la disposición instruccional habitual del docente y de su clase, actualizando las formas de enseñanza tradicionales dentro de la clase. Los contratos didácticos tendrán presencia con un foco integrador, validado por un asesor cultural, la familia y su interacción con la AcMC.

Estos cuatro elementos constituyen el Tercer Espacio para el diseño de TMRC, construidos por el diálogo de representantes de cada cultura en un proceso sistemático de interacción con el objeto de determinarlos en una integración paralela, no dominante. De esta manera, se responde a las principales dificultades que han presentado quienes han tratado de abordar el aula intercultural, mostrando una alternativa viable para la enseñanza de las matemáticas, y porque no decir, para otras disciplinas, siendo ineludible comprender las múltiples visiones de un mismo conocimiento por pueblos con trayectorias disimiles.

Finalmente queremos declarar que tal como todos los esfuerzos de comprensión de la interculturalidad, este modelo está fuertemente anclado al acceso a las comunidades indígenas, y a su disposición para interactuar con la comunidad escolar, además de tener como base conceptual la aproximación no paralela del Tercer Espacio bajo el concepto de Responsabilidad Cultural en Educación Matemática, lo cual puede restringir y posiblemente dejar de considerar variables, que en función de otros marcos o comunidades pueden ser viables o factibles de analizar e incorporar al modelo.

Agradecimientos

This article was elaborated in the context of INCASI Network, a European project that has received funding from the European Union’s Horizon 2020 research and innovation programme under the Marie Skłodowska-Curie GA No 691004 and coordinated by Dr. Pedro López-Roldán. This article reflects only the author’s view and the Agency is not responsible for any use that may be made of the information it contains.

Referencias

Aikenhead, G. S. (1997). Toward a First Nations cross-cultural science and technology curriculum. *Science Education*, *81*, 217-238.

 CC BY-NC

Bernardi, L. D. y Caldeira, A. D. (2012). Critical Approach in Mathematical Education in an Indigenous School. *Bolema-Mathematics Education Bulletin, 26*(42B), 409-431. https://doi.org/10.1590/S0103-636X2012000200002

Bhabha, H. K. (1994). *The Location of Culture*. New York: Routledge.

Bishop, R., Berryman, M., Cavanagh, T. y Teddy, L. (2009). Te Kotahitanga: Addressing educational disparities facing Māori students in New Zealand. *Teaching and Teacher Education*, *25*(5), 734-742. https://doi.org/10.1016/j.tate.2009.01.009

Blömeke, S., Gustafsson, J. E. y Shavelson, R. J. (2015). Beyond dichotomies: Competence viewed as a continuum. *Zeitschrift Fur Psychologie / Journal of Psychology*, *223*, 3-13. https://doi.org/10.1027/2151-2604/a000194

Bonner, E. P. (2014). Investigating practices of highly successful mathematics teachers of traditionally underserved students. *Educational Studies in Mathematics*, *86*(3), 377–399. https://doi.org/10.1007/s10649-014-9533-7

Boon, H. J. y Lewthwaite, B. (2015). Development of an instrument to measure a facet of quality teaching: Culturally responsive pedagogy. *International Journal of Educational Research*, *72*, 38-58. https://doi.org/10.1016/j.ijer.2015.05.002

Borromeo, R. y Lesh, R. (2013) Should Interpretation Systems Be Considered to Be Models if They Only Function Implicitly?. En G. A. Stillman, G. Kaiser, W. Blum y J. P. Brown (Eds.), *Teaching Mathematical Modelling: Connecting to Research and Practice* (pp. 57-66). Netherlands: Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-6540-5_4

Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas*. Buenos Aires: Libros del Zorzal.

Cantoral, R., Montiel, G. y Reyes-Gasperini, D. (2015). El programa socioepistemológico de investigación en matemática educativa: el caso de Latinoamérica. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *18*(1), 5-17. https://doi.org/10.12802/relime.13.1810

Chandía, E., Huencho, A., Rivas, H. y Ortíz, A. (2018). Knowledge displayed by pedagogy students in primary education when designing a mathematical task. *Bolema - Mathematics Education Bulletin*, *32*(61), 593-614. https://doi.org/10.1590/1980-4415v32n61a14

Depaepe, F. y König, J. (2018). General pedagogical knowledge, self-efficacy and instructional practice: Disentangling their relationship in pre-service teacher education. *Teaching and Teacher Education*, *69*, 177-190. https://doi.org/10.1016/j.tate.2017.10.003

Gay, G. (2002). Culturally responsive teaching in special education for ethnically diverse students: Setting the stage. *International Journal of Qualitative Studies in Education*, *15*(6), 613–629. https://doi.org/10.1080/0951839022000014349

Gay, G. (2010). Acting on beliefs in teacher education for cultural diversity. *Journal of Teacher Education*, *61*(1–2), 143-152. https://doi.org/10.1177/0022487109347320

Goodchild, S. (2014). Mathematics teaching development: learning from developmental research in Norway. *ZDM – the International Journal on Mathematics Education, 46*(2), 305-316. https://doi.org/10.1007/s11858-0130567-6

Greer, B. (2013). Teaching through ethnomathematics: possibilities and dilemmas. En M. Berger, K. Brodie, V. Frith y K. LeRoux (Eds.), *Proceedings of the Seventh International Mathematics Education and Society Conference*, (Vol. 1-2, pp. 282-290). Hoerikwaggo: Mathematics Education & Soc.

Huencho, A., Chandía, E., Rojas., F. y Williamson, G. (2021). Model of the development of mathematical knowledge from the Knowing and Doing of the Mapuche people. *Educación Matemática, 33*(2), 7-36. https://doi.org/10.24844/EM3302.01

Huencho, A., Rojas, F. y Webb, A. (2017). Educación Matemática Intercultural: Propuestas y Proyecciones desde el pueblo Mapuche. En E. Treviño, L. Morawietz, C. Villalobos y E. Villalobos (Eds.), *Educación Intercultural en Chile. Experiencias, Pueblos y Territorios*, (pp. 301-331). Santiago de Chile: Ediciones UC.

Lesh, R. y Lehrer, R. (2003). Models and Modeling Perspectives on the Development of Students and Teachers. *Mathematical Thinking and Learning, 5*(2-3), 109-129. https://doi.org/10.1080/10986065.2003.9679996

Mansilla, J., Llancavi, D., Mieres, M. y Montanares, E. (2016). Instalación de la escuela monocultural en la Araucanía, 1883-1910: dispositivos de poder y Sociedad Mapuche. *Educacão e Pesquisa, 42*(1), 213–228. https://doi.org/10.1590/S1517-9702201603140562

Mpofu, V., Otulaja, F. y Mushayikwa, E. (2014). Towards culturally relevant classroom science: A theoretical framework focusing on traditional plant healing. *Cultural Studies of Science Education, 9*(1), 221-242. https://doi.org/10.1007/s11422-013-9508-5

Nasir, N. S., Hand, V. y Taylor, E. V. (2008). Culture and Mathematics in School: Boundaries Between "Cultural" and "Domain" Knowledge in the Mathematics Classroom and Beyond. *Review of Research in Education, 31*(1), 128-130. https://doi.org/10.3102/0091732X07308962

Ogunniyi, M. B. (2007). Teachers' stances and practical arguments regarding a science - indigenous knowledge curriculum: Part 1. *International Journal of Science Education*, *29*(8), 963-986.

Pais, A. (2011). Criticisms and contradictions of ethnomathematics. *Educational Studies in Mathematics, 76*(2), 209-230. https://doi.org/10.1007/s10649-010-9289-7

Parker, F., Bartell, T. G. y Novak, J. D. (2017). Developing culturally responsive mathematics teachers: secondary teachers' evolving conceptions of knowing students. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *20*(4), 385-407. https://doi.org/10.1007/s10857-015-9328-5

Peña - Cortés, F., Huiliñir - Curío, V., Pincheira - Ulbrich, J., Quintriqueo, S., Quilaqueo, D., Gutiérrez, M. y Morales, S. (2018): Mapuche- Pewenche knowledge transmitted by teachers and parents: perception of schoolchildren in rural schools of the Araucanía region (Chile). *Journal of Multilingual and Multicultural Development*, *40*(3), 244-256. https://doi.org/10.1080/01434632.2018.1505895

Semali, L. M., Hristova, A. y Owiny, S. A. (2015). Integrating Ubunifu, informal science, and community innovations in science classrooms in East Africa. *Cult Stud of Sci Educ*, *10*, 865-889. https://doi.org/10.1007/s11422-014-9640-x

Shulman, L. S. (1987). Knowledge and teaching. *Harvard Educational Review*, 57(1), 1-23.

Stefoni, C., Stang, F. y Riedemann, A. (2016). Educación e interculturalidad en Chile: un marco para el análisis. *Relaciones Internacionales, 48*(185), 153–182. http://dx.doi.org/10.5354/0719-3769.2016.44534

Susman, G. (1983). Action Research: A Sociotechnical Systems Perspective. En G. Morgan, (Ed.), *Beyond Method: Strategies for Social Research*, (pp. 95-113). Newbury Park: Sage.

Walsh, C. (2015). ¿Interculturalidad? Fantasmas, fantasías y funcionalismos. En F. Balseca y C. Montúfar (Eds), *Ecuador. Desafíos para el presente y el futuro* (pp. 269-282). Quito: Universidad Andina Simón Bolívar y Ediciones de la Tierra.

Walsh, C. (2018). Decoloniality in/as Praxis. En M. Walter y C. Walsh (Eds.), *On Decoloniality. Analytics, Concepts, Praxis* (pp.15-102). Durham: Duke University Press. https://doi.org/10.1080/09502386.2019.1597140

 BY-NC

Wences, I. (2021). Corte Interamericana de Derechos Humanos y pueblos originarios. Lecturas desde la teoría de la justicia de Nancy Fraser. Araucaria. *Revista Iberoamericana de Filosofía, Política, Humanidades y Relaciones Internacionales, 23*(46), 571-590. https://doi.org/10.12795/araucaria.2021.i46.28

Williamson, G. (2008). Escuela Rural y Lof Mapu en La Araucanía. *Revista Digital eRural, Educación, cultura y desarrollo rural, 5*(9-10), 1-19.

Zuchel, L. y Henríquez, N. (2020). Una crítica a la interculturalidad desde la interculturalidad crítica. *Hermenéutica Intercultural, 33*, 85-103. https://doi.org/10.29344/07196504.33.2298

Autores

Anahí Huencho. Facultad de Educación, Universidad Católica de Temuco, Chile. ahuencho@uct.cl

https://orcid.org/0000-0001-6114-5332

Eugenio Chandía. Facultad de Educación, Universidad de Concepción, Chile. echandia@udec.cl

https://orcid.org/0000-0003-2489-1226

Francisco Rojas. Facultad de Ciencias de la Educación, Universidad Autónoma de Barcelona, España. franciscojavier.rojas@uab.cat

https://orcid.org/0000-0002-0328-8156

Guillermo Williamson. Facultad de Educación, Universidad de la Frontera, Chile. guillermo.williamson@ufrontera.cl

https://orcid.org/0000-0001-5313-342X

Gorete Fonseca, João Pedro da Ponte

O ESTUDO DE AULA NO DESENVOLVIMENTO DO CONHECIMENTO SOBRE O ENSINO DA MATEMÁTICA DE PROFESSORES DO 1.º CICLO[1]

Lesson study in the development of knowledge about teaching mathematics by primary school teachers

RESUMEN

El objetivo de este artículo es entender el aprendizaje realizado por cinco maestros que participan en un estudio de clase que se centró en la multiplicación de aprendizajes por parte de estudiantes de 2º año con respecto al conocimiento del estudiante y sus procesos de aprendizaje y el conocimiento de la práctica lectiva. Es una investigación cualitativa e interpretativa. La recopilación de datos fue realizada por la observación de los participantes a través de la preparación de un diario a bordo, grabación de audio y video de las sesiones y la realización de una entrevista colectiva semiestructurada. Los resultados confirman el potencial del estudio de clase al contribuir a los profesores para profundizar conocimientos sobre el pensamiento y las estrategias y las dificultades del estudiante en el aprendizaje de los conceptos. Comenzaron a valorar la preparación detallada de su acción debido a los conocimientos previos sobre los estudiantes, así como el aprendizaje exploratorio.

PALABRAS CLAVE:

- *Estudio de clase*
- *Conocimiento didáctico*
- *Aprendizaje profesional*
- *Aprendizaje de la multiplicación*
- *Matemáticas*

ABSTRACT

The aim of this article is to understand the learning of five primary teachers participating in a class study that focused on learning multiplication by 2nd year students with regard to the student's knowledge and learning processes and knowledge of teaching practice. It is a qualitative and interpretative investigation. Data collection was undertook by participant observation through the preparation of a research journal, audio and video recording of the sessions and conducting a semi-structured collective interview. The results confirm the potential of the LS by contributing to teachers to deepen their knowledge about the student's thinking and their strategies and difficulties in learning concepts. They also valued the detailed preparation of their action taking into account the previous knowledge of the students, as well as about exploratory learning.

KEY WORDS:

- *Lesson study*
- *Didactic knowledge*
- *Professional learning*
- *Learning of multiplication*
- *Mathematics*

[1] Em Portugal, o 1.º ciclo do ensino básico corresponde aos quatro primeiros anos de escolaridade, sendo frequentado por alunos entre os 6-10 anos de idade.

CC BY NC

Fonseca, G. y da Ponte, J. P. (2022). O estudo de aula no desenvolvimento do conhecimento sobre o ensino da matemática de professores do 1.º ciclo. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 25*(2), 223-246. https://doi.org/10.12802/relime.22.2524. Recepción: Diciembre 12, 2020 / Aceptación: Marzo 1, 2022

RESUMO

O objetivo deste artigo é compreender as aprendizagens realizadas por cinco professores do 1.º ciclo o ensino básico participantes num estudo de aula que teve foco na aprendizagem da multiplicação por alunos do 2.º ano no que respeita ao conhecimento do aluno e dos seus processos de aprendizagem e ao conhecimento da prática letiva. É uma investigação qualitativa e interpretativa. A recolha de dados fez-se por observação participante através da elaboração de um diário de bordo, gravação áudio e vídeo das sessões e realização de uma entrevista semiestruturada coletiva. Os resultados confirmam o potencial do estudo de aula ao contribuir para que os professores aprofundassem o conhecimento sobre o pensamento do aluno e suas estratégias e dificuldades na aprendizagem de conceitos. Passaram a valorizar a preparação detalhada da sua ação em função do conhecimento prévio sobre os alunos, assim como a aprendizagem exploratória.

PALAVRAS CHAVE:

- *Estudo de aula*
- *Conhecimento didático*
- *Aprendizagens profissionais*
- *Aprendizagem da multiplicação*
- *Matemática*

RÉSUMÉ

Le but de cet article est de comprendre l'apprentissage effectué par cinq enseignants de primaire participant à une étude de classe axée sur l'apprentissage de la multiplication des par les élèves ence qui concerne la connaissance de l'élève et de leurs processus d'apprentissage et la connaissance de la pratique d'enseignement. Ils'agit d'une enquête qualitative et interprétative. La collecte de données a été effectuée par observation participant par l'écriture d'un journal de bord, l'enregistrement audio et vidéo des séances et la realization d'une entrevue collective semi-structurée. Les resultants confirment le potentiel de l'étude de classe en contribuant aux enseignants à développer des connaissances sur la pensée, les stratégies et les difficultés de l'élève dans l'apprentissage des concepts. Il sont commencé à apprécier la préparation détaillée de leur action en raison de connaissances antérieures sur les élèves, ainsi que sur l'apprentissage exploratoire.

MOTS CLÉS:

- *Étude de clase*
- *Connaissance didactique*
- *Profissional apprentissage*
- *Apprentissage de la multiplication*
- *Mathématiques*

1. Introdução

Nos últimos anos, por todo o mundo, o estudo de aula (EA) vem sendo assumido como processo de desenvolvimento profissional de professores que constitui "...uma alternativa clara aos processos tradicionais de reflexão e melhoria da prática educativa e (...) de reconstrução dos saberes e práticas docentes" (Soto Gómez & Pérez Gómez, 2015, p.16). O EA centra-se na prática letiva de um grupo de professores e tem como foco principal a melhoria da aprendizagem dos alunos

CC BY-NC

numa disciplina escolar. Trabalhando em conjunto, os professores identificam dificuldades dos alunos, definem objetivos em função do que é esperado no currículo, formulam estratégias de ensino baseadas na sua experiência e no conhecimento científico, elaboram ou adaptam tarefas e materiais e planificam detalhadamente uma aula que é lecionada por um professor. Esta aula é observada pelos restantes professores sendo posteriormente objeto de reflexão aprofundada (Lewis et al., 2019; Murata, 2011; Ponte et al., 2016). Contrariamente a outros processos formativos, o trabalho não é centrado no desempenho e atuação do professor, mas antes nas aprendizagens e estratégias dos alunos (Ponte et al., 2016). O EA "dá aos professores a oportunidade para contextualizar representações das suas atividades na aula, ao mesmo tempo que também torna explícito o seu conhecimento implícito e as suas práticas através de conversas colaborativas" (Ni Shuilleabhain & Clivaz, 2017, p.102). Representa uma oportunidade para os professores aprofundarem o conhecimento sobre o aluno e os seus processos de aprendizagem, construindo e ressignificando o seu saber-fazer em contexto colaborativo.

O EA, enquanto processo formativo que permite aos professores problematizar e investigar a sua prática letiva, os conteúdos que ensinam, os conhecimentos didáticos e a aprendizagem do aluno, possibilita que estes reflitam sobre a prática, recorram à teoria e regressem à prática num movimento cíclico e articulado (Bezerra, 2017), promovendo o seu desenvolvimento profissional em diversos domínios (Quaresma & Ponte, 2017). Importa, por isso, aprofundar o conhecimento sobre as potencialidades do EA na aprendizagem profissional de professores que lecionam os primeiros anos de escolaridade tendo em conta que a sua disseminação e apropriação é relativamente recente no contexto português, sendo ainda reduzida a investigação disponível. Assim, o objetivo deste artigo é compreender que aprendizagens no que respeita ao conhecimento do aluno e dos seus processos de aprendizagem e ao conhecimento da prática letiva desenvolveram os professores envolvidos num EA em torno da aprendizagem da multiplicação por alunos do 2.º ano.

2. Quadro teórico e investigação empírica relativa ao estudo

2.1. *Conhecimento didático*

São vários os autores que têm vindo a debruçar-se sobre a natureza e complexidade do conhecimento que o professor necessita para lecionar e conduzir à aprendizagem

 CC BY-NC

os seus alunos. Shulman (1987) dá particular atenção aos tipos de conhecimento profissional necessários ao exercício da função docente. No seu entender, os professores não só necessitam de saber *como* ensinar, mas também *o que* ensinar e o respetivo *porquê*. Analisou o que sabem os professores sobre os conteúdos a ensinar, onde e quando os adquiriram, como e por que transformam esse conhecimento em situações de aprendizagem na sala de aula, apresentando um conceito, o "conhecimento pedagógico do conteúdo", situado na interseção do conhecimento do conteúdo e da pedagogia. Trata-se, na sua perspetiva, de um conhecimento distinto do conhecimento do conteúdo que diz respeito à transformação desse conteúdo pelo próprio professor tornando-o compreensível e ensinável para os alunos. É um conhecimento construído, enriquecido e melhorado sempre que o professor ensina um conteúdo.

Ball, Thames e Phelps (2008), tendo por base estudos empíricos, procuraram aprofundar o modelo de Shulman para o ensino da Matemática. A sua proposta sobre os conhecimentos necessários para ensinar Matemática encontra-se dividida em dois grandes domínios: Conhecimento do Conteúdo (CK), relativo ao conteúdo matemático a ensinar, e Conhecimento Pedagógico do Conteúdo (PCK) que contempla o modo como esse conteúdo pode ser ensinado, o currículo, os alunos e as próprias relações entre estes e o conteúdo matemático. Cada um destes domínios subdivide-se em diversos subdomínios. Para estes autores, o PCK, encontra-se dividido em Conhecimento do Conteúdo e dos Alunos (KCS), Conhecimento do Conteúdo e do Currículo (KCC) e Conhecimento do Conteúdo e do Ensino (KCT). No primeiro estão inseridos o conhecimento e as capacidades que o professor deve possuir para saber lidar com o saber dos alunos e o saber da Matemática. Inclui a ideia de que o professor deve ser capaz de antecipar as dificuldades dos alunos e delinear estratégias para as ultrapassar. O segundo refere-se ao conhecimento do professor sobre os conteúdos específicos do currículo. Por sua vez, o KCT combina o saber matemático e o saber sobre o ensino. Nele os professores sequenciam os conteúdos específicos a ensinar com o intuito de levar o aluno a uma aprendizagem progressiva. Finalmente, Ballet al. (2008) chamam à atenção que os domínios e subdomínios dialogam entre si de modo articulado com a prática.

Ponte e Oliveira (2002) indicam que o conhecimento profissional do professor é um conhecimento orientado para as situações da prática, que se desdobra nas vertentes do conhecimento na ação relativo à prática letiva e não letiva, à profissão e ao desenvolvimento profissional. Inspirando-se igualmente em Shulman (1986, 1987), os autores caracterizam o conhecimento didático que integram na tradição europeia dos estudos em didática. Este conhecimento é aquele que, para além do conhecimento matemático, intervém diretamente na prática letiva e identificam diversas vertentes. Uma que interessa particularmente para o nosso estudo diz respeito ao conhecimento do aluno e do seu processo de aprendizagem e inclui o conhecimento do aluno enquanto pessoa, os seus interesses, gostos, valores, referências culturais, dificuldades e o modo como aprende. Outra, igualmente relevante para este trabalho, é o conhecimento da prática letiva, que é considerada a vertente fundamental do conhecimento didático e inclui tudo o que diz respeito à planificação, conceção das tarefas e condução da aula, nomeadamente a organização do trabalho dos alunos, a cultura de aprendizagem, a regulação da comunicação, a avaliação das aprendizagens e do ensino pelo próprio professor (Ponte, 2012; Ponte & Oliveira, 2002). Tendo presente a centralidade das vertentes do conhecimento do aluno e do seu processo de aprendizagem e da prática letiva tanto no modelo destes autores como no de Ball et al. (2008), são estas as consideradas no presente estudo.

2.2. *Aprendizagens dos professores de 1.º ciclo em estudos de aula*

O interesse pelos EA como processo de desenvolvimento profissional tem sido acompanhado pela realização de investigação sobre os seus efeitos nos participantes, sejam estes professores, ou futuros professores. Alguma desta investigação tem incidido em professores em serviço a lecionar nos primeiros anos de escolaridade. Por exemplo, Puchner e Taylor (2006) apresentam os casos de dois grupos de professores. O primeiro mostra como um grupo de professores descobre através do EA que o seu planeamento e o seu trabalho podem ter um forte impacto no envolvimento dos alunos na sala de aula, o que os surpreendeu fortemente. O segundo caso incide sobre o esforço de um professor para passar do isolamento para a colaboração, ilustrando a tensão entre autonomia e colaboração que muitas vezes ocorre durante essa mudança. Num outro estudo, Sack e Vasquez (2011) consideraram três áreas de aprendizagem dos professores, o seu conhecimento, o seu envolvimento e comunidade, e os recursos para a aprendizagem dos alunos. Os autores concluem que, para que os professores possam tirar pleno partido das oportunidades proporcionadas pelo EA, devem ter interesse e disposição para investigar. Pelo seu lado, Murata et al. (2012) investigaram como os professores participantes em um EA deram sentido à aprendizagem dos alunos e ao seu ensino relacionado com o uso de representações na subtração de números com vários dígitos. O trabalho realizado mostrou que o discurso dos professores passou de superficial para uma consideração mais profunda da aprendizagem dos alunos. Os professores passaram a fazer conexões entre o conhecimento artesanal do ensino e o conhecimento académico. Finalmente, Widjaja et al. (2017) examinaram as experiências de aprendizagem profissional de professores dando especial atenção às interconexões entre suas experiências e suas crenças

 CC BY-NC

e práticas. Os resultados mostram o desenvolvimento de práticas colaborativas para a investigação e planeamento do professor, maior atenção ao pensamento matemático dos alunos, uso de discussões coletivas com base na antecipação das resoluções dos alunos e questionamentos focados.

2.3. *A multiplicação de números inteiros*

O desenvolvimento do sentido de número tem ganho relevância na literatura e nos documentos de natureza curricular, nomeadamente sobre o ensino e a aprendizagem da Matemática para os primeiros anos de escolaridade (ME, 2018; Mendes, 2012; NCTM, 2007; Rocha & Menino, 2009) por se reconhecer que os alunos necessitam de compreender, ter conhecimento e destreza com números e com as operações, e conseguir aplicar esse conhecimento e destreza em situações de cálculo (McIntosh et al., 1992). Neste contexto, o papel do professor na promoção de uma cultura de inquirição na sala de aula favorável ao desenvolvimento do sentido de número, na seleção das tarefas e na organização das atividades é crucial e influencia o modo como os alunos se apropriam, desenvolvem e aplicam estratégias de cálculo na resolução de problemas (Mendes, 2012).

Para Treffers e Buys (2001) e Brocardo et al. (2005), à semelhança de outras operações, a aprendizagem da multiplicação deve assentar na compreensão de conceitos e de propriedades, ao longo de um período de tempo, e desenvolve-se por níveis de aprendizagem até chegar à formalização. No primeiro nível, cálculo por contagem, o aluno recorre à contagem através de adições sucessivas. No segundo nível, cálculo estruturado, recorre à ideia de "quantas vezes" e estabelece relação entre uma mesma quantidade que se repete um certo número de vezes, recorrendo a diferentes modelos para a concretização dos seus cálculos, nomeadamente o linear e o retangular. Por fim, no terceiro nível, o cálculo formal corresponde ao cálculo de produtos entre dois números recorrendo a diferentes relações entre a multiplicação e outras operações, às propriedades da multiplicação e a produtos conhecidos. Contudo, esta progressão não é linear, nem os alunos percorrem estes níveis em simultâneo significando que "face a uma mesma tarefa, estes podem utilizar diferentes estratégias que traduzem diferentes níveis de aprendizagem da multiplicação" (Rocha & Menino, 2009, p. 111). A planificação e exploração de uma sequência de tarefas com o propósito de promover a progressão da aprendizagem de níveis mais baixos de estruturação das operações para níveis mais elevados assumem especial relevo ao contribuir para o desenvolvimento da compreensão dos conceitos e o estabelecimento de conexões matemáticas relativas à multiplicação (Brocardo et al., 2005; Mendes, 2012). Para Ponte e Serrazina (2000) deve partir-se de tarefas que desenvolvam o sentido aditivo da multiplicação em que os alunos possam recorrer à adição sucessiva de parcelas iguais procurando que os alunos progridam para a compreensão do sentido combinatório da multiplicação.

Brocardo et al. (2008) afirmam ainda que "deve ser dada liberdade aos alunos para inventarem as suas próprias estratégias e procedimentos e discutida a sua eficiência e nível de generalidade" (p.15). O professor, ao dar oportunidade aos alunos para explicitarem as suas estratégias cria condições para que, nas tarefas seguintes, estes sejam "capazes de recorrer aos modelos discutidos [nos momentos de discussão coletiva] para representar o seu próprio modo de pensar" (Mendes et al., 2013, p.141) ao mesmo tempo que auxilia os alunos a progredir para níveis superiores e a desenvolver a sua capacidade para usar um pensamento flexível e criativo (Rocha & Menino, 2009).

O papel do professor na seleção e formulação de tarefas que promovam o envolvimento dos alunos na sua resolução assumindo um "papel ativo na construção do conhecimento matemático" (Ponte et al., 2017, p.72) assume grande relevância, especialmente quando se procura seguir uma abordagem exploratória no ensino da Matemática (Ponte, 2005). Contrariamente às tarefas fechadas e com grau de desafio reduzido onde, maioritariamente, o aluno é chamado a consolidar conhecimentos, nas tarefas de exploração abertas e com maior grau de desafio (Ponte, 2005) os alunos "têm de começar por construir os seus próprios métodos para resolver as questões propostas, usando os seus conhecimentos prévios" (Ponte et al., 2017, p.72).

Para Ponte (2005) "o que os alunos aprendem resulta de dois fatores principais: a atividade que realizam e a reflexão que sobre ela efetuam" (p.1) sendo necessário que o professor proponha tarefas adequadas às características dos seus alunos, valorizando os momentos de reflexão e de discussão coletiva. Na estratégia de ensino-aprendizagem exploratória os momentos de discussão são "momentos por excelência para a sistematização de conceitos, a formalização e o estabelecimento de conexões matemáticas" (Ponte, 2005, p.16) constituindo uma oportunidade para os alunos "construírem e aprofundarem a sua compreensão de conceitos, procedimentos, representações e ideias matemáticas" (Ponte et al., 2017, p.73) quando são chamados a argumentar e a justificar o seu pensamento para os colegas e professor. É essa abordagem que procurámos seguir neste EA.

3. Metodologia da investigação

Esta investigação, de natureza qualitativa e interpretativa (Bogdan & Biklen, 1994), resulta da realização de um EA num Agrupamento de Escolas situado na

 CC BY-NC

zona Oeste de Lisboa. A experiência decorreu entre outubro de 2019 e fevereiro de 2020 e envolveu cinco professores do 1.º ciclo: Gorete, com duplo papel de participante e investigadora, Luísa, Ana, Sofia e Luís (pseudónimos). Três dos professores lecionavam o 2.º ano de escolaridade e os outros dois eram professores de apoio educativo. As sessões foram dinamizadas por Gorete, com o apoio do segundo autor. Quatro dos cinco professores participantes pertencem ao quadro de escola e têm mais de vinte anos de experiência. Apenas Ana tem menos de vinte anos de serviço e não pertence ao quadro. A participação dos professores no EA decorreu de vontade própria em querer participar na experiência após a proposta lançada por Gorete na reunião de Departamento do 1.º ciclo. O EA teve onze sessões (Sn) cuja periodicidade foi, maioritariamente, quinzenal, com a duração aproximada entre 1:30h e 2:30h por sessão, de que mais à frente daremos conta. A Tabela I sintetiza o trabalho desenvolvido nas diferentes sessões.

A recolha de dados foi feita por observação participante com a elaboração de um diário de bordo (DB), gravação áudio das sessões (GA), gravação vídeo da aula de investigação (GV) e de uma entrevista semiestruturada coletiva (EC). Todas as gravações foram transcritas integralmente. Atendendo ao objetivo deste artigo foi feita uma análise indutiva seguindo os procedimentos sustentados por Amado (2013) e Bardin (2002) de modo a identificar elementos particularmente significativos que pudessem ser reveladores das aprendizagens que os professores envolvidos desenvolveram em duas vertentes do conhecimento didático: (i) conhecimento do aluno e dos seus processos de aprendizagem, considerando os seguintes aspetos: tarefas e identificação de conhecimentos prévios; estratégias e dificuldades dos alunos; material a utilizar pelos alunos; capacidade de comunicação dos alunos; conceção da estrutura da aula de investigação, e (ii) conhecimento da prática letiva (Ponte, 2012; Ponte & Oliveira, 2002).

4. O estudo de aula: aprendizagens dos professores

Nesta secção, e após a síntese do trabalho desenvolvido nas sessões, apresentamos evidências das aprendizagens dos professores participantes do EA no que respeita ao conhecimento do aluno e dos seus processos de aprendizagem e, de seguida, ao conhecimento da prática letiva. Por fim, apresentamos um balanço da experiência realizado pelos participantes no EA.

TABELA I
Sessões do EA

Sessões	*Descrição*
1	Apresentação do conceito de EA e objetivos; Seleção do tópico a trabalhar (que veio a ser a multiplicação de números inteiros); Calendarização geral das sessões a desenvolver.
2 e 3	Reconhecimento do tópico nos diferentes documentos curriculares – Metas | aprendizagens Essenciais | Planificações | manual do aluno - nomeadamente o que se esperava que os alunos soubessem relativamente ao conteúdo selecionado; Pesquisa, leitura e discussão de textos académicos sobre a aprendizagem da multiplicação no 1.º ciclo e a natureza das tarefas; Construção e planificação de uma proposta de 2 tarefas diagnósticas para introduzir o conceito da multiplicação.
4, 5 e 6	Partilha e análise dos dados recolhidos na tarefa diagnóstica; Resolução de tarefas, discussão e antecipação de eventuais dificuldades dos alunos e definição de estratégias de superação; Planificação e construção de uma sequência didática com 5 tarefas até à aula de investigação; Análise e reflexão sobre os dados recolhidos sobre o desempenho dos alunos em cada uma das tarefas aplicadas (tarefas 3 a 6) e (re)definição da tarefa combinatória da aula de investigação.
7	Resolução, pelos professores, da tarefa combinatória da aula de investigação e antecipação de dificuldades; Definição de estratégias para lidar com as possíveis dificuldades dos alunos; Preparação da aula de investigação e do trabalho de observação.
8	*Aula de investigação lecionada por Sofia*
9	Reflexão pós-aula partindo da recolha das notas de campo efetuada pelos observadores, incidindo sobre: a tarefa (conteúdo e aspeto gráfico); gestão da aula (segmentos e duração; apresentação da tarefa; condução da discussão...); desempenho dos alunos (aprendizagens, dificuldades, interações, capacidade de argumentação, pensamento seguido,...); Aperfeiçoamento da aula para ser lecionada nas outras duas turmas.
10	Reflexão sobre os dados recolhidos em cada uma das turmas onde foram lecionadas as aulas com a a tarefa combinatória.
11	Entrevista semiestruturada coletiva.

 CC BY-NC

4.1. *Conhecimento do aluno e dos seus processos de aprendizagem*

Da análise realizada emergiram elementos reveladores de aprendizagens sobre o conhecimento do aluno e dos seus processos de aprendizagem, por parte dos professores envolvidos no EA. Os momentos em que pensaram sobre as condições de aprendizagem na posição de alunos contribuíram para os sensibilizar para a importância de antecipar cenários e analisar aspetos sobre a organização do trabalho, a criação de um clima de aprendizagem e a regulação da comunicação como condições que influem no processo de aprendizagem dos alunos (Ponte & Oliveira, 2002; Mendes, 2012).

4.1.1. *Conhecimento sobre a capacidade de comunicação dos alunos*

A partilha e reflexão sobre o desempenho dos alunos nas tarefas que antecederam a aula de investigação, de que mais à frente daremos conta, foram um forte contributo para tornar os participantes mais atentos, não só aos processos de raciocínio e dificuldades dos alunos, mas também à sua linguagem, levando-os a atribuir maior importância às expressões usadas nos enunciados. Inicialmente, determinadas expressões que lhes pareciam ser de uso comum, acabaram por se constituir barreiras que condicionavam o entendimento do enunciado pelo facto de não fazerem parte do reportório vocabular da totalidade dos alunos. À medida que as tarefas iam sendo aplicadas, os resultados iam sendo objeto de análise e de reflexão contribuindo para que os participantes fossem antecipando dificuldades, delineando estratégias e (re)organizando a construção das tarefas seguintes. Essa discussão contribuiu para o aprofundamento do conhecimento sobre o aluno e do seu modo de pensar. O diálogo seguinte mostra a consciencialização da necessidade de haver uma maior preocupação na escrita dos enunciados:

> Gorete: Quando apliquei a tarefa do dobro, e é daquelas coisas que não pensámos no momento, foi não prever a dificuldade dos alunos em perceber o significado da expressão «dose referida». Alterei no enunciado para o «dobro dos ingredientes da receita» porque está mais perto da linguagem deles. Destaquei a bold a palavra «dobro» porque passou despercebida na leitura e isso levou a que alguns alunos não percebessem que tinham de duplicar o número de ingredientes para poder fazer o bolo.
>
> Luís: Eu também dei com uma assim parecida... Mas noutra tarefa. Foi na tarefa das linhas e das colunas. Eles diziam que a figura tinha 5 linhas quando na verdade tinha 4. E eu pensei... “Espera lá! Eles são 14 alunos e quase metade está a enganar-se nisto! Eu devo estar a ver isto mal”. Perguntei a um aluno “Explica-me lá o que é que vocês estão a contar?” [e este disse] “Ó professor então tu não estás a dizer quantas linhas?

BY-NC

Sabemos que as linhas são assim quando fazemos o jogo do SUDOKU, e a coluna assim...”

Sofia: Ah! Eles contavam mesmo a linha, o risco...

Luís: Sim. Eram 7 alunos da turma a fazer este tipo de raciocínio. Para eles o tamanho das linhas e da coluna não era o tamanho do quadrado, era só o risco. (GA, S3)

Nas primeiras sessões que antecederam a aula de investigação, e durante a aplicação da sequência didática, por parte dos participantes, é evidente a consciencialização da dificuldade que os alunos manifestavam na comunicação verbal e escrita das estratégias quando Sofia referiu: “Eu apliquei a tarefa 3 e foi muito fácil. O difícil foi eles explicarem o porquê. Eles conseguem (...) às vezes chegar ao resultado, mas têm muitas dificuldades em explicar as estratégias e verbalizar o pensamento” (GA, S4). Luís acrescentou: “Pois, o *porquê*. Mas eu também noto muito isso” (GA, S4). A consciencialização das dificuldades dos alunos em expressar o seu pensamento reforçou a preocupação dos participantes para que fossem usadas tarefas que apelassem ao desenvolvimento da capacidade de comunicar, argumentar e justificar as estratégias encontradas, ao mesmo tempo que os docentes iam introduzindo novas situações na sua prática letiva, tornando-os mais atentos ao processo de pensamento dos seus alunos, especialmente quando traziam para debate e reflexão os resultados do desempenho da turma. Esta forte relação estabelecida entre a partilha de experiências e a sua prática de ensino, também evidenciada por outros autores (Ponte et al., 2017; Ni Shuilleabhain & Clivaz, 2017), e o apoio do grupo que Sofia e Luís foram sentindo deu-lhes maior segurança para querer experimentar tarefas de cariz mais exploratório na sua prática letiva.

4.1.2. *Conhecimento sobre as estratégias e dificuldades dos alunos*

À medida que as sessões decorriam alguns dos participantes, como Sofia, foram admitindo que “não é assim tão óbvio como nós pensávamos que seria para eles” (GA, S4) referindo-se às dificuldades manifestadas por alguns alunos na realização das tarefas propostas. Exemplo dessa consciencialização ocorreu na partilha das observações sobre o desempenho dos alunos na tarefa, após a aula de investigação, quando Sofia se mostrou surpreendida pelo desempenho inesperado de alguns dos seus alunos:

Luísa: Ele dizia assim: “A calça castanha já a vestiu com a camisola amarela já não a pode vestir com mais nada...”

Sofia: Mas quem é que disse isso? O Diogo ou o João?

Luísa: O João.

 BY-NC

Sofia: Pois, eu não estava a prever é que o João tivesse essa limitação no raciocínio. A sério, eu tinha outras expectativas daqueles dois grupos que estiveste a observar...

Luísa: Olha este grupo, o que escreveu (grupo do Xavier e do Vicktor): «Há 6 maneiras de vestir». Este percebeu o que era a combinação. E tanto percebeu como reparem só na organização... Os miúdos que perceberam a combinação distinguem-se logo no modo como dispuseram as peças. Olha a organização dele: Calça azul, calça castanha, calça azul, calça castanha...

Sofia: Este, eu não estava à espera! Eu não pensei que o desempenho do Xavier fosse assim tão bom e apresentasse uma boa organização, nem a Verónica até porque ela esteve uma semana em casa. Eu até me surpreendi. (GA, S9)

Luísa mostrou igualmente a sua surpresa porque "não estava à espera que houvesse miúdos que conseguissem chegar à multiplicação assim logo no primeiro problema. Não foi necessário que introduzisses, ela apareceu" (GA, S9). Note-se que em todas as sessões que antecederam a aula de investigação, a posição de Luísa era a de que os alunos dificilmente iriam conseguir chegar à multiplicação no primeiro problema.

O depoimento de Luís, após a replicação da tarefa na sala de aula com os seus alunos, também deixou evidente a surpresa que teve quando afirmou ter sido "...frustrante porque estava à espera que algum dos meus alunos fosse logo à multiplicação no primeiro problema. Eu queria mais resultados e não tive. Mas no segundo problema já diversificaram as estratégias e chegaram lá" (DB, S10).

Os participantes consideraram que o uso do material concretizador distribuído foi importante para que os alunos tivessem conseguido compreender, através da manipulação, as combinações possíveis. A discussão coletiva, e à semelhança do referido por outros autores (Ponte, 2005; Ponte et al., 2017), foi crucial para consolidar aprendizagens e potenciar a discussão de diferentes estratégias. Para Luísa, se não tivesse havido a discussão com a apresentação de diversas possibilidades de resolução "não teria havido essa diversidade de estratégias apresentadas na segunda parte da tarefa e não tinham chegado tantos alunos ao uso da multiplicação, como chegaram" (GA, S9).

A reflexão sobre o desempenho dos alunos, quer durante a fase de preparação da aula de investigação, quer nesta aula, mostrou aos professores tanto a existência de dificuldades inesperadas por parte de alguns alunos, como a capacidade de outros de formularem estratégias e usarem ideias matemáticas importantes. Estas constatações constituíram um importante enriquecimento do conhecimento sobre os alunos, pelos participantes.

Em síntese, e no que diz respeito à vertente do conhecimento do aluno e dos seus processos de aprendizagem, as evidências sugerem que os participantes ampliaram o conhecimento sobre os seus alunos encontrando-se mais despertos para a construção dos enunciados das tarefas e a escolha das expressões, para a necessidade de criar oportunidades e planificar atividades que apelem ao desenvolvimento da comunicação e à capacidade de explicitação e argumentação do pensamento dos alunos, como momentos potencialmente ricos.

4.2. *Conhecimento da prática letiva: planificação e tarefas*

A escolha do tópico teve como ponto de partida uma leitura global dos conteúdos previstos para o mês de janeiro. Entre a divisão e a multiplicação, os participantes optaram pela multiplicação por considerarem ser essa a operação em que os alunos manifestam maiores dificuldades. Selecionado o tópico, as sessões seguintes foram dedicadas à leitura e aprofundamento do tema em diversos documentos (Tabela I). Estas leituras preparatórias iniciais nem sempre foram bem acolhidas por alguns dos participantes, especialmente pela falta de hábito de leitura de textos académicos, tendo sido necessário que Gorete e Luísa partilhassem as suas notas no início de cada sessão chamando a atenção para aspetos particularmente importantes, como por exemplo, a existência de uma sequência para a aprendizagem da multiplicação. Esta pesquisa e debate de ideias foi essencial para a consciencialização da importância da planificação da sequenciação didática, da conceção da tarefa e da aula de investigação.

4.2.1. *Seleção de tarefas e identificação de conhecimentos prévios*

Seguindo a perspetiva de alguns autores (Brocardo et al., 2005; Mendes, 2012; Rocha & Menino, 2009) no que se refere à planificação das aprendizagens, e para chegar à tarefa com o sentido combinatório da multiplicação da aula de investigação, o grupo concordou em distribuir e explorar os diferentes conceitos com o propósito de promover a aprendizagem de níveis mais baixos de estruturação das operações (sentido aditivo) para níveis mais elevados, mobilizando e desenvolvendo conhecimentos a respeito do processo de ensino. Ao viver a experiência no papel de aluno, quando resolviam as tarefas e relatavam as dificuldades que teriam os seus alunos na sua resolução, permitiu que fossem criadas condições para elaborar e preparar uma sequência de tarefas. Para

 BY-NC

introdução do cálculo por contagens através de adições sucessivas construíram-se duas tarefas: “pacotes de leite” e “cartas do Lidl”. Na primeira eram distribuídos dois pacotes de leite por aluno e solicitado que fosse calculada a quantidade de pacotes distribuídos apresentando os cálculos no quadro. A partir das representações surgidas (adição repetida) e do diálogo e reflexão daí resultante seria introduzida a simbologia × (vezes) e tudo o que ela representa. A segunda tarefa continha situações problemáticas onde os alunos eram chamados a calcular o número total de cromos sabendo o número de cromos em cada saqueta, podendo socorrer-se da multiplicação, ou da adição repetida.

À medida que o grupo ia discutindo e antecipando qual a melhor estratégia de introduzir a tabuada do 2 tendo em conta o conhecimento dos alunos e dos seus processos de aprendizagem, Luísa sugeriu a possibilidade de se poder recorrer a uma tarefa exploratória. A partir de um exemplo onde era solicitado aos alunos para descobrir o número de sapatos existentes em 10 sacos, sabendo que cada saco tinha um par de sapatos, adaptaram-se algumas das questões de modo a levar os alunos a descobrir regularidades, e a partir destas, construir a tabuada do 2. A discussão seguinte mostra o caminho tomado para a escolha da tarefa:

> Luísa: Esta aqui é uma tarefa de descoberta [referindo-se à tarefa dos sacos] porque reparem é uma tarefa onde questiona que regularidades podem encontrar...
> Ana: Sim, para descobrirem que a regularidade é de 2 em 2...
> Gorete: Então como é que fica? Introduzimos a tabuada com uma tarefa aberta ou fechada?
> Luísa: Eu acho que era bom eles começarem a fazer tarefas que os fizessem pensar e comunicar.
> Sofia: A tarefa exploratória em vez do exercício porque no fundo nós queremos que eles cheguem à tabuada...não queremos apresentar-lha logo! (GA, S3)

Definida a tarefa, a sua estrutura, o modo e o momento de aplicação seguiu-se a planificação do conceito seguinte atendendo à pertinência para o desenvolvimento da aprendizagem progressiva. Perante a opção de trabalhar a tabuada do 4 e de introduzir a noção do dobro, decidiu-se introduzir a noção do dobro e só depois a tabuada do 4 pelo facto de os participantes considerarem haver “...maior relação” (Luísa, GA, S3), sendo que “a tabuada do 4 pode vir espontaneamente a seguir [ao dobro]. Podíamos utilizar a receita de um bolo para dar o dobro” (Sofia, GA, S3).

Tendo como preocupação a progressão das aprendizagens construiu-se um guião com a sequência das tarefas a aplicar e os conceitos a explorar com os alunos nas aulas que antecederam a aula de investigação (Tabela II).

TABELA II
Distribuição das tarefas exploratórias

Tarefa	*Conceitos visados*
Tarefa 3 *"Linhas e colunas"*	Multiplicação na estrutura retangular e propriedade comutativa da multiplicação.
Tarefa 4 *"tabuada do 2"*	A partir do cálculo de pares de sapatos, e da descoberta de regularidades no preenchimento de uma tabela, introduzir a tabuada do 2.
Tarefa 5 *"bolo do iogurte"*	Noção de dobro a partir da resolução de um problema que envolvia a receita de um bolo.
Tarefa 6 *"tabuada do 4"*	Construir a tabuada do 4 a partir da tabuada do 2 e do conceito de dobro. Trabalhar as regularidades dos produtos da tabuada do 4 para introduzir o conceito do quádruplo.
Tarefa 7 *"tarefa combinatória"*	Multiplicação no sentido combinatório.

A operacionalização da aplicação das tarefas de modo sequencial, e em datas predefinidas, permitia igualmente que, em diversas reuniões, fossem trazidos os produtos das tarefas para que os participantes pudessem, em função da análise dos resultados e das estratégias usadas pelos alunos nas diferentes turmas, (re)orientar a construção da tarefa relativa à multiplicação combinatória para a aula de investigação, assim como conhecer e aprofundar o conhecimento sobre o pensamento dos alunos para melhor antecipar e delinear estratégias de superação de dificuldades.

4.2.2. *Conceção da estrutura da aula de investigação*

Na S7, que antecedeu a aula de investigação, a primeira parte foi destinada à resolução da tarefa pelos participantes, à antecipação de dificuldades dos alunos e à definição de estratégias para as ultrapassar. Foram partilhadas e discutidas sugestões de melhoria ao nível da apresentação gráfica dando-se especial atenção à redação dos enunciados, tendo Sofia sugerido que "devemos ter em atenção a linguagem que vamos usar no problema para eles [alunos] perceberem que têm que fazer combinações com as peças e, por isso, seria melhor escrever «conjuntos diferentes»" (GA, S7).

 CC BY-NC

Na segunda parte da sessão procedeu-se à planificação da estrutura da aula de investigação e do trabalho de observação. Foram definidos os segmentos da aula e atribuídos os respetivos tempos a cada um, totalizando 75 minutos, como mostra a Tabela III.

TABELA III
Segmentos previstos para a aula e duração aproximada

Segmentos	*Tempo*
1. Apresentação da tarefa	5 minutos
2. Trabalho autónomo	25 minutos
3. Discussão	20 minutos
3. Trabalho autónomo	15 minutos
4. Discussão e síntese final	10 minutos

Convencionou-se o modo de apresentação da tarefa, a condução da aula e as indicações e alertas que a professora deveria dar aos alunos, em cada momento, registando-se as decisões num guião. Fez-se a atribuição de papéis (quem fazia o quê), foi planificada a disposição dos alunos na sala de aula, os materiais necessários para cada par, o modo de atuar dos diferentes intervenientes em cada momento e atribuíram-se os alunos aos observadores, tendo cada um deles ficado responsável pela observação de 2 pares de alunos. Todas estas decisões foram aprendizagens importantes para os participantes por considerarem que no seu dia a dia não fazem um estudo e previsão tão minucioso da planificação, aplicação e condução das atividades letivas com objetivos curriculares tão definidos e a pensar no conhecimento que cada aluno possui. Era evidente a surpresa de Luís e de Sofia quando dizem não fazer "ideia de que era necessário ser tão rigoroso na preparação de tudo o que vai acontecer, desde a atribuição de tempos até ao nosso modo de atuar e de conduzir a aula" (Luís, GA, S7).

Por fim, passou-se aos procedimentos da recolha de dados de observação definindo-se o que se iria observar, como e onde poderia ser registado, elaborando-se um guião com as sugestões dadas. Esse episódio da sessão foi particularmente rico nas intervenções tendo os participantes dado sugestões pormenorizadas de registos para os quais teriam que estar atentos durante a observação, o que evidencia uma crescente tomada de consciência do conhecimento do aluno e da cultura de aprendizagem. O ambiente foi sempre muito participado com a exposição e esclarecimento de dúvidas sobre todos os procedimentos a ter em todos os segmentos da aula de investigação demonstrando, por vezes, alguma ansiedade e nervosismo, especialmente por parte de Sofia, porque seria ela a conduzir a aula.

Tarefas. A leitura e discussão, nas primeiras sessões (Tabela I), de textos sobre a natureza das tarefas (Ponte, 2005; Ponte et al., 2017) incidindo sobre a diferença entre tarefas exploratórias e exercícios, a importância da identificação de fases da aula numa aula exploratória, da planificação detalhada do modo de conduzir a aula e a discussão coletiva revelou-se essencial para clarificar o tipo de tarefa a elaborar para a aula de investigação uma vez que, como referiu Luísa, pretendia-se "...conhecer melhor os processos de raciocínio dos alunos e as estratégias usadas para resolver a tarefa em vez de os observar a resolver um simples exercício que não nos dá conhecimento novo"(GA, S2).

Material a utilizar pelos alunos. Por verificarem que nenhuma das tarefas entretanto identificadas se adequava ao objetivo pretendido, os participantes optaram por construir uma tarefa exploratória. Luísa sugeriu "que fosse dado material concretizador aos miúdos porque (...) eles precisam muito de experimentar e de visualizar" (GA, S3). Atendendo à idade e ano de escolaridade pensou-se que o mais adequado seria fazer combinações de peças de roupa (camisolas e calças). Escolhido o tema, teve lugar a discussão de ideias e sugestões que foram levando à tomada de decisões sobre a conceção da tarefa em função do objetivo pretendido —conhecer os processos de raciocínio e as estratégias dos alunos para resolverem situações problemáticas utilizando o sentido combinatório da multiplicação.

Os participantes começaram por decidir que o primeiro problema da tarefa deveria ser acompanhado com material manipulável recortado de modo a que os alunos pudessem usar para experimentar as suas opções "porque o que nos interessa é observar as estratégias utilizadas pelos alunos na tarefa, não é o recorte" (Luísa, GA, S4). Na perspetiva de Luísa, Ana e Sofia, o facto de os alunos poderem manusear e experimentar o material ajudaria aqueles que tivessem maiores dificuldades a visualizar como é que poderiam conjugar as várias possibilidades.

Seguidamente, discutiu-se o número de peças a distribuir pelos alunos. O clima de empatia no seio do grupo contribuiu progressivamente para o aumento da confiança e para a consciencialização da importância de pensar aprofundadamente nos processos de aprendizagem dos alunos, pelo que foram equacionados vários cenários. Os participantes começaram por pensar em distribuir peças de roupa na quantidade mencionada no enunciado (2 calças e 3 camisolas). Ana interveio sugerindo: "Imagina que dás esse número de peças recortadas. Provavelmente muitos dos alunos vão deixar uma camisola de fora porque podem ficar limitados nas possibilidades de poder combinar as calças com as camisolas" (GA, S5). Luísa concordou e acrescentou que "...se deveria dar a mais para os obrigar a pensar mais um pouco" (GA, S5).

 BY-NC

Foi então discutida a possibilidade de ser distribuído o número de peças de roupa de acordo com as combinações possíveis (6 calças e 6 camisolas). Contudo, no entender de Luís, “essa possibilidade poderia induzir a resposta e o raciocínio de alguns alunos influenciando o modo como poderiam resolver a tarefa” (GA, S5) uma vez que os alunos ficariam com uma indicação sobre o número de combinações corretas, não sendo, por isso, a opção mais adequada. Por fim, equacionou-se dar mais peças do que a quantidade necessária (7 calças e 7 camisolas). Entendeu-se que era a situação que menos limitava o pensamento dos alunos no que se referia às possíveis combinações a fazer. Além disso, os participantes foram de opinião que essa opção permitiria conhecer melhor o processo de pensamento dos alunos, uma vez que os impelia a ter um raciocínio mais elaborado para perceber que tinham peças de roupa a mais para as possibilidades corretas.

Os participantes decidiram que só no primeiro problema os alunos teriam figuras com as peças de roupa para os ajudar a organizar o seu pensamento. No entanto, estavam conscientes de que estariam a limitar a estratégia usada pelos alunos sendo expectável que a grande maioria, senão todos, recorresse a representações ativas para resolver o problema. O desafio estaria mais no número de combinações que cada par iria conseguir descobrir.

Na segunda parte da tarefa não seria distribuído material e esperava-se que os alunos aplicassem os conhecimentos adquiridos. Para isso, era necessário, no final do primeiro problema, haver lugar para a discussão coletiva das representações e do número de possíveis combinações encontradas por cada um dos pares, mas também de outras que seriam apresentadas pela professora (sob a forma de tabela, esquema em árvore ou expressão numérica), no caso de nenhum grupo as apresentar. Só depois da discussão, os alunos poderiam resolver o segundo problema. O objetivo era poder observar se algum dos pares iria recorrer à expressão «4×3=12» como estratégia de resolução imediata ou, se pelo contrário, após a discussão coletiva, os alunos continuavam a recorrer à representação ativa usada inicialmente, não se observando evolução nas estratégias usadas para resolver o problema.

Estrutura e enunciado da tarefa. Decidido o número de peças a entregar por grupo, as cores das peças de roupa a usar no enunciado e o facto de serem os alunos a pintar as peças, colocava-se outra questão relativa à extensão da tarefa, uma vez que “se os alunos vão pintar as peças temos de limitar o número de problemas porque é necessário dar-lhes tempo para pintar, combinar, colar e responder” (Gorete, GA, S6). Atendendo ao facto de a tarefa ser planeada para um período não superior a 75 minutos, considerou-se que o enunciado não deveria ter mais do que duas situações problemáticas. Contudo, Ana questionou como seria possível estender a tarefa a partir de um só problema:

Ana: Mas é que tu só apresentas um enunciado. É só uma tarefa!!!!
Gorete: Mas podes ter várias perguntas....
Ana: Mas é que... Como é que tu partindo deste problema fazes mais do que uma pergunta? Isso é o que eu quero saber?!
Gorete: Podes, a partir do problema da roupa, estender a tarefa aumentando o número de peças. Podes acrescentar outra pergunta do género: E se o Paulo tivesse 3 calças e 4 camisolas, quantas combinações poderia fazer?
Luísa: Exatamente! Ou: ele recebeu mais uma camisola e outro par de calças...
Ana: Pois... Já percebi! (GA, S6)

Ainda no processo de conceção do enunciado da tarefa, houve lugar ao questionamento sobre os fatores que deveriam surgir na segunda situação problemática, se seriam diferentes, ou iguais. O diálogo seguinte ilustra o modo como se chegou à decisão de serem diferentes:

Luísa: Se ficarem os 2 fatores iguais é mais difícil para eles perceberem qual é o número das calças e qual o das camisolas. Mas podíamos por 4 vezes o 3 em que o 3 corresponde às calças e o 4 às camisolas.(...) Porque pode acontecer o seguinte [um aluno diz] 'Professora, eu aqui tenho 3×4' (…) E outros dizerem assim: 'Mas eu fiz pelas camisolas e foi 4×3...'
Sofia: Sim, é perfeitamente aceitável...
Luísa: E se for 3×3 já é difícil para eles justificarem e não chegamos a perceber se eles perceberam ou não a qual das peças corresponde cada um dos fatores porque os fatores são iguais.
Ana: Concordo.
Sofia: Devemos evitar isso, não é? (GA, S6)

Todas as decisões sobre a estrutura da aula de investigação, do enunciado da tarefa e o material a disponibilizar aos alunos, representaram avanços significativos no percurso de aprendizagem dos participantes ao terem oportunidade para, colaborativamente, contextualizar representações das suas atividades e refletir sobre elas (Bezerra, 2017; Ponte et al., 2016; Soto Gómez & Pérez Gómez, 2015).

4.3. *Conhecimento da prática letiva: preparação da condução da aula de investigação*

Da análise de conteúdo emergem alguns indicadores que evidenciam aprendizagens no que diz respeito à condução e gestão da aula de investigação. Na S7, que antecedeu esta aula, fez-se a planificação pormenorizada sobre o modo

 CC BY-NC

de conduzir o momento da apresentação das estratégias usadas pelos alunos. No momento da discussão, e sob orientação da professora, cada par seria chamado a apresentar a sua estratégia de acordo com o que Sofia foi observando no momento de trabalho autónomo começando por chamar os alunos que apresentavam um raciocínio menos complexo para o mais estruturado (Brocardo et al., 2005; Mendes, 2012; Rocha & Menino, 2009).

Contudo, Sofia manifestou dúvidas sobre como, na prática, deveria conduzir a discussão para levar os alunos ao uso da expressão numérica da multiplicação tendo em conta de que no primeiro problema a tendência seria a de usarem a mesma estratégia de resolução (representação ativa) por lhes ser distribuído material manipulável:

> Depois deles apresentarem as suas estratégias como é que faço para chegar à multiplicação se nenhum grupo lá chegar? Como é que se faz a passagem daqui para a tabuada? (GA, S7)

Luísa sugeriu:

> Para eles perceberem podemos fazer assim: Então vamos arrumar primeiro as calças azuis e ver as hipóteses que temos. Depois [ir] pelas calças castanhas e ver com quantas camisolas podemos combinar. E para isso usar imagens que ficam no quadro e ir registando as hipóteses. E depois perguntar: Será que podemos usar a multiplicação? Como é que podemos resolver isto sem ser a somar?" (Luísa, GA, S7)

As inseguranças manifestadas por Sofia durante a sessão contrastam, de certa forma, com a confiança transmitida ao longo das sessões anteriores no modo como participou e colaborou na planificação das diferentes tarefas da sequência didática e como partilhou as experiências do desempenho dos seus alunos em contexto de sala de aula. Porém, a sequenciação das ações a desenvolver em cada momento transmitiu-lhe uma maior tranquilidade, para além de tornar mais claro a importância da antecipação e planificação pormenorizada das aprendizagens e do ambiente de sala de aula. O envolvimento e aprendizagem, por parte dos participantes, foram visíveis ao longo da sessão de preparação da aula de investigação pelas diversas questões que foram colocando, não só sobre os aspetos organizacionais e materiais, mas sobretudo da condução da aula, tendo estes momentos de aprendizagem sido referenciados, pelos participantes, como aspetos marcantes na sua aprendizagem em diversos momentos (DB, S7; DB, S9).

5. Balanço da participação no estudo de aula

Na última sessão foi feito um balanço da experiência do EA. Os participantes destacam desde logo o ambiente de partilha e de colaboração que se foi instituindo ao longo das sessões como fatores essenciais na aprendizagem que desenvolveram, como exemplifica o excerto seguinte:

> Luís: Eu já desconfiava que isto seria muito enriquecedor. Eu tenho sofrido de isolamento e esta experiência foi uma verdadeira partilha e um verdadeiro trabalho colaborativo.
> Sofia: Faz falta isto, não é? Eu também sinto um pouco o isolamento e a falta de partilha...
> Luísa: Sabem o que eu acho? Eu já disse isto à Gorete: Eu estou muito contente por estar no grupo e vejo-vos empenhados e gosto de vos ver empenhados. Sinto que isto é que é o verdadeiro trabalho colaborativo...
> Ana: E é. (EC, S11)

Na fase da preparação, os participantes destacam a importância da antecipação das dificuldades, o pensar sobre o modo como os alunos poderão reagir à tarefa e a delineação de estratégias de acordo com os objetivos curriculares como etapa essencial ao contribuir para o aprofundamento do conhecimento sobre o aluno e, naturalmente, do conhecimento sobre o ensino. Para Ana, essa consciencialização de anteciparmos "e pensar «eles vão fazer assim, o melhor é ter já isto». Quando estamos sozinhos temos apenas uma visão e quando estamos em grupo uma pensa de uma maneira, outra pensa de outra e isso funciona como espelho que nos alerta: «espera lá, pois é, e se for assim?" (DB, S10), sendo esse processo muito enriquecedor nesta experiência. Sofia destaca o facto de poder "trazer os resultados para poder refletir sobre eles com outras pessoas" (EC, S11) como fator importante na aprendizagem profissional, à semelhança dos resultados de outros estudos (Bezerra, 2017; Ponte et al., 2017; Quaresma & Ponte, 2017).

Quando questionados sobre a fase da realização da aula de investigação, Sofia referiu ter sido bom "passar pela experiência de dar a aula ainda que estivesse muito nervosa no início, porque me obrigou a desempenhar um papel mais contido e isso fez com que estivesse desperta para observar o desempenho dos alunos com outro olhar" (EC, S11). Luísa, a propósito da aula de investigação, e sobre o papel de observadora, referiu que observar e interpretar o pensamento, diálogos e o raciocínio dos alunos foi algo que lhe deu especial satisfação e "se pudesse fazia só isso: observar os miúdos, como é que eles pensam. Eu não queria outra coisa na vida. No dia-a-dia raramente consigo fazer isso, mas gosto muito de o fazer..." (EC, S11).

6. Conclusão

À semelhança do relatado em outros estudos (Bezerra, 2017; Quaresma & Ponte, 2017; Soto Gómez & Pérez Gómez, 2015; Murata et al., 2012; Widjaja et al., 2017) os resultados confirmam o potencial do EA enquanto processo de desenvolvimento

 CC BY-NC

profissional trazendo para os participantes novas perspetivas sobre o conhecimento do aluno e do seu processo de aprendizagem, passando a dar mais atenção à linguagem e expressões usadas nos enunciados das tarefas pelo facto de muitas das vezes serem uma barreira ao seu pleno entendimento pelo aluno (Mendes, 2012). Os resultados mostram que os participantes manifestam estar mais despertos para a importância do ensino-aprendizagem exploratório no ensino da Matemática passando a valorizar as tarefas abertas e os momentos de discussão coletiva.

No que se refere à prática letiva reconhecem-se igualmente aprendizagens significativas. Os participantes aprofundaram conhecimentos sobre o modo como os conceitos podem ser trabalhados na aprendizagem da multiplicação para que os alunos se apropriem, e compreendam, a estrutura multiplicativa. Valorizaram aspetos como o diagnóstico, a planificação dos conceitos prévios e a possibilidade de trazer os resultados do desempenho dos alunos para análise, discussão e reflexão coletiva como fatores que contribuíram para um maior conhecimento sobre as dificuldades dos alunos, e do seu processo de aprendizagem.

Emergem ainda aprendizagens significativas referentes à escolha e conceção de tarefas abertas, à planificação da estrutura da aula de investigação e à criação de condições propiciadoras de uma cultura de sala de aula favorável a aprendizagens mais participadas dos alunos. Manifestam estar mais conscientes da importância da preparação antecipada dos momentos de discussão coletiva para a comunicação de estratégias e institucionalização de conhecimentos pela influência que estes têm na compreensão e apropriação dos conceitos pelos alunos.

Quanto à dinâmica do processo formativo, o ambiente contribuiu para o comprometimento do grupo favorecendo o trabalho colaborativo, a partilha e reflexão, e a vontade e segurança para querer experimentar novas práticas. O presente EA traz ainda mais-valias pelo facto de ter sido essencialmente dinamizado de modo interno ao Agrupamento, e ter sido dada uma grande atenção ao trabalho preparatório da construção de um percurso de aprendizagem dos alunos para chegar à aula de investigação, situações pouco presentes em outras investigações. O modo como este EA foi realizado, descrito na metodologia e nos resultados, dá pistas para a realização de EA semelhantes noutros contextos.

Este estudo aprofunda os resultados de estudos anteriores (como Bezerra, 2017; Sack & Vazquez, 2011; Ni Shuilleabhain & Clivaz, 2017; Widjajaet al., 2017), sobre o desenvolvimento do conhecimento didático do professor e a sua mobilização na prática letiva. Incidindo num tópico específico, a aprendizagem da multiplicação, este estudo evidencia as potencialidades do EA na promoção e desenvolvimento do conhecimento didático dos professores ao contribuir para que estes ampliem o conhecimento sobre o aluno e os seus processos de aprendizagem, bem como no que se refere ao conhecimento da própria prática. Saber em que medida estas aprendizagens se tornam visíveis na prática letiva de forma continuada, será matéria para futuras investigações.

Referências

Amado, J. (Ed.) (2013). *Manual de investigação qualitativa em educação*. Imprensa da Universidade de Coimbra.

Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389-407. https://doi.org/10.1177/0022487108324554

Bardin, L. (2002). *Análise de conteúdo*. Edições Setenta.

Bezerra, R. (2017). *Aprendizagens e desenvolvimento profissional de professores que ensinam matemática nos anos iniciais do ensino fundamental no contexto da lessonstudy*. Tese de doutoramento, Faculdade de Ciência e Tecnologia, UNESP, Presidente Prudente / SP.

Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação: Uma introdução à teoria e aos métodos*. Porto Editora.

Brocardo, J., Delgado, C., & Mendes, F. (2005). A multiplicação no contexto de sentido de número. In *Desenvolvendo o sentido de número: Materiais para o educador e para o professor do 1.º Ciclo, Vol. II,* (pp. 9-17). APM.

Lewis, C., Friedkin, S., Emerson, K., Henn, L., & Goldsmith, L. (2019). How does lesson study work? Toward a theory of lesson study process and impact. In R. Huang, A. Takahashi & J. P. Ponte (Eds.), *Theory and practices of lesson study in mathematics: An international perspective* (pp. 13-37). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-04031-4_2

McIntosh, A., Reys, B. J., & Reys, R. E. (1992). A proposed framework for examining basic number sense. *For the Learning of Mathematics, 12*(3), 2-8 & 44. https://flm-journal.org/Articles/94F594EF72C03412F1760031075F2.pdf

Mendes, F. (2012). *A aprendizagem da multiplicação numa perspetiva de desenvolvimento do sentido de número: Um estudo com alunos do 1.º Ciclo.* Tese de Doutoramento, Universidade de Lisboa, Instituto de Educação.

Mendes, F., Brocardo, J., & Oliveira, H. (2013). A evolução dos procedimentos usados pelos alunos: Contributo de uma experiência de ensino centrada na multiplicação. *Quadrante, 22*(1), 133-162. https://quadrante.apm.pt/article/view/22884

Ministério da Educação (2018). *Aprendizagens Essenciais para o Ensino Básico*. Recuperado de: http://www.dge.mec.pt/aprendizagens-essenciais-ensino-basico.

Murata, A. (2011). Introduction: Conceptual overview of lesson study. In L. C. Hart, A. Alston & A. Murata (Eds.), Lesson study research and practice in *mathematics education: Learning together* (pp. 1-12). Springer. https://doi.org/10.1007/978-90-481-9941-9_1

Murata, A., Bofferding, L., Pothen, B. E., Taylor, M. W., & Wischnia, S. (2012). Making connections among student learning, content, and teaching: Teacher talk paths in elementary mathematics lesson study. *Journal for Research in Mathematics Education, 43*(5), 616–650. https://pubs.nctm.org/view/journals/jrme/43/5/article-p616.xml

National Council of Teachers of Mathematics (2007). *Princípios e normas para a matemática escolar*. Lisboa: APM.

Ni Shuilleabhain, A., & Clivaz, S. (2017). Analyzing teacher learning in lesson study: Mathematical knowledge for teaching and levels of teacher activity. *Quadrante*, *26*(2), 99-125. https://quadrante.apm.pt/article/view/22948/17014

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM.

Ponte, J. P. (2012). Estudiando el conocimiento y el desarrollo profisional del profesorado de matemáticas. In N. Planas (Ed.), *Teoria, critica y práctica de la educación matemática* (pp.83-98). Barcelona: Graó.

 BY-NC

Ponte, J. P., Mata-Pereira, J., Quaresma, M., & Velez, I. (2017). Formação de professores dos primeiros anos em articulação com o contexto de prática de ensino de Matemática. *RELIME, 13*(1), 71-94. https://doi.org/10.12802/relime.17.2013.

Ponte, J. P., Oliveira, H. (2002). Remar contra a maré: A construção do conhecimento e da identidade profissional na formação inicial. *Revista de Educação*, *11*(2), 145-163. https://repositorio.ul.pt/handle/10451/3167

Ponte, J. P., Quaresma, M., Mata-Pereira, J., & Baptista, M. (2016). O estudo de aula como processo de desenvolvimento profissional de professores de Matemática. *BOLEMA*, *30*(56), 868-891. https://doi.org/10.1590/1980-4415v30n56a01.

Ponte, J. P., & Serrazina, L. (2000). *Didáctica da matemática do 1.º ciclo.* Universidade Aberta.

Puchner, L. D., & Taylor, A. R. (2006). Lesson study, collaboration and teacher efficacy: Stories from two school-based math lesson study groups. *Teaching and Teacher Education, 22*, 922-934. https://doi.org/10.1016/j.tate.2006.04.011

Quaresma, M., & Ponte, J. P. (2017). Dinâmicas de aprendizagem de professores de Matemática no diagnóstico dos conhecimentos dos alunos num estudo de aula. *Quadrante*, *26*(2), 43-68. https://quadrante.apm.pt/article/view/22951/17017

Rocha, M. I., & Menino, H. A. (2009). Desenvolvimento do sentido do número na multiplicação: Um estudo de caso com crianças de 7/8 anos. *RELIME, 12*(1), 103-134. https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=33512105

Sack, J., & Vazquez, I. (2011). The intersection of lesson study and design research: A 3-d visualization development project for the elementary mathematics curriculum. In L. C. Hart, A. Alston & A. Murata (Eds.), *Lesson study research and practice in mathematics education: Learning together* (pp. 201-220). Springer. https://doi.org/10.1007/978-90-481-9941-9_16

Soto Gómez, E., & Pérez Gómez, Á. I. (2015). Lessons studies: un viaje de ida y vuelta recreando el aprendizaje compreensivo. *Revista Interuniversitaria de Formación del Profesorado, 29*(3), 15-28. https://www.redalyc.org/pdf/274/27443871002.pdf

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher, 15*(2), 4-14. https://doi.org/10.3102/0013189X015002004

Shulman, L. S. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review, 57*(1), 1-22. http://dx.doi.org/10.17763/haer.57.1.j463w79r56455411

Treffers, A., &Buys, K. (2001). Grade 2 (and 3) calculation up to 100. In M. Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Children learn mathematics* (pp.61-88). Freudenthal Institute (FI), Utrecht University & National Institute for Curriculum Development (SLO).

Widjaja, W., Vale, C., Groves, S., & Doig, B. (2017). Teachers' professional growth through engagement with lesson study. *Journal of Mathematics Teacher Education, 20*, 357–383. https://doi.org/10.1007/s10857-015-9341-8

Autores

Gorete Fonseca. Universidade de Lisboa, Portugal. mgfonseca@campus.ul.pt

https://orcid.org/0000-0001-5652-416X

João Pedro da Ponte. Universidade de Lisboa, Portugal. jpponte@ie.ulisboa.pt

https://orcid.org/0000-0001-6203-7616

La *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (Relime)* es una revista científica indizada que busca diseminar nuevo conocimiento y resultados de investigación en Matemática Educativa, es decir, *relativos a los procesos de enseñanza y de aprendizaje particulares del conocimiento matemático*, en escenarios y contextos diversos. *Publica cuatrimestralmente* artículos inéditos y arbitrados, con resultados originales de investigación científica en español, portugués, inglés y francés. Está dirigida a investigadores, docentes de Matemáticas y Ciencias, estudiantes de licenciatura y posgrado y tomadores de decisiones relacionados con el campo disciplinar.

La Relime es la publicación oficial de investigación del *Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C. (Clame)*, asociación científica y académica sin fines de lucro. Actualmente, la Relime se edita y pública desde la Ciudad de México, México.

Los objetivos de la Relime son:

– Ser un foro abierto a las diversas escuelas del pensamiento (paradigmas, teorías, metodologías, métodos, enfoques) en nuestra disciplina, la Matemática Educativa; sin definir perspectivas únicas y con un profundo respeto a las tradiciones educativas y los contextos de los diversos sistemas educativos de nuestra región.
– Dar a conocer resultados de investigación original en Matemática Educativa que se realizan en América Latina y el Caribe, y en el resto del mundo.
– Fomentar una cultura de divulgación e investigación entre los distintos grupos de investigación en nuestra región.
– Propiciar el debate y la reflexión profunda sobre problemas de investigación que fortalezca la disciplina en nuestra área geográfica.
– Fortalecer la calidad de la investigación en Matemática Educativa y la vinculación entre comunidades nacionales e internacionales.

Las contribuciones enviadas a la Relime deben ser manuscritos originales (nuevo conocimiento) e inéditos (no haber sido publicados en ningún otro medio, ni estar en proceso de evaluación en otra revista), pertinentes y relevantes para la Matemática Educativa.

En cada número, la Relime publica una editorial y cuatro artículos con una política de acceso abierto vía diamante. Los artículos pueden ser:

– *Artículos de investigación empírica*: son aquellos cuyos resultados provienen de estudios clínicos o *in situ*.

 BY-NC

- *Artículos de investigación documental*: son aquellos cuyos resultados provienen de estudios sobre el curriculum, libros de texto, historia de la educación, entre otros.
- *Ensayos teóricos y filosóficos*: Texto producto del estudio y la reflexión académica de un tópico de interés para la comunidad científica en Matemática Educativa.
- *Revisiones bibliográficas*: Estados del arte, delimitados, sobre tópicos especializados en nuestro campo disciplinar. La revisión debe contribuir en el entendimiento profundo del tópico y proporcionar un análisis académico y crítico sobre las aportaciones de la investigación, así como trazar una prospectiva original para su estudio.

Se reciben manuscritos dentro de los periodos: *1 de enero al 30 de junio*, y *1 de septiembre al 31 de octubre*. Estos deben presentarse en versión electrónica, vía correo electrónico a *editorial@relime.org*; deben ser de una extensión máxima de 9,000 palabras en su primer envío, sin excepciones, incluyendo cuadros, gráficas, referencias y anexos; tener una redacción clara, buena ortografía y una estructura coherente al tipo de artículo enviado.

Para más información sobre el formato de las contribuciones y las normas editoriales de la Relime, favor de visitar la página oficial de la revista *https://relime.org*

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa

Volumen 25, Número 2

Diseño digital:
LDG. Emilio Serna Hernández
Recrea. Soluciones infinitas
sernandem@yahoo.com.mx

Se imprimió en los talleres de
Editorial Progreso S.A. de C.V.
Sabino # 275
Col. Santa María la Ribera
Alcaldía Cuauhtémoc
06400, CDMX, México

Julio de 2022
Impresión bajo demanda