EDITORIAL

Nuevo factor de impacto en WoS
Ricardo Cantoral, Daniela Reyes – Gasperini

ARTÍCULOS

Multiplicar sumando: una experiencia
con estudiantes de bachillerato
Marcela Ferrari Escolá, Rosa María Farfán Márquez

La resolución de problemas aritmético - algebraicos
y las estrategias de aprendizaje en matemáticas.
Un estudio en educación secundaria obligatoria (ESO)
Javier Gasco - Txabarri

Estudio de indicadores de creatividad matemática
en la resolución de problemas
Alberto Mallart, Jordi Deulofeu

La elaboración de preguntas en la enseñanza
de la comprensión de problemas matemáticos
Karel Pérez Ariza, José Emilio Hernández Sánchez

INSTRUCCIONES TÉCNICAS PARA AUTORES

RELIME 20-2
1665-2436

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa

Vol. 20, Núm. 2, julio 2017

Vol. 20, Núm. 2, 2017

Revista Latinoamericana
de Investigación en
Matemática Educativa

Relime

Clame Comité Latinoamericano de Matemática Educativa

Publicación oficial de investigación del Comité Latinoamericano de Matemática Educativa

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa

Directora Fundadora: ROSA MARÍA FARFÁN

Director Editorial: RICARDO CANTORAL

Editora Asociada: GISELA MONTIEL

Departamento de Matemática Educativa – Cinvestav
AP 14-740, México 07000, DF
M É X I C O

Portada: «Opus 1» de Oscar Reutersvärd en 1934. Reproducida con permiso de los herederos del artista.

Publicación oficial de investigación del Comité Latinoamericano de Matemática Educativa, Clame A.C. Consejo Directivo: *Presidente:* Olga Lidia Pérez González – Cuba; *Secretario:* Hugo Parra Sandoval – Venezuela; *Tesorera:* Daniela Reyes Gasperini – Argentina; *Vocal Norteamérica:* Rebeca Flores García – México; *Vocal Caribe:* Juan Mazueta Concepción – República Dominicana; *Vocal Centroamérica:* Luis Moreno Chandler – Panamá*; Vocal Sudamérica:* Marcela Parraguez González – Chile.

Publicación cuatrimestral. Se publica en los meses de marzo, julio y noviembre. Vol. 20, Núm. 2, julio, 2017. Tiraje 1000 ejemplares. Suscripciones: suscripcion@relime.org. Contribuciones e información: relime@clame.org.mx, http://www.clame.org.mx.

Relime es una revista indizada en:
ISI Web of Knowledge, SSCI – Social Sciences Citation Index y Journal Citation Reports • ERIH – European Reference Index for the Humanities • Conacyt – Índice de Revistas Mexicanas de Investigación Científica y Tecnológica • Scopus – Elsevier Database • ZDM – Zentralblatt für Didaktik der Mathematik • IBZ – International Bibliography of Periodical Literature in the Humanities and Social Sciences • Clase – Citas Latinoamericanas en Ciencias Sociales y Humanidades • Iresie – Índice de Revistas de Educación Superior e Investigación Educativa • Latindex – Sistema Regional de Información en Línea para Revistas Científicas de América Latina, el Caribe, España y Portugal • Redalyc – Red de Revistas Científicas de América Latina y el Caribe, España y Portugal • EBSCO – Information Services • Dialnet • Scielo-México – Scientific Electronic Library Online • Thomson Gale – Gale Iberoamérica.

2017 Impreso en México

Volumen 20 – Número 2 – 2017

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa

Publicación oficial del Comité Latinoamericano de Matemática Educativa

ISSN 1665 – 2436.

Edición Colegio Mexicano de Matemática Educativa A.C. – México,
RFC CMM 040505 IC7.
Impreso en México

2017

Volumen 20 Número 2 Julio de 2017

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa

EDITORIAL

133 Nuevo factor de impacto en WoS
Ricardo Cantoral, Daniela Reyes – Gasperini

ARTÍCULOS

137 Multiplicar sumando: una experiencia con estudiantes de bachillerato
Marcela Ferrari Escolá, Rosa María Farfán Márquez

167 La resolución de problemas aritmético - algebraicos y las estrategias de aprendizaje en matemáticas. Un estudio en educación secundaria obligatoria (ESO)
Javier Gasco - Txabarri

193 Estudio de indicadores de creatividad matemática en la resolución de problemas
Alberto Mallart, Jordi Deulofeu

223 La elaboración de preguntas en la enseñanza de la comprensión de problemas matemáticos
Karel Pérez Ariza, José Emilio Hernández Sánchez

249 INSTRUCCIONES TÉCNICAS PARA AUTORES

REVISTA LATINOAMERICANA DE INVESTIGACIÓN EN MATEMÁTICA EDUCATIVA, Vol. 20, No. 2, julio 2017, es una publicación cuatrimestral editada por el Colegio Mexicano de Matemática Educativa, A. C., a través del Comité Latinoamericano de Matemática Educativa, calle Av. Instituto Politécnico Nacional, 2508, Col. San Pedro Zacatenco, Delegación Gustavo A. Madero, C.P. 07360, Tel. (55) 57473819, www.clame.org.mx/relime.htm, relime@clame.org.mx. Editor responsable: Ricardo Cantoral. Reservas de Derechos al Uso Exclusivo No. 04-2013-042513070000-102, ISSN: 1665-2436, ambos otorgados por el Instituto Nacional del Derecho de Autor. Impresa por Editorial Progreso, S. A. de C. V., Sabino No. 275, Col. Sta. María la Ribera, C.P. 06400, Delegación Cuauhtémoc, México, D. F., este número se terminó de imprimir en julio de 2017, con un tiraje de 1,000 ejemplares más sobrantes.

“Relime se publica con el apoyo de Conacyt, Cinvestav y Clame”

EDITORIAL

0.708.
NUEVO FACTOR DE IMPACTO EN WOS

0.708.
NEW IMPACT FACTOR IN WOS

RICARDO CANTORAL, DANIELA REYES – GASPERINI
Departamento de Matemática Educativa - Cinvestav, IPN – México

Una publicación científica es, ante todo, un espacio de comunicación de resultados originales altamente especializados. Una revista es, entonces, un sitio al que acuden con regularidad especialistas en las temáticas tratadas, ya sea para publicar o con fines de consulta. En definitiva, un sitio necesario para el diálogo comunitario como lo ha venido siendo desde el siglo XVII. Por este motivo, su razón de ser, su objetivo último, se alcanza con la escritura, la lectura y el debate. Cuando una publicación logra estar en las reflexiones de colegas, entonces suele ser citada en una gran variedad de nuevos productos (revistas, memorias de congresos, tesis, capítulos y libros), este ciclo de producción y citación del conocimiento caracteriza a las revistas modernas.

Relime – *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* es una publicación científica periódica, multilingüe, de acceso abierto que presenta resultados originales de investigación después de someterlos al escrutinio académico de la revisión por pares a doble ciego. Su comunidad de diálogo es multinacional y se publica en cuatro idiomas: castellano, portugués, francés e inglés.

Sin duda alguna Relime se ha posicionado como una revista internacional que mejora progresivamente sus indicadores bibliométricos como el factor de impacto con y sin autocitas (Cantoral y Reyes – Gasperini, 2012) y se encuntra en el proceso de incrementar su visibilidad e impacto social mediante estrategias múltiples, como la de estar presente en redes de la información y manejarse con mecanismos internacionales como el del OJS (Cantoral, 2013).

Todo ello queda de manifiesto en el más reciente informe del *ISI Web of Science* (ISI WoS), donde Relime alcanzó un factor de impacto del 0.708, lo que la ubica como la revista iberoamericana con mayor factor en su área de

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (2017) *20* (2): 133-136.
DOI: 10.12802/relime.17.2020

especialidad y ocupa la 7ª posición entre las revistas mexicanas de todos los ámbito del saber (N = 39 revistas), como se observa en la siguiente tabla.

TABLA I
Revistas mexicanas en ISI WoS

Annals of Hepatology	1.678
Salud Pública de México	1.253
Revista Mexicana de Ingeniería Química	0.958
Revista Mexicana de Ciencias Geológicas	0.815
Revista Mexicana de Astronomía y Astrofísica	0.712
Journal of the Mexican Chemical Society	0.710
Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa	0.708
Ciencias Marinas	0.689
Atmósfera	0.673
Acta Botánica Mexicana	0.625
Revista Mexicana de Ciencias Pecuarias	0.600
Revista Mexicana de Biodiversidad	0.596
Boletín de la Sociedad Geológica Mexicana	0.582
Revista Mexicana de Psicología	0.541
Latin American Economic Review	0.520
Geofísica Internacional	0.508
Botanical Sciences	0.496
Revista Mexicana de Física	0.482
Madera y Bosques	0.368
Salud Mental	0.361
Revista de Investigación Clínica	0.350
Gestión y Política Pública	0.324
Perfiles Latinoamericanos	0.324
Gaceta Médica de México	0.312
Cirugía y Cirujanos	0.276
Agrociencia	0.264
Política y Gobierno	0.250
Convergencia – Revista de Ciencias Sociales	0.232
Hidrobiológica	0.228
Revista Chapingo Serie Ciencias Forestales y del Ambiente	0.196
Revista Internacional de Contaminación Ambiental	0.190
Revista Fitotecnia Mexicana	0.167
Investigación Económica	0.150
Investigación Bibliotecológica	0.125
Trimestre Económica	0.102
Veterinaria México	0.100
Tecnología y Ciencias del Agua	0.090
Papeles de Población	0.088
Andamios	0.014

Este incremento en el factor de impacto se debe excluisvamente a la frecuencia de citación, por ende a la dinámica de publicación de la comunidad de referencia. De hecho, su valor exacto nunca es predecible. Sin embargo, como dijimos en la editorial del número anterior (Montiel, 2017), este dato no basta para confirmar nuestra presencia, legítimamente, en la era digital del conocimiento abierto, en este sentido se da inicio a una etapa de toma de desiciones razonadas y razonables.

Con las tendencias a la publicación digital y el *open access*, se ha venido fortaleciendo la idea de mudar a las publicaciones de "viejo cuño", hacia redes de publicaciones ínterconectadas a través de la marcación por metadatos. Este proceso, si bien necesario, produce también un crecimiento en el número y amplitud de reclamos legítimos. Se cuestiona entre autores y editores lo siguiente: se trata de escribir y leer para personas, con la finalidad de avanzar el conocimiento de frontera, ¿por qué publicar para algoritmos matemáticos de búsqueda y citación? Esta situación plantea claramente un dilema que lleva, entre otras cosas, los riesgos de la mercantilización y la lucha por la hegemonia mundial en el ámbito de las publicaciones.

Es claro que el papel de la marcación ha ido en aumento en nuestro entorno inmediato, tanto a través de políticas públicas que tienden a equiparar la calidad de lo producido con la visibilidad y el factor de impacto de las revistas donde se publica; como en las políticas de contratación de los nuevos científicos o la promoción laboral de los científicos activos. Estos fenónomenos han llegado al extremo de juzgar "la calidad de lo producido", sobre la base del factor de impacto de la revista donde se publica. Este riesgo debe ser reconocido y confrontado por los especialistas, quienes en las revisión de pares, establecen criterios de calidad propios de cada disciplina.

Este proceso de marcación se acompañó con el trabajo realizado por SciElo – México y por RedALyC, que coadyuvaron a colocar a las publicaciones regionales en el mundo de las redes internacionales de información. Los motores de búsqueda localizan información valiosa, gracias a dichas marcaciones, pero no logran discernir la calidad intrínseca de lo producido, ni el tono de la citación, ni mucho menos el impacto social que éstas tienen. Esto último sigue siendo, en nuestra opinión, una labor comunitaria. Los autores, los lectores, los revisores son quienes, en definitiva, asignan el atributo de calidad a un escrito, pues lo leen, lo comparten, lo discuten colegiadamente, lo citan y dan un paso más en la dirección del conocimiento nuevo. Este dilema precisa de un debate profundo y la toma de conciencia colectiva sobre el futuro de las publicaciones científicas. Particularmente, Relime estará iniciando un diálogo amplio al respecto.

Recientemente en la "Mesa Redonda de clausura del Seminario de Editores de la UNAM", Claudio Amezcua – Editor de la revista Atmósfera – planteó una serie de interesantes y profundas preguntas respecto del futuro de las revistas en la era digital.

Él señaló que en nuestra Editorial del Número 1 del Volumen XX (Montiel, 2017), se habla de la transición de la revista hacia lo digital y, además de los aspectos técnicos como la marcación de los artículos bajo estándares internacionales SciELO y RedALyC, se abordó también el asunto del acceso abierto y las licencias *Creative Commons*.

Amezcua señala que esto implica cuestiones de orden tecnológico, pero sobre todo obligan a tener una clara posición ante, por ejemplo, los derechos de autor y se pregunta si ¿hemos analizado el asunto de los derechos de autor a la luz de las licencias *Creative Commons* y sobre los posibles usos comerciales de los artículos publicados en Relime? ¿Qué niveles de permiso podremos o debemos considerar?

Como parte de las iniciativas de acceso abierto se han creado varios sitios, de gran tamaño, que albergan revistas a texto completo en diferentes regiones del mundo. El primero de ellos, en 1998, fue *SciELO*, anterior inclusive a la Iniciativa de *Budapest* (2002). Posteriormente, en 2003, aparecieron *RedALyC* y *DOAJ*. Estos y otros proyectos dependen de fondos públicos y son gratuitos para autores, lectores y editores, esto aumenta la presión finaciera para las revistas. ¿Qué perspectivas a mediano y largo plazo se ven para estas iniciativas en comparación con las de las grandes editoriales comerciales y de sistemas como *Web of Science* y *Scopus*? Esta última pregunta, planteada por Amezcua durante la Mesa referida, merece de nuestra mayor serenidad, análisis y sobre todo, la responsabilidad de no abandonar una revista que nace para y por la comunidad de referencia. Avancemos pues en la búsqueda de mejores respuestas…

Referencias bibliográficas

Cantoral, R. (2013). Relime – DOI y OJS. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *16* (2), 135 – 137.

Cantoral, R. y Reyes – Gasperini, D. (2012). 0.167. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *15* (2), 131 – 135.

Montiel, G. (2017). La transición de Relime al contexto editorial digital. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *20* (1), 5 – 7. doi: 10.12802/relime.17.2010

Julio, 2017

Zacatenco, Ciudad de México

Marcela Ferrari Escolá, Rosa María Farfán Márquez

MULTIPLICAR SUMANDO: UNA EXPERIENCIA CON ESTUDIANTES DE BACHILLERATO

Multiply by summing: an experience with senior high school students

RESUMEN

En este artículo reportamos una experiencia realizada con estudiantes de bachillerato fundamentada en la Socioepistemología y tomando elementos de la Ingeniería didáctica como metodología de investigación. El propósito fue generar un ambiente particular que favoreciera la emergencia de lo logarítmico utilizando material manipulable rescatando argumentos primigenios de Stiffer, Napier y Briggs. El análisis de las argumentaciones individuales y grupales de los estudiantes que emergen al descubrir la regla de multiplicar sumando como herramienta para facilitar cálculos y utilizarla para construir más fichas y la ficha general del juego, evidencia un acercamiento a la covariación y propiedades logarítmicas.

PALABRAS CLAVE:

- *Sociepistemología*
- *Propiedades logarítmicas*
- *Multiplicar sumando*

ABSTRACT

In this article we report an experience carried out with senior high school students based on Socioepistemology and adopting didactic engineering as research methodology. The purpose was to generate a particular environment that would favor the emergence of the logarithmic using manageable materials, rescuing primordial arguments by Stiffer, Napier y Briggs. The analysis of the students' individual and collective argumentations which arise when discovering and using the rule of multiply by summing as a tool to facilitate operations in order to construct more charts as well as the game's general chart, demonstrates an approach to the covariation and the logarithmic properties.

KEY WORDS:

- *Socioepistemology*
- *Logarithmic properties*
- *Multiply by summing*

RESUMO

Neste texto relatamos uma experiência realizada com alunos do ensino médio com base no Socioepistemologia e adotando engenharia didática como metodologia de pesquisa. O objetivo foi criar um ambiente particular favorecendo o aparecimento do logarítmo usando material manipulável resgatando alguns argumentos primários de Stiffer, Napier y Briggs. A

PALAVRAS CHAVE:

- *Sociepistemologia*
- *Propriedades dos logaritmos*
- *Multiplicar adicionando*

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (2017) *20* (2): 137-166.
Recepción: Agosto 10, 2015 / Aceptación: Junio 25, 2017. DOI: 10.12802/relime.17.2021

análise dos argumentos individuais e grupais dos alunos, que emergem ao descobrir a regra da multiplicar adicionando como uma ferramenta para facilitar os cálculos e a sua utilização para construir mais peças do jogo bem como as peças gerais, revela uma aproximação à covariância e propriedades dos logaritmos.

RÉSUMÉ

Dans cet article, on fait le rapport d'une expérience réalisée avec des étudiants du lycée d'après la théorie de la socioépistémologie et en adoptant l'ingénierie didactique comme méthode de recherche. L'objectif a été de susciter une ambiance spéciale qui permettrait l'émergence du logarithmique en utilisant du matériel maniable et en récupérant les arguments originaires de Stiffer, Napier et Briggs. L'analyse des argumentations des étudiants, individuelles et en groupe, qui ont émergé de la découverte de la règle de multiplier en additionnant en tant qu'outil pour rendre plus facile les calculs et en l'utilisant pour construire plus de fiches et la fiche générale du jeu ; met en évidence une approche a la « covariación » et les propriétés logarithmiques.

MOTS CLÉS:
- *Socioépistémologie*
- *Propriétés logarithmiques*
- *Multiplier en additionnant*

1. Introducción

Los problemas del aprendizaje de función han sido documentados por investigadores desde los inicios de la matemática educativa. Su discusión ha ido evolucionando en diferentes direcciones y su estudio sigue siendo de interés. Entre las primeras publicaciones se percibe la necesidad de explicar el porqué de las dificultades que presentan los estudiantes ante nociones del Cálculo, como se refleja en Dubinsky y Harel (1992) donde se evidencian distintos abordajes de la problemática sobre aprendizaje de función. Varios investigadores se interesaron por la articulación de representaciones de las funciones, proponiendo juego de marcos (Douady, 1986) o sistemas de notación (Kaput, 1992) o registros de representación semiótica (Duval, 1995). Otros, en cambio, lo hicieron por la visualización de funciones (Zimmermann & Cunningham, 1991; Even & Brukheimer, 1998; Bagni, 2004) como construcción de conocimientos.

Otros establecen, en cambio, que el alumno debe construir, al menos, una visión de proceso de la función para fomentar la formación de una visión de objeto

(Dubinsky, 1992; Slavit, 1997), o aquellos que afirman que desarrollar un razonamiento covariacional les permitirá construir una visión más integral de las funciones a través de eventos dinámicos (Carlson, Jacobs, Coe, Larsen & Hsu, 2002; Oehrtman, Carlson & Thompson, 2008; Johnson, 2015; Hitt & Gonzáles, 2015) o recuperar la idea de movimiento en geometría dinámica como generador de los primeros pasos hacia la formalización del concepto de función (Falcade Laborde & Mariotti, 2007; Hoffkamp, 2011).

Vemos, en estos reportes de investigación de diferentes épocas y miradas teóricas, el lugar preponderante conferido a la apropiación de función. Basta mirar los índices y resúmenes de distintas revistas científicas y de difusión de nuestra disciplina, para observar la profusión en el abordaje de esta problemática. Más difícil es encontrar reflexiones sobre funciones particulares tales como funciones cuadráticas (Ellis, 2011), funciones periódicas (Dreyfus & Eisenberg, 1983; Buendía, 2010), funciones exponenciales (Confrey & Smith, 1994 y 1995; Ellis, Ozgur, Kulow, Williams & Amidon, 2012; Castillo - Garsow, Johnson y Moore, 2013), funciones trigonométricas (Martínez - Sierra, 2012; Moore, 2014) y en específico alrededor de la función logarítmica que se discute en esta investigación. La inclusión de estos estudios sobre funciones en particular, rompe con el paradigma de que el estudio global del concepto de función es susceptible de llevar a casos particulares, olvidando que cada función específica tiene sus constructos sociales y referenciales específicos por lo que su complejidad responde a diferentes ámbitos de la construcción social del pensamiento matemático.

Al intentar posicionar nuestra investigación, hallamos reportes en dos direcciones, aquellos que evidencian el ámbito escolar y la problemática suscitada alrededor de la función logarítmica (Liang & Wood, 2005; Abrate & Pochulu, 2007; Ferrari & Farfán, 2008 y 2010; Park & Choi, 2013; Kenney & Kastberg, 2013) y aquellos que centran su mirada en la historia de los logaritmos (Ayoub, 1993; Cantoral & Farfán, 2004; Gonzáles & Vargas, 2007; Schubring, 2008; Panagiotou, 2011) pocos de los cuales giran hacia su impacto escolar o a cuestionar la matemática escolar actual, pero que nos enriquecen con estudios puntuales de originales o fuentes primarias. De estos reportes y de exploraciones con profesores y alumnos, surge la necesidad de profundizar en la problemática de la enseñanza de los logaritmos. Provoca también cuestionar modelos de difusión de conocimientos, elementos que siendo útiles en determinados momentos perturban en otros niveles, es decir, devienen en obstáculos epistemológicos, tal el caso de las estructuras multiplicativas para la enseñanza de la potenciación (Confrey & Smith, 1995) y su posterior utilización para implementar la generalización hacia la noción de “función exponencial” y por ende, para la significación de los logaritmos.

En Ferrari (2008) encontramos que la presentación escolar de los logaritmos, absolutamente escindida de sus orígenes, vaciada de significados, nos confiere una primera explicación del por qué los alumnos no logran articular las diferentes presentaciones de los logaritmos. Nos referimos a su presentación primera como "el exponente al que se debe elevar una base para obtener determinado valor"; a su íntima vinculación con las exponenciales "al ser una función inversa de la otra"; y, por último, ser la "respuesta de una integral singular" ($\int x^{-1}dx$) que se escapa de un patrón ($\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$), sin olvidar su desarrollo en serie de potencias también presente en el discurso matemático escolar.

En la actualidad, la función logaritmo es una noción cuya vigencia en los planes de estudio está seriamente amenazada, pese a que su carácter de poderosa herramienta matemática es incuestionable. Los logaritmos nos permiten linealizar fenómenos exponenciales así como describir otros cuyas variables demandan números muy grandes (en sonido o sismos) o pequeños (pH) entre otras aplicaciones. En efecto, ha desaparecido de varios currículos escolares de bachillerato, mismos que la utilizan en cursos de física o química que obliga a los docentes a implementar estrategias axiomáticas sustitutas o "parches" para su utilización efectiva.

En nuestra investigación retomamos de Confrey y Smith (1995), que *"the construction of a counting and a splitting world and their juxtaposition through covariation provide the basis for the construction of an exponential function"* (p.80) idea que extendemos a la función logarítmica.

Iniciamos entonces, la exploración con estudiantes de bachillerato considerando, como hipótesis epistemológica que la incorporación explícita de la relación entre una progresión aritmética y una geométrica, que denominamos *covariación logarítmica*, como la esencia misma de los logaritmos, propiciaría una integración, quizás más efectiva y por tanto más robusta, de esta noción como función. Adquiere mayor sentido, entonces, estudiar la argumentación que desarrollen los estudiantes al involucrarlos en un ambiente especial, diseñado desde los argumentos que dirigieron la evolución de los logaritmos.

2. La socioepistemología como sustento teórico

Abordamos esta problemática con un estudio sistémico, donde se entremezclan las prácticas escolares inherentes a la transmisión del saber, las prácticas de referencia que reflejan el desarrollo de ese saber, las prácticas sociales que hablan de interacciones y herramientas así como las prácticas discursivas que evidencian la significación y consensos adoptados todo lo cual nos anuncia, en definitiva, comunidades que entrelazan sus producciones, donde el tiempo y el lugar, los sujetos y sus interrelaciones, los argumentos y herramientas, los avances y retrocesos, van construyendo el conocimiento.

Según Cantoral (2013), interesa reflexionar sobre el discurso matemático escolar. Dado que el saber matemático se ha constituido socialmente en ámbitos no escolares, su difusión hacia y desde el sistema de enseñanza le obliga a una serie de modificaciones que afectan directamente su estructura y su funcionamiento, de manera que afectan también a las relaciones que se establecen entre los estudiantes y su profesor. En su intento por difundir estos saberes, se forman discursos que facilitan la comunicación en matemáticas y favorecen la formación de consensos.

La socioepistemología, sustento teórico de nuestra investigación, propicia la confluencia y relación dialéctica de aspectos que consideramos fundamentales al abordar un fenómeno didáctico. Contemplar y analizar el devenir de una noción a un objeto de saber; caracterizar las concepciones de los alumnos; dar cuenta de cómo vive una noción en las aulas y el discurso matemático escolar que se genera, ser conscientes que la matemática es un bien cultural inmerso en una sociedad y tiempo determinados que condiciona su comunicación y apropiación (Cantoral, 2013) conlleva profundizar en la reorganización de la obra matemática, en la reconstrucción de significados y en la matemática como actividad humana (Cordero, Cen & Suárez, 2010).

El conocimiento matemático es argumentativo y surge en la participación de individuos en *"una práctica de explicar"* (Garfinkel, 1967, p.1 citado en Krummheruer, 2015), la cual demanda, según Buendía (2005), presentar una postura con la conciencia de que existe otra opinión, implícita o explícita, diferente de la propia. En este sentido, la argumentación involucra resignificados, procedimientos, proceso y objetos la cual se cristaliza en una situación específica (Cordero, 2007) propiciando la emergencia de un argumento, es decir, un invento, una construcción original, planteado para la situación expresa y que utiliza material conocido (Billing, 1989). Coincidimos con Krummheuer (2015) en que el foco principal debe estar sobre el análisis del proceso y no del producto, pues al analizarlo se descubre un cierto dominio de realidad, que está, de algún modo, entre el nivel sociológico de los aspectos institucionalizados escolarmente y el nivel psicológico del individuo de conocimiento.

En el caso de los logaritmos, eje de esta investigación, consideramos que la transposición didáctica (Chevallard, 1995) a la que inevitablemente todo concepto es sometido antes de ser introducido al aula, ha “destazado” a los logaritmos, los ha convertido en objetos útiles que deben ser manipulados con soltura. Toda transposición genera una nueva epistemología del concepto, y en este caso comienza a producirse y reflejarse en los textos y en su tratamiento desde el siglo XVIII. Podemos considerar un antes y un después de Euler y una reformulación de los mismos con Cauchy tiempo después.

Efectivamente, en nuestra indagación socioepistemológica (Ferrari, 2008) concluimos que se pueden distinguir, bajo esta óptica, tres etapas en el desarrollo de los logaritmos si tomamos como eje central la relación entre las progresiones aritmética y geométrica; argumento utilizado por Napier (1614) para su primera definición y los aportes de Brigss (1620/2004) para afinar su funcionamiento. Etapas que organizadas según las prácticas vislumbradas y la argumentación provocada llamamos “momentos”.

Como primer momento, consideramos a *los logaritmos como transformación*, etapa que se desarrolla antes de su definición formal y que se refleja en las distintas exploraciones en torno a la formulación y extensión de las progresiones y en la búsqueda de facilitar engorrosos cálculos producto de las necesidades sociales de la navegación, artillería y astronomía. Se desarrollan fundamentalmente en el contexto numérico comenzando con ideas intuitivas de transformar para facilitar operaciones intentado regresar a la aritmética básica y, por tanto, utilizar sólo sumas y restas. Así, de la confluencia de las primitivas formulaciones de las progresiones y de la relación entre ambas surge la definición de los logaritmos. Los elementos matemáticos utilizados son trabajados, en nuestras aulas, desde los niveles iniciales. La búsqueda de patrones numéricos, la relación entre ellos, la economía de recursos para expresar ideas matemáticas son abordados en los currículos escolares y libros de texto actuales, pero no relacionados y utilizados a la hora de introducir los logaritmos.

Su exploración en otros contextos, producida principalmente en el siglo XVII, nos lleva a considerar como segundo momento el de *los logaritmos como modelizadores* pues en esta etapa se determinan sus características geométricas y por tanto logran pertenecer al discurso matemático de principios del siglo XVII. Se les dota de una gráfica al adecuarlos al nuevo marco “algebraico - geométrico” que se estaba desarrollando. Logran completar un modelo matemático de la cuadratura de curvas representativas de funciones potencia encontrando otro lenguaje para ser descritos ingresando así en los avatares de un Cálculo en plena gestación. Permiten describir fenómenos físicos y se descubren nuevas formas para calcularlos a partir de su desarrollo en serie de potencias lo cual les abre las puertas para acceder al discurso matemático del siglo XVIII y adquirir el status de función.

Todos estos argumentos y exploraciones que giran en torno a descubrir las características logarítmicas, en distintos contextos, mediante el uso explícito de la relación entre progresiones están absolutamente fuera del discurso matemático escolar de nuestros días. Aparece en los libros de difusión de conocimiento del siglo XVII, para desaparecer completamente a partir de las ideas eulerianas y de su vinculación definitiva con las funciones exponenciales mediante el concepto de función inversa.

Comienza así, un tercer momento que nosotros identificamos como la etapa de *los logaritmos como objetos teóricos*, conceptos trabajados en la enseñanza actual y que los encuentra escindidos de las argumentaciones dadas anteriormente, las cuales pueden contribuir a dotarlos de un mayor sentido, apartándolos de su tratamiento actual que los reduce a una aplicación algorítmica de sus propiedades apareciendo en el aula sin ningún antecedente analítico que pudieran haber adquirido los estudiantes hasta ese momento.

Percibimos así dos prácticas sociales que han promovido el desenvolvimiento de los logaritmos, la de *facilitar cálculos* y la de *modelar* (Arrieta & Díaz, 2015), íntimamente relacionadas o subsidiarias de la de *predecir.* Sin embargo, en este artículo, nos centraremos en esta búsqueda de herramientas matemáticas que permitieran facilitar el cálculo de multiplicaciones de números grandes, provenientes de medidas astronómicas, o distancias de navegación, o quizás de la necesidad de acumular riqueza, o cambiar escalas para visualizar mejor los fenómenos estudiados y, en todos los casos, lograr la determinación de valores y que consideráramos el primer momento de los logaritmos.

Rescatamos entonces, la idea central para generar un ambiente numérico donde la multiplicación y la suma sean abstraídas como las herramientas necesarias para generar una nueva, la regla de multiplicar sumando, equivalente a la que escolarmente llamamos propiedad de los logaritmos y que discutiremos en este artículo.

3. Diseño y gestión de la primera sesión

En este artículo se reporta el análisis de la primera sesión de un curso de seis semanas en el que participaron diecisiete estudiantes de bachillerato, de 17 y 18 años. El objetivo del curso fue acercarlos a “lo logarítmico”, es decir, percibir la covariación logarítmica como argumento estructurador de las tres formas en las que vive la función logarítmica en la escuela, resultado del análisis preliminar el cual esbozamos en párrafos anteriores, siguiendo la estructura que propone la Ingeniería didáctica (Artigue, 2015) para organizar la investigación.

En la primera sesión del curso, se conformaron cinco grupos de tres estudiantes que trabajaron con material concreto diseñado en potencias de base 2. Tres son las partes que conforman el diseño de aprendizaje esperando provocar la evolución de los argumentos iniciales más cercanos a ideas exponenciales que logarítmicas, siendo ambas ideas el centro de la covariación logarítmica. Para su diseño nos interesó utilizar la obra *Arithmetica integra* de Stiffer (1544), en particular el *Libri 1* section *111. De progreffionibus Arithmeticis* and *1111. De progreffionibus Geometrici, & quœdam Algebram pertinentia* (pp. 19-39) donde se estudian las propiedades de los números enteros, primer acercamiento a lo que décadas después serían denominados logaritmos (Figura 1).

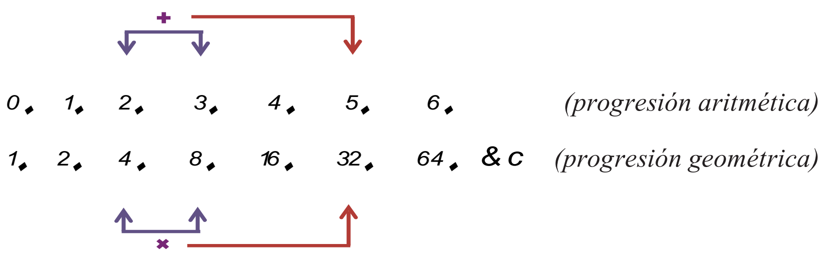


Figura 1. Interpretación gráfica de las ideas de Stiffer

La *primer parte* de la sesión, "completar el juego de fichas", fue diseñada para que los participantes perciban los patrones de crecimiento y relacionarlos, lo que demandaba ordenar y percibir cómo crecen los números para crear la ficha faltante. La *segunda parte* "descubrir la regla de *multiplicar sumando*", fue diseñada para que los estudiantes descubrieran las propiedades logarítmicas y las usaran aún sin conocerlas para facilitar cálculos al multiplicar los números del arreglo superior y sumar los números de abajo. La *tercer parte* "encontrar la ficha comodín del juego" es decir, construir la ficha que reemplace a cualquiera de las otras fue diseñada con el objetivo que los estudiantes abstrajeran la covariación que rigen los comportamientos y sus cambios (Tabla I).

TABLA I

Síntesis del diseño de aprendizaje y elementos del análisis *a priori*

<table>
<tr><th>Partes</th><th>Extracto de actividades</th><th>Lo esperado</th></tr>
<tr><td>1.- Completar el juego de fichas</td><td>Completar el juego, es decir, construir:
1.- la ficha que falta<table><tr><td>16
4</td><td>4
2</td><td>64
6</td><td>8
3</td><td></td></tr></table>2.- diez fichas más</td><td>.- iniciar ordenando las fichas les permitirá reconocer cómo crecen y construir fichas hacia la derecha. Podría aparecer (0,0) como la primera ficha del juego.</td></tr>
<tr><td>2.- Descubrir las reglas de “multiplicar sumando” y “dividir restando”</td><td>3.- a) Utilizar dos fichas cualesquiera y determinar qué ficha del juego sería la respuesta de su multiplicación.<table><tr><td>32
5</td><td>X</td><td>4
2</td><td>=</td></tr></table>b) Responder: ¿se puede dividir? ¿cómo?</td><td>.- asociar multiplicar con sumar no sería percibido de inmediato; utilizarían operaciones con fracciones antes de dos operaciones aritméticas distintas asociadas.
.- ampliar el conjunto de números (naturales a racionales) podría ser retenido por limitar la regla de dividir a divisor menor al dividendo.</td></tr>
<tr><td></td><td>4.- Usar reglas anteriores como una forma de facilitar cálculos y construir más fichas dentro del juego por ejemplo:<table><tr><td>
28</td></tr></table></td><td>.- duplicar arriba de la ficha anterior en tanto sumo 1 abajo evidenciaría que repiten el argumento de actividad 2.
.- descomponer el número inferior en otros cuya suma lo conforman y multiplicar arriba evidenciaría que abstraen ley de logaritmos.</td></tr>
<tr><td></td><td>5.- Completar las fichas que podrían pertenecer al juego de acuerdo a las reglas establecidas.<table><tr><td>
-1</td><td>0
</td><td>0.25
</td></tr></table></td><td>.- extender las fichas al campo de los reales (al menos al anillo de los racionales) podría ser reforzado con estas fichas específicas.
.- percibir límite quedaría a nivel potencial.</td></tr>
<tr><td>3.- Encontrar el comodín del juego</td><td>6.- Construir el comodín del juego<table><tr><td>
n</td></tr></table></td><td>.- abstraer algebraicamente el isomorfismo de las progresiones involucradas en el juego emergerá en pocos estudiantes.</td></tr>
</table>

El instructor, a cargo del curso, incentivó la interacción en cada equipo de trabajo respetando sus ideas y realizando preguntas para enfocar a los estudiantes a la actividades. A los estudiantes se les entregó las hojas de trabajo así como las fichas logarítmicas que consisten en cuatro rectángulos de foami con los números escritos siguiendo una progresión geométrica en la parte superior y una progresión aritmética en la inferior. Se les solicitó anotar las conclusiones a las que arribaran y entregarlas al finalizar la sesión que se desarrolló en una hora y media, fue videograbada con tres cámaras manejadas por auxiliares de investigación, que enfocaban directamente a los equipos A, B y C. También se grabó el audio de cada equipo para lograr mayor fidelidad en el registro de las discusiones.

El objetivo de esta sesión fue observar los argumentos que los estudiantes generaran, lo que nos llevaría a estudiar la red de significados que van construyendo mediante esta actividad que intenta acercarlos a lo logarítmico. La pregunta de investigación fue: ¿qué argumentos emergen en las discusiones de los estudiantes de bachillerato al trabajar en un diseño de aprendizaje basado en la covariación logarítmica?

En este artículo analizamos las discusiones del Equipo A que estuvo conformado por Tania, Yosy, Jorge y Eduardo; del Equipo B constituido por Cris, Luís y Roberto; y del Equipo C con Viri, Fany y Antonio.

4. Argumentos principales desarrollados por los estudiantes

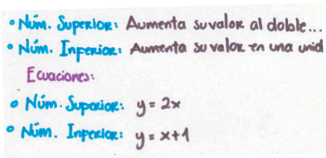
En el desarrollo de la primera sesión del taller, se fueron revelando las distintas características de cada equipo y de cada integrante. Los equipos A, B y C fueron ágiles y contrastantes en sus argumentos ya que avanzaban abstrayendo elementos complejos a la vez que se detenían en algunos otros. Las discusiones, propuestas y pruebas que las fichas les permitían hacer daban una sensación de combates sin tregua en búsqueda de una respuesta que los satisficiera. Las preguntas directrices que el instructor tuvo que dirigirles para destrabar sus empecinamientos o estancamientos, provenientes del análisis *a priori* (Tabla I), propiciaron la interacción entre los estudiantes.

Organizamos en esta sección elementos del análisis *a posteriori* realizado, centrándonos en distinguir los argumentos que fueron reteniendo el desarrollo de las actividades así como aquellos que potenciaban su percepción de la covariación tan especial de los logaritmos. Nos interesa particularmente reflexionar sobre los argumentos que utilizaron para establecer el cambio en las variaciones, es decir, reconocer las constantes aditiva y multiplicativa en tanto construían más fichas del juego. Analizar también los que utilizaron para descubrir y comprobar la regla de multiplicar sumando así como la de dividir restando y por último, cómo establecer una ficha comodín que reemplaza a cualquiera, es decir, algebrizar las fichas.

4.1. *Reconociendo patrones de crecimiento*

En el inciso 1 de la actividad, los estudiantes se encontraron con cinco fichas, una en blanco, y con la consigna de descubrir qué ficha faltaba además de construir diez fichas de ese juego (Tabla I). No fue necesario aclararles que era recomendable ordenarlas para descubrir el patrón de crecimiento implícito en ellas.

TABLA II
Reconocimiento de patrones de crecimiento

	Equipo A	*Equipo B*	*Equipo C*
Argumento inicial	Duplican los números de la parte superior. Siguen la secuencia en la parte inferior.	Recorren las fichas hacia la derecha y perciben que duplica arriba y que abajo son los números naturales.	Suman de manera reiterada. Algoritmo escolar sobre multiplicar los lleva a "duplicar".
Argumento final	No discuten sobre [0//0][1] y trabajan sólo hacia la derecha del [4//2] buscando números más grandes.	Consideran que [0//0] pertenece al juego lo que genera simetría en las fichas.	Construyen [1//0] y [2//1] como fichas del juego.
	Establecen: "*El número de abajo es la secuencia numérica de los números naturales, el número de arriba tiende a ser el doble del antecesor".*	Establecen: "*Para llegar a las fichas faltantes tuvimos que encontrar la secuencia entre ellas. Llegamos a la conclusión de que los números superiores son múltiplos del número 2 y los inferiores siguen una secuencia normal"*.	Establecen: 
	Duplicar // serie de números (Figura 3)		Covariación incipiente

[1] En el escrito utilizaremos [0//0] para representar las fichas colocando en la parte izquierda los números de la parte superior de las fichas y a la derecha de dos barras diagonales los valores de la parte inferior de las fichas.

Todos los equipos iniciaron jugando e inspeccionando las fichas, hasta que, siguiendo la secuencia de los números naturales de la parte inferior, las ordenaron. La ficha faltante [32//5] surgió rápidamente en todos los equipos (Figura 2).

Ordenan las fichas | Distinguen el hueco | Completan las fichas

Figura 2. Trabajo del equipo C

La construcción de las cinco fichas siguientes no generó dudas. Algunos extendieron sólo hacia la derecha llegando a la ficha [2048//11], otros se continuaron hasta [32768//15] mostrando el interés de predecir números grandes (Figura 3). Otros consideraron las fichas [2//1] y [1//0] incluso antes de seguir a la derecha, algo que no sucede con frecuencia pero que muestra la necesidad de que el "0" esté presente en el inicio de las sucesiones.

Equipo A | Equipo B

Jorge: ¿por qué no hacemos otros para ver qué tan grandes pueden ser los números allá?... por ejemplo... después del diez será dos mil cuarenta y ocho...

Cris: para construir las fichas faltantes... ehmmm... tenemos que darnos... Mmmm esperen... tenemos que identificar las secuencias que llevan las fichas al ordenarlas.

Figura 3. Construcción de fichas

En el Equipo A, perciben rápidamente cual es la manera de extender el número de fichas. En sus discusiones se observa que surge la necesidad de generar más datos para conocer la "variación" que hay en ellas.

Eduardo: Acuérdense que sólo nos pedían diez...
Jorge: No... lo que decía es que tenemos que tener diez... dos tres cuatro cinco seis... ¿y si hacemos la del 15?
Tania: Había cuatro fichas ¿no?
Yosy: Ajá... y nos faltan cuatro ahora...
Tania: Entonces faltan...
Jorge: ¿Por qué no hacemos otros para ver qué tan grandes pueden ser los números allá?... por ejemplo... después del diez será dos mil cuarenta y ocho... luego sería cuatro mil...

Se observa que siguen proponiendo números duplicando desde el correspondiente al diez pero pierden de vista el papel que juega el número de abajo de la ficha, es decir, se centran en generar números cada vez más grandes, y alejándose un poco de la esencia de la actividad.

El Equipo B por su parte, en la actividad 5, discuten sobre si la ficha [0//0] pertenece o no al juego, surgiendo una confrontación de ideas.

Luís: Pues no sé... dice que tenemos que descartar algunas... por ejemplo la del cero cero...
Roberto: Sería cero entre uno ¿no? (*propone la ficha* [1, 0])
Luís: Si.. ¿no?...
Cris: No... sería cero cero ¿no?... pues de ahí empieza, ¿no? del cero, cero... pero no sé... es obvio lo del cero cero...

Es Cris quien no escucha la idea de los compañeros y argumenta su punto de vista incorporándose así la ficha [0//0] al conjunto, lo cual atraería la construcción de las fichas [-2//-1], [-4//-2] y [-8//-3] manteniendo la idea de que se "multiplica por 2" pero aplicándola en sentido contrario, quebrando así el patrón de crecimiento de las fichas y generando dos patrones diferentes, uno hacia la derecha y otro hacia la izquierda.

El Equipo C es el único que incorpora dos fichas importantes sin cuestionarse, la [1//0] convención matemática que permite que las reglas del juego sean válidas, y la ficha [2//1] que evidencia la base del juego. En su argumentación final incorporan expresiones algebraicas para sintetizar sus ideas (Tabla II).

Vemos en los tres equipos sensibilidad para percibir los cambios en las variables, que ambas crecen pero de manera diferente. En la parte inferior de las fichas reconocen que se trata de los naturales dando por hecho su particular crecimiento pero sin reparar en él. Sólo el Equipo C distingue el patrón de crecimiento de los naturales donde se suma 1. Para la progresión geométrica, en cambio, los equipos mencionan que se trata de "multiplicar por dos" o "duplicar", argumento que se estabiliza al seguir con la construcción de las fichas.

4.2. *Descubriendo las reglas del juego*

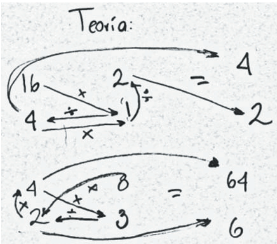
Al iniciar la actividad 3 aparecen, en los equipos, interesantes discusiones alrededor de cómo multiplicar utilizando las fichas que habían construido en actividades anteriores. El Equipo A evoca operaciones con fracciones realizando multiplicaciones cruzadas, en tanto que los otros abstraen las operaciones que habían utilizado en la construcción de fichas, multiplicar arriba y sumar abajo.

TABLA III
Descubriendo las reglas del juego

	Equipo A	*Equipo B*	*Equipo C*
Argumento inicial	Usan la multiplicación cruzada evocando operaciones que se utilizan en las fracciones. Tania es quien destraba y convence a sus compañeros de *multiplicar sumando*.	Encuentran la regla de *multiplicar sumando* y generan un juego para comprobarla. Determinan que el divisor debe ser menor que el dividendo por tanto no aceptan fracciones vinculadas con negativos.	Fany rápidamente visualiza la relación entre las fichas, pues observa que si suma los valores inferiores de las fichas sólo tiene que multiplicar los números de arriba y que ambas operaciones forman otra ficha.
Argumento final	Encuentran la regla de *dividir restando* y establecen: *"la ficha primera debe ser mayor que la ficha segunda… sólo en caso de división, en la multiplicación no varía".*	Analizan ficha por ficha de derecha a izquierda lo cual implica ampliar la regla de *dividir restando*. Reemplazan la ficha [-2//-1] por [0.5//-1].	Antonio expresa: "*Porque la multiplicación y la división… la haces más fácil si sumas o restas acá para verificar aquello… por ejemplo sumas acá y ya está…*
	Multiplicar sumando para todo par de fichas. *Dividir restando* sólo para dividendos mayores que divisor		Crean el ambiente aceptando *multiplicar sumando* y *dividir restando*

En el Equipo A surge la idea de multiplicar y dividir de manera cruzada. Yosy presenta su idea, apoyada por Jorge, comentando que se trataba de formar un "triangulito" (Figura 4). El cambio de argumento lo provoca la maestra al solicitarles que le muestren si su regla funciona para [512//9] y [4//2] observando así, que su mecanismo es puntual y no generalizable en el juego. Tania, que había estado al margen de esas discusiones, comparte su hallazgo:

Tania: Salió... jijij... salió... miren... éste por éste da éste (*lo hace horizontalmente saltando entre los números de la parte superior de dos fichas*) y luego... tres más dos... si… si... a ver...
Todos: Aja... qué bien Tania.



Yosy: Es un triangulito

Tania: Salió... miren... éste por éste da éste

Figura 4. Avance en argumentos en el Equipo A

Una vez comprendido el mecanismo que propone Tania y que comparten con la maestra, se les pregunta sobre qué pasaría si se quiere dividir. Jorge, sin pensarlo, asocia la división con la resta, lo prueban varias veces con distintas fichas, al igual que con la multiplicación, y se convencen de que funciona. Sin embargo en este caso, sólo consideran aquellas fichas donde el dividendo sea mayor que el divisor.

En el Equipo B, Roberto inicia haciendo multiplicaciones y divisiones con los números de las fichas [4//2] y [32//5] pero Cris inmediatamente coloca la ficha correcta [128//7] presentando su argumento a sus compañeros y proponiéndoles convertirlo en un juego tipo dominó. Por tanto, dan vuelta las fichas, las revuelven y sacan dos cualesquiera; luego vuelven a colocar las fichas con los números hacia arriba y buscan siguiendo su regla de *multiplicar sumando* la ficha que corresponde, jugando así entre risas.

Cris: ¿Cuánto es... 256 x 8? Nada más sumamos 8+3
Roberto: Aja...
Cris: Y buscamos la ficha que tenga el 11, eso será la multiplicación de 256x8... si yo tengo esta ficha y esta ficha... y quiero multiplicar... para hacerlo más fácil... sumamos abajo... por eso son importantes los de abajo... para que sea más ágil la multiplicación... pues cuanto es esto por esto (*marcando los números de arriba*) no sé... pero si sumamos... mmm donde está, donde está la del once...
Roberto: Aca ta...
Luís: Ja ja ja ja...
Cris: Entonces da... 2048
Roberto: GUAUUUUUU jajaja...

Cris: Bueno... anotemos... Y para la resta supongo que es lo mismo, pero viceversa para restar, ¿cuánto es esto entre esto?... pues nada más restamos esto.

Vemos así que rápidamente adoptan el argumento de *multiplicar sumando*, incluso el de *dividir restando*, aunque aún no se han enfrentado con la idea de que el divisor sea mayor que el dividendo, cosa que ocasiona problemas más adelante (Figura 5).

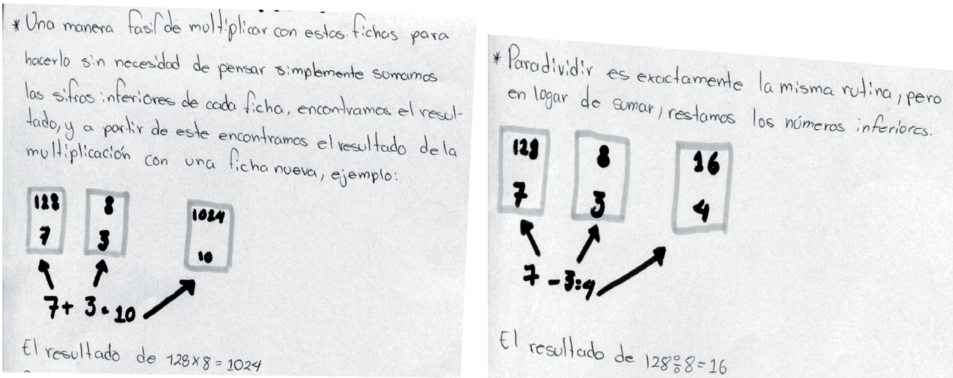


Figura 5. Cómo multiplicar o dividir "sin necesidad de pensar"

En el equipo C, es Fany quien encuentra la regla de *multiplicar sumando*, comentándolo con sus compañeros. Antonio le ayuda a buscar más ejemplos para probar su argumento y descubren también la regla detrás de la división (dividir implica restar), aceptando rápidamente la presencia de negativos y decimales (ver Tabla III). Este argumento permite al equipo aceptar sin problemas moverse de derecha a izquierda cambiando el argumento de ir multiplicando por dos a saltar dividiendo por dos, donde la reversa suele ser compleja para los estudiantes como lo denota el Equipo B.

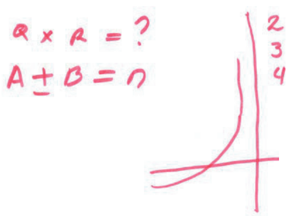
Antonio: Si vamos para allá (*indicando hacia la izquierda*) tendríamos que ir dividiendo entre dos...
Viri: Sería entonces cero punto cinco... de ahí cero punto veinticinco...
Antonio: Pero qué números usamos para eso...
Viri: El tres y el cinco...
Antonio: Mira, si pongo estas fichas (*colocando las fichas 2 y 3 respectivamente*) entonces me queda 2 menos 3 es menos 1...
Viri: Es menos uno y acá sería punto cinco… mira...
Antonio: Entonces eso sería lo que va acá arriba (*señalando la hoja de trabajo*)
Viri: Entonces aquí iría menos uno y acá punto... punto cinco.
Antonio: Vas entonces quitando la mitad, la mitad.

Pese a que durante todo el desarrollo de la actividad los equipos van descubriendo la esencia del diseño que los va acercando a ideas logarítmicas, desde el trabajo con la covariación de progresiones, no logran abstraer una relación algebraica más general pero dejan evidencias de su acercamiento covariacional al ir relacionando tímidamente “lo de arriba y lo de abajo”.

4.3. *Encontrando una ficha comodín*

Todos los equipos se enfrentan con la necesidad de construir o rechazar ciertas fichas y generar una ficha general. Sólo el Equipo A se empantana en una covariación lineal, reduciendo su exploración a la construcción de la siguiente ficha. Los Equipos B y C abstraen la covariación logarítmica, el primero con una expresión algebraica, el otro, generando una red de modelos especial.

TABLA IV
Algebrizando las fichas

	Equipo A	*Equipo B*	*Equipo C*
Argumento inicial	Usan la regla de *multiplicar sumando* y *dividir restando* para afianzar el patrón de crecimiento implicando que [0//0] no pertenece al juego.	Destierran [0//0] al usar la regla de *dividir restando* y la aplican a todas las fichas ordenadas, moviéndose de derecha a izquierda de la fila.	Aceptan las reglas de *multiplicar sumando* y *dividir restando* es decir, usan las propiedades de los logaritmos para estudiar la relación entre los patrones de crecimiento.
Argumento final	Establecen dos patrones diferentes y no relacionados. $\frac{m/2}{n-1}$ ó $\frac{2m}{n+1}$	Relacionan los dos patrones algebraicamente. 	Buscan la relación “arriba - abajo” tabular, algebraica y gráficamente. 

El Equipo A, descarta pronto la posibilidad de que una ficha tenga el 0 en su parte superior siendo su explicación: *si seguimos la secuencia a la inversa, debemos restar en una unidad los números de abajo, mientras que debemos dividir entre dos al número anterior de la parte de arriba –manera larga– No existe la ficha cero porque no hay nada que multiplique o divida al 0.*

La sospecha de que este equipo no ha abstraído la covariación logarítmica del juego se confirma al observar la ficha general que proponen: [*2m//n+1*] (Tabla IV). Consideramos que miran los patrones de cada línea de valores separadamente sin construir la íntima relación que existe entre ellos a través de las operaciones involucradas, argumento central de facilitar cálculos.

El Equipo B, por su parte, cambia radicalmente los argumentos que esgrimían sobre que la ficha [0//0] no pertenecía al juego. Intuyen que existen más fichas entre las que han construido:

Cris: Según la regla si debe haber... se pueden hacer más... Por ejemplo... esta ficha... y esta ficha... hubiera otras en el medio... (*Separa ambas fichas e indica con la mano entre medio de ellas*)
Roberto: Ajá...
Cris: Si hubiera más fichas...
Roberto: Si pero solamente... ¿las positivas?
Cris: En teoría sí... si hubiera más fichas... por ejemplo uno punto uno... uno punto dos... uno punto tres... uno punto cuatro... y así... entonces... ¿esto está bien?
Roberto: Si está bien...

Sin embargo, esta aceptación de infinidad de fichas se acota hacia los enteros en ambas partes en un intento por encontrar la manera de incorporar o rechazar aquellas fichas que presentan decimales. Discuten con la maestra respecto a las fichas donde involucran dos números negativos. Para confrontarlos, juega con ellos eligiendo las fichas [2//1] y [4//2] de tal manera que al dividir quedara un negativo debajo y observaran que arriba se debería asociar una fracción.

Maestra: A ver... ¿cómo vamos?
Cris: Ya hicimos más fichas...
Maestra: Ajá… veamos... (*La maestra se pone a jugar con sus fichas*) mmm... entre ésta y ésta (*elige* [2//1] y [4//2]) ¿cuál sería la respuesta si multiplicamos?
Cris: Es más fácil irnos por abajo... mmmm sería ésta... (*Sin dudar propone la de* [8//3]) pues esto más esto es esto... y multiplicamos arriba...
Maestra: Aja... si ahora usamos la regla de dividir...
Cris: Pues restaríamos... sería la del menos uno... (*Elige la ficha construida por ellos* [-2//-1] *ya que cumple con la resta inferior*) es ésta... por el menos uno...
Maestra: A ver... ¿cómo sería con ésta?

Cris: Dos y cuatro... menos dos...
Maestra: A ver... a ver... si tenemos por ejemplo la [8//3] y la dividimos con ésta [4//2] ¿cuál sería la ficha que corresponde?
Luís: Ésta... (*Señalando la ficha* [2//1])
Cris: Ésta... tres menos dos... uno.
Maestra: Ajá... ¿por qué?
Cris: Pues porque ocho entre cuatro es dos.
Maestra: Ok. Ocho entre cuatro es dos... ¿funciona lo mismo aquí entonces? (*regresa la ficha a la posición anterior para que quede* [2//1] y [4//2])
Cris: Pues... uno menos dos...mmm.... Menos uno... y... dos entre cuatro... mmmm
Maestra: Bueno... vean eso... (*y se retira pues otro equipo la requiere*)

En el primer intento los muchachos no ceden, colocan la ficha de [-2//-1] como respuesta y explican que 2-1 = -1 sin reparar en que 2/4 = 0.5. Ante el olvido de la regla que habían consensuado en la actividad anterior la maestra elige la ficha [8//3] con la [4//2] y vuelve a preguntar, escuchando ahora la regla que esperaba: *"Arriba dividimos y abajo restamos".* Recalca ambas operaciones y los regresa a la primera pregunta *¿cuál es la ficha que corresponde si dividimos* [2//1] y [4//2]? y los deja para que discutan. Luís declara que en realidad se trata de un número positivo y otro negativo, lo cual los lleva a revisar todas sus fichas. Cris propone ordenarlas y utilizan sólo las que tienen escritas con plumón iniciando con [2//1] hacia la derecha y colocando a la izquierda la ficha [0//0] seguida por la [-2//-1] escritas en lápiz, denotando sus dudas al respecto. Luego Luís construye [-4//-2] y [-8//-3] propuesta por Roberto multiplicando (-4)*(2) = (-8) y las agrega a su línea de fichas en lápiz.

Al considerar que ya tenían el ámbito propicio para discutir, retoman el problema que les dejara la maestra, dividir [2//1] con [4//2] y que separan de la fila de fichas. Se sorprenden al aplicar la regla de *dividir restando*, pues les aparece el 0.5 y desechan [-2//-1]. Deciden entonces recorrer la fila de fichas desde la más grande hasta la más pequeña, es decir, incorporan la calculadora y empiezan a verificarlas desde [16//4] hacia la izquierda dividiendo entre dos y restando uno. Cris indica a la maestra que los números de arriba se van dividiendo entre dos, siendo así como continúan extendiendo las fichas hacia los números negativos en la parte de abajo.

Al intentar sintetizar sus conclusiones Cris retoma su idea inicial de que existen infinidad de fichas que se pueden construir, aceptando ahora el límite del 0 en la parte superior como una barrera infranqueable. Roberto afirma la cota hacia la izquierda al mencionar que se permite el cero punto y tantos ceros como quisiera.

Cris: Digamos que las aceptamos pues la secuencia nunca termina... mmm... la secuencia...
Roberto: Sale de ir dividiendo entre dos...
Cris: Aja... y al ir dividiendo por eso no termina.
Luís: No pero fíjate que tenemos que explicar también por qué así...
Cris: Pues porque las construimos... es como que dijeras... cero punto cinco por dos... te da ésta... o sea... la secuencia puede haber empezado... (*indica hacia el infinito de ambos lados abriendo sus brazos*)
Roberto: Cero punto cero cero cero cero...
Cris: Si... sigue para todos lados... y si tomamos un número grande lo multiplicamos por dos y va a ser otro número y con todo eso llegamos a éstos.

Todos los equipos se retiran habiendo concluido que la ficha con la que se puede construir cualquier otra es la de [*2n//m*], pero el equipo B se queda para contestarlo explorando con la calculadora. Empiezan multiplicando varias veces el dos para ir rehaciendo las fichas y se percatan que está vinculado con el número de abajo. Roberto y Cris abstraen que se trata de 2^n, ya que el dos se multiplica varias veces, argumento que comparten y dictan a Luis para que se incorpore en el informe (Figura 6). Abstraen así el modelo algebraico que rige el juego, y donde las reglas de *multiplicar sumando* y *dividir restando* encuentran un respaldo más robusto.

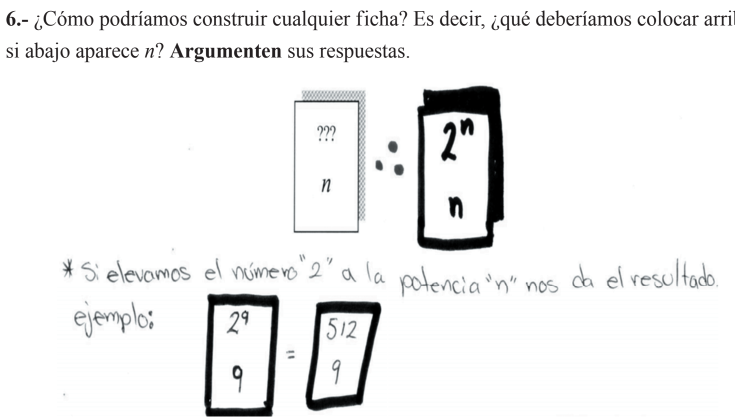


Figura 6. Construyen la ficha general

En el Equipo C, Antonio le comentar a Fany: *Nos pide que expliquemos... a ver... éste va al doble y éste va al doble... y éste al doble... y éste al doble... pero... esto sería encontrar una relación entre lo de abajo y lo de arriba... por* *ejemplo entre menos dos y punto veinticinco... para así sacar la general.* Mientras habla con Fany ya no presta atención a lo que sus compañeras están realizando y comienza a garabatear en su papel. Produce entonces una tabla vertical con los valores de las fichas etiquetando con *x* a la progresión aritmética y con *y* a la progresión geométrica evocando quizás los cánones escolares, donde el 1, 2, 3 etc... se reserva para las variables independientes. Sin embargo, para Antonio no tiene importancia la etiqueta, son sólo nombres que les permite manipular las cantidades.

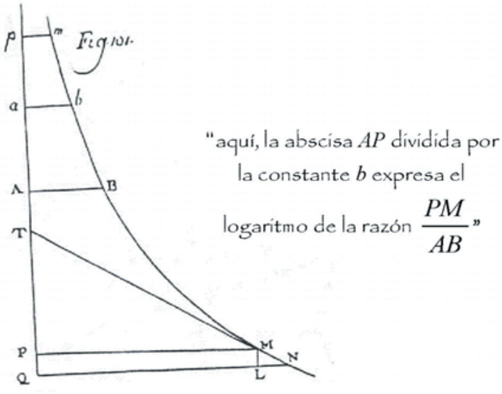
Antonio: Debe haber alguna relación...
Viri: Espérate que no acabo con esto... (*Escribiendo el informe de clase*)
Antonio: Podría ser que los representáramos como a más b igual a equis... donde a...
Fany: Y b...
Antonio: Mmmm… y ene...
Maestra: ¿Cómo van por acá ya terminaron?
Viri: Ese ene indica el uno dos tres... y así... y puede ser infinito... sí... ene puede ser infinito...
Maestra: Si ene puede ser cualquier número... entonces ¿qué escribirían aquí?
Antonio: Hay algo que todavía no entiendo... mmm conozco esto y éste me puede dar cualquier número... y la solución sería a más b... donde mmmm... (*indicando los números de abajo*) Donde a y b serían los números de abajo sumando o también podría ser a menos b dependiendo si está multiplicando o dividiendo y ya... Y la otra es una relación que hay entre uno y dos, entre el cuatro y el dieciséis, siete y ciento veintiocho pero esa todavía no la encuentro...
Maestra: A ver... si lo que dices ahí es que si sumo aquí me da otro número aquí... (*indica la mesa como si hubiera un ficha ahí*) y lo que faltaría es mirar lo que pasa arriba ¿no?
Antonio: Si... ahí sería multiplicando... si pero sería... mmm... (*Escribe* AxB) y esto sería otra cosa...
Maestra: También se podría ver, como decías recién, la relación entre lo de abajo y lo de arriba...
Antonio: Es que esto tiene una forma como... como una hipérbola... es que va creciendo cada vez más...

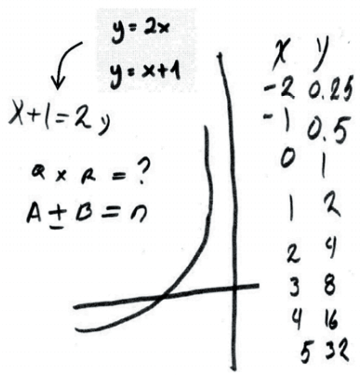
En la síntesis de Antonio, encontramos cierto acercamiento a ideas covariacionales, así como la búsqueda de una expresión algebraica que vincule a ambos patrones de crecimiento. La construcción de la íntima relación entre los valores involucrados en cada ficha se evidencia en el esbozo de una curva que etiqueta como una hipérbola. Comenta además, que hay una relación entre *x* e *y*, para lo cual utiliza letras diferentes para denotar la relación entre sumar y multiplicar, lo que informa sobre su interés de descubrir lo que hay detrás de estas fichas, aunque no logra abstraer la expresión algebraica que las vincula.

La gráfica de Antonio (Figura 7), en cuanto al uso "desprolijo" en visión de una matemática escolar, nos regresa a las ideas eulerianas donde los ejes aún eran algo secundario, quién es la abscisa y quién la ordenada estaba bien establecido, pero su posición, variaba en la época, a veces horizontal a veces vertical, sin interesar demasiado determinar el origen ya que quedaba establecido por la intersección de la curva y el único eje considerado o, en el caso de la gráfica de Euler, declarando que A es el origen y AP = *x*. Lo importante es para Antonio, visualizar el crecimiento para lo cual utiliza dos variaciones diferentes, pero que simultáneamente pensadas emerge una gráfica especial.

x	0	c	2c	3c	...
y	a	am	am²	am³	...

Producción de Antonio





Imágenes tomadas de: Introduction to Analysis of the infinite (Euler, 1748, volumen 2 p. 335 y p. 488).

Figura 7. Similaridades con intencionalidades dispares

Vemos que Euler (1748 / 1990) parte de conocer el crecimiento exponencial, en tanto que Antonio no lo había aún abstraído ya que las regla que rigen su tabla son $x = n + 1$ e $y = 2n$, argumento que no le termina de convencer pues coloca luego $a \times b = ?$ Ambos, esbozan así a la actual función exponencial donde la variable independiente es la progresión aritmética y la variable dependiente la progresión geométrica, donde el uso de la gráfica es sólo descriptiva, visualizar algunas características.

5. Reflexiones finales

Introducir a los estudiantes en un modelo numérico en búsqueda de un acercamiento a la covariación logarítmica mediante un juego diseñado en la potencia de base dos, nos arroja elementos sobre los argumentos que generan, así como las herramientas que intentan construir para resolver algunas de las preguntas que se les presenta.

Al centrar la discusión en lo numérico, y a manipular fichas donde se les solicita ordenarlas, por tanto invitarlos a descubrir el patrón de crecimiento y percibir la diferencia entre una y otra de las sucesiones implicadas, los lleva a recordar y profundizar algoritmos escolares tales como la multiplicación (división) reiterada, la suma (resta) pero más cerca de visualizar la recta numérica que la operación en sí. Pocos de ellos intentaron moverse de derecha a izquierda, ya que el cero sigue siendo una barrera, que en esta covariación es muy interesante, pues el par [1//0] anuncia que el elemento neutro de cada mundo en el que nos movemos es distinto. Sólo el Equipo C incorpora inmediatamente esta ficha como parte del juego para extenderlo disparando en ellos, más adelante, la aceptación natural de los decimales y negativos asociados. Aquellos que sólo extendieron las sucesiones hacia la derecha presentaron problemas para integrar la ficha [1//0], ya que consideraron que [0//0] permitía construir fichas hacia la izquierda tales como la [-2//-1] (Equipo B).

Moverse hacia la izquierda genera, en la mayoría de estos estudiantes, un quiebre de la regla de construcción del juego. El Equipo B por ejemplo, construye sus fichas luego de la [0//0] repitiendo la regla de multiplicar por dos y sumar uno, manteniendo en los dos el cambio de signo, convirtiéndose la asociación entre las mismas fichas pero con signo negativo en un argumento que los retiene en la exploración de la regla de *dividir restando.* Sin embargo, es la regla de *multiplicar sumando* la que los hace desistir de fichas tales como [-2//-1] o [-4//-2] ya que se quiebra la regularidad de su uso.

Efectivamente, la regla de multiplicar que determinaron sin dejar de pasar por momentos de utilizar algoritmos escolares útiles para trabajar con fracciones, provocado por la cierta similitud del arreglo de los números en el diseño, enriquece sus argumentos covariacionales ya que comenzaron a vincular con mayor precisión los dos patrones puestos en juego y por ende la función que involucran. Intentar verificar la regla de *multiplicar sumando* los lleva a dejar de multiplicar priorizando la suma de los números inferiores de las fichas para determinar la respuesta y luego, como prueba, hacer la multiplicación; elementos que los acerca a las propiedades de los logaritmos, a su uso primigenio.

Ver que usan este argumento para hallar una ficha en la que el número inferior era bastante grande, refuerza la construcción de nuevas herramientas, la propiedad de multiplicar para los logaritmos y, adosada a ella, la de dividir.

Los estudiantes abstraen elementos importantes en el acercamiento de las propiedades de los logaritmos, que algunas veces confrontan elementos construidos escolarmente, otras, extienden su uso. Regresarlos a pensar el papel que juega el cero en este juego de fichas logarítmicas, nos advierte la dificultad de interiorizar un razonamiento covariacional donde el isomorfismo se establezca entre una progresión geométrica regida por la multiplicación y una aritmética, por la suma. El Equipo C, particularmente Antonio, demuestra en sus informes y comentarios que ése es su mundo, por ello, incorporar la ficha [1//0] es algo natural, así como construir una red de modelos donde convoca lo tabular, gráfico y algebraico evidenciando la íntima relación que le da a ambas progresiones. Esto contrasta con la producción del Equipo A, que si bien considera y acepta la ficha [1//0], presenta ciertas dificultades en aceptar la división en cuanto a que el cociente sea un decimal, pero logra atravesar ese límite, así como una cierta resistencia a interrelacionar los patrones de crecimiento para lograr una explicación algebraica.

Lo más discordante es que el Equipo B, que presentara tanta resistencia para desechar la simetría "negativo - negativo" al moverse hacia la izquierda y del [0//0] como parteaguas de fichas, logra la abstracción algebraica [2^n//n] que sus compañeros no logran visualizar. Lograr una expresión algebraica para describir cierto fenómeno nos anuncia una importante síntesis de argumentos, donde escolarmente es priorizada en detrimento de otros modelos y que en nuestro diseño implicaba incorporar otros elementos como base y exponente, pero también nos obliga a reflexionar sobre el papel que juega en la apropiación de ciertas herramientas.

Efectivamente, la covariación logarítmica va más allá de poder escribir una fórmula, involucra la posibilidad de movilizar argumentos como la regla de *multiplicar sumando*, o *dividir restando*, de aceptar la existencia de un exponente, de no ser sólo un juego de números discreto y muy arreglado para que las cosas funcionen. El intento de construir una red de modelos de Antonio, nos acerca a lo que consideramos la antesala a un pensamiento covariacional logarítmico, más allá del que el Equipo B logra. Si bien hubo ausencia de una expresión algebraica única en la producción de Antonio, construye dos respetando el patrón de crecimiento de cada uno, pero que en el uso de las letras y de sus comentarios se percibe sus ansias por hallar "la" expresión que describa a ambos, síntesis que logra en su esbozo de gráfica y que un profesor exigente rechazaría.

El Equipo A, en cambio, invierte mucho tiempo en utilizar argumentos escolares muy ligados al trabajo de fracciones, para descubrir la regla de multiplicar, lo que también se percibe en su expresión algebraica final donde mantienen la separación de ideas. La multiplicación cruzada, de uso muy limitado, es desarrollada por tres de los muchachos del grupo, estableciéndose una especie de círculo difícil de romper para buscar otro argumento. Es Tania, quien no había entrado en ese círculo de discusión sino que se había aislado de él, la que propone otra idea, la de *multiplicar sumando*, que es tomado como un respiro por el equipo y aceptado sin mayor discusión. Vemos así cómo la interacción, a veces general, a veces puntual, juega un papel fundamental en la evolución de los argumentos.

Desde nuestra visión, un argumento no es individual, es el producto de un consenso. Implica aceptar la argumentación colectiva como una de las unidades de análisis respecto al acercamiento a la covariación logarítmica. Por ello, hablamos de argumentos iniciales y finales, de aquellos que retienen y propician su evolución, que se van construyendo o desechando en el camino de construir lo logarítmico.

6. Conclusiones y discusión

Esta investigación demuestra que: (1) el diseño de aprendizaje contribuyó a la percepción de los estudiantes de los patrones de crecimiento permitiéndoles deducir la yuxtaposición de las operaciones "multiplicar sumando" y "dividir restando" para facilitar cálculos y (2) el esbozo de un gráfico (Equipo C) y de expresiones algebraicas (Equipo B) evidencia la abstracción del isomorfismo entre los patrones de crecimiento en los estudiantes y por tanto acercándolos a percibir la covariación logarítmica base del diseño de aprendizaje.

Efectivamente, el diseño de aprendizaje se basó en las ideas reportadas por Confrey y Smith (1995) para la función exponencial. Sin embargo, vamos más allá de estas ideas dando prioridad no sólo a las tareas de la operatividad entre "a counting world" y "a splitting world" para reconocer cómo crecen las progresiones, sino también el par (1,0) (Neutro multiplicativo, Neutro aditivo), lo que garantiza los logaritmos como facilitadores de los cálculos (Napier, 1614). Consideramos ambos elementos importantes para un acercamiento covariacional logarítmico, evidenciado en la argumentación de los estudiantes, allanándose el camino a la apropiación de función logarítmica.

Investigadores como Castillo - Garsow (2010) y Castillo - Garsow, Johnson y Moore, (2013) han propuesto conceptos como "chunky variation" y "smooth variation" para estudiar el desarrollo del razonamiento covariacional de estudiantes. Thompson (2011) aclara que la concepción de una variación continua se llama "chunky" si se piensa en la variación de la cantidad de manera discreta es decir, un "trozo" es la percepción del cambio de una variable en términos del siguiente valor y por tanto se acepta la existencia de un hueco entre un valor y el siguiente; pero esto no significa que deben ser considerados vacíos. Por otro lado, la idea de una variación continua se llama "smooth" si se percibe que el siguiente valor es una consecuencia de un cambio suave, lo que significa que hay diferentes valores entre ellos. Percibimos ambas concepciones durante las argumentaciones de los estudiantes a pesar de que nuestro diseño se basó en un arreglo discreto de cantidades. La variación "chunky" se percibe en el equipo B. Si bien argumentaron que podría haber fichas infinitas que nunca cruzarían la barrera cero y establecieron que la "secuencia nunca termina", lo que les permitió concluir que la regla es "potencia de dos (arriba) y enteros (abajo)", siempre visualizaron pares discretos. Por otra parte, el Equipo C muestra una concepción de "smooth variation" en todas las actividades ya que, aunque se detuvo en cantidades específicas para multiplicar y sumar, abstrae una variación continua de manera gráfica. Nuestros resultados contrastan con Castillo - Garsow et al. (2013) ya que establecen que el pensamiento "chunky variation" no implica el pensamiento "smooth variation" iniciándose así la posibilidad de discutirlos. Consideramos que es importante profundizar este diálogo entre concepciones de cantidades que cambian, especialmente aquellas que implican diferentes formas de crecimiento, como la covariación logarítmica regida por la multiplicación y la adición en eventos discretos así como abonar a la discusión sobre la argumentación en la construcción de conocimiento matemático en ámbitos escolares.

Notas de las autoras

Agradecemos la colaboración de la Universidad Autónoma de Guerrero, particularmente de la Unidad Académica de Matemáticas en el desarrollo de este proyecto de investigación. En este artículo se reporta la primera sesión de un curso de seis semanas diseñado para la emergencia de la función logarítmica en las discusiones con estudiantes de sexto semestre de bachillerato en México.

Referencias bibliográficas

Abrate, R. & Pochulu, M. (2007). Ideas para la clase de logaritmos. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 10*, 77-94.

Arrieta, J. & Díaz, L. (2015). Una perspectiva de la modelación desde la Socioepistemología. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *18* (1), 19-48.

Artigue, M. (2015). Perspectives on Design Research: The Case of Didactical Engineering. En A. Bikner - Ahsbahs, C. Knipping y N. Presmeg (Eds.), *Approaches to Qualitative Research in Mathematics Education. Examples of Methodology and Methods* (pp. 467-496). USA: Springer.

Ayoub, R. (1993). Whats is a Napierian Logarithm? *The American Mathematical Montlhy*, *100* (4), 351-364.

Bagni, G. T. (2004). Una Experiencia didáctica sobre funciones en la escuela secundaria. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *7* (1), 15-24.

Billing, M. (1989). *Arguing and thinking. A rhetorical approach to social psychology.* Cambridge, UK: Cambridge University.

Briggs, H. (2004). *Arithmetica logarithmica*. [(I. Bruce traductor). University of Adelaide, Australia]. Obtenido en enero de 2004, desde: http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Miscellaneous/Briggs/index.html. (El trabajo original se publicó en 1620).

Buendía, G. (2005). Prácticas sociales y argumentos: el caso de lo periódico. En J. Lezama, M. Sánchez y J. G. Molina (Eds.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, *18*, 451-456. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Buendía, G. (2010). Articulando el saber matemático a través de prácticas sociales. El caso de lo periódico. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *13* (4-1), 11–28.

Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento.* España: Gedisa

Cantoral, R. & Farfán, R. (2004). La sensibilité à la contradiction: logarithmes de nombres négatifs et origine de la variable complexe. *Recherches en didactique des mathématiques*, *24* (2.3), 137-168.

Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S., & Hsu, E. (2002). Applying covariational reasoning while modeling dynamic events: A framework and a study. *Journal for Research in Mathematics Education*, *33* (5), 352–378. doi: 10.2307/4149958

Castillo - Garsow, C. (2010). *Teaching the Verhulst model: a teaching experiment in covariational reasoning and exponential growth.* Tesis doctoral no publicada. Tempe, AZ: Arizona State University.

Castillo - Garsow, C., Johnson, H. L., & Moore, K. C. (2013). Chunky and smooth images of change. *For the Learning of Mathematics*, *33* (3), 31–37.

Confrey, J., & Smith, E. (1994). Exponential functions, rates of change, and the multiplicative unit. *Educational Studies in Mathematics*, *26* (2-3), 135–164.

Confrey, J., & Smith, E. (1995). Splitting, covariation, and their role in the development of exponential functions. *Journal for Research in Mathematics Education*, *26* (1), 66–86.

Cordero, F. (2007). El uso de gráficas en el discurso del cálculo escolar. Una visión socioepistemológica. En R. Cantoral, O. Covián, R. Farfán, J. Lezama y A. Romo (Eds.) *Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: Un reporte iberoamericano* (pp. 265-286). México: CLAME - A.C. Díaz Santos.

Cordero, F., Cen, C. & Suárez, L. (2010). Los funcionamientos y formas de las gráficas en los libros de texto: una práctica institucional en el bachillerato. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *13* (2), 187-214.

Chevallard, Y. (1995). *La Transposición didáctica.* Buenos Aires, Argentina: Aique.

Douady, R. (1986). Jeux de Cadres et Didactique outil - objeto. *Recherches en Didactique de Mathématique*, *7* (2), 5-31.

Dreyfus, T. & Eisenberg, T. (1983). The function concept in college students: Linearity, Smoothness and periodicity. *Focus on learning problems in mathematics*, *5* (3-4), 119-132.

Dubinsky, E. (1992). The nature of the process conception of function. In E. Dubinsky & G. Harel (Eds.), *The concept of function. Aspects of epistemology and pedagogy*, MAA Notes, Vol. 25 (pp. 85-106). Washington, DC: Mathematical Association of America.

Dubinsky, E. & Harel, G. (1992) (Eds.) *The concept of Function: Aspects of Epistemology and Pedagogy.* MAA Notes, Vol. 25. Washington, DC: Mathematical Association of America.

Duval, R. (1995). *Sémiosis et penseée.* Suiza: Edition Peter Lang

Ellis, A. B. (2011). Algebra in the Middle School: Developing Functional Relationships Through Quantitative Reasoning. En J. Cai & E. Knuth (Eds.), *Early Algebraization* (pp. 215–238). Berlin, Germany: Springer. doi: 10.1007/978-3-642-17735-4

Ellis, A. B., Ozgur, Z., Kulow, T., Williams, C., & Amidon, J. (2012). Quantifying exponential growth: The case of the jactus. En R. Mayes & L. Hatfield (Eds.), *Quantitative reasoning and mathematical modeling: A driver for STEM integrated education and teaching in context* (pp. 93–112). Laramie, WY: University of Wyoming. Recuperado de: http://www.uwyo.edu/wisdome/_files/documents/ellis_et_al.pdf

Even, R. & Brukheimer, M. (1998). Univalence: A critical or non critical characteristics of Function? *For the learning of mathematics*, *18* (3), 30-42.

Euler, L. (1990). *Introduction to Analysis of the infinite (Book II).* USA: Springer - Verlag. (Trabajo original publicado en 1748).

Falcade, R., Laborde, C. & Mariotti, M. A. (2007). Approaching functions: Cabri tools as instruments of semiotic mediation. *Educational Studies in Mathematics 66* (3), 317-333. doi: 10.1007/s10649-006-9072-y

Ferrari, M. (2008). *Un estudio socioepistemológico de la función logarítmica. De facilitar cálculo a una primitiva* (Tesis doctoral no publicada) Centro de Investigación y Estudios Avanzados - IPN, México.

Ferrari, M. & Farfán, R. M. (2008). Un estudio socioepistemológico de lo logarítmico: La construcción de una red de modelos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *11* (3), 309-354

Ferrari, M. & Farfán, R. M. (2010). Una socioepistemología de lo logarítmico. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *13* (4), 59-68

Gonzáles, M. & Vargas, J. (2007). Segmentos de la historia: la función logarítmica. *Matemáticas Enseñanza Universitaria XV* (2), 129-144.

Hitt, F. & González - Martín, A. S. (2015). Covariation between variables in a modelling process: The ACODESA (collaborative learning, scientific debate and self - reflection) method. *Educational Studies in Mathematics*, *88* (2), 201–219. doi: 10.1007/s10649-014-9578-7

Hoffkamp, A. (2011). The use of interactive visualizations to foster the understanding of concepts of calculus: Design principles and empirical results. *ZDM - International Journal on Mathematics Education*, *43* (3), 359–372. doi: 10.1007/s11858-011-0322-9

Johnson, H. L. (2015). Together yet separate: Students' associating amounts of change in quantities involved in rate of change. *Educational Studies in Mathematics, 89* (1), 89-110. doi: 10.1007/s10649-014-9590-y

Kaput, J. (1992). Patterns in student' formalization of quantitative patterns. En E. Dubinsky & G. Harel (Eds.), *The concept of function. Aspects of epistemology and pedagogy,* MAA Notes, Vol. 25 (pp. 175-193). Washington, DC: Mathematical Association of America.

Kenney, R. & Kastberg, S. (2013). Links in Learning and Transferable Skills. *Australian Senior Mathematics Journal*, *27* (1), 12–20.

Krummheuer, G. (2015). Methods for Reconstructing Processes of Argumentation and Participation in Primary Mathematics Classroom Interaction. En A. Bikner - Ahsbahs C. Knipping y N. Presmeg (Eds.), *Approaches to Qualitative Researchin Mathematics Education, Advances in Mathematics Education*, (pp. 51-74), USA: Springer.

Liang, C. B., & Wood, E. (2005). Working with Logarithms: Students' Misconceptions and Errors. *The Mathematics Educator*, *8* (2), 53–70.

Martínez - Sierra, G. (2012). Concepciones y matemática escolar: Unidades de medida de las funciones trigonométricas en el nivel medio superior. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *15* (1), 35-62.

Moore, K. C. (2014). Quantitative Reasoning and the Sine Function: The Case of Zac. *Journal for Research in Mathematics Education*, *45* (1), 102–138. doi: 10.5951/jresematheduc.45.1.0102

Napier, J. (1614 / 1616). *A description of the admirable table of logarithms*. London: Nicholas Okes (1616). Editie vertaald uit het Latijn door Edward Wright. Disponible en: http://www.ru.nl/w-en-s/gmfw/bronnen/napier1.html

Oehrtman, M., Carlson, M., & Thompson, P. (2008). Foundational reasoning abilities that promote coherence in students' function understanding. En M. P. Carlson & C. Rasmussen (Eds.), *Making the Connection: Research and practice in undergraduate mathematics* (pp. 27–42). Washington, DC: Mathematical Association of America.

Panagiotou, E. N. (2011). Using History to Teach Mathematics: The Case of Logarithms. *Science and Education*, *20* (1), 1–35. doi: 10.1007/s11191-010-9276-5

Park, E. J., & Choi, K. (2013). Analysis of student understanding of science concepts including mathematical representations: pH values and the relative differences of pH values. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *11*, 683–706.

Schubring, G. (2008). Gauss e a tábua dos logaritmos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *11* (3), 383-412

Slavit, D. (1997). An alternate route to the reification of function. *Educational Studies in Mathematics*, *33* (3), 259–281.

Thompson, P. W. (2011). Quantitative reasoning and mathematical modeling. En L. L. Hatfield, S. Chamberlain, & S. Belbase (Eds.), *New perspectives and directions for collaborative research in mathematics education* (Vol. 1, pp. 33–57). Laramie, WY: University of Wyoming.

Zimmermann, W. & Cunningham, S. (1991) (Eds.), *Visualization in Teaching and Mathematics,* MAANotes Series, USA.

Autoras

Marcela Ferrari Escolá. Universidad Autónoma de Guerrero, México. mferrari@uagro.mx

Rosa María Farfán Márquez. Departamento de Matemática Educativa, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, México. rfarfan@cinvestav.mx

Javier Gasco - Txabarri

LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS ARITMÉTICO - ALGEBRAICOS Y LAS ESTRATEGIAS DE APRENDIZAJE EN MATEMÁTICAS. UN ESTUDIO EN EDUCACIÓN SECUNDARIA OBLIGATORIA (ESO)

Arithmetic - algebraic problem solving and learning strategies in maths. An study in secondary education

RESUMEN

Uno de los bloques esenciales de la enseñanza - aprendizaje de las matemáticas está formado por los problemas verbales y su resolución; las estrategias de aprendizaje fomentan la autonomía y pueden ayudar a tomar decisiones en esta tarea matemática. Este estudio pretende relacionar la forma de resolver problemas con el empleo de dichas estrategias. La investigación se realiza con alumnado de Educación Secundaria Obligatoria (ESO) de 2º, 3º y 4º curso. El alumnado se categoriza en tres grupos: el grupo de resolución algebraica, el de resolución mixta y el grupo sin perfil definido. Las estrategias de aprendizaje se miden mediante un cuestionario. El grupo algebraico obtiene mejores resultados que el mixto en diversas estrategias, especialmente en las metacognitivas. El grupo sin perfil definido emplea en menor medida todas las estrategias excepto la de *repetición*.

PALABRAS CLAVE:

- *Educación matemática*
- *Resolución de problemas*
- *Estrategias de aprendizaje*
- *Educación secundaria*

ABSTRACT

One of the essential blocks of teaching and learning mathematics consists of word problems and their resolution; learning strategies encourage autonomy and can help make decisions in this mathematical task. This study aims to relate the way to solve problems with the use of these strategies. The research is done with students of secondary school 8th, 9th and 10th grade. Students are categorized into three groups: the group of algebraic resolution, mixed resolution and the group without defined profile. Learning strategies are measured by a questionnaire. The algebraic group outperforms mixed in various strategies, especially in those metacognitives. The group without defined profile uses less all strategies except *rehearsal*.

KEY WORDS:

- *Math education*
- *Word problem*
- *Learning strategies*
- *Secondary education*

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (2017) *20* (2): 167-192.
Recepción: Octubre 24, 2016 / Aceptación: Julio 16, 2017. DOI: 10.12802/relime.17.2022

RESUMO

Um dos blocos essenciais de ensino e aprendizagem da matemática consiste em problemas de palavra e sua resolução; estratégias de aprendizagem incentivar autonomia e pode ajudar a tomar decisões nesta tarefa matemática. Este estudo tem por objetivo relacionar o caminho para resolver problemas com o uso dessas estratégias. A pesquisa é feita com alunos de 8º do ensino secundário, 9º e 10º grau. Os alunos são classificados em três grupos: o grupo de resolução algébrica, resolução mista e do grupo sem perfil definido. Estratégias de aprendizagem são medidas através de um questionário. O grupo algébrico supera misto em várias estratégias, especialmente naqueles metacognitivas. O grupo sem perfil definido usa menos todas as estratégias exceto *ensaio.*

PALAVRAS CHAVE:

- *Educação matemática*
- *Problema de palavra*
- *Estratégias de aprendizagem*
- *O ensino secundário*

RÉSUMÉ

Un des blocs essentiels de l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques se compose de problèmes de mots et de leur résolution; stratégies d'apprentissage encouragent l'autonomie et peuvent aider à prendre des décisions dans cette tâche mathématique. Cette étude vise à relier la façon de résoudre des problèmes avec l'utilisation de ces stratégies. La recherche se fait avec les élèves de 8º du secondaire, 9º et 10º. Les étudiants sont classés en trois groupes: le groupe de la résolution algébrique, la résolution mixte et le groupe sans profil défini. Les stratégies d'apprentissage sont mesurées par un questionnaire. Le groupe algébrique surpasse mixte dans diverses stratégies, en particulier dans les métacognitives. Le groupe sans profil défini utilise moins de toutes les stratégies sauf *répétition*.

MOTS CLÉS:

- *L'enseignement des mathématiques*
- *Problème de mot*
- *Estratégies d'apprentissagee*
- *L'enseignement secondaire*

1. Introducción

Esta investigación pretende relacionar la forma de resolver problemas matemáticos con ciertas estrategias de aprendizaje empleadas por el alumnado de Educación Secundaria Obligatoria. A continuación se introducen los conceptos más relevantes que se tratan en el presente estudio.

1.1. *Los problemas aritmético - algebraicos*

Las estrategias de resolución de problemas matemáticos con enunciado (o problemas verbales) son diversas y pueden estar condicionadas por varios factores asociados al tipo de problema, a la comprensión del texto o a la persona que resuelve, entre otros (p. ej., Bednarz & Janvier, 1996; Filloy, Rojano & Puig, 2008). Resulta evidente la importancia que tiene el aprendizaje de esta área de las matemáticas, como así reflejan los currículos de la mayoría de países en cualquier etapa educativa.

La familiaridad con la resolución de problemas permite la adquisición de multitud de competencias. En este sentido, se identifican tres grandes campos: la habilidad para entender el problema, la competencia para aplicar el procedimiento de resolución y la capacidad para construir esquemas mentales abstractos (Scheiter, Gerjets, & Schuh, 2010). Además, no solo representa un objetivo en el aprendizaje de las matemáticas, sino que es uno de los principales medios para hacerlo promoviendo hábitos de persistencia, curiosidad y confianza en situaciones desconocidas (NCTM, 2000).

En los primeros cursos de la Educación Primaria, una vez conocidas las operaciones aritméticas, se comienzan a enseñar problemas que se resuelven empleando precisamente esas operaciones (resolución aritmética). Tras adquirir competencia en dichas técnicas, se da paso a la resolución algebraica, usualmente al inicio de la Educación Secundaria (BOPV, 2007; BOPV, 2016).

El cambio de una forma de resolución a la otra ha sido estudiado debido a las dificultades que a menudo se detectan en el alumnado (Khng y Lee, 2009). Las diferencias profundas entre los tempranos hábitos aritméticos y el posterior aprendizaje del álgebra no suelen tener lugar de forma espontánea; esta es la razón por la que la intervención de la enseñanza puede ser clave en la transición de una técnica de resolución a la otra.

Hay diversidad de opiniones cuando se pretende definir el álgebra con la finalidad de resolver problemas y en lo que se refiere a la mencionada fase inicial. Carraher, Martinez y Schliemann (2008) considera que el álgebra es la aritmética generalizada de números y cantidades, además del cambio que supone calcular desde números y medidas particulares a pensar en relaciones entre grupos de números, es decir, en funciones. Para Radford (2014), la aritmética tiene un componente algebraico inherente y viceversa, el álgebra su componente aritmético. Otra característica asociada al álgebra y ampliamente observada es su carácter relacional (se relacionan números o cantidades) frente al operacional de la aritmética (se plantea la resolución mediante operaciones aritméticas) (Knuth et al., 2008).

Para adquirir el razonamiento algebraico temprano se debe aprender a generalizar, esto es, a identificar patrones y poder reconocer la norma; sin embargo, antes de emprender dicho aprendizaje, es necesario observar cómo el alumnado representa y razona por sus propios medios (Carraher et al., 2008). En este sentido, los currículos de una gran cantidad de países admiten que un conocimiento profundo de la aritmética requiere la comprensión tanto de generalizaciones de la matemática como de principios básicos del álgebra. Algunas investigaciones informan sobre métodos pre - algebraicos de razonamiento, informales, en los cuales la simbolización se entiende como una manera de facilitar la transición aritmética - álgebra en la resolución de problemas (Van Averom, 2003).

Jennings y Dunne (1996) se refieren a una reducción de la complejidad de los problemas y a una prolongación del uso de técnicas informales (aritméticas) con el fin de facilitar la tarea al alumnado. Stacey y MacGregor (1999) indican que el profesorado en vez de emplear problemas simples y resolverlos algebraicamente como método de preparación para problemas más complejos, lo que promueven es continuar resolviendo problemas usando la intuición, mediante métodos no algebraicos. Las mismas autoras añaden que, desde el punto de vista del alumnado, usar el álgebra para resolver un problema es una dificultad extra que no le resulta necesaria dado que la mayoría de los problemas propuestos en los libros de texto son fácilmente realizables desde la aritmética; en este contexto se encuadran los dos primeros problemas planteados al alumnado en el presente trabajo. Por este motivo proponen que, para apreciar el valor del álgebra, los problemas deben ser no fácilmente resolubles aritméticamente.

Las técnicas aritméticas mencionadas se introducen en Educación Primaria y tienen cierta continuidad (junto al procedimiento algebraico) en el primer ciclo de Educación Secundaria. Según Stacey y MacGregor (1999), la experiencia previa en aritmética conduce a “una compulsión para calcular” que dificulta el empleo de las estrategias algebraicas en el momento de buscar, seleccionar y nombrar la incógnita o incógnitas apropiadas, impidiendo incluso pensar en construir una ecuación. Esta misma tendencia hace que el alumnado quiera trabajar con valores conocidos y no con incógnitas.

Por lo expuesto hasta el momento, la investigación previa enfatiza la importancia de dar prioridad, incluso exclusividad, al empleo del álgebra en Educación Secundaria, tras la etapa necesaria de aprendizaje de técnicas heurísticas implementadas en Educación Primaria. Sin embargo, ciertos estudios indican que, aunque las técnicas heurísticas no garantizan efectividad en la resolución, permiten afrontar cada problema alentando el pensamiento crítico y creativo del estudiante, siempre y cuando no disponga de un algoritmo de resolución

(Deulofeu, Figueiras & Pujol, 2011). Aunque la técnica algebraica de resolución de problemas no se considera un algoritmo (no facilita una rutina aplicable a cualquier problema) sí está compuesta por una serie de reglas que consisten básicamente en definir las incógnitas, construir una ecuación, resolverla y, por último, dar el valor correspondiente a las incógnitas que se pretenden hallar. Van Amerom (2003) también aboga por empezar resolviendo problemas mediante estrategias "informales" (aritméticas) como punto de partida previo a la resolución de ecuaciones e iniciarse con notaciones informales con el objetivo de suavizar la dificultad que entraña el aprendizaje de la simbolización algebraica.

1.2. *Las estrategias de aprendizaje en matemáticas*

Las estrategias de aprendizaje se han estudiado en las últimas décadas en relación a su importancia en el proceso de enseñanza - aprendizaje en multitud de áreas de conocimiento. Inicialmente, estas estrategias se asociaron con el procesamiento cognitivo de la información, lo que posibilitó la construcción de modelos que permitieran entender el funcionamiento de la cognición humana (Badia et al., 2012).

Las estrategias se pueden caracterizar como los pensamientos, comportamientos, creencias o emociones que ayudan a la adquisición, comprensión y transferencia de nuevos conocimientos y habilidades (Inglés, Martínez - González, & García - Fernández, 2013). El empleo de las mismas da pie a la puesta en marcha de un aprendizaje significativo, estratégico y autónomo, basado en el concepto de "aprender a aprender" y puesto en valor por la Unión Europea (European Commission, 2006).

Dependiendo del enfoque conceptual realizado para su examen, se han definido y categorizado un sinfín de estrategias de aprendizaje, medidas, en la mayoría de los casos, a través de cuestionarios. Por ejemplo, Gargallo (2012) propone una categorización en cuatro grupos de estrategias: (i) estrategias afectivas, disposicionales y de apoyo; (ii) estrategias metacognitivas, de regulación y control; (iii) estrategias de búsqueda, recogida y selección de información; y (iv) estrategias de procesamiento y uso de la información adquirida. Cada una de ellas presenta una serie de escalas más específicas. Diversos autores proponen tres grandes dimensiones como son las estrategias cognitivas, las metacognitivas y las contextuales (Liu, 2009, Pintrich, Smith, Garcia, & McKeachie, 1993).

La transcendencia educativa de las estrategias de aprendizaje se puede comprobar observando sus relaciones con importantes variables psicoinstruccionales como son la motivación escolar (Balam, 2015) o el autoconcepto (Núnez et al., 1998), entre otras.

Uno de los objetivos fundamentales de la investigación relativa a las estrategias de aprendizaje trata de focalizarse en el análisis de la variación del rendimiento académico en función del empleo de las mismas; este hecho se repite en cualquier área o ciclo educativo, también en matemáticas (Ahmed et al., 2013; Muruyama et al., 2013).

En este sentido, los resultados sobre el Informe PISA 2003 (Programme for International Student Assessment) concluyen que la importancia de la estrategia de elaboración en matemáticas (por ejemplo, establecer conexiones con áreas relacionadas o buscar soluciones alternativas) se incrementa a medida que el nivel de rendimiento aumenta (Thiessen & Blasius, 2008). La investigación análoga sobre PISA 2000 (Chiu, Wing - Yin, & McBride - Chang, 2007) afirma que: (1) El empleo de la estrategia de repetición (o memorización de conceptos) está asociado negativamente con el rendimiento en matemáticas; (2) La estrategia de elaboración no tiene relación con el rendimiento; y (3) El empleo de estrategias metacognitivas correlaciona positivamente con el rendimiento en matemáticas.

Precisamente las estrategias metacognitivas adquieren especial relevancia en la investigación educativa en matemáticas y, más concretamente, en el desarrollo de habilidades para la resolución de problemas (Lai et al., 2001). Flavell (1979), precursor en el estudio de la estrategia, define la metacognición como el pensamiento sobre el pensamiento distinguiendo dos componentes: (i) el conocimiento de los procesos y productos cognitivos; y (ii) la capacidad para controlar, supervisar y evaluar dichos procesos. Estas estrategias se pueden catalogar como una alarma que informa sobre la propia cognición (Efklides, 2001).

La metacognición juega un papel muy importante en la resolución de problemas, así como en este estudio debido a las diferencias encontradas. Las habilidades metacognitivas ayudan a: 1) codificar estratégicamente la naturaleza del problema y a obtener una representación mental de sus elementos; 2) seleccionar las estrategias adecuadas para la consecución del objetivo; y 3) Identificar los obstáculos que impiden y dificultan el progreso (Davidson & Sternberg, 1998). Algunos estudios han revelado la importancia de la metacognición para hacer frente a la dificultad para resolver problemas matemáticos en el momento de emplear el conocimiento necesario de modo correcto o en el momento apropiado (McAfee & Leong, 1994). La complejidad para resolver problemas da pie a diferentes perfiles de resolución; de este modo, el alumnado no experto hace una lectura superficial del problema, eminentemente explorativa, y no supervisa el proceso (Pape, 2004). El experto, en cambio, se caracteriza por leer y analizar el problema para luego avanzar hacia la solución empleando diversas estrategias (meta) cognitivas como la planificación, la ejecución y la verificación (Baroody, Feil, & Johnson, 2007). En este sentido, el experto trabaja reconociendo los patrones de resolución y clasificando el tipo del problema antes de proceder a resolverlo. También relacionado con la metacognición, los resultados obtenidos por Elichiribehety y Otero (2004) muestran que, independientemente de la edad, un porcentaje elevado de los sujetos sometidos a estudio resuelven orientados por los procesos estratégicos de comprensión del enunciado, mientras que, cuando la transformación del enunciado verbal no puede realizarse en el marco algebraico, se emplea exitosamente el marco aritmético.

Con respecto a la cognición, Mayer (1986) une los términos pensamiento, cognición y resolución de problemas. Argumenta que el pensamiento es manipulación del conocimiento y es dirigido hacia la solución, en clara alusión a la manipulación de operaciones y a la búsqueda del resultado final, procedimientos ambos asociados a la resolución de problemas. Además, los problemas matemáticos verbales facilitan el análisis de los diferentes componentes cognitivos que operan en la inteligencia, tales como los componentes lingüístico - semánticos, los esquemáticos, los estratégicos y los operativos.

Según el currículo de la ESO (BOPV, 2007), la resolución de problemas aporta a la autonomía e iniciativa personal en el fomento de, al menos, tres competencias: la planificación, la gestión de los recursos y la evaluación. Aunque no se haga alusión explícita, todas estas aptitudes representan estrategias matacognitivas. El problema radica en la falta de concreción sobre la manera de resolver los problemas. Según el documento oficial, los problemas se resuelven o bien mediante el método analítico (algebraico) o usando modelos heurísticos (aritméticos), pero no establece una jerarquía que aconseje usar un método o el otro según el tema o el tipo de problema, y tampoco se sabe si son complementarios. En esta situación, se debe recordar que los métodos heurísticos o aritméticos son informales y por tanto no atienden a un patrón establecido, por lo que su aplicación no asegura el éxito en la resolución. En cambio, el dominio del método algebraico, sin ser estrictamente algorítmico, permite seguir unas pautas y dar con la solución a la totalidad de los problemas verbales planteados en Educación Secundaria.

Resultan evidentes, por tanto, los lazos existentes entre las matemáticas y la resolución de problemas y las estrategias de aprendizaje empleadas en el proceso de instrucción. Diversos estudios informan sobre la competencia matemática y la metacognición (Garofalo & Lester, 1985) y sobre el vínculo entre estas estrategias de control y el razonamiento matemático (Schoenfeld, 1985). No obstante, se encuentran escasísimas investigaciones que pretendan arrojar luz sobre las posibles relaciones entre la manera de resolver problemas y las estrategias de aprendizaje que se emplean. El estudio de dichos procedimientos de resolución y las estrategias de aprendizaje puestas en práctica constituyen el objeto del presente estudio.

2. Método

2.1. *Participantes*

En esta investigación participan 631 estudiantes de tres cursos de Educación Secundaria Obligatoria (ESO): 2º (32%), 3º (37%) y 4º (31%), de los cuales 336 (53.3%) son mujeres y 295 (46.7%) hombres. Por motivos de errores u omisiones en las respuestas a los cuestionarios la muestra final queda reducida a 565 sujetos. Las razones de la exclusión fueron no responder varios ítems o dar una respuesta múltiple a algunos de los mismos. La recogida de datos se ha realizado en 8 centros educativos que pertenecen a la Comunidad Autónoma Vasca, integrantes tanto de la red pública (5) como de la red privada concertada (3). Tras contactar con varios centros, finalmente se seleccionan aquellos que responden positivamente a la oferta de participación, por lo que se trata de una muestra de conveniencia.

En la Tabla I se muestra la distribución en función del curso académico y del sexo:

TABLA I
Distribución de la muestra por curso y por sexo

CURSO	SEXO		
	Mujer	*Hombre*	*Total*
2ºESO	95	81	176
3ºESO	111	88	199
4ºESO	100	90	190
Total	306	259	N=565

2.2. *Instrumentos de medida*

2.2.1. *Problemas aritmético - algebraicos*

Los tres problemas propuestos son introducidos por Stacey y MacGregor (1999) y van de menor a mayor complejidad en cuanto a su resolución con métodos no algebraicos. El segundo problema es análogo al primero, con la diferencia de que se piden tres resultados en lugar de dos (ver anexo I).

Con el objetivo de medir las estrategias llevadas a cabo en cada problema propuesto, la codificación se ordena en cuatro categorías propuestas por Khng y Lee (2009): algebraica, si el planteamiento está definido por una o más incógnitas y se resuelve mediante una o más ecuaciones; aritmética, si tanto el planteamiento como la resolución se basa en una técnica aritmética, esto es, sin recurrir ni a incógnita ni a ecuación; mixta, categoría donde se ubican los problemas en los que se usa una letra en alguna parte de la resolución pero la técnica es predominantemente aritmética y, por tanto, se consideran procedimientos aritméticos; y sin estrategia / sin respuesta / planteamiento erróneo, donde se agrupan los métodos sin identificar o los problemas sin resolver.

A la hora de clasificar la resolución como aritmética se han dado como válidas la resolución aritmética y la mixta.

El instrumento de medida para las estrategias de resolución de problemas aritmético - algebraicos consta de tres problemas verbales a resolver. A cada individuo de la muestra se le agrupa en una categoría de las tres siguientes: grupo G3, G2 o G1 (Gasco, 2014). El grupo G3 (grupo de resolución de perfil algebraico), correspondiente a los sujetos que resuelven correctamente la totalidad de los problemas algebraicamente, o, en su defecto, resuelven dos algebraicamente y en el tercero hacen un planteamiento algebraico (planteando las incógnitas y la ecuación), aunque no den con la solución correcta por un error de cálculo y no procedimental; el grupo G2 (grupo de resolución de perfil mixto), compuesto por los individuos que utilizan estrategias tanto algebraicas como aritméticas, dependiendo del problema a resolver. Por tanto, se incluye en este grupo al alumnado que resuelve correctamente dos problemas algebraicamente y uno aritméticamente, o viceversa (dos aritméticamente y uno algebraicamente); y el grupo G1 (grupo de resolución de perfil no definido), al que pertenece el alumnado que no encaja ni en G3 ni en G2; es decir, no resuelve sistemáticamente ni de modo algebraico ni de modo aritmético, ni tampoco alternando ambas técnicas. Se incluyen en este conjunto a los sujetos que obtienen en algún problema (en uno, en dos o en los tres) la clasificación de sin estrategia / sin respuesta / planteamiento erróneo.

La pertinencia de tomar en cuenta el grupo G2 se debe a un estudio previo (Gasco & Villarroel, 2012) que indica que un gran número de sujetos usa la aritmética en problemas adecuados para ello y sin embargo emplea el álgebra para resolver otros de difícil desarrollo aritmético.

2.2.2. *Estrategias de aprendizaje en matemáticas*

El empleo de las estrategias de aprendizaje del alumnado se ha medido a través de un cuestionario basado en una versión para Enseñanza Secundaria del MSLQ (Motivated Strategies for Learning Questionnaire) (Pintrich et al., 1993) adaptado por Berger y Karabenick (2011) para ajustarse al estudio de las matemáticas. El cuestionario en castellano (Gasco - Txabarri, Ros, & Goñi, 2017) aquí propuesto se ajusta a una estructura heptafactorial formada por las mismas escalas del original pero dividiendo la escala de estrategias metacognitivas en dos: *planificación* y *seguimiento - regulación*. Además, los autores proponen la revisión / reformulación / eliminación de 8 de sus ítems; este estudio elimina los ítems indicados formando finalmente un total de 25. Esta versión reducida presenta índices mejores en el análisis factorial confirmatorio (χ^2/gl: 2.95; NFI: .910; CFI: .939; RMSEA: .059) que la versión completa compuesta por 33 ítems. Los ítems se responden en base a una escala Likert de cinco puntos. A continuación, se concreta la configuración de la citada versión castellana:

- Estrategias cognitivas:
  - *Repetición* (3 ítems): Se miden las estrategias para aprender por repetición.
  - *Organización* (2 ítems): Se tienen en cuenta las maneras de gestionar los aprendizajes matemáticos.
  - *Elaboración* (2 ítems): Se mide por una parte cómo se relaciona el aprendizaje en matemáticas con otras materias y por otra la transformación de los conceptos matemáticos para una mejor comprensión personal.
- Estrategias metacognitivas:
  - *Planificación* (5 ítems): Se recopila información sobre cómo se planifican los estudios.
  - *Seguimiento* (4 ítems): Contiene ítems relativos a la conciencia, conocimiento y control que tiene el alumnado sobre su propia cognición.
  - *Regulación* (3 ítems): Se refiere a la habilidad para controlar el esfuerzo y la atención frente a las distracciones o ante tareas difíciles.
- Estrategias contextuales y de gestión de recursos:
  - *Recursos de ayuda* (3 ítems): Mide a quién o a qué se recurre en caso de dificultad en el aprendizaje.
  - *Entorno de estudio - tiempo de estudio* (3 ítems): Se refiere a las costumbres de estudio en cuanto a espacio y horario.

2.3. *Procedimiento*

En lo que respecta a la resolución de problemas, las dos únicas condiciones impuestas para la investigación son, por una parte, que la unidad didáctica referida a la resolución de problemas aritmético - algebraicos se haya impartido y finalizado con anterioridad a la fecha de la prueba y, por otra, que no se revele al alumnado la naturaleza concreta de la prueba matemática, más allá de que deberán hacer unos ejercicios de matemáticas.

Se solicita una cita con la dirección de cada centro elegido. Una vez obtenido el visto bueno, se explican las pruebas propuestas al profesorado de matemáticas de 2º, 3º y 4º de la ESO.

Se advierte de que la prueba es anónima y que los datos personales que se requieren son la fecha de nacimiento y el sexo, exclusivamente. Además, se informa de que los resultados obtenidos no influirán en la calificación escolar.

Dependiendo de cada individuo, la realización de la prueba dura entre 10 y 25 minutos, incluyendo la realización del cuestionario y de los problemas.

2.4. *Análisis de datos*

Se analizan las diferencias entre cursos implementando la prueba no paramétrica para k muestras independientes de Kruskal - Wallis. Para realizar los test post - hoc se ha empleado la prueba no paramétrica U de Mann - Withney. La razón de la elección de dichas pruebas no paramétricas es que los datos recogidos no cumplen los criterios ni de normalidad ni de homocedasticidad.

En las pruebas para el análisis de dos muestras independientes, concretamente en el test U de Mann - Withney, se ha calculado el tamaño del efecto (effect size), denotado por el parámetro r. La interpretación del coeficiente es la siguiente: r = .10, tamaño del efecto débil; r = .30, tamaño del efecto moderado; y a partir de r = .50 tamaño del efecto fuerte (r toma valores entre 0 y 1) (Field, 2009).

Todos los datos obtenidos tanto en los problemas como en el cuestionario se han analizado empleando el software estadístico IBM SPSS Statistics 21.

3. Resultados

A continuación, se presentan los resultados obtenidos. Se dividen en dos apartados: por una parte, la distribución del alumnado por curso y grupo de resolución y por otra las diferencias en el empleo de estrategias en función del grupo de resolución:

3.1. *Distribución del alumnado por curso y grupo de resolución*

En la Tabla II se exponen las distribuciones de los grupos de resolución de problemas en función del curso académico:

TABLA II
Distribución de los grupos de resolución en función del curso académico

		CURSO			
		2º ESO	3º ESO	4º ESO	*Total*
GRUPO	G1	102 (57.9%)	66 (33.2%)	59 (31%)	227
	G2	26 (14.8%)	43 (21.6%)	22 (11.6%)	91
	G3	48 (27.3%)	90 (45.2%)	109 (57.4%)	247
	Total	176	199	190	N=565

G1=Grupo perfil no definido; G1=Grupo perfil mixto; G1=Grupo perfil algebraico

La Chi cuadrado ha resultado de la siguiente manera: X^2 (4, N = 565) = 45.7, p < .001. Por tanto, las diferencias observables son estadísticamente significativas. El tamaño del grupo G3 (grupo de perfil algebraico) aumenta en razón del curso académico pasado del 27.3% (2º de la ESO) al 57.4% (4º). La evolución del G1 (sin perfil definido) es de signo contrario: va disminuyendo en cantidad de estudiantes de curso en curso. El tamaño del grupo de perfil mixto (G2) aumenta de 2º a 3º (del 14.8% al 21.6%) para luego, en 4º, disminuir (11.6%). Es destacable la pequeña diferencia entre 3º y 4º en el grupo sin perfil de resolución definido (G1); la mayor variación entre 3º y 4º se aprecia entre el G2 y el G3, siendo el grupo algebraico (G3) el destacado en 4º (57.4% frente a 45.2%) y el grupo mixto (G2) en 3º (21.6% frente a 11.6%). En la Figura 1 se muestran la distribución porcentual descrita en la Tabla II:

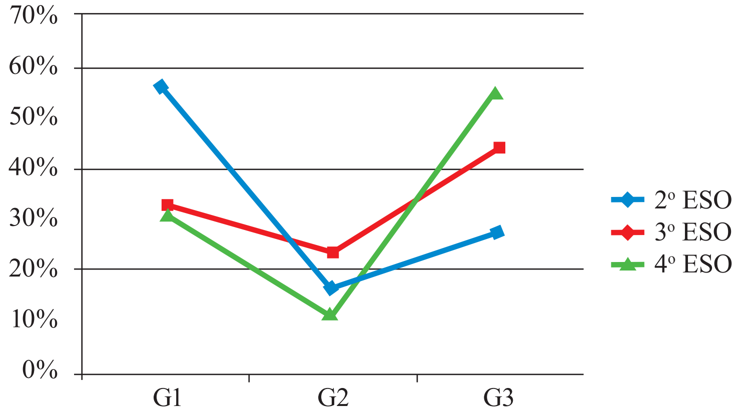


Figura 1. Distribución porcentual de los grupos de resolución en función del curso académico

3.2. *Diferencias en el empleo de estrategias en función del grupo de resolución*

En la tabla III se exponen las variaciones inter - grupos de resolución en las puntuaciones obtenidas en las estrategias de aprendizaje:

TABLA III
Diferencias en función del grupo de resolución

Estrategia	*Grupo*	*Media*	*Desv. típ.*	*Prueba de Kruskal - Wallis*	
Repetición	G1 G2 G3	2.88 2.97 3.06	.98 .98 .89	No existen diferencias	.12
Organización	G1 G2 G3	1.71 2.93 3.18	.75 1.17 .95	Existen diferencias	.00
Elaboración	G1 G2 G3	1.77 2.73 3.30	.60 1.20 1.00	Existen diferencias	.00
Planificación	G1 G2 G3	1.69 2.61 3.13	.54 .81 .78	Existen diferencias	.00
Seguimiento - Regulación	G1 G2 G3	2.01 3.67 3.96	.72 .67 .48	Existen diferencias	.00
Recursos ayuda	G1 G2 G3	2.80 3.81 3.86	.80 .80 .67	Existen diferencias	.00
Entorno estudio	G1 G2 G3	2.14 3.27 3.54	.70 .47 .75	Existen diferencias	.00

G1=Grupo perfil no definido; G1=Grupo perfil mixto; G1=Grupo perfil algebraico

Las diferencias son estadísticamente significativas en todas las estrategias ($p < .001$), exceptuando en la de repetición (nivel de significación: $p > .05$), estrategia cognitiva consistente en memorizar lo aprendido lo que significa que, aunque la mayoría de estrategias muestran variación, la repetición de los conocimientos parece tener otra tendencia diferente en lo que a cambios de curso se refiere.

A continuación, se han realizado los test post - hoc U de Mann - Withney con el fin de estudiar las diferencias dos a dos entre los grupos de resolución en el uso de estrategias en las que se han detectado diferencias. Los resultados entre los grupos G1 y G2 se exponen en la Tabla IV:

TABLA IV

Diferencias post - hoc entre los grupos G1 y G2

	Test U de Mann - Withney			
Estrategia	*U*	*Z*	*p*	*r*
Repetición	4130.50	- 8.71	.00	.49
Elaboración	5584	- 6.71	.00	.38
Planificación	3621	- 9.28	.00	.52
Seguimiento - Regulación	1407.50	- 12.12	.00	.68
Recursos ayuda	3686.50	- 9.20	.00	.52
Entorno estudio	3833.50	- 9.00	.00	.50

G1=Grupo perfil no definido; G1=Grupo perfil mixto

Las diferencias estadísticamente significativas se producen en todas las estrategias evaluadas ($p < .001$); además, en todas ellas, el alumnado del grupo G2 obtiene puntuaciones superiores en comparación con el alumnado del grupo G1.

La estrategia de *organización* tiene en cuenta las maneras de gestionar los aprendizajes matemáticos. La estrategia cognitiva de *elaboración* mide cómo se relaciona el saber matemático con otras materias, además de la transformación que se realiza de los conceptos matemáticos para una mejor comprensión de los mismos. La *planificación* y el *seguimiento - regulación*, ambas estrategias metacognitivas, miden la preparación, el control y el conocimiento que tiene el alumnado sobre su propia cognición. La estrategia de *recursos de ayuda* se refiere a la búsqueda de ayuda en caso de dificultad y el *entorno de estudio* evalúa el ambiente elegido para estudiar.

En consecuencia, según estos resultados, el alumnado del G2 gestiona y relaciona mejor el aprendizaje matemático, tiene un mayor conocimiento, planificación y control de su cognición, pide más ayuda en caso de dificultad y gestiona mejor su espacio y tiempo de estudio.

En todos los tipos de estrategias el tamaño del efecto es entre moderado y fuerte por el hecho de que el parámetro r resulta mayor de .30 en todos los casos.

En la Tabla V se exponen las diferencias en el empleo de estrategias entre los grupos G1 y G3:

TABLA V

Diferencias post-hoc entre los grupos G1 y G3

	Test U de Mann - Withney			
Estrategia	*U*	*Z*	*p*	*r*
Repetición	6627	- 14.23	.00	.65
Elaboración	6756.50	- 14.21	.00	.65
Planificación	4043	- 15.96	.00	.73
Seguimiento - Regulación	1686	- 17.50	.00	.80
Recursos ayuda	8418.50	- 13.01	.00	.60
Entorno estudio	5292.50	- 15.14	.00	.69

G1=Grupo perfil no definido; G3= Grupo perfil algebraico

Las diferencias estadísticamente significativas se dan en todas las estrategias de aprendizaje medidas ($p < .001$). En cada una de ellas además el alumnado del grupo G3 obtiene puntuaciones superiores al alumnado agrupado en el G1.

En todas las diferencias el tamaño del efecto ha resultado ser fuerte ($r > .50$).

El análisis de diferencias en el uso de estrategias de aprendizaje entre los grupos G2 y G3 se presenta en la Tabla VI:

TABLA VI

Diferencias post - hoc entre los grupos G2 y G3

	Test U de Mann - Withney			
Estrategia	*U*	*Z*	*p*	*r*
Repetición	10570	- 1.79	.74	-
Elaboración	8721	- 4.00	.00	.22
Planificación	7884.50	- 5.00	.00	.27
Seguimiento - Regulación	9202	- 3.42	.00	.19
Recursos ayuda	11384.50	- .80	.42	-
Entorno estudio	10247.50	- 2.12	.03	.11

G2=Grupo perfil mixto; G3= Grupo perfil algebraico

Entre G2 y G3 las diferencias entre puntuaciones son estadísticamente significativas en las estrategias de la *elaboración*, la *planificación*, el *seguimiento - regulación* y *entorno de estudio* ($p < .05$); el tamaño del efecto es entre débil y moderado ($.10 < r < .30$). El alumnado del grupo algebraico G3 obtiene puntuaciones estadísticamente superiores en las cuatro estrategias mencionadas. En cambio, en la estrategia cognitiva de la *organización* y los *recursos de ayuda* no se han detectado diferencias ($p > .05$). Destaca, por tanto, la importancia de la diferencia en el empleo de estrategias metacognitivas a favor del alumnado que se incluye en el G3, además de la superioridad en la estrategia cognitiva de la *elaboración*.

4. Discusión

En lo respectivo a la distribución de los grupos de resolución por curso académico, los resultados obtenidos en el presente estudio indican que el empleo del álgebra es mayor en el curso 4º de la ESO que en 2º y también en 3º que en 2º; es decir, el grupo de resolución G3, que se corresponde con un perfil algebraico, es más numeroso tanto en 4º como en 3º en comparación con 2º. Por esta razón en 2º de la ESO predomina el grupo de resolución sin perfil definido (G1). Este grupo está caracterizado por no resolver sistemáticamente los problemas ni algebraicamente, ni aritméticamente, ni tampoco alternando los dos procedimientos de resolución. En este caso, el uso del álgebra crece a medida que el curso aumenta. Esta tendencia concuerda con lo descrito por Chen (1999) en el sentido de que el alumnado de cursos más avanzados es más eficiente debido a su capacidad para inducir un esquema general más sofisticado a partir de diversas operaciones de procedimiento; por tanto, más eficaces en la elección de la estrategia de resolución esencial entre los diversos problemas de origen. Dicho autor conecta estos datos con el hecho de que el conocimiento del alumnado más joven esté estrechamente relacionado con situaciones específicas y no con patrones.

La enseñanza - aprendizaje de las matemáticas representa uno de los bloques principales en la ESO. En este marco educativo, la resolución de problemas es una cuestión de gran importancia para el avance de las matemáticas y también para su comprensión y aprendizaje (BOPV, 2007). Tomando como referencia el currículo y con el fin de entender la evolución que puede haber de 2º de la ESO a 4º en la cuestión de la resolución de problemas aritmético - algebraicos, no se ofrece información significativa que especifique las diferencias entre los diferentes cursos. Acorde con los datos presentados, parece razonable suponer que a medida que el curso es superior se aprende a resolver problemas de mayor complejidad (como problemas con varias variables o ecuaciones de segundo grado), pero no se describen los cambios o exigencias relacionadas con los problemas de álgebra iniciales, de una sola incógnita, precisamente los problemas seleccionados para esta investigación. Parece lógico suponer que la práctica en la resolución de problemas mediante el procedimiento algebraico, unida a una mayor complejidad de los problemas, puede conllevar un empleo del álgebra más sistemático en problemas más "sencillos". Los resultados obtenidos en este estudio corroboran esta hipótesis pero con matices; la puntualización puede deberse a la inclusión de métodos heurísticos en el currículo.

Los métodos heurísticos de resolución buscan la solución de un problema mediante técnicas no rigurosas como pueden ser el ensayo - error, reglas empíricas, diagramas, etc. En todos los cursos analizados, el currículo menciona estos métodos como parte de los contenidos a dominar en la parte concerniente a la resolución de problemas con el objetivo de reflexionar sobre el proceso de resolución de problemas (BOPV, 2007).

El estudio de esta dualidad a la hora de enfrentarse a un problema representa la aportación principal de la presente investigación y tiene como referente al grupo de resolución de perfil mixto (G2). Según Radford (2011) el pensamiento algebraico no es natural en el sentido de que no se tiene porqué desarrollar una vez que los estudiantes hayan madurado lo suficiente y lo califica como reflexión y acción cultural muy sofisticado.

Como se ha resaltado anteriormente, los resultados de esta investigación muestran la tendencia creciente a resolver los problemas algebraicamente al confrontar 2º de la ESO con los otros dos cursos superiores; no ocurre lo mismo en la transición de 3º a 4º. En este caso, mientras el grupo de perfil de resolución no definido se mantiene estable, la diferencia más significativa se produce en que el grupo de perfil mixto decrece en el paso a 4º en la misma medida que el grupo de perfil algebraico aumenta. La inclusión en esta investigación del grupo de resolución mixto constata el máximo que alcanza en 3º. Una explicación integral de este fenómeno debe analizar tanto el crecimiento del grupo en cuestión de 2º a 3º como el decrecimiento de 3º a 4º; la primera variación se puede interpretar como un aumento de la habilidad de resolución algebraica, acorde al cambio de curso, al mismo tiempo que se siguen utilizando técnicas informales debido todavía al peso de la experiencia previa en aritmética. Esto permite un mayor nivel de elección; la segunda fluctuación, esta vez descendente, parece deberse a una consciencia y control mayor sobre el poder de resolución algebraico logrado durante los dos cursos anteriores, relegando así los procedimientos aritméticos.

No obstante, y como se ha mencionado en el marco teórico, la dudosa eficacia de los modelos heurísticos generales planteados en la ESO no significa que una buena instrucción en dichos procedimientos no favorezca la competencia en resolución de problemas. De hecho, varias investigaciones han mostrado que un entrenamiento en el aula tanto en heurísticos como en estrategias de aprendizaje resulta efectivo en este sentido (Kramarski & Mevarech, 2003; Perels, Gürtler & Schmitz, 2005). Es necesario apuntar que los heurísticos ejercitados en dichos estudios son más elaborados y menos generales que los planteados en el currículo analizado.

A continuación, se discuten los resultados obtenidos en el empleo de estrategias de aprendizaje en matemáticas en función del grupo de resolución. Los resultados dibujan dos variaciones claramente diferenciadas entre los grupos de resolución con respecto a las estrategias de aprendizaje: por una parte, la concerniente a los grupos de resolución algebraico y mixto y, por otra, la correspondiente a los grupos algebraico y mixto en oposición al grupo de perfil no definido.

En primer lugar, se confirma que el conjunto de alumnado de perfil algebraico (G3) hace un uso mayor de las estrategias metacognitivas (*planificación* y *seguimiento - regulación*) que el grupo que alterna los procedimientos algebraicos y los aritméticos (G2 o grupo mixto), siendo ambas diferencias moderadamente relevantes. Esto se traduce en que los integrantes del grupo algebraico conocen y controlan los mecanismos de procesamiento de la información de una forma más eficaz que el alumnado perteneciente al grupo mixto. Además, también moderadamente, el alumnado que resuelve algebraicamente destaca también en la estrategia cognitiva de *elaboración* y en la de *entorno de estudio* y *tiempo de estudio* (débilmente) con respecto al conjunto que resuelve alternativamente. En el *caso de la elaboración*, el grupo de perfil algebraico evidencia mayor competencia relacionando y transformando los conocimientos matemáticos con el fin de lograr una mayor comprensión tanto de la propia materia como de otras.

La investigación previa, aunque ofrece una visión general de la relación entre la cognición - metacognición y la resolución de problemas matemáticos, no concreta la influencia que pueda tener el procedimiento para resolver dichos problemas, es decir, no discrimina entre un perfil de resolución algebraico y un perfil mixto. De hecho, no se han encontrado estudios que indaguen en la conexión entre la manera de resolver los problemas y la frecuencia en el uso de las estrategias de aprendizaje.

Volviendo a los datos obtenidos, los resultados logrados en la estrategia de *elaboración* y las dos de metacognición a favor del grupo de resolución algebraico frente al mixto resultan esclarecedores. A priori, se podría intuir que el alumnado que domina varias técnicas de resolución es más flexible y tendría más posibilidades de elección y de transformación del problema, propiedades asociadas a las estrategias referidas. Sin embargo, como se ha mencionado anteriormente, ciertos estudios parecen indicar que el empleo de heurísticos en la actual Educación Secundaria se limita a una instrucción escasa, rutinaria y parcial. En cambio, el método algebraico de resolución es efectivo y versátil, una vez superadas ciertas dificultades asociadas a su abstracción. En vista de los resultados, se podría inferir una interpretación alternativa de la flexibilidad en la resolución de problemas verbales aritmético - algebraicos. Dicha apreciación consiste en considerar el método algebraico como un procedimiento flexible tanto en la elección de las variables como en la ecuación; el álgebra ofrece la posibilidad de reformular ambos elementos indispensables para el planteamiento del problema y su resolución.

En segundo lugar, se observa que el grupo de perfil no definido (G1) obtiene medias inferiores que los grupos de perfil algebraico (G3) y de perfil mixto (G2) en *organización*, *elaboración*, *organización*, *seguimiento - regulación*, *recursos de ayuda* y *entorno de estudio* y *tiempo de estudio*, es decir, en todas exceptuando en la *repetición*. Es importante destacar que la relevancia de la diferencia es fuerte en todos los casos mencionados. Teniendo en cuenta la coincidencia de resultados en ambos grupos con respecto a G1, es razonable pensar que la diferencia se puede deber al rendimiento académico en matemáticas. A partir de la década de los 80, la metacognición se ha asociado a un mayor rendimiento en matemáticas (Areepattamannil & Caleon, 2013; Murayama et al., 2013). De la misma manera, la estrategia cognitiva de *elaboración* tiene más peso en el aprendizaje de las matemáticas en el alumnado con mayor rendimiento (Thiessen & Blasius, 2008). Este resultado coincide con la investigación de Czuchry & Dansereau (1998) aunque no con Chiu et al. (2007) que no encuentran relación probablemente porque no se distingue adecuadamente entre las estrategias de *repetición* y de *elaboración*, existiendo una alta correlación entre ambas. Incluso Areepattamannil y Caleon (2013) dan cuenta de un efecto negativo en el rendimiento de esta estrategia cognitiva achacándolo a que pueda estar eclipsada por el uso del control metacognitivo, es decir, una disminución de la *elaboración* puede ir acompañada de un aumento en el rendimiento debido al efecto positivo de las estrategias de control metacognitivas.

Por lo indicado previamente, la excepción se ha producido en la estrategia cognitiva de *repetición* en la que no se observan variaciones inter - grupos de resolución en la presente investigación. La ausencia de diferencias en dicha estrategia es perfectamente consistente con la explicación basada en el menor rendimiento del grupo sin perfil de resolución definido con respecto a los otros dos grupos. De hecho, el empleo de la estrategia de *repetición* está asociado negativamente con el rendimiento en matemáticas en el sentido de que memorizar es una estrategia ineficaz para el aprendizaje de nociones nuevas (Chiu et al., 2007). Según el NCTM (2000), el alumnado que memoriza procedimientos matemáticos no sabe ni cómo ni cuándo emplear lo que sabe y, por tanto, el aprendizaje no es efectivo. Asimismo, el Informe PISA (2009) advierte de que el empleo asiduo de la estrategia de *repetición* no se corresponde con mayor rendimiento en matemáticas. No conviene olvidar que la *repetición* se ha definido como estrategia de procesamiento superficial (Schiefele, 1991).

Sin embargo, Areepattamannil y Caleon (2013), a pesar de que aceptan que la memorización reduce el tiempo de procesamiento que puede ser asignado a las estrategias de aprendizaje profundo, no descartan la posibilidad de que el uso de esta estrategia pueda ser útil en el aprendizaje de conceptos introductorios en las matemáticas y en la construcción de conocimientos previos que puedan facilitar la aplicación de estrategias de aprendizaje profundo. Murayama et al. (2013) advierten de que las estrategias superficiales son adaptativas en algunas tareas (por ejemplo, de habilidad) o en las etapas iniciales de aprendizaje.

Por último, las estrategias de *recursos de ayuda* y *ambiente* y *tiempo de estudio* también adquieren importancia en el momento de superar las dificultades que entraña la resolución de problemas (Puteh & Ibrahim, 2010).

No se deben dejar de mencionar las limitaciones de este estudio; convendría ampliar la gama de problemas de cara a cerciorarse si ampliar o no la casuística de los grupos de resolución, así como aplicar el cuestionario a una muestra más extensa.

Como conclusión a las aportaciones expuestas, cabe destacar el aprendizaje estratégico del alumnado que resuelve los problemas algebraicamente frente al grupo que alterna aritmética y álgebra; esta diferencia está mediada por las estrategias de aprendizaje de alto nivel como son la elaboración y la metacognición. Por otro lado, asociado a un menor empleo de las estrategias, se infiere un menor rendimiento en el aprendizaje por parte del alumnado que no emplea adecuadamente ninguno de los dos procedimientos de resolución. Estos datos pueden ser un referente educativo en el sentido de que fomentar y reforzar el aprendizaje del álgebra en la resolución de problemas aritmético - algebraicos deriva en un aprendizaje más autónomo y de mayor control sobre el conocimiento. Dicha instrucción algebraica puede ser apoyada con técnicas aritméticas para introducir el problema o para comprobar ciertos resultados, pero no debería sustituir el método algebraico como procedimiento de resolución de primer orden.

Referencias bibliográficas

Ahmed, W., van der Werf, G., Kuyper, H. & Minnaert, A. (2013). Emotions, self - regulated learning, and achievement in mathematics: A growth curve analysis. *Journal of Educational Psychology*, *105* (1), 150-161. doi: 10.1037/a0030160

Areepattamannil, S. & Caleon, I. S. (2013). Relationships of cognitive and metacognitive learning strategies to mathematics achievement in four high - performing East Asian education systems. *The Journal of genetic psychology, 174* (6), 696-702. doi: 10.1080/00221325.2013.799057

Badia, A., Álvarez, I., Carretero, R., Liesa, E., & Becerril, L. (2012). Del aprendiz estratégico al aprendiz competente. En *Estrategias y competencias de aprendizaje en educación* (pp. 17-38). Madrid: Editorial Síntesis.

Balam, E. (2015). Learning Strategies and Motivation of Graduate Students: Is Gender a factor. *Institute for Learning Styles Journal*, *1*, 1-9.

Baroody, A., Feil, Y., & Johnson, A. R. (2007). An alternative reconceptualization of procedural and conceptual knowledge. *Journal for Research in Mathematics Education*, *38* (2), 115-131.

Bednarz, N., & Janvier, B. (1996). Emergence and development of algebra as a problem - solving tool: continuities and discontinuities with arithmetic. En N. Bednarz, C. Kieran, & L. Lee (Eds.), *Approaches to algebra, perspectives for research and teaching* (pp. 115-136). Dordrecht: Kluwer.

Berger, J. & Karabenick, S.A. (2011). Motivation and student's use of learning strategies: Evidence of unidirectional effects in mathematics classroom. *Learning and Instruction*, *21* (3), 416-428. doi: 10.1016/j.learninstruc.2010.06.002

BOPV (2007). Currículo de matemáticas en la ESO. Boletín Oficial del País Vasco, suplemento n.º 218. Obtenido de http://www.euskadi.eus

BOPV (2016). Currículo de Educación Básica. Boletín Oficial del País Vasco, nº 9, 2016 / 141. Obtenido de http://www.euskadi.eus

Carraher, D. W., Martinez, M. V., & Schliemann, A. D. (2008). Early algebra and mathematical generalization. *ZDM*, *40* (1), 3-22. doi: 10.1007/s11858-007-0067-7

Chen, Z. (1999). Schema induction in children's analogical problem solving. *Journal of Educational Psychology*, *91* (4), 703-715. doi: 10.1037/0022-0663.91.4.703

Chiu, M. M., Wing - Yin, B., & McBride - Chang, C. (2007). Universals and specifics in learning strategies: Explaining adolescent mathematics, science, and reading achievement across 34 countries. *Learning and Individual Differences*, *17*, 344-365. doi: 10.1016/j.lindif.2007.03.007

Czuchry, M. & Dansereau, D. F. (1998). The generation and recall of personally relevant information. *The Journal of experimental education*, *66* (4), 293-315. doi: 10.1080/00220979809601403

Davidson, J. E. & Sternberg, R. J. (1998). Smart problem solving: How metacognition helps. *Metacognition in educational theory and practice* (pp. 47-68). New Jersey: LEA.

Deulofeu, J., Figueiras, L., & Pujol, R. (2011). De lo previsible a lo inesperado en un contexto de resolución de problemas. *Uno*, *58*, 84-97.

Efklides, A. (2001). Metacognitive experiences in problem solving: Metacognition, motivation, and self - regulation. En A. Efklides, J. Kuhl, y R. M. Sorrentino (Eds.), *Trends and prospects in motivation research* (pp. 297-323). Dodrecht: The Netherlands, Kluwer. doi:10.1007/0-306-47676-2_16

Elichiribehety, I., & Otero, M. R. (2004). La relación entre los marcos de resolución y los modelos mentales en la enseñanza del álgebra. *Educación Matemática*, *16* (1), 29-58. Obtenido de http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=40516102

European Commission (2006). *Key competences for lifelong learning: A European Reference Framework*. Brussels: European Commission. Obtenido de http://eur-lex.europa.eu/legal-content/EN/TXT/?uri=uriserv:c11090

Field, A. (2009). Non - parametric tests. En *Discovering statistics using SPSS* (pp. 539-583, 3ª edición). London: Sage. doi: 10.1111/j.1365-2648.2007.04270_1.x

Filloy, E., Rojano, T., & Puig, L. (2008). *Educational algebra: A theoretical and empirical approach*. New York: Springer Verlag.

Flavell, J. H. (1979). Meta - cognitive and cognitive monitoring: A new area of cognitive developmental inquiry. *American Psychologist*, *31*, 906-911. doi: 10.1037/0003-066x.34.10.906

Gargallo, B. (2012). Un aprendiz estratégico para una nueva sociedad. *Tesi 13* (2), 246-272.

Garofalo, J. & Lester Jr, F. K. (1985). Metacognition, cognitive monitoring, and mathematical performance. *Journal for research in mathematics education*, *16*(3), 163-176. doi: 10.2307/748391

Gasco, J. (2014). Diferencias en la resolución de problemas algebraicos en función del sexo en estudiantes de Educación Secundaria. *Aula Abierta*, *42* (2), 77-82. doi: 10.1016/j.aula.2014.02.001

Gasco - Txabarri, J., Ros, I., & Goñi, A. (2017). Cuestionario de Estrategias de Aprendizaje para las Matemáticas (CEAMA): measure and properties of an adaptation of Spanish questionnaire / Cuestionario de Estrategias de Aprendizaje para las Matemáticas (CEAMA): medida y propiedades de una adaptación en lengua castellana. *Cultura y Educación*, *29* (1), 183-209. doi: 10.1080/11356405.2016.1274145

Gasco, J. & Villarroel, T. (2012). Algebraic problem solving and learning strategies in compulsory secondary education. *Procedia - Social and Behavioral Sciences*, *46*, 612-616. doi: 10.1016/j.sbspro.2012.05.172

Informe PISA (2009). Programa para la Evaluación Internacional de los Alumnos. Gobierno de España. Obtenido de http://www.leadquaed.com/docs/pisa/pisa2009.pdf

Inglés, C. J., Martínez - González, A. E., & García - Fernández. J. M. (2013). Conducta prosocial y estrategias de aprendizaje. *European journal of educational psychology*, *6* (1), 33-53. doi: 10.1174/021037008786140968

Jennings, S. & Dunne, R. (1996). A critical appraisal of the national curriculum by comparison with the french experience. *Teaching Mathematics and Its Applications*, *15* (2), 49-55. doi: 10.1093/teamat/15.2.49

Knuth, E. J., Alibali, M. W., Mcneil, N. M., Weinberg, A., & Stephens, A. C. (2005). Middle school students understanding of core algebraic concepts: equivalence and variable. *ZDM*, *37* (1), 68-76. doi: 10.1007/978-3-642-17735-4_15

Khng, K. H. y Lee, K. (2009). Inhibition interference from prior knowledge: Arithmetic intrusion in algebra word problem solving. *Learning and Individual Differences*, *19*, 262-268. doi: 10.1016/j.lindif.2009.01.004

Kramarski, B. & Mevarech, Z. R. (2003). Enhancing mathematical reasoning in the classroom: The effects of cooperative learning and metacognitive training. *American Educational Research Journal*, *40* (1), 281-310. doi: 10.3102/00028312040001281

Lai, K., Griffin, P., Mak, A., Wu, M., & Dulhunty, M. (2001). Modelling strategies in problem solving. Texto presentado en *Annual Conference of the Australian Association for Research in Education*. Perth, Australia.

Liu, O. L. (2009). Evaluation of a learning strategies scale for middle school students. *Journal of Psychoeducational Assessment*, *27* (4), 312-322. doi: 10.1177/0734282908327935

Mayer, R. (1986). *Pensamiento, resolución de problemas y cognición*. Barcelona: Paidós.

McAfee, O. & Leong, D. J. (1994). *Assessing and guiding young children's development and learning.* Boston: Allyn & Bacon.

Murayama, K., Pekrun, R., Lichtenfeld, S., & Vom Hofe, R. (2013). Predicting long - term growth in students' mathematics achievement: The unique contributions of motivation and cognitive strategies. *Child Development*, *84* (4), 1475-1490. doi: 10.1111/cdev.12036

NCTM - National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston, VA: Author.

Núñez Pérez, J. C., González Pienda, J. A., García Rodríguez, M., González Pumariega, S., Roces Montero, C., Álvarez Pérez, L., & González Torres, M. D. C. (1998). Estrategias de aprendizaje, autoconcepto y rendimiento académico. *Psicothema*, *10* (1), 97-111.

Pape, S. J. (2004). Middle school children's problem - solving behavior: A cognitive analysis from a reading comprehension perspective. *Journal for Research in Mathematics Education*, *35* (3), 187-219. doi: 10.2307/30034912

Perels, F., Gürtler, T., & Schmitz, B. (2005). Training of self - regulatory and problem - solving competence. *Learning and Instruction*, *15*, 123-139. doi: 10.1016/j.learninstruc.2005.04.010

Pintrich, P. R., Smith, D. A. F., Garcia, T., & McKeachie, W. J. (1993). Reliability and predictive validity of the motivated strategies for learning questionnaire (MSLQ). *Educational and Psychological Measurement*, *53*, 801-813. doi: 10.1177/0013164493053003024

Puteh, M. & Ibrahim, M. (2010). The usage of self - regulated learning strategies among form four students in the mathematical problem - solving context: a case study. *Procedia: Social and Behavioral Sciences*, *8*, 446-452. doi: 10.1016/j.sbspro.2010.12.061

Radford, L. (2011). Grade 2 student's non - symbolic algebraic thinking. En *Early algebraization* (pp. 303-322). Springer Berlin Heidelberg. doi: 10.1007/978-3-642-17735-4_17

Radford, L. (2014). The progressive development of early embodied algebraic thinking. *Mathematics Education Research Journal*, *26* (2), 257-277. doi: 10.1007/s13394-013-0087-2

Scheiter, K., Gerjets, P. & Schuh, J. (2010). The acquisition of problem - solving skills in mathematics: How animations can aid understanding of structural problem features and solution procedures. *Instructional Science*, *38* (5), 487-502. doi: 10.1007/s11251-009-9114-9

Schiefele, U. (1991). Interest, learning, and motivation. *Educational Psychologist*, *26* (3-4), 299-323. doi: 10.1207/s15326985ep2603&4_5

Schoenfeld, A. H. (1985). Metacognitive and epistemological issues in mathematical understanding. En E. A. Silver (Ed.), *Teaching and learning mathematical problem solving: Multiple research perspectives* (pp. 361–379). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Stacey, K. & MacGregor M. (1999). Learning the algebraic method of solving problems. *Journal of Mathematical Behaviour*, *18* (2), 149-167. doi: 10.1016/s0732-3123(99)00026-7

Thiessen, V. & Blasius, J. (2008). Mathematics achievement and mathematics learning strategies: Cognitive competencies and construct differentiation. *International Journal of Educational Research*, *47*, 362-371. doi: 10.1016/j.ijer.2008.12.002

Van Amerom, B. A. (2003). Focusing on informal strategies when linking arithmetic to early algebra. *Educational Studies in Mathematics*, *54* (1), 63-75. doi: 10.1023/b:educ.0000005237.72281.bf

Autor

Javier Gasco - Txabarri. Universidad del País Vasco - Euskal Herriko Unibertsitatea (UPV / EHU).
javier.gasco@ehu.eus

ANEXO I

Problemas aritmético - algebraicos
(adaptación castellana del original de Stacey y MacGregor (1999))

---

1. Se reparten caramelos entre Jon y Maitane. A Jon le dan 5 caramelos más que a Maitane. En total hay 47 caramelos. ¿Cuántos caramelos le tocan a cada uno?
2 Un grupo de estudiantes hace un viaje de 3 días. La distancia recorrida el segundo día es de 85 km más que el primer día. La distancia recorrida el tercer día es de 125 km más que el primero. La distancia total es de 1410 km. ¿Qué distancia se recorre cada día?
3. Descubre el número que si lo multiplico por 8, resto 3 y divido por 3, el resultado es el doble del número que había pensado.

ANEXO II

CEAMA: Adaptación castellana del cuestionario de Berger y Karabenick (2011)

R1 Cuando estudio matemáticas repito lo que necesito aprender una y otra vez para memorizarlo

R2 Para estudiar matemáticas repito varias veces las fórmulas o definiciones con el fin de memorizarlas

R3 Cuando estudio matemáticas suelo repetir varias veces los problemas para memorizarlos

O1 Estudio matemáticas haciendo diagramas, cuadros o tablas para organizar lo que he aprendido

O2 Cuando estudio matemáticas hago una lista de las fórmulas o definiciones para organizar lo que necesito aprender

El1 Cuando estudio matemáticas intento relacionar lo nuevo con lo que ya sé

El2 Relaciono la manera de resolver problemas matemáticos con la manera de resolver otros problemas

Pl1 Antes de estudiar un nuevo tema planeo cómo voy a hacerlo

Pl2 Antes de empezar a estudiar matemáticas planeo qué y cómo voy a hacerlo

Pl3 Antes de empezar a estudiar matemáticas pienso cuánto tiempo voy a necesitar para estudiar el tema

Pl4	Cuando estudio un nuevo tema de matemáticas pienso cuál puede ser la mejor manera de hacerlo
Pl5	Antes de estudiar matemáticas me fijo objetivos que me ayudan a aprender
Se1	Cuando estudio matemáticas me hago preguntas para estar seguro de lo que he aprendido
Se2	Cuando estudio matemáticas llevar un control de lo que he aprendido
Se3	Cuando estudio matemáticas me pregunto si conozco los materiales
Se4	Compruebo si he comprendido lo que estoy aprendiendo
Re1	Si no entiendo algo que estoy estudiando en matemáticas intento solucionarlo
Re2	Si las matemáticas que estoy estudiando son difíciles de aprender, me lo tomo con calma
Re3	Si tengo dificultades para resolver un problema, intento otras formas para resolverlo
En1	Estudio matemáticas en un entorno en el que puedo concentrarme
En2	Me hago un horario para preparar los exámenes de matemáticas
En3	Estudio matemáticas a una hora en la que puedo concentrarme
Ay1	Si no entiendo algo en matemáticas pido ayuda a mi profesor o profesora
Ay2	Si no entiendo algo en matemáticas pido ayuda a otros estudiantes
Ay3	Si no entiendo algo en matemáticas recurro a otros materiales

R: Repetición; O: Organización; El: Elaboración; Pl: Planificación;
Se: Seguimiento; Re: Regulación; En: Entorno - tiempo de estudio;
Ay: Recursos de ayuda

Alberto Mallart, Jordi Deulofeu

ESTUDIO DE INDICADORES DE CREATIVIDAD MATEMÁTICA EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Mathematics creativity indicators study in problem solving

RESUMEN

La enseñanza de las matemáticas siempre se ha preocupado por la resolución de problemas. En la presente investigación se pretende determinar el grado de creatividad en la resolución de un problema de matemáticas. El instrumento elegido ha sido la Prueba de Matemáticas de Acceso a la Universidad de junio de 2012 en la Universidad de Barcelona constituida por 6 problemas. A partir de una muestra de 104 estudiantes se han analizado 7 indicadores por cada resolución. Los resultados indican más creatividad en el diseño de estrategias que en la ejecución o revisión, una detección correcta de las partes de una resolución, pero una pobre capacidad de transmisión, organización y síntesis de las resoluciones. La competencia matemática evalúa la resolución de problemas, y dado que en toda resolución participan aspectos creativos, conviene mejorar la creatividad matemática.

PALABRAS CLAVE:

- *Actividad matemática*
- *Resolución de problemas*
- *Creatividad*
- *Enseñanza y aprendizaje*
- *Pruebas de Acceso a la Universidad*

ABSTRACT

Mathematics teaching has always been concerned about problem solving. The objective of this investigation is to determine the creativity degree when solving a mathematics problem. The University Admission Test of Mathematics subject of June of 2012 of Barcelona University has been chosen as the instrument to collect data. This Test contains 6 problems. From a sample of 104 students, seven creativity indicators have been analyzed for each resolution. The results show students are more creative when they design strategies than when they execute them or review the whole process; students distinguish all the parts of a resolution; but there is a poor capacity of communicating, organizing and synthesizing resolutions. Problem solving is a mathematics skill that has to be evaluated, and because of any resolution requires creative aspects, mathematical creativity has to be improved.

KEY WORDS:

- *Mathematical Activity*
- *Compound proportion*
- *Problem Solving*
- *Creativity*
- *Teaching and Learning*
- *University Admission Tests*

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (2017) *20* (2): 193-222.
Recepción: Octubre 1, 2014 / Aceptación: Febrero 25, 2016. DOI: 10.12802/relime.17.2023

RESUMO

Ensinar matemática sempre foi preocupado com a resolução de problemas. Na presente investigação é determinar o grau de criatividade na resolução de um problema de matemática. O instrumento escolhido foi o de Junho de Matemática da Universidade Teste de acesso 2012 na Universidade de Barcelona é composto por seis problemas. A partir de uma amostra de 104 estudantes usaram sete medidas para cada resolução. Os resultados mostram mais criatividade na concepção de estratégias na implementação ou revisão, a detecção correta das partes de uma resolução, mas a capacidade de transmissão de pobres, organização e síntese de resoluções. A competição avalia resolução de problemas matemáticos, e desde que, em qualquer decisão que envolva aspectos criativos necessários para melhorar a criatividade matemática.

PALAVRAS CHAVE:

- *Atividade matemática*
- *Resolução de problemas*
- *Criatividade*
- *Ensino e aprendizagem*
- *Entrada Exames University*

RÉSUMÉ

L'enseignement des mathématiques a toujours été préoccupé par la résolution des problèmes. Dans la présente étude est de déterminer le degré de créativité à résoudre un problème de mathématiques. L'instrument choisi était l'Université Mathématiques Test Access Juin 2012 à l'Université de Barcelone se compose de six problèmes. Sur un échantillon de 104 étudiants utilisé 7 mesures pour chaque résolution. Les résultats montrent une plus grande créativité dans la conception de stratégies dans la mise en oeuvre ou la révision, la détection correcte des parties à une résolution, mais une capacité de transmission pauvres, l'organisation et la synthèse des résolutions. Le concours évalue résolution de problèmes mathématiques, et puisque de toute décision impliquant des aspects créatifs nécessaires pour améliorer la créativité mathématique.

MOTS CLÉS:

- *Activité mathématique*
- *Résolution de problèmes*
- *La créativité*
- *Enseignement et l'apprentissage*
- *Entrée à l'université examens*

1. Introducción y objetivos

Las matemáticas difícilmente se aprenden por transmisión directa de lo que se explica en el aula o de lo que se lee en los libros de texto, sino que se aprenden en interacción con situaciones problemáticas y con otros sujetos, que obligan al alumno a ir modificando su estructura cognitiva mediante la experimentación, haciéndose preguntas, particularizando situaciones, generalizando resultados o encontrando contraejemplos. Estos procesos requieren predisposición e intencionalidad por parte de aquél que aprende. La enseñanza de las matemáticas tiene que ver con una enseñanza que promueve un aprendizaje productivo y creativo. La construcción del conocimiento matemático es inseparable de la actividad concreta sobre los objetos, de la intuición y de las aproximaciones inductivas impuestas por tareas determinadas y la resolución de problemas particulares. Es difícil concebir el desarrollo del pensamiento matemático de los alumnos resolviendo problemas al margen de la creatividad (Rico, 1990). Encontrar la solución a un problema o a una situación sin tener en las estructuras cognoscitivas y operacionales del pensamiento ningún método idóneo exige crear o innovar (Petrovsky, 1978).

Las matemáticas son una disciplina donde se trabaja el razonamiento y el pensamiento lógico. Pero en ocasiones, tener un pensamiento lógico desarrollado no garantiza la resolución de determinados problemas para los que son necesarias imaginación y creatividad. Por ello las matemáticas debieran contemplar en el curriculum escolar la formación de un comportamiento creativo. Existe un desconocimiento sobre los métodos de enseñanza y aprendizaje para desarrollar la creatividad matemática y hay escasa bibliografía (Arteaga, 2010).

Las actividades sugeridas en los libros de texto están concebidas con el fin de trabajar el razonamiento lógico mayoritariamente. Son escasas las intenciones de trabajar otro tipo de razonamientos que lo complementen para hallar soluciones creativas de problemas. En los curricula de matemáticas tradicionalmente no ha existido una preocupación por componentes de afectividad ni motivacionales (Gómez - Chacón, 2000). Tal como dice Garrett (1988), solucionar problemas es un pensamiento creativo y, así, el científico creativo es aquel que hace surgir la respuesta y produce soluciones. De esta manera, es difícil separar en una persona el dominio afectivo de su pensamiento creativo. Debido a que la idea de resolución de problemas engloba la idea de reto, existe una actitud de persistencia y un componente motivacional positivo que debe tener el resolutor. Resulta necesario un cambio de rumbo para aproximarse a las nuevas tendencias que plantean la resolución de problemas como el motor del aprendizaje del conocimiento matemático creando un ambiente de trabajo reflexivo, dialogante y crítico (Abrantes y Serrazina, 1996; Mallart, 2008).

Guilford (1950) sugiere como rasgos principales de la creatividad: la fluidez, la flexibilidad, la originalidad, la elaboración, el análisis, la síntesis y la redefinición. Barron (1969) propone como indicadores de la creatividad: originalidad, tolerancia, independencia de juicio, energía, apertura a impulsos y fantasías, intuición, espontaneidad. Logan (1980) contempla las siguientes características como determinantes: fluidez, flexibilidad, originalidad, elaboración, redefinición, inventiva, ingenio, análisis - síntesis, independencia, tolerancia a la ambigüedad, curiosidad, desafío al riesgo, abierto, comunicación sensibilidad, abierto a problemas. Amabile (1983) establece los siguientes rasgos de la creatividad: destrezas de campo, motivación intrínseca, talento, estilo cognitivo, estilo de trabajo, generación de ideas, actitudes. Marín y De la Torre (1991) disponen que los rasgos particulares de la creatividad son: productividad, flexibilidad, originalidad, elaboración, análisis, síntesis, apertura mental, comunicación, sensibilidad a problemas, inventiva. Sternberg (1999) contempla como indicadores propios de la creatividad los siguientes: pensamiento analítico, pensamiento sintético, pensamiento práctico, personalidad, motivación, contexto medioambiental. A estos indicadores se les puede añadir otros, propuestos por Paz (2004): expresión, sentido del humor, factor sorpresa. Violant (2006) indica la existencia de creatividad observando: originalidad, flexibilidad, productividad o fluidez, elaboración, análisis, síntesis, apertura mental, comunicación, sensibilidad para los problemas, redefinición, nivel de inventiva.

Polya (1945) insistió en la importancia de la creatividad y la originalidad para resolver problemas no rutinarios, exponiendo un método de enseñanza basado en la heurística. Aunque no hace referencia explícita al término creatividad, propone el razonamiento heurístico que es esencialmente creativo. La investigación de la naturaleza de la creatividad científica toma interés de manera especial a mitades del siglo pasado. Guilford pronunció la conferencia titulada “Creativity” en el 1950 y Puig Adam (1960) con su metodología de la enseñanza de las matemáticas enfatizó el guiar la actividad creadora y descubridora, estimulando el interés por el conocimiento. Romberg y Carpenter (1986) reconocieron la existencia de estudios que trataban sobre la resolución de problemas y el comportamiento creativo. Arteaga (2010) en el I Congreso Iberoamericano de Educación expone la preocupación por incluir en los curricula de la asignatura de matemáticas aspectos de creatividad.

La resolución de problemas tiene un gran potencial creativo; la Fundación de Educación Creativa de Buffalo ha encarnado esta corriente creativa constituyendo un referente internacional: Osborn (1963) formalizó la técnica de “brainstorming”, Parnes, Noller y Biondi (1977) estudian el desarrollo del pensamiento creativo. Los instrumentos y técnicas tanto de medición como de estimulación creativa y organizativa son una gran aportación. Autores importantes que pueden servir de referentes en España se pueden considerar Marín y De la Torre (1991) como se ha señalado anteriormente, y Bono (1998) con su Pensamiento Lateral contempla conjuntamente una capacidad ideativa con la toma de decisiones para resolver problemas.

El presente estudio tiene como objetivo principal la descripción de la creatividad que los alumnos preuniversitarios esgrimen cuando resuelven problemas matemáticos. Entre los objetivos específicos en los que se desglosa el estudio se pueden destacar:

1. Elección de indicadores de creatividad en la resolución de problemas matemáticos. Tiene como finalidad establecer los indicadores de la creatividad que se utilizarán para el análisis de las resoluciones.
2. Evaluación de la creatividad matemática en las Fases de: diseño de estrategias de resolución, ejecución de dichas estrategias, y revisión de la solución. Se han elegido las Fases de Polya para evaluar la creatividad dejando de lado la primera de ellas (la comprensión del problema).

Los resultados del segundo objetivo servirán para determinar qué aspectos de la creatividad se presentan y cuáles son mejorables.

2. Metodología

A continuación se comentará la metodología seguida en esta investigación distinguiendo los apartados de diseño, instrumentos, participantes y variables.

2.1. *Diseño*

Para abordar los objetivos del estudio se ha efectuado un análisis de las resoluciones de la Prueba de Acceso a la Universidad (PAU) propuesta en la Universidad de Barcelona el año 2012 de la asignatura de Matemáticas. La muestra estudiada se ha obtenido a partir de la elección aleatoria de dos tribunales y los alumnos han tenido una hora y media de tiempo para realizar la prueba. Se han analizado los procesos resolutivos de cada problema y se han clasificado según el grado con el que han verificado cada uno de los siete indicadores establecidos para la creatividad matemática: originalidad, flexibilidad, elaboración, análisis, síntesis, comunicación, redefinición. La elección de los siete indicadores de creatividad en la resolución de problemas se ha llevado a cabo según la idoneidad y la relevancia de un listado de indicadores de creatividad más general tal como se explicará en el apartado de variables. Reagrupando los indicadores según la fase de resolución a la que pertenecen, es posible dar respuesta a los objetivos específicos planteados.

2.2. *Instrumentos*

Las PAU se convocan en Junio y Septiembre en cada Comunidad Autónoma. La asignatura de Matemáticas se estudia en primero y segundo de bachillerato en la modalidad de ciencias y tecnologías, y posibilita a los alumnos inscribirse en carreras universitarias de ciencias como matemáticas, física, ingenierías. En las convocatorias de Matemáticas de las PAU de Cataluña se proponen 6 cuestiones de entre las cuales, el alumno debe escoger 5. Cada cuestión vale 2 puntos.

Los criterios generales de evaluación insisten en que el alumno ha de explicar el porqué de sus respuestas. Incluso se puede valorar con un cero una cuestión con resultado correcto si el proceso resolutivo no se explica suficientemente. Las cuestiones que no estén resueltas completamente, se valorarán en función de las partes realizadas. En preguntas de carácter conceptual, el corrector intentará discernir si el alumno tiene claros los conceptos, aunque haya errores en la exposición. En ningún caso el corrector pondrá el acento en el rigor formal de las respuestas. Los errores de cálculo se tienen en cuenta en la puntuación final con una importancia relativa.

Se valora que los alumnos aprendan a razonar y no únicamente resuelvan problemas tipificados. Por este motivo se procura que las cuestiones, sin tener ninguna dificultad especial, hagan pensar y no sean rutinarias. Se intenta saber hasta qué punto el alumno es capaz de resolver por sí mismo un problema para el cual dispone de los conocimientos suficientes pero no es una pregunta puramente metódica. Este es el motivo por el cual se han escogido las seis cuestiones que configuran las PAU. Además, también es interesante resaltar el hecho de que el examen no se focaliza en un área de las matemáticas sino en todo el curriculum que un alumno preuniversitario debe saber. Así, el espectro de resoluciones creativas es más amplio.

El examen objeto de estudio es el que se expone en la Figura 1.

CUESTIÓN 1

Para qué valores del parámetro m los planos
$\Pi_1: x - y + mz = 1,\ \Pi_2: x - y + z = m,\ \Pi_3: my + 2z = 3$
tienen como intersección una recta. [2 puntos]

CUESTIÓN 2

Dadas la recta $y = 3x + b$ *y la parábola* $y = x^2$ *,*

a) Calculad la abscisa del punto donde la recta tangente a la parábola es paralela a la recta dada. [1 punto]

b) Calculad el valor del parámetro b para que la recta sea tangente a la parábola.[1 punto]

CUESTIÓN 3

Dados el plano $\Pi : x - y + 2z - 5 = 0$ *y la recta*

$$r; \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - y + z = 10 \end{cases}$$

a) Calculad el punto de intersección entre el plano y la recta. [1 punto]
b) Encontrad la ecuación continua de la recta s contenida en el plano Π*, que es perpendicular a la recta r y corta a la recta r. [1 punto]*

CUESTIÓN 4

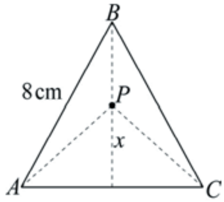
Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$,

a) Comprobad que se cumple la igualdad $(A + B)(A - B) = A2 - B2$ *. [1 punto]*
b) ¿Es cierta esta igualdad para cualquier pareja de matrices cuadradas A, B del mismo orden? Responded razonadamente utilizando las propiedades generales de las operaciones entre matrices, sin utilizar matrices A, B concretas. [1 punto]

CUESTIÓN 5

Un triángulo equilátero de vértices A, B,C tiene los lados de 8 cm. Situamos un punto P sobre una de las alturas del triángulo, a una distancia x de la base correspondiente.

a) Calculad la altura del triángulo de vértices A, B, C. [0,5 puntos]
b) Indicad la distancia del punto P a cada uno de los vértices (en función de x). [0,5 puntos]
c) Determinad el valor de x para que la suma de los cuadrados de las distancias del punto P a cada uno de los tres vértices sea mínima. [1 punto]



CUESTIÓN 6

Dados los puntos $P = (1,0,0)$, $Q = (0,2,0)$, $R = (0,0,3)$, $S = (1,2,3)$,

a) Calculad la ecuación cartesiana (es decir, de la forma $Ax + By + Cz + D = 0$ *) del plano que contiene los puntos P, Q, R. [1 punto]*
b) Comprobad si P, Q, R, S son coplanarios (si están contenidos en un mismo plano). [1 punto]

Figura 1. Cuestiones propuestas

2.3. *Participantes: Caracterización de la muestra*

La muestra escogida de los alumnos que han sido preparados para acceder a carreras universitarias de ciencias está constituida por 104 estudiantes de Barcelona. Estos estudiantes han cursado la asignatura de Matemáticas en diversos centros públicos (46,2%) y concertados (53,8%) y pertenecen a diferentes niveles socioeconómicos.

Los alumnos descartan una cuestión de las 6 presentadas. El porcentaje de los estudiantes que eligen cada cuestión se expone a continuación:

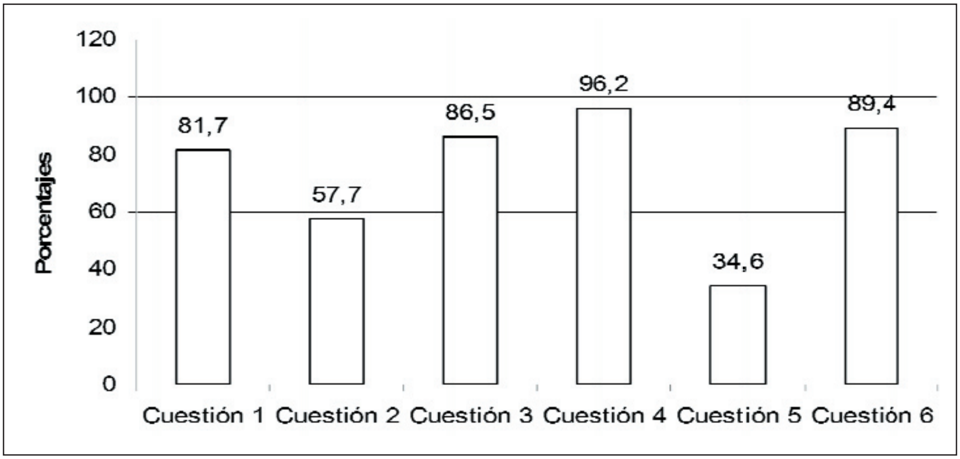


Figura 2. Elección de las cuestiones

Se observa que la cuestión más descartada con un 65,4% ha sido la que trata de un triángulo equilátero y plantea preguntas de geometría plana, la número 5. La cuestión que menos alumnos han descartado con un 3,8% ha sido la que versa sobre álgebra matricial, la número 4. También es significativo el 42,3% que decide descartar a priori la segunda cuestión que trata de una recta, una parábola y sus tangentes respectivas.

2.4. *Variables*

Para analizar la creatividad en la resolución de problemas matemáticos, se ha caracterizado un grupo de siete indicadores que han sido escogidos como los más representativos y comunes de entre los listados expuestos en la introducción como muestra la Tabla I.

TABLA I
Rasgos principales de la creatividad según autor

Guilford	*Barron*	*Logan*	*Amabile*	*Marín, Torre*	*Sternberg*	*Paz*	*Violant*
fluidez	originalidad	fluidez	destrezas de campo	productividad	pensamiento analítico	flexibilidad	originalidad
flexibilidad	tolerancia	flexibilidad	motivación intrínseca	flexibilidad	pensamiento sintético	originalidad	flexibilidad
originalidad	independencia de juicio	originalidad	talento	originalidad	pensamiento práctico	fluidez	productividad o fluidez
elaboración	energía	elaboración	estilo cognitivo	elaboración	personalidad	elaboración	elaboración
análisis	apertura a impulsos y fantasías	redefinición	estilo de trabajo	análisis	motivación	análisis	análisis
síntesis	intuición	inventiva	generación de ideas	síntesis	contexto medioambiental	síntesis	síntesis
redefinición	espontaneidad	ingenio	generación de actitudes	apertura mental		apertura mental	apertura mental
		análisis-síntesis		comunicación		comunicación	comunicación
		independencia		sensibilidad a problemas		sensibilidad a problemas	sensibilidad a problemas
		tolerancia a la ambigüedad		inventiva		redefinición	redefinición
		curiosidad		redefinición		inventiva	nivel de inventiva
		desafío al riesgo				expresión	
		abierto				sentido del humor	
		comunicación sensibilidad				factor sorpresa	
		abierto a problemas					

Estos siete indicadores que se han escogido son: originalidad, flexibilidad, elaboración, análisis, síntesis, comunicación y redefinición. A continuación se expone una breve descripción:

1. Originalidad: es la capacidad para producir respuestas novedosas, poco convencionales, lejos de lo establecido y de lo usual, únicas, irrepetibles y auténticas.
2. Flexibilidad: es la capacidad de desplazarse de una idea a otra, de un contexto a otro, dando respuestas variadas, modificando y moldeando ideas, haciéndose replanteamientos, reorientaciones y transformaciones de las situaciones u objetivos originales, superando la propia rigidez. Es la capacidad de cambiar de modo de pensar y poder abordar un problema desde diferentes perspectivas.
3. Elaboración: es la capacidad para desarrollar o perfeccionar una idea o producción original alcanzando niveles de complejidad y detalle. Es la capacidad de agregar elementos al procesar la información, ampliando y profundizando.
4. Análisis: capacidad para estudiar una realidad determinando los límites del objeto, criterios de descomposición del todo, determinar las partes del todo y tratar cada parte por separado para así descubrir nuevos sentidos y relaciones entre los elementos del conjunto. El análisis de un objeto se realiza a partir de la relación existente entre los elementos que lo conforman como un todo.
5. Síntesis: capacidad para comparar las partes entre sí, rasgos comunes y diferencias, y descubrir nexos entre las partes para elaborar conclusiones acerca de un nuevo todo, elaborando esquemas, organizando la información y extrayendo los rasgos más valiosos.
6. Comunicación: capacidad de transmitir y compartir mensajes de manera convincente; se captan las necesidades insatisfechas como mensajes, resolviendo dichas necesidades como mensajes de respuesta. Su creación será exitosa si logra obtener respuestas positivas estableciéndose así un ciclo de comunicación.
7. Redefinición: capacidad de reestructuración y reconstrucción a partir de información conocida, con el objeto de transformar un fenómeno concreto de la realidad, encontrando aplicaciones y definiciones diferentes a las habituales.

Existen diferentes grados de creatividad, y por este motivo, se ha decidido categorizar los indicadores en función de su presencia. En los indicadores de originalidad y de redefinición sólo se han distinguido dos casos según si su aparición ha sido nula o positiva (0 y 1). Pero en el resto de los cinco indicadores se han distinguido tres categorías (0, 1 y 2) que se ejemplificarán cuando se analicen.

En concreto, para analizar cómo los alumnos diseñan estrategias para resolver un problema de manera creativa se consideran los indicadores de originalidad y flexibilidad. Para analizar cómo ejecutan de manera creativa las estrategias de resolución diseñadas se toman los indicadores de elaboración y análisis. Para analizar cómo revisan la solución con un enfoque creativo se han examinado los indicadores de síntesis, comunicación y de redefinición.

TABLA II
Distribución de los indicadores por Fases de Resolución de Problemas

Fase de resolución	*Indicador*
Fase II	Originalidad, Flexibilidad
Fase III	Elaboración, Análisis
Fase IV	Síntesis, Comunicación, Redefinición

3. Análisisde datos y resultados

Con el propósito de presentar los resultados de manera organizada y coherente, se ha efectuado un análisis cuantitativo en el que se han recordado las clásicas fases de la resolución de problemas que Polya (1945) expuso: a) la Fase II que trata del diseño de estrategias de resolución del problema; b) la Fase III que se ocupa de ejecutar la estrategia de resolución escogida; c) la Fase IV que consiste en la revisión de la solución. Luego, la originalidad se ha analizado cualitativamente por tratarse de un rasgo creativo de suma importancia.

3.1. *Análisis cuantitativo*

A continuación se exponen los resultados obtenidos distinguiendo la Fase a la que pertenecen los 7 indicadores estudiados de cada uno de los 6 problemas de los 104 alumnos. Para poder comparar todos los resultados y debido a que los estudiantes descartaban uno de los 6 problemas planteados, se consideran los porcentajes de éstos.

3.1.1. *La creatividad en la Fase II: Originalidad y Flexibilidad*

Para determinar la creatividad a la hora de determinar estrategias para atacar el problema se han seleccionado los indicadores de Originalidad y de Flexibilidad. El indicador de Originalidad toma dos valores según si aplican algún método algorítmico de resolución o por el contrario hacen un razonamiento heurístico (valor 0: aplicación de métodos algorítmicos; valor 1: no aplicación de métodos algorítmicos), prescindiendo de que el resultado fuera el correcto. Por ejemplo:

Originalidad 0: En una resolución del Problema 1 observamos la aplicación de una técnica (Figura 3).

El sistema formado por los tres planos es homogéneo y tiene solución trivial:

$$\begin{cases} x - y + mz = 1 \\ x - y + z = m \\ my + 2z = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} x - y + mz - 1 = 0 \\ x - y + z - m = 0 \\ my + 2z - 3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & m & 2 & 3 \\ 1 & -1 & m & 1 \\ 1 & -1 & 1 & m \end{pmatrix} \xrightarrow{E_2 - E_3} \begin{pmatrix} 0 & m & 2 & 3 \\ 1 & -1 & m & 1 \\ 0 & 0 & m-1 & 1-m \end{pmatrix}$$

Si m = 1, la última fila se anula. Se puede encontrar un menor no nulo de orden dos de la matriz asociada: rg(A) = 2. También se puede encontrar un menor no nulo de orden dos de la matriz completa: rg(A') = 2.
Tenemos: rg(A) = rg(A') pero diferente del número de incógnitas. Por el teorema de Rouché - Frobenius, es un sistema compatible indeterminado.
Si m ≠ 1, se trata de un sistema compatible determinado.

Figura 3. Ejemplo de Originalidad 0

Originalidad 1: En una resolución del Problema 5 observamos el uso de un razonamiento heurístico en el segundo apartado, a pesar de que no sea pertinente o no haya finalizado pues encuentra la altura en vez de las distancias del punto P a todos los vértices (Figura 4).

b) el área del triángulo equilátero será igual al área del rectángulo siguiente:

Area rectángulo = b·h *Area triángulo = (b·h) / 2 = 8·6.92 / 2 = 27.71 cm²*

Area triángulo = Area rectángulo; 27.71 = 8·h; h = 3.46 cm.

Figura 4. Ejemplo de Originalidad 1

Los resultados sobre la Originalidad de los 6 problemas se muestra en la Tabla III.

TABLA III
Porcentajes del indicador de Originalidad de cada problema

	P1	*P2*	*P3*	*P4*	*P5*	*P6*
Originalidad 0	76.5 %	13.3 %	11.1 %	55 %	27.8 %	8.6 %
Originalidad 1	23.5 %	86.7 %	88.9 %	45 %	72.2 %	91.4 %

En relación con la Originalidad, en el problema 1 la forma de resolución se ha visto marcada por las pautas que el currículum establece que deben enseñarse en el aula (sólo un 23.5% de Originalidad 1). En los problemas 2, 3, 5 y 6 una amplia mayoría ha recurrido a razonamientos heurísticos (86.7%, 88.9%, 72.2% y 91.4% de Originalidad 1).

El indicador de Flexibilidad toma tres valores según la capacidad de moldear ideas y cambiar de modo de pensar, haciéndose replanteamientos frente a situaciones emergentes que aparecen en el curso de la resolución (valor 0: nula; valor 1: sesgada; valor 2: completa). Por ejemplo:

Flexibilidad 0: En una resolución del Problema 4 observamos una nula capacidad de replantearse nuevas resoluciones dados unos resultados incoherentes con lo que pregunta el enunciado (Figura 5).

$$a)\ A^2=\begin{pmatrix}9 & -2\\ -2 & 1\end{pmatrix};\ B^2=\begin{pmatrix}1 & -2\\ -2 & 9\end{pmatrix};\ A^2-B^2=\begin{pmatrix}8 & 0\\ 0 & -8\end{pmatrix}$$

$$A+B=\begin{pmatrix}4 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix};\ A-B=\begin{pmatrix}2 & 4\\ -2 & -4\end{pmatrix};\ (A+B)(A-B)=\begin{pmatrix}8 & 0\\ 0 & -16\end{pmatrix}$$

Figura 5. Ejemplo de Flexibilidad 0

Flexibilidad 1: En una resolución del Problema 1 observamos una capacidad sesgada para dar todas las respuestas variadas, desplazándose de una idea a otra, modificando y moldeando las ideas y transformando la situación original, aunque no supera totalmente la propia rigidez (Figura 6).

Para que los tres planos se intersequen en una recta, rg(A) = rg (A') = 3

$|A| = -2+0+m^2-(0+m-2) = m^2-m = m\ (m-1) = 0;\ m = 0\ \text{ o } m = 1$

Para m = 1

$|A| = 0;\ |A'| = -3-2+1-(1-2-3) = 0$

Para m diferente a 0 y a 1, rg(A) = rg (A')
Solución: El parámetro m ha de ser diferente de 0 y 1.

Figura 6. Ejemplo de Flexibilidad 1

Flexibilidad 2: En una resolución del Problema 2 observamos como no hay rigidez, sino todo lo contrario; hay una capacidad para dar respuestas variadas, haciéndose replanteamientos, reorientaciones y transformaciones de las situaciones originales, abordando el problema desde diferentes perspectivas (Figura 7).

---

a) Primero derivamos la función $y = x^2$ para encontrar la pendiente. Una vez derivada, se ha de igualar a la pendiente de la recta $y = 3x+b$.

$$y' = 2x \qquad 2x = 3 \qquad x = 1.5$$

en $x = 1.5$ hay una recta tangente a la parábola $y = x^2$ que es paralela a

$$y = 3x+b$$

b) $y = 3x+b$ es tangente a $y = x^2$ en $x = 1.5$; $y = (1.5)^2 = 2.25$

$$2.25 = 3 \cdot 1.5+b; \; b = -2.25$$

Cuando b sea –2.25, la recta $y = 3x+b$ será tangente a $y = x^2$

Figura 7. Ejemplo de Flexibilidad 2

Los resultados sobre la Flexibilidad de los 6 problemas se muestran en la Tabla IV.

TABLA IV

Porcentajes del indicador de Flexibilidad de cada problema

	P1	*P2*	*P3*	*P4*	*P5*	*P6*
Flexibilidad 0	27.1 %	21.7 %	38.9 %	70 %	25 %	31.2 %
Flexibilidad 1	29.4 %	25 %	40 %	10 %	50 %	15 %
Flexibilidad 2	43.5 %	53.3 %	21.1 %	20 %	25 %	53.8 %

En relación con la Flexibilidad, constatamos que es en los problemas 1, 2 y 6 donde se ha registrado un índice mayor (43.5%, 53.3% y 53.8%) debido a que para responder a las preguntas es necesario el replanteamiento de la situación con la distinción de casos pertinente. En el problema 3 se ha registrado casi el mismo porcentaje de alumnos que sólo han sido capaces de modificar el pensamiento en algún caso o en ninguno (40% y 38.9%). En el problema 4 la mayoría se ha mostrado bastante rígida sin ser capaz de moldear las ideas en ningún caso (70%).

3.1.2. *La creatividad en la Fase III: Elaboración y Análisis*

Para evaluar la creatividad en la fase de ejecución de estrategias resolutivas se han escogido los indicadores de Elaboración y Análisis. El indicador de Elaboración toma tres valores según la capacidad para desarrollar una idea o perfeccionarla consiguiendo niveles de complejidad, de organización, precisión y consideración de todos los datos pertinentes cuando procesa la información (valor 0: desorganizado, sin considerar todos los datos pertinentes, sin profundizar en las ideas ni ampliarlas; valor 1: parcialmente organizado pero impreciso, consideración parcial de los datos, sin contemplar a fondo todas las ideas, sin ampliarlas; valor 2: organizado, preciso y consideración de todos los datos para acabar profundizando en una idea). Por ejemplo:

Elaboración 0: En una resolución del Problema 3 observamos desorganización e imprecisión sin profundizar en las ideas (Figura 8).

Para poder averiguar el punto donde cortan la recta y el plano primero tenemos que comprobar que el plano y la recta cortan. Buscamos los vectores directores:

vector director del plano: (1,-1,2)

vector director de la recta: $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (2,1,-3)$

Miramos si los vectores directores son proporcionales: $\frac{1}{2} \neq \frac{-1}{1} \neq \frac{2}{-3}$

Como los vectores no son proporcionales podemos afirmar que ni son paralelas ni coincidentes.

Hacemos el determinante de los vectores director del plano, director de la recta y el que va de P a Q. Si es nulo significa que son coplanarios, es decir, que se cortan; si no es nulo, significa que se cruzan.

Figura 8. Ejemplo de Elaboración 0

Elaboración 1: En una resolución del Problema 5 observamos un proceso aunque parcialmente organizado, impreciso y sin consideración de todos los datos, sin acabar de profundizar en las ideas (Figura 9).

---

a) Para encontrar la altura del triángulo se utilizará el teorema de Pitágoras:

$$8^2 = h^2+4^2;\ h^2 = 48;\ h = 6.93\ cm$$

b) Para encontrar la distancia entre el punto P y los vértices del triángulo, se usará otra vez el teorema de Pitágoras, pero las distancias se dejarán en función de la x:

$$d(P,C) = \sqrt{x^2 + 4^2} = d(P,A) = d(P,B)$$

Figura 9. Ejemplo de Elaboración 1

Elaboración 2: En una resolución del Problema 6 observamos un proceso organizado teniendo presentes todos los datos que intervienen con precisión e intentando profundizar en las ideas, aunque erróneamente pues escribe *"... y así no forman base"* (Figura 10).

---

a) Como el plano ha de contener los puntos P, Q y R, buscaremos los vectores de P a Q = (-1,2,0), y de P a R = (-1,0,3) y pondremos al punto Q en el determinante siguiente:

$$\begin{vmatrix} x-0 & -1 & -1 \\ y-2 & 2 & 0 \\ z-0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 6x+3y-6\text{; la ecuación es:}$$

b) Buscaremos los vectores:

de P a Q = (-1,2,0), de P a R = (-1,0,3) y de P a S = (0,2,3)

y calcularemos el determinante:

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 12 \neq 0\text{, y así no forman base}$$

Figura 10. Ejemplo de Elaboración 2

Los resultados sobre la Elaboración de los 6 problemas se muestran en la Tabla V.

TABLA V
Porcentajes del indicador de Elaboración de cada problema

	P1	*P2*	*P3*	*P4*	*P5*	*P6*
Elaboración 0	38.8 %	31.7 %	40 %	6 %	19.4 %	22.6 %
Elaboración 1	38.8 %	28.3 %	42.2 %	49 %	61.1 %	19.4 %
Elaboración 2	22.4 %	40 %	17.8 %	45 %	19.5 %	58 %

En relación con la Elaboración, en los problemas 4 y 6 se han obtenido los mejores resultados (45% y 58% Elaboración 2). Los problemas 1 y 3 presentan muy parecidos los porcentajes de una elaboración desorganizada e imprecisa sin profundizar en las ideas (38.8%, 40%) o de una elaboración un tanto más organizada sin llegar a prestar atención a todos los datos ni tratar de llegar al fondo de todas las ideas (38.8%, 42.2%). En el problema 2 se ha recogido un alto porcentaje (40%) de resoluciones muy bien elaboradas, y también se han recogido resoluciones imprecisas que no han tenido presentes todos los datos sin acabar de profundizar en ellas aunque han sido parcialmente organizadas (28.3%).

El indicador de Análisis toma tres valores según la capacidad de estudiar la situación acotando los límites, concretando los criterios de descomposición del todo para acabar concretando las partes y tratando cada una por separado descubriendo nuevas relaciones entre ellas (valor 0: incapacidad de concretar criterios para descomponer el todo, imposibilidad de acotar límites, incapacidad de descubrir nuevas relaciones entre las partes; valor 1: capacidad parcial de acotar límites de la situación propuesta, establecimiento parcial de criterios para delimitar las diferentes partes del todo, escaso descubrimiento de nuevas relaciones entre las partes; valor 2: capacidad elevada para determinar las diferentes partes en que se puede descomponer el todo, para concretar criterios de descomposición, para descubrir relaciones nuevas entre ellas). Por ejemplo:

Análisis 0: En una resolución del Problema 1 observamos la incapacidad de concretar correctamente los criterios de descomposición de la situación propuesta, sin poder descubrir nuevas relaciones entre sus partes (Figura 11).

Hacemos la matriz y después el determinante para averiguar cuándo vale 0:

$$|A'| = 0;$$

$$|A| = 0;\ m^2-m = 0;\ m\,(m-1) = 0;\ m = 0 \quad o \quad m = 1$$

Si $m = 0$ *y* m *no es 1, los planos se cortan en una recta.*

Figura 11. Ejemplo de Análisis 0

Análisis 1: En una resolución del Problema 5 observamos una capacidad parcial de acotar límites de la situación propuesta, delimitando parcialmente las diferentes partes del todo, aunque descubriendo nuevas relaciones entre las partes (Figura 12).

$8^2 = h^2+4^2$; $h^2=48$; $h = 6.928$ cm

Consideremos ahora que las coordenadas del punto A sean (0,0), las de C sean (8,0) y las de B sean (4,6.928). Entonces el punto P es (4, x).

$$d(A,P)=\sqrt{16+x^2}\ ;d(B,P)=|x-6.928|;\ d(C,P)=\sqrt{16+x^2}$$

$$f(x)=\left(\sqrt{16+x^2}\right)^2+\left(x-6.928\right)^2+\left(\sqrt{16+x^2}\right)^2 = 3x^2-13.856x+80$$

Para encontrar el mínimo de la función:

$$f'(x) = 0;\ f'(x) = 6x-13.856;\ x=2.309$$

Comprobemos que es un mínimo: $f''(x) = 6 > 0$

Figura 12. Ejemplo de Análisis 1

Análisis 2: En una resolución del Problema 2 observamos una alta capacidad para determinar las diferentes partes en que se puede descomponer el todo y para descubrir relaciones nuevas entre ellas (Figura 13).

---

a) La derivada de la parábola es: $y = x^2$; $y' = 2x$

La derivada de la recta es: $y = 3x+b$; $y' = 3$

Para que sean paralelas han de tener la misma pendiente: $2x = 3$; $x = 1.5$

b) Para $x = 1.5$, han de tener la misma imagen:

$$y = 3x+b \qquad\qquad y = x^2$$

$$y = 4.5+b \qquad\qquad y' = 2.25$$

$$4.5+b = 2.25;\ b = -2.25$$

Figura 13. Ejemplo de Análisis 2

Los resultados sobre el Análisis de los 6 problemas se muestran en la Tabla VI.

TABLA VI
Porcentajes del indicador de Análisis de cada problema

	P1	*P2*	*P3*	*P4*	*P5*	*P6*
Análisis 0	35.3 %	28.3 %	34.5 %	10 %	22.2 %	21.5 %
Análisis 1	18.8 %	16.7 %	43.3 %	25 %	44.4 %	20.4 %
Análisis 2	45.9 %	55 %	22.2 %	65 %	33.4 %	58.1 %

En relación con el Análisis, en los problemas 1, 2, 4 y 6 la mayoría de resoluciones han obtenido la calificación máxima (45.9%, 55%, 65% y 58.1%) por haberse tratado de resoluciones que sabían determinar límites, concretar criterios de descomposición del todo, tratar separadamente las partes y encontrar nuevas relaciones entre ellas.

3.1.3. *La creatividad en la Fase IV: Síntesis, Comunicación y Redefinición*

Para evaluar la creatividad en la fase de revisión donde se amplía la capacidad de razonamiento e intenta situar la resolución en un contexto más general, se han escogido los indicadores de Síntesis, Comunicación y Redefinición. El indicador de Síntesis toma tres valores según la capacidad para comparar las diferentes partes entre sí, descubriendo nexos entre ellas para acabar elaborando conclusiones del todo y esquemas, presentando organizadamente la información y extrayendo las ideas relevantes (valor 0: no hay ningún descubrimiento sobre nexos entre las diferentes partes de la resolución, además es caótica y no se extraen las ideas relevantes; valor 1: resolución parcialmente organizada, presentando una información sesgada, sin acabar de extraer todas las ideas relevantes ni descubrir todas las relaciones entre las distintas partes; valor 2: datos presentados esquemáticamente siguiendo un hilo argumental coherente, exponiendo todas las ideas relevantes). Por ejemplo:

Síntesis 0: En una resolución del Problema 3 observamos una incapacidad de presentar la información organizadamente, sin esquemas, sin extraer las ideas relevantes y sin ligar las diferentes partes de la resolución (Figura 14).

Π: x – y + 2z – 5 = 0; vector normal: (1, –1, 2)

$$r;\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - y + z = 10 \end{cases} \text{; vector director: (2, 1, –3)}$$

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2i + j - 3k$$

$$x = 0;\ \begin{cases} y + z = 0 \\ -y + z = 10 \end{cases} \quad 2z = 10 \quad z = 5 \quad y = -5 \quad P = (0, -5, 5)$$

Figura 14. Ejemplo de Síntesis 0

Síntesis 1: En una resolución del Problema 5 observamos una organización parcial, donde se presentan algunos datos sin acabar de extraer todas las ideas relevantes ni descubrir todas las relaciones entre las distintas partes (Figura 15).

a) *Por el teorema de Pitágoras: 82 = h^2+4^2; $h^2=48$; h = 6.928 cm*

b) *Las distancias son iguales:*

$$d(A,P)=\sqrt{16+x^2}\ ;d(B,P)=\sqrt{16+x^2}\ ;\ d(C,P)=\sqrt{16+x^2}$$

c) *[En blanco]*

Figura 15. Ejemplo de Síntesis 1

Síntesis 2: En una resolución del Problema 6 observamos los datos presentados esquemáticamente siguiendo un hilo argumental coherente exponiendo todas las ideas relevantes (Figura 16).

a) ¿ Ax + By + Cz + D = 0 para que pase por P, Q, R ?
Para poder calcular la ecuación cartesiana, se necesita saber 2 vectores y 1 punto. El vector que va de P a Q es (-1,2,0), el vector de Q a R es (0, -2,3) y el punto considerado es P (1,0,0).

$$\begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 6x + 3y + 2z - 3 \qquad \textit{La ecuación es: } 6x + 3y + 2z - 3 = 0$$

b) ¿Son coplanarios? Sólo serán coplanarios si es nulo el determinante formado por los vectores de P a Q (−1, 2, 0), de Q a R (0, −2, 3) y de R a S (1, 2, 0):

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 9 \neq 0, \textit{ así no serán coplanarios}$$

Figura 16. Ejemplo de Síntesis 2

Los resultados sobre la Síntesis de los 6 problemas se muestran en la Tabla VII.

TABLA VII
Porcentajes del indicador Síntesis de cada problema

	P1	*P2*	*P3*	*P4*	*P5*	*P6*
Síntesis 0	43.5 %	35 %	45.6 %	12 %	22.2 %	20.4 %
Síntesis 1	22.4 %	33.3 %	35.6 %	50 %	52.8 %	24.8 %
Síntesis 2	34.1 %	31.7 %	18.8 %	38 %	25 %	54.8 %

En relación con la Síntesis, los mejores resultados se han conseguido en el problema 6 (54.8%) donde se ha apreciado la elaboración de esquemas o gráficos ilustrativos organizando la información a medida que se iban obteniendo los datos y también se ha observado como se van descubriendo conexiones entre las diferentes partes, destacando los rasgos más valiosos. En los problemas 4 y 5 la mayoría ha usado algún esquema ayudando a una explicación del modo en que se han conseguido los datos, aunque no todos ni los más relevantes, ni tampoco se ha acabado manifestando las conexiones entre las distintas partes (50% y 52.8%). En los problemas 1, 2 y 3 el indicador se ha valorado en la mayoría con el valor 0 (43.5%, 35%, 45.6%) pues no queda claro cómo se obtienen los datos, además faltan los más relevantes y no aparecen de manera organizada.

El indicador de Comunicación toma tres valores según la capacidad de transmisión de la resolución y de compartir mensajes de manera clara y convincente, captando y resolviendo lo que se pregunta (valor 0: difícil de interpretar la resolución por ser poco clara y no contestar a lo que se pregunta; valor 1: parcialmente inteligible, se intuye cómo se resuelve el problema a pesar de que se pueda explicar de manera más clara y concisa, y contesta parcialmente a lo que se le pregunta; valor 2: se capta con precisión lo que se pregunta y se contesta de manera concisa y clara). Por ejemplo:

Comunicación 0: En una resolución del Problema 1 observamos una nula capacidad de transmisión ni de lo que se hace ni de lo que se pregunta (Figura 17).

Π_1*: x-y+mz = 1;* Π_2*: x-y+z = m;* Π_3*: my+2z=3*

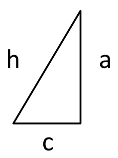
$$|A| = -2+m^2+0-(0-2+m) = 0;\ m^2-m = 0;\ m\ (m-1) = 0;$$

para m = 0 o m = 1

Figura 17. Ejemplo de Comunicación 0

Comunicación 1: En una resolución del Problema 5 observamos una transmisión del proceso mejorable en cuanto a la exposición de los pasos de forma clara y convincente, y que contesta parcialmente a lo que se le pregunta (Figura 18).

a) $h^2 = a^2+c^2;\ a^2 = h^2-c^2 = 8^2-4^2;\ a = 6.928$ *cm*



b) distancia de P a B = a-x = 6.928-x

distancia de A a P = $\sqrt{4^2+x^2}$ *; distancia de C a P =* $\sqrt{4^2+x^2}$

c)[En blanco]

Figura 18. Ejemplo de Comunicación 1

Comunicación 2: En una resolución del Problema 4 observamos la transmisión del descubrimiento con claridad y con precisión, y de manera convincente (Figura 19).

a) ¿ $(A+B)(A-B) = A^2-B^2$?

Primero calcularemos A^2 y B^2: $A^2 = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}$ $B^2 = \begin{pmatrix} -1 & -8 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$

Después calculamos (A+B) y (A-B): $(A+B) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ $(A-B) = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$

Comprobamos las igualdades:

$(A+B)(A-B) = A^2-B^2$; $\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ -4 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & -8 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$;

$\begin{pmatrix} 8 & 16 \\ -8 & -4 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 8 & 16 \\ -8 & -8 \end{pmatrix}$ *Según los cálculos hechos la igualdad no se cumple.*

b) Esta igualdad no es cierta para cualquier valor que tome la matriz pues:

$(A+B)(A-B) = A^2-B^2$; $A^2-AB+BA-B^2 = A^2-B^2$; $A^2-B^2\underline{-AB+BA} = A^2-B^2$

El producto de matrices no es conmutativo por tanto la igualdad no se verifica para cualquier valor de los términos de la matriz.

Figura 19. Ejemplo de Comunicación 2

Los resultados sobre la Comunicación de los 6 problemas se muestran en la Tabla VIII.

TABLA VIII
Porcentajes del indicador Comunicación de cada problema

	P1	*P2*	*P3*	*P4*	*P5*	*P6*
Comunicación 0	44.7 %	36.7 %	38.9 %	13 %	22.2 %	21.5 %
Comunicación 1	5.9 %	28.3 %	32.2 %	39 %	47.2 %	38.7 %
Comunicación 2	49.4 %	35 %	28.9 %	48 %	30.6 %	39.8 %

En relación con la Comunicación, los mejores resultados se han conseguido en los problemas 1, 4 y 6 (49.4%, 48% y 39.8%). Pero la comunicación de la resolución del problema 1 también ha contemplado el peor registro (44.7%). Los problemas 2 y 3 registran en la mayoría transmisiones poco claras y deficientes de los descubrimientos (36.7% y 38.9%), aunque en el problema 2 ha sido muy parecido el registro de transmisiones muy claras y precisas (35%).

El indicador de Redefinición toma dos valores según la capacidad de encontrar aplicaciones y definiciones diferentes a las trabajadas habitualmente en el aula, a pesar de ser incorrectas (valor 0: sin desviarse de las propiedades atribuidas a los elementos que participan; valor 1: uso de algún método o propiedad deducida). Por ejemplo:

Redefinición 0: En una resolución del Problema 2 observamos que las propiedades de los elementos que intervienen son las propias (Figura 20).

---

a) $y'=2x$ $y'=3$ $2x = 3; x = 1.5$

$Pendiente = 2x = 2 \cdot 1.5 = 3$

$y = x^2 = (1.5)^2 = 2.25$ $punto = (1.5,2.25)$

$y = 3x - 2.25$

b) $y = 3x + b$, *se ha de encontrar b*

Sabemos que $x=1.5$, $y=2.25$

Substituimos en la recta el valor de x y de y: $b = 2.25 - 4.5 = - 2.25$

Figura 20. Ejemplo de Redefinición 0

Redefinición 1: En una resolución del Problema 6 observamos en el apartado b) el uso del determinante sobre puntos para ver si pertenecen al mismo plano, que es innovador pero erróneo (Figura 21).

---

b) Para comprobar si los puntos son coplanarios se hace el determinante. Si el determinante da como resultado 0, significa que existe una combinación lineal y por tanto son coplanarios; si da no nulo, significa que son linealmente independientes y no son coplanarios.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 6, \text{ así los puntos son linealmente independientes}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 6, \text{ así los puntos son linealmente independientes y no coplanarios}$$

Figura 21. Ejemplo de Redefinición 1

Los resultados sobre la Redefinición de los 6 problemas se muestran en la Tabla IX.

TABLA IX
Porcentajes del indicador Redefinición de cada problema

	P1	*P2*	*P3*	*P4*	*P5*	*P6*
Redefinición 0	92.9 %	98.3 %	37.8 %	54 %	47.2 %	14 %
Redefinición 1	7.1 %	1.7 %	62.2 %	46 %	52.8 %	86 %

En relación con la Redefinición, el indicador ha sido claramente nulo en los problemas 1 y 2 (92.9% y 98.3%). En los problemas 3 y 6 la mayoría de resoluciones atribuyen fines no previstos a procedimientos incluyendo consecuencias erróneas inventadas (62.2% y 86%).

3.2. *Análisis cualitativo*

El análisis cuantitativo ha implicado el tratamiento de datos de 7 variables por cada uno de los 6 problemas, un total de 42 valores. A continuación se propone un análisis cualitativo de las respuestas de los alumnos. A modo de ejemplo se estudiará el indicador de Originalidad sobre el problema número 5. Este problema tiene un enunciado de geometría plana en el que interviene como sujeto principal un triángulo equilátero, figura estudiada en profundidad durante la secundaria. Además, es el único problema que incluye en el enunciado un esquema gráfico de la situación planteada. No obstante es el problema menos escogido con diferencia (35%).

Recordemos que el indicador de Originalidad hacía referencia a la capacidad para producir respuestas alejadas de lo convencional, únicas y podía tomar dos valores según si existía la repetición de algún método algorítmico (valor 0) o si existía el uso de un razonamiento heurístico (valor 1). Debido a que no se trata de un estilo de problema que se practique en el aula se presta a ser resuelto de manera original. La resolución requiere "construir" una argumentación concatenando los diferentes resultados de cada apartado para llegar al último, relacionando las diferentes partes.

Para responder al primer apartado de cuánto mide la altura del triángulo de vértices A, B y C, tan sólo una persona ha utilizado la trigonometría, el resto se ha decantado por el teorema de Pitágoras subdividiendo el triángulo en dos triángulos rectángulos. Otra estrategia resolutiva registrada calcula el área del triángulo a partir del cálculo del determinante del producto vectorial de los vectores que van de A a B, y de A a C, pero no responde a la pregunta. Al margen de errores frecuentes de cálculo (relativos al cuadrado de una diferencia y al cuadrado de una raíz cuadrada), se sigue la mecánica de la aplicación de la fórmula. Pero a la hora de dar el resultado (√48), existe una tendencia general a aproximarlo a un número de tres cifras decimales.

Para responder al segundo apartado expresando la distancia del punto P a cada uno de los vértices en función de *x*, se ha aplicado nuevamente el teorema de Pitágoras pero esta vez las tendencias se han repartido por igual entre considerar el triángulo rectángulo de cateto *x* con vértices A y P, o considerarlo con vértices C y P. También se ha recogido una estrategia de resolución geométrica curiosa a partir del área pero no concreta y no responde a la pregunta (expuesta en el Análisis cuantitativo en el apartado de Originalidad 1). Además ha habido otra estrategia de resolución que trabajaba las distancias desde el espacio tridimensional aunque tampoco ha conseguido concretar dando la respuesta. A pesar de los múltiples errores de cálculo con las identidades notables y las raíces cuadradas, se aplica el teorema de Pitágoras habiendo una tendencia marcada por expresar la distancia de P a B con valores aproximados a tres decimales. Un razonamiento erróneo compartido por algunos estudiantes ha consistido en contemplar la distancia del punto P al vértice B como igual a los otros vértices anteriormente calculados con el teorema.

Han sido pocos los alumnos que han respondido al tercer apartado, pero los que lo han hecho han optado por la misma estrategia: construir una función de *x*; derivar e igualar a 0 para encontrar el extremo relativo; volver a derivar y substituir por el extremo comprobando que se trata de un mínimo. En definitiva, han repetido un algoritmo convencional.

4. Discusión, conclusiones y perspectivas futuras

En el estudio de Riaguas, Arribas, Celorrio, y Lerís (2006) y en el de Boal, Bueno, Lerís y Sein - Echaluce (2008), se evalúa el perfil del estudiante de nuevo acceso a grados de ingeniería concluyendo que existe una escasa autonomía como aprendiz y que tiene poco desarrollada la habilidad para aplicar y relacionar sus conocimientos matemáticos. Tomando conciencia de ello, se pretende observar cómo razonan creativamente los alumnos que ya han finalizado los estudios preuniversitarios.

La extracción de conclusiones representativas en la resolución de problemas es una tarea complicada pues requiere la implicación máxima del sujeto. La dificultad aumenta cuando se trata de evaluar aspectos creativos. Se elige un contexto de suma relevancia como son las Pruebas de Acceso a la Universidad (PAU), y se toma una muestra en la asignatura de Matemáticas; el alumno se juega el futuro y así la voluntad está asegurada. Guilford (1950), Barron (1969), Logan (1980), Amabile (1983), Marín y De la Torre (1991), Sternberg (1999), Paz (2004) y Violant (2006) estudian los indicadores básicos que valoran la existencia de creatividad. Esta investigación pretende particularizar en el área de matemáticas y propone la selección de siete indicadores que son capaces de resumir si una resolución de un problema de matemáticas ha sido creativa o no. Estos indicadores son: originalidad, flexibilidad, elaboración, análisis, síntesis, comunicación y redefinición.

El proceso de resolución de problemas se puede contemplar como un conjunto de cuatro fases (Polya, 1945) en donde las Fases II, III y IV son las que pueden ofrecer mayor interés desde el punto de vista de la creatividad. La Fase II se ha resuelto de manera creativa en los problemas estudiados pues el grado de originalidad mostrando la capacidad para producir respuestas poco convencionales, aplicando razonamientos heurísticos y no aplicando métodos algorítmicos de resolución ha sido elevada. El grado de flexibilidad, aunque menos, también ha sido importante notándose la capacidad de ir moldeando las propias ideas, haciéndose replanteamientos y reorientaciones, superando la propia rigidez, y pudiendo abordar un problema desde diferentes perspectivas. La Fase III se caracteriza por tener el indicador de análisis elevado, observándose una gran capacidad para estudiar una situación y determinar los límites, los criterios de descomposición en partes, y tratar por separado cada parte descubriendo nuevas relaciones. Pero no se refleja una buena elaboración en la mayoría de los casos pues no destaca la capacidad para desarrollar una idea alcanzando altos niveles de complejidad y detalle. Por este motivo, la creatividad registrada en la Fase III no es especialmente importante. La Fase IV no se ha caracterizado por tener una resolución creativa: la síntesis o capacidad de organización de la información en esquemas, observando rasgos comunes entre sus partes y la extracción de las datos más importantes de los problemas no se ha registrado; la comunicación o capacidad de transmisión de la resolución no destaca ni por su claridad ni por su desorden; la redefinición de propiedades no ha tenido lugar en la mayoría de los casos.

Recordemos que esta investigación pretende determinar el grado de creatividad en la resolución de problemas de matemáticas de alumnos preuniversitarios. Para ello hemos establecido siete indicadores que han permitido analizar el grado de creatividad de las resoluciones. A la vista de los resultados se puede concluir que los alumnos de la muestra poseen como aspectos creativos positivos en la resolución de problemas matemáticos tres de los indicadores: la originalidad, la flexibilidad y el análisis. Como aspectos creativos mejorables otros tres indicadores: la elaboración, la síntesis y la redefinición. La comunicación también es mejorable aunque no haya registrado valores tan bajos como los tres indicadores anteriores. Analizando estos resultados, para caracterizar cada una de las Fases en relación a la creatividad, se puede afirmar que ha sido la Fase del diseño de una estrategia la más creativa. La Fase de revisión es la que menos creativamente se ha afrontado. Obsérvese que el resultado de validar la solución deriva en una construcción del propio conocimiento matemático pues existe una reflexión sobre las ideas y momentos clave. A menudo, esta parte resulta difícil de ejecutar porque los alumnos consideran muchas veces que una vez obtenida la solución, el problema ya está finalizado. El profesor debe insistir en la importancia de la revisión de la solución y de la toma de conciencia de todo el esfuerzo realizado para llegar a este punto (Alonso, 2009; Mallart, 2011).

El hecho de haber comprobado un correcto análisis de las partes en que se constituye un problema pero al mismo tiempo una deficiente organización de la información plantea nuevos interrogantes. Una línea de investigación podría preocuparse de investigar la relativización de la organización de la resolución frente a la importancia de la organización de la información. Tampoco son positivos los resultados obtenidos sobre la Fase IV de revisión; es necesaria una mejora. Otra línea de investigación podría tratar las causas que originan la deficiente ejecución de la Fase IV (existen estudios de Vila y Callejo, 2004; Mallart, 2008; Blanco, Caballero y Guerrero, 2009).

Agradecimientos

Trabajo realizado en el marco del proyecto de investigación EDU2015-64646-P (MINECO/FEDER, UE).

Referencias bibliográficas

Amabile, T. M. (1983). The social psychology of creativity: A componential conceptualization. *Journal of Personality and Social Psychology*, *45*, 357-376. doi: 10.1037/0022-3514.45.2.357

Abrantes, P. y Serrazina, L. (1996). Matemática para todos. Cómo se aprende. En P. Abrantes y L. Serrazina (Eds.), *A matemática na Educaçao Básica.* Lisboa, Portugal: Ministério da Educação / Departamento de Educação Básica.

Alonso, D. (2009). Pensamiento matemático inconsciente: ¿resolver sin querer? *Uno*, *52*, 94-105.
Arteaga, E. (2010, septiembre). *El desarrollo de la creatividad en la Educación Matemática*. Congreso Iberoamericano de Educación, Buenos Aires, Argentina.
Barron, F. (1969). *Creative Person and Creative Process*. New York: Holt, Rinehart & Winston.
Blanco, L., Caballero, A. y Guerrero, E. (2009). El dominio afectivo en la construcción del conocimiento didáctico del contenido sobre resolución de problemas de matemáticas. *Enseñanza de las Ciencias*, Número Extra VIII Congreso Internacional sobre Investigación en Didáctica de las Ciencias, 362-365.
Boal, N., Bueno, C., Lerís, D. y Sein - Echaluce, M. L. (2008). Las habilidades matemáticas evaluadas en las Pruebas de Acceso a la Universidad. Un estudio en varias Universidades públicas españolas. *Revista de Investigación Educativa*, *16* (1), 11-23.
Bono, E. (1998). *El pensamiento lateral*. Barcelona, España: Paidós.
Garrett, R. M. (1988). Resolución de problemas y creatividad: implicaciones para el currículo de ciencias. *Enseñanza de las Ciencias*, *6*, 224-230.
Gómez - Chacón, I. M. (2000). *Matemática emocional. Los afectos en el aprendizaje matemático*. Madrid, España: Narcea.
Guilford, J. P. (1950). *Creativity. American Psychologist*, *5*, 444-445. doi: 10.1037/ h0063487
Logan, G. (1980). *Estrategias para una Enseñanza Creativa*. Barcelona, España: Oikos-tau.
Mallart, A. (2008). *Estratègies de millora per a la resolució de problemes amb alumnes de segon d'ESO: ús de la matemàtica recreativa a les fases d'abordatge i de revisió*. (Tesis doctoral no publicada, Universitat Autònoma Barcelona). Obtenido de: http://hdl.handle.net/10803/4719
Mallart, A. (2011, mayo). *La superación de la adversidad en el aprendizaje matemático*. III Forum Internacional Innovación y Creatividad. La adversidad como oportunidad, Barcelona, España.
Marín, R. y de la Torre, S. (1991). *Manual de la creatividad*. Barcelona, España: Vicens Vives.
Osborn, A. F. (1963). *Applied imagination: Principles and procedures of creative problem solving* (3rd Revised Edition). New York: Charles Scribner's Sons.
Parnes, S. J., Noller, R. B. y Biondi, A. M. (1977). *Guide to Creative Action*. New York, EEUU: Charles Scribner's Sons.
Paz, D. (2004). *Apuntes de creatividad*. Mérida, España: Humana Internacional.
Petrovsky, V. A. (1978). La psicología de los tipos principales de aprendizajes y de los procesos de enseñanza. En V. A. Petrovsky (Ed.), *Psicología Pedagógica y de las Edades* (285-330). La Habana: Pueblo y Educación.
Polya, G. (1945). *How to solve it*. Princeton: Princeton University Press.
Puig Adam, P. (1960). *La matemática y su enseñanza actual*. Madrid, España: MEC.
Riaguas, A., Arribas, M., Celorrio, R. y Lerís, D. (2006, julio). *El acceso a los estudios de Ingeniería: detección de debilidades o carencias formativas en Matemáticas*. IV Congreso Internacional de Docencia Universitaria e Innovación, CIDUI, Barcelona, España.
Rico, L. (1990). Diseño curricular en Educación Matemática. Una perspectiva cultural. En S. Llinares y M. V. Sánchez (Eds.), *Teoría y práctica en Educación Matemática* (17-61). Sevilla, España: Alfar.
Romberg, T. y Carpenter, T. (1986). Research in teaching and learning mathematics: Two disciplines of scientific inquiry. En Merlin C. Wittrock (Ed.), *Handbook of research on teaching* (850-873). New York: Macmillan.
Sternberg, R. J. (1999). *Handbook of Creativity*. New York: Cambridge University Press. doi: 10.1017/CBO9780511763205

Vila, A. y Callejo, M. L. (2004). *Matemáticas para aprender a pensar. El papel de las creencias en la resolución de problemas.* Madrid, España: Narcea.

Violant, V. (2006). Indicadores clásicos en la evaluación de la creatividad. En S. Torre y V. Violant (Eds.), *Comprender y evaluar la creatividad* (169-179). Archidona, España: Aljibe.

Autores

Alberto Mallart. Universidad de Barcelona, España. albert.mallart@ub.edu

Jordi Deulofeu. Universidad de Barcelona, España. jordi.deulofeu@uab.cat

Karel Pérez Ariza, José Emilio Hernández Sánchez

LA ELABORACIÓN DE PREGUNTAS EN LA ENSEÑANZA DE LA COMPRENSIÓN DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS

The elaboration of questions in teaching the comprehension of mathematical problems

RESUMEN

El artículo que se presenta tiene como objetivo ofrecer una metodología para la elaboración de preguntas que desarrollen la comprensión de problemas matemáticos en la Enseñanza Primaria. El principal aporte de la investigación a la Didáctica de la Matemática reside en la metodología que se ofrece, la cual se sustenta en la reconceptualización de los problemas matemáticos como textos y la asunción de la resolución de problemas como proceso de comprensión textual. La efectividad de la metodología fue valorada mediante su implementación en la práctica educativa de la Escuela Vocacional de Arte "Luis Casas Romero" durante el curso 2010 – 2011.

PALABRAS CLAVE:

- *Elaboración de preguntas*
- *Comprensión de problemas*

ABSTRACT

The objective article is offer a methodology for the elaboration of questions that develop the comprehension of mathematical problems in Primary Education. The main contribution of the investigation to the Didactics of the Mathematical one resides in the methodology that is offered, which sustains in the assumption of the problem solving like process of reading comprehension. The methodology was valued in Escuela Vocacional de Arte "Luis Casas Romero".

KEY WORDS:

- *Elaboration of questions*
- *Problems comprehension*

RESUMO

O objetivo principal do trabalho é elaborar uma metodologia para a realização de perguntas para o desenvolvimento da compreensão de problemas matemáticos. Foi projetado baseado nas soluções dos problemas como um processo da compreensão textual. A contribuição principal à Didáctica da Matemática está na metodologia baseada nas definições oferecidas sobre os conceitos dos problemas matemáticos e a solução de problemas como um processo de compreensão textual. Esta metodologia foi aplicada na Escola Vocacional de Arte "Luis Casas Romero" da cidade de Camagüey, durante o curso académico 2010 – 2011.

PALAVRAS CHAVE:

- *Elaboração de perguntas de compreensão*
- *A compreensão de problemas*

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (2017) *20* (2): 223-248.
Recepción: Diciembre 16, 2014 / Aceptación: Abril 6, 2017. DOI: 10.12802/relime.17.2024

RÉSUMÉ

L'objectif principal du travail est d'apporter une méthodologie pour l'elaboration des questions pour le développement de la compréhension de problèmes mathématiques dans l'éducation primaire. Il a été basé sur les solutions de problèmes comment procès de compréhension textuelle. L'apport principal à la Didactique des Mathématiques est la méthodologie basé dans les définitions apporteés des concepts de problèmes mathématiques et sa solution comment procès de compréhension textuelle. Cette méthodologie a été appliquée dans L'école Vocationelle des Arts "Luis Casas Romero" de Camagüey pendant le cours écolier 2010 – 2011.

MOTS CLÉS:
- *Élaboration de questions*
- *Compréhension de problèmes*

1. Introducción

La enseñanza de la solución de problemas matemáticos fue ganando auge a nivel mundial, a partir de la publicación en la segunda mitad del siglo XX, de las obras del matemático húngaro George Polya (Pérez, 2014). Entre sus principales aportes se encuentra la propuesta de un modelo de resolución de problemas (Polya, 1976), el cual ha sido ampliamente difundido a nivel internacional. En el mismo se reconoce la comprensión como una etapa del referido proceso. Posteriormente, otros investigadores (Jungk, 1979; Schoenfeld, 1991; De Guzmán, 1991; Fridman, 1995) han propuesto distintos modelos de resolución de problemas, los cuales a pesar de sus diferencias en cuanto al número de etapas, contextos para los que se elaboró, entre otros elementos, coinciden en considerar la comprensión como un aspecto importante en la resolución de problemas.

En las últimas décadas se ha producido un enriquecimiento de algunas ciencias sociales y humanísticas como: la Psicología, la Semiótica, la Lingüística y la Hermenéutica. Ello ha dado lugar al redimensionado del papel de la comprensión en el proceso de enseñanza – aprendizaje, extendiéndose hasta áreas tan específicas como la solución de problemas matemáticos. De esto último son muestras investigaciones, tales como: Domínguez, 1999; Quiroga, 2006; Chancasanampa, 2010; Díaz, 2010; Rodríguez & Abad, 2012; Frade, 2014; Pérez & Hernández, 2015. Entre los aportes teóricos, metodológicos y experimentales de las investigaciones citadas se encuentran: la aplicación de los pasos metodológicos de la lectura, el uso del análisis léxico, sintáctico y semántico y la elaboración de inferencias en la comprensión de los problemas; así como la constatación empírica de la relación entre el desempeño de los escolares en la comprensión textual y la resolución de problemas matemáticos. Sin negar la validez de los resultados anteriores se considera que aún resultan insuficientes los aportes en cuanto a:

- Sistematización de los postulados psicológicos, lingüísticos, semióticos y didácticos que permitan sustentar y estructurar la solución de problemas matemáticos como un proceso de comprensión textual.
- Caracterización de los problemas matemáticos como textos.
- Instrumentaciones didáctico – metodológicas para la dirección de la solución de problemas como proceso de comprensión textual.

En visitas de ayuda metodológica y de inspección, así como en diferentes operativos de la calidad de la educación a nivel nacional (en Cuba) también se han constatado dificultades en la solución de problemas, debido a la insuficiente comprensión de sus enunciados. Una de las causas reside en el escaso dominio de los docentes para la elaboración de preguntas que favorezcan el referido proceso. Ello se manifiesta en: incorrecta gradación por niveles de dificultad, poca variedad en los formatos e inadecuada formulación de las mismas. De allí que se considere necesario brindarle al docente instrumentaciones, que puedan devenir en habilidades metodológicas para la elaboración de preguntas dirigidas al desarrollo de la comprensión de problemas, pues del dominio de ellas depende la calidad de su desempeño y del aprendizaje de los escolares. Consecuentemente con lo planteado se persigue como *objetivo:* ofrecer una metodología para la elaboración de preguntas que desarrollen la comprensión de problemas matemáticos en los escolares de la Enseñanza Primaria.

Para desarrollar la investigación se emplearon diversos métodos teóricos: el análisis – síntesis y el histórico – lógico fueron empleados para el estudio de los postulados teóricos y metodológicos que sirvieron de base para la elaboración del marco teórico. La modelación y el método sistémico estructural – funcional fueron utilizados en la configuración de la metodología. También se emplearon métodos empíricos como la prueba pedagógica y la observación del desempeño de los escolares para constatar su dominio sobre la comprensión de problemas. El análisis documental se empleó en el estudio de las fuentes especializadas sobre el tema objeto de estudio y el pre-experimento fue factible para valorar la efectividad de la metodología propuesta. Como método estadístico se utilizó el análisis porcentual para el procesamiento de los datos obtenidos en el diagnóstico.

2. Desarrollo

2.1. *Consideraciones teóricas sobre la comprensión de problemas matemáticos*

La comprensión de textos ha sido objeto de estudio de múltiples investigadores en los últimos años, por la importancia que reviste en la formación cultural e integral del hombre. La profesora Secades (2007) refiere que la comprensión textual ha sido conceptualizada de varias formas, entre ellas: como *proceso*, habilidad y *actividad*. De la idea anterior se puede inferir que existen diversos criterios en torno a la comprensión textual, aunque no son contradictorios entre sí. Cada uno de ellos enfatiza en una arista determinada del tema, por lo que se complementan.

Para entender los vínculos existentes entre las mencionadas conceptualizaciones es vital reconocer que una habilidad solo se forma en la actividad sistemática del sujeto y este proceso es puesto en función por el propio sujeto cuando siente la necesidad de comprender la realidad que lo rodea, a partir del análisis de su actividad diaria (Bermúdez & Rodríguez, 2009). Teniendo en cuenta los vínculos expuestos entre las categorías: actividad, habilidad y proceso; así como el lugar que ocupa la actividad en el desarrollo del sujeto en el artículo se asume la comprensión como actividad, entendiéndose esta última categoría como: "(…) aquellos procesos mediante los cuales el individuo, respondiendo a sus necesidades, se relaciona con la realidad, adoptando determinada actitud hacia la misma." (González et. al., 1995, p. 91)

Si se considera que en todas las asignaturas se comprenden textos (Perkins, 1995; Peralta, 2012), entonces corresponde al maestro enseñar, desde cada materia, a comprender los textos que en ellas se emplean. En varias investigaciones (Labarrere, 1987; Campistrous & Rizo, 1996; Vila & Callejo, 2004; Díaz, 2010; Frade, 2014) se reconoce la importancia que tiene la comprensión textual en la resolución de problemas matemáticos, por lo que resulta de gran importancia la realización de otros estudios que permitan profundizar en esa temática.

Las diversas definiciones del concepto de problema matemático hacen referencia a uno o varios de los elementos siguientes:

- *Subjetividad:* el resolutor debe desconocer la vía de solución e interesarse por hallarla (González, 1995; Campistrous y Rizo, 1996; Ontoria, 2006).
- *Presencia de relaciones matemáticas:* en la solución se requiere del empleo de medios matemáticos (Geissler, 1975; Ballester, 1992; Vila & Callejo, 2004).

- *Existencia como texto:* uso del lenguaje verbal para formularlos (Rubinstein, 1966; Labarrere, 1987, 1988; Pérez, Álvarez & Breña, 2016).

La Psicología de orientación marxista reconoce que todo problema surge de la necesidad de formular verbalmente una situación problémica identificada, lo que está condicionado por la imposibilidad de pensar sin mediación del lenguaje (Rubinstein, 1966; Luria, 1980; Fernández & Huepp, 2014). Esto a su vez determina el surgimiento del problema como formulación verbal y por ende su existencia como texto. Esto condiciona que los autores del artículo conceptualicen, en términos generales, al problema como aquel *enunciado que surge de la necesidad de expresar verbalmente las situaciones problémicas debido a la imposibilidad de solucionarlas prescindiendo del lenguaje.*

Teniendo en cuenta los criterios expuestos anteriormente el problema matemático es definido como *aquel enunciado que contiene una situación desconocida y de interés para un sujeto que requiere de medios matemáticos para su solución.*

¿Puede existir un problema matemático aislado de un texto? Los problemas matemáticos –como parte del contenido de la enseñanza de la Matemática–, la cual es una ciencia, son portadores de cultura, por lo que portan significados, poseen una intención y requieren de ser comprendidos por el sujeto que los resuelve. Por su parte, los textos constituyen unidades básicas de la comunicación y posibilitan la conservación, transmisión y re-creación de la cultura (Lotman, 2003). El concepto de texto tiene un carácter genérico, por lo que los autores de la presente investigación consideran una tautología referirse a problemas matemáticos con textos, pues los primeros son representantes del concepto de texto.

Lo abordado hasta el momento permite preguntar: ¿es la comprensión textual una etapa de la resolución de problemas matemáticos o abarca todo el proceso? Autores como: Polya, 1976; Labarrere, 1987; Fridman, 1995; Capote, 2005 asumen la comprensión como la etapa previa o inicial de la resolución de problemas. Si se considera que todo problema matemático, al igual que cualquier texto, existe por la unidad dialéctica entre los procesos producción – comprensión (Lotman, 2003) y que el primero posibilita el surgimiento de los problemas; entonces la resolución de estos últimos transcurre como un proceso de comprensión textual, por lo que este último está presente en todos los momentos de aquél.

La comprensión de textos es concebida como una búsqueda de relaciones (Secades, 2007; Hernández, 2012), lo que permite inferir que la comprensión de textos implica un proceso complejo y problémico donde se da la unidad entre lo cognitivo, lo afectivo y lo regulador. El carácter problémico del texto está dado en que el sujeto al leer, según los propósitos que persiga puede ser que se sienta motivado por la actividad o no; además de identificar mientras lee diferentes situaciones problémicas concibiendo la lectura como un proceso dialéctico de superación de distancias (Ricoeur, 1998). Esto tiene gran importancia para la didáctica, pues quien no se siente problematizado por una actividad pierde la motivación. La falta de interés por la lectura puede estar dada también por la falta de conocimientos previos para comprender lo que se lee.

En relación con esto Osvaldo Gallardo plantea: "Un texto, unidad semántica que se expresa mediante un código y que permite la relación comunicativa, no es humorístico si excede la capacidad del que comprende. Si el que comprende carece de un conocimiento importante del mundo, o si el que comprende, no puede construir un significado coherente." (2005, p. 74)

Aunque el autor citado se centra en el texto humorístico, permite reflexionar sobre la subjetividad como elemento esencial en el concepto de texto y de su importancia para la didáctica. Desde ese punto de vista el texto implica dos condiciones relacionadas con el lector:

- Poseer los conocimientos necesarios para comprenderlo.
- Sentirse problematizado por él, es decir, motivado y que le exija una actividad cognoscitiva productiva; por lo que debe encontrarse fuera del desarrollo real, pero nunca en la zona de desarrollo potencial (Vigotski, 1987).

Estos elementos analizados posibilitan establecer una relación de analogado entre los conceptos de problema matemático y texto, pues estas condiciones desde el punto de vista subjetivo coinciden en ambos y se ven reflejados en la propia dinámica de los procesos de comprensión y resolución de problemas. Además la solución de problemas matemáticos requiere del establecimiento de las relaciones que permiten satisfacer la exigencia (Campistrous & Rizo, 1996; Vila & Callejo, 2004).

Aunque lo que persigue un lector al leer un problema matemático, generalmente, es resolverlo; en ocasiones se analizan otros aspectos como el componente político - ideológico, la dimensión ambiental, entre otros, lo cual forma parte de la lectura como proceso integral. Esto corrobora nuevamente que los problemas matemáticos son textos y que la resolución de problemas es un proceso de comprensión textual y no que esta última es una etapa previa del primero, como se describe en las fuentes especializadas – ya referidas – sobre el tema.

La comprensión como actividad requiere que las acciones se encaminen a captar y/o elaborar los referentes, los significados y el sentido. ¿En qué consiste cada uno de ellos?

- *Los referentes:* son aquellos elementos de la realidad objetiva a los que el texto hace referencia o alude (objeto, hecho, proceso o fenómeno). Ellos forman parte de la trama sensitiva de la conciencia del autor y responden a la siguiente interrogante: ¿De qué trata?
- *Los significados:* al captar los referentes del texto, el lector comienza a establecer relaciones entre ellos y asimila así de forma generalizada aquella parte de la herencia histórico – cultural de la humanidad que el autor del mismo nos muestra.
- *Los sentidos:* cuando el sujeto determina los significados que el autor del texto nos quiere mostrar. Este a partir de sus conocimientos previos, experiencia y vivencias le asigna individualmente sus significados; es decir, los sentidos no son más que los significados que le asigna el lector a los propios significados que aparecen en el texto. De aquí que la asignación de significados al material de estudio propicie una indisoluble unidad entre lo cognitivo, lo afectivo y lo regulador y por ende el desarrollo integral de la personalidad de los individuos. (Hernández, 2010)

Teniendo en cuenta lo planteado anteriormente, se puede afirmar que la comprensión de textos es una actividad desarrolladora porque las acciones que se ejecutan en la misma posibilitan entre otras cosas:

- El tránsito gradual de los conocimientos, de lo más simple a lo complejo.
- La unidad entre lo cognitivo, afectivo – motivacional y reflexivo – regulador en el proceso de apropiación de la cultura, es decir en el aprendizaje.

Por ello la actividad lectora no es lineal sino que implica procesos de búsqueda, avance y encuentro de contradicciones – entre estas últimas las más importantes se dan entre lo conocido y lo desconocido, es decir, entre la distancia que existe entre el conocimiento del sujeto y el contenido del texto y cómo logra este la apropiación de los significados que el texto transmite. Si se requiere que los escolares puedan leer diferentes tipos de textos, entonces es necesario que ellos se apropien de diferentes estrategias que le permitan comprender eficientemente lo leído.

“En consecuencia este proceso entraña diversas estrategias lectoras, algunas de las cuales se derivan de los esquemas de conocimientos del lector y otras de la representación de la situación descrita en el texto.” (Pino, 2005, pp. 134–135). Leer implica usar estrategias que permitan comprender lo leído. Cada texto se lee de acuerdo al propósito del lector y a las características que posee el mismo.

Para lograr que la lectura sea una actividad desarrolladora es necesario que promueva el tránsito de niveles inferiores a otros superiores, lo que en la didáctica se materializa en los niveles de desempeño cognitivo. Aunque no existe un consenso en cuanto a la conceptualización de este concepto ni en la cantidad de ellos, las fuentes consultadas (Rubio, 2006; Hernández, 2012) coinciden en reconocer que los mismos permiten medir el desarrollo alcanzado por los alumnos en el aprendizaje y el de los maestros en la dirección de este proceso. De allí que tengan, a criterio de los autores del artículo, entre otras funciones las siguientes:

- *Orientadora:* permite analizar qué se va a enseñar y cómo, en correspondencia con el nivel de desarrollo alcanzado por los alumnos. Permite regular el proceso de enseñanza – aprendizaje.
- *Activadora:* permite lograr el tránsito de niveles inferiores hasta otros superiores en la apropiación de los conocimientos.
- *De control:* permite ir evaluando el proceso de aprendizaje de los escolares y el desempeño del docente.

En el artículo se contextualizan los niveles de desempeño reproductivo, aplicativo o productivo y el creativo a la comprensión de problemas matemáticos.

Nivel I: abarca aquellas operaciones y acciones que permiten identificar los elementos del texto, conceptos y relaciones que aparecen en el mismo, además de realizar inferencias sencillas a partir de relaciones que pueden aparecer en el texto. Ejemplo: subrayar palabras, datos o ideas; identificar los hechos, fenómenos, objetos, personajes y alusiones históricas que formen parte de los referentes del texto; identificar los elementos de la estructura externa del texto (datos, condiciones y exigencias); inferir significados de relaciones matemáticas que aparecen explícitas en el texto; parafrasear el contenido del texto; seleccionar información dada explícitamente; omitir información innecesaria.

Nivel II: contiene aquellas operaciones y acciones que permiten establecer relaciones más complejas para poder inferir las relaciones de parte – todo, analogía, oposición, entre otras que se dan y emitir juicios. Ejemplo: reformular el texto; inferir significados de relaciones complejas (parte – todo, analogía, otras); identificar la relación de parte – todo que se da en el texto; identificar los subproblemas que contiene los problemas compuestos; realizar esquemas gráficos que representen la situación contenida en el texto.

Nivel III: agrupa las operaciones y acciones que permiten hacer transformaciones, buscar nuevas vías de solución y emitir razones. Es transferir los conocimientos a situaciones completamente desconocidas. Ejemplo: elaborar imágenes mentales sobre el texto; transformar las condiciones del texto para hallar otras vías de solución y/o comprobar la vía empleada; resolver el problema por diferentes vías; formular problemas; transformar el problema.

2.2. *La elaboración de preguntas en el proceso de enseñanza – aprendizaje de la comprensión de problemas matemáticos*

La concepción del proceso de enseñanza – aprendizaje ha sufrido diversas transformaciones a través de los años, sin embargo el valor de las preguntas ha sido reconocido siempre. Al surgir la humanidad la enseñanza se basaba en el diálogo, narraciones y otras vías en las cuales se empleaban las preguntas como medios para obtener y trasmitir la cultura.

Al surgir la enseñanza escolarizada, la cual tenía un carácter eminentemente escolástico en sus inicios, las preguntas tenían una importancia vital para la dirección y el control del aprendizaje. La limitación que poseía el uso de las mismas era el carácter catequístico que se les daba, es decir, el proceso de enseñanza – aprendizaje se basaba en preguntas y respuestas, que no exigían más que una memorización mecánica y absurda de los contenidos; dejando de mediar un proceso de reflexión y comprensión del tema.

La enseñanza y el aprendizaje no pueden ser procesos mecánicos, sino que en ellos debe primar una actitud activa, surgiendo el aprendizaje como resultado de generalizaciones y reflexiones del sujeto que aprende. De ello surge la necesidad de lograr que las preguntas se conviertan en medios útiles para la dirección de un aprendizaje consciente. Así surge la conversación socrática, la mayéutica y la muy conocida hoy, conversación heurística.

La Didáctica ha abordado las preguntas como procedimientos, fundamentalmente para la dirección y control de la actividad cognoscitiva de los estudiantes y como habilidad general a formar en ellos. La primera idea ha sido abordada por (Klingberg, 1972; Labarrere & Valdivia, 1991; Pérez & Iglesias, 1999; Yakoliev, 2001; Villarreal, 2015). La elaboración de preguntas es considerada como habilidad general por Zilberstein & Silvestre (2002).

Ambos criterios son válidos, pues la elaboración de preguntas es un modo de proceder vital en la dirección y control del aprendizaje, además al dominarse el sistema operacional se convierte en una habilidad de carácter general, pues puede ser utilizada en cualquier área del saber. En el trabajo se asume el primer criterio, ya que el objetivo del trabajo va dirigido al empleo de la elaboración de preguntas para favorecer el desarrollo de la comprensión de problemas matemáticos. Por tanto es definida como el *procedimiento dirigido a la formulación de interrogantes empleadas en la dirección del proceso de enseñanza – aprendizaje.*

Existe una clasificación de las preguntas muy difundidas en el ámbito de la Didáctica, la cual se basa en la estructura externa (formato) de las mismas. El conocimiento de este aspecto es esencial para lograr variedad en las preguntas y así evitar el agotamiento de los escolares durante el aprendizaje. A continuación los autores describen la referida taxonomía atendiendo a las características de la comprensión textual.

2.2.1. *Selección de respuestas*

También conocidas como preguntas objetivas porque exigen respuestas previsibles. El objetivo esencial radica en que el tiempo de escribir se consuma en pensar. Existen diferentes tipos:

1. Selección múltiple simple: En los ejercicios cuyo formato responde al de selección múltiple simple una respuesta es la correcta y las tres restantes son distractores.
2. Selección múltiple compleja: Una de las respuestas es correcta y las tres restantes son distractores. La selección múltiple compleja tiene por característica que el encabezado o base se mezclan varios contenidos en una misma destreza, se emplean números romanos y la respuesta correcta implica más de un número. Muy útil resulta esta pregunta cuando se precisa captar varias alternativas y no una sola en el objeto de estudio, por ejemplo cuando el texto es polisémico y existen varios significados complementarios, cuando es necesario discriminar las propiedades sustanciales y no sustanciales de un concepto en el texto.
3. Multi-ítem. El formato Multi-Ítem en el caso de la comprensión de textos puede concretarse cuando se selecciona determinado componente del texto, ya sea un problema, un personaje, etc. de los que se derivan algunos ítems de selección múltiple simple de 4 opciones ordenados por niveles de desempeño.
4. Apareamiento: El pareado es la pregunta donde se relacionan elementos y se deben ofrecer más datos que los necesarios para evitar que algunos se adivinen al cubrir los últimos espacios. El pareado en la comprensión de textos puede ser muy útil para establecer conexiones entre inferencias y sus premisas en el texto, entre conclusiones y sus argumentos, entre criterios o juicios de autoridades y ejemplos concretos que las sustenten en el texto, entre el todo y las partes, entre imágenes, símbolos y el concepto o idea que se deriva de ellas, etc.
5. Verdadero o falso.
6. Ordenamiento: El ordenamiento es un tipo de pregunta muy importante para captar las formas de organización en un texto, donde pueden sistematizarse diferentes modos, según las propias estructuras del texto, son muy importantes estas preguntas para captar las formas en que se organiza el significado del texto, y de esas relaciones pueden elaborarse preguntas para promover inferencias: a) temporal: cronológico, b) espacial: (izquierda - derecha, todo - partes, lejano - cercano), c) causal: establecimiento de relaciones causales entre los elementos, d) funcional: la secuencia lógica de la funcionalidad de los elementos, e) paralelismo por semejanzas, f) paralelismo por oposición.

Estos ejercicios pueden concretarse con diferentes medios, entre ellos gráficos, esquemas, cuadros sinópticos, etc.

En general hay que distinguir que las preguntas cerradas son muy útiles para realizar operaciones cognitivas como:

- Identificar ideas, partes del texto, tipologías textuales, formas elocutivas, recursos estilísticos, conceptos, procesos, situaciones, hechos, etc.
- Ejemplificar juicios, mensajes, conceptos.
- Relacionar personajes, mensajes, textos, ideas de la obra, el mensaje de la obra con el contexto de actuación del estudiante.
- Clasificar textos, formas elocutivas, procesos, hechos.
- Verificar juicios, soluciones a problemas, etc.

2.2.2. *Producción de respuestas*

También denominadas preguntas abiertas, pues exigen respuestas más o menos desplegadas y no previsibles totalmente, donde el alumno pueda seleccionar, integrar, añadir, crear y en las que se involucran con mayor énfasis la subjetividad del estudiante y del calificador. Estas pueden ser de:

- Completamiento
- Ensayo corto
- Ensayo largo
- Ensayo oral
- Producto no escrito

La pregunta abierta de respuesta breve puede medir habilidades como identificar, abstraer, inferir juicios, aplicar, sintetizar. Esta pregunta tiene como característica que limita la extensión de las respuestas de los alumnos. Una forma de elaboración de este tipo lo encontramos en la pregunta de completado.

La pregunta abierta de respuesta desplegada puede medir operaciones como valorar, argumentar, crear, transformar y modificar textos. El alumno tiene más posibilidades de expresarse libremente, el dominio de habilidades ortográficas y de redacción pueden ser medidas con mayor profundidad.

Es importante tener en cuenta que la construcción del ítem conlleva pensar / escribir / re-escribir, ordenar, clasificar y balancear las preguntas. En este proceso es importante estimular la realización de ejercicios evaluativos individuales, por pares y grupales y contrastar sus resultados. La interacción puede también ser usada como contexto de la comprensión teniendo en cuenta su naturaleza esencialmente social.

3. Fundamentación y descripción de la metodología

Para proseguir la exposición es imprescindible precisar algunos aspectos sobre el término metodología. El mismo ha sido objeto de múltiples interpretaciones desde el ángulo de la actividad científica y de la propiamente educativa. Algunas de las acepciones más comunes que se utilizan de la referida categoría son:

- sinónimo de didáctica especial (Ej. metodología de la enseñanza de la matemática u otras asignaturas),
- vía para dirigir el proceso de enseñanza de determinados conocimientos (Ej. metodología para la enseñanza de las vías de solución de problemas matemáticos, metodología para la enseñanza de la lectura),
- como manera de organizar determinada actividad o proceso educacional (Ej. metodología para el desarrollo de la evaluación),
- como vía para dirigir la formación de determinadas orientaciones, cualidades, componentes o rasgos de la personalidad (Ej. metodología para la formación de valores, metodología para la formación de la laboriosidad),
- como asignatura para enseñar a investigar (metodología de la investigación),
- como forma específica de estructurar y aplicar uno o varios métodos de una investigación (la metodología aplicada es ...),
- como objetivo y resultado de la investigación. (De Armas, 2011)

En este caso es de interés el análisis de la metodología como vía para dirigir el proceso de enseñanza de determinados conocimientos, pues la que se propone tiene ese fin. Si se tiene en cuenta que al decir de Bórev la "(...) metodología es la teoría del método" (1989, p. 45), sin lugar a dudas esta contribuye a que se logre una adecuada concreción en la práctica del método, el cual se materializa como un sistema de acciones de docentes y alumnos que posibilita el logro del objetivo propuesto (Addine, 2013).

En consecuencia con esto la metodología no es solo una vía para dirigir el aprendizaje (herramienta para el maestro) sino un valioso instrumento para la obtención de conocimientos por el alumno, siempre y cuando se describa en procedimientos que una vez adquiridos por los escolares, puedan ponerlo en función de su actividad cognoscitiva.

A tono con lo planteado y con la intención de precisar las características particulares de la metodología que se propone, *se denomina metodología a la secuencia sistémica de etapas integradas por un sistema de procedimientos que permiten dirigir (actividad del maestro) y/o llevar a cabo (actividad del escolar) la elaboración de preguntas en el proceso de enseñanza – aprendizaje de la comprensión de problemas matemáticos.*

3.1. *Cualidades*

Es necesario señalar que la metodología que se propone posee las siguientes cualidades:

- *Activadora:* se tienen en cuenta los niveles de desempeño cognitivo, referidos a la comprensión textual, para lograr el tránsito gradual, de las operaciones más simples a las más complejas.
- *Interdisciplinaria:* se trabaja con operaciones que se deben tener en cuenta en la comprensión de cualquier tipo de texto, tales como: identificar información explícita e implícita, inferir significados, valorar y contextualizar.
- *Flexible:* la aplicación de la metodología no consiste en seguir un orden esquemático, ni siempre de la misma forma; sino que dependerá de las características del texto y del diagnóstico de los escolares.

3.2. *Estructura*

La metodología que se propone tiene la siguiente estructura:

- Objetivo general: Favorecer el proceso de enseñanza – aprendizaje de la comprensión de problemas matemáticos en la Enseñanza Primaria.
- Fundamentación Filosófica, Pedagógica, Sociológica y Psicológica.

Desde el punto de vista filosófico la metodología se sustenta en los postulados del materialismo dialéctico, principalmente en la teoría marxista del conocimiento, la cual defiende entre sus criterios, la cognoscibilidad del mundo, la relación entre la teoría y la práctica y reconoce que el camino del conocimiento parte: "De la percepción visible al pensamiento abstracto y de él a la práctica." (Kuusinen, 1961, p. 103)

La Pedagogía le sirve como sustento, principalmente lo concerniente al aprendizaje desarrollador, pues este plantea como principio la relación entre lo instructivo, lo educativo y desarrollador; así como la unidad entre el estudio y el trabajo, la enseñanza y la vida. De allí que la metodología que se propone tenga en cuenta la unidad de lo instructivo y lo educativo en la comprensión de los problemas matemáticos, favoreciendo así el desarrollo integral de los escolares.

Las ideas de la Sociología sobre el papel del sistema de influencias educativas en el desarrollo de la personalidad y el papel del trabajo en dúos tríos y otras formas de aprendizaje cooperado en el desarrollo integral de los escolares forman parte del sustento teórico de la misma. Ello se ve reflejado en la propuesta, al favorecer la interacción maestro−alumno y alumno−alumno durante la actividad.

La teoría histórico – cultural del desarrollo de la psiquis humana constituyente un valioso soporte de la metodología, principalmente las concepciones de Vigotski acerca de la zona de desarrollo próximo y la Ley Genética del Desarrollo del propio investigador. Son de gran importancia también las ideas de los psicólogos de orientación marxista, tales como Vigotski y Leontiev, en cuanto al papel de la comunicación y la actividad en el desarrollo de la personalidad.

3.3. *Aparato conceptual*

El aparato conceptual en que se sustenta la metodología lo constituyen principios didácticos generales[1] y especiales (enseñanza de la comprensión textual) por ser sus postulados los que se defienden en la investigación y constituir elementos imprescindibles en la dirección del proceso de enseñanza – aprendizaje. Estos principios fueron importantes para la elaboración de la metodología y se tuvieron en cuenta en su aplicación.

1. Diagnóstico integral de la preparación del alumno para las exigencias del proceso de enseñanza – aprendizaje, nivel de logros y potencialidades en el contenido del aprendizaje, desarrollo intelectual y afectivo valorativo: consiste en que para elaborar y aplicar la metodología fue necesario realizar una caracterización integral de los escolares.
2. Principio de orientación de la comprensión hacia un objetivo: este principio se sustenta en la correspondencia que debe existir entre la complejidad, variedad y cantidad de preguntas que se realicen a los escolares y los objetivos del grado relativos a la comprensión de problemas matemáticos. También se refiere al objetivo que se persigue en relación a los procesos de instrucción, educación y desarrollo.
3. Principio de la selectividad de los textos: consiste en que los textos serán seleccionados de acuerdo al diagnóstico de los escolares (intereses y desarrollo cognitivo) fundamentalmente y de los objetivos que se persigan con la lectura. Deberán poseer una adecuada formulación, pues esto entorpece el proceso lector.
4. Principio del carácter interdisciplinario de la comprensión: el proceso de comprensión textual no es privativo de ninguna asignatura, debe ser atendido en cada asignatura de acuerdo a las características de los mismos. En todo acto lector están presentes las invariantes funcionales siguientes: identificar, inferir, valorar y contextualizar la información.

[1] Los principios de la Didáctica General asumidos fueron tomados de Margarita Silvestre Oramas y José Zilberstein Toruncha en Hacia una Didáctica desarrolladora, pp. 22 – 23.

5. Principio de la operacionalización contextualizada de la habilidad: fue elaborado por los autores del trabajo, a partir de los estudios teóricos sobre habilidad, operación y acción que defienden la idea que las operaciones y acciones de una misma habilidad se manifiestan en correspondencia al contexto (en este caso características del problema).
6. Principio del carácter suficiente, variado y diferenciado de las preguntas: el mismo se refiere a la importancia de lograr que las preguntas posean diversos formatos y que la complejidad y cantidad de las mismas esté en correspondencia con el desarrollo de los escolares.
7. Principio de la vinculación de la teoría con la práctica: reside en lograr una unidad armónica entre los postulados teóricos de la comprensión textual y el real estado del problema, constatado empíricamente. Además fue necesario implementar la metodología para valorar su efectividad.

El aparato teórico se configura además con las ideas rectoras que deben guiar la dirección del aprendizaje de la comprensión textual. Las ideas fundamentales que organizan el andamiaje teórico – práctico son las siguientes:

3.3.1. *La comprensión textual*

En el caso de la comprensión como objeto de estudio, sus propiedades determinantes deben estar relacionadas con la posibilidad de asignarle sentido a un objeto en el desarrollo de la actividad (interacción lector – texto).

Aún cuando la asignación de sentido como rasgo esencial del concepto de comprensión no permite explicar la causa que condiciona el surgimiento de aquella, nos permite identificar su presencia o no en la actuación de un sujeto. La contradicción fundamental debe anunciarse sobre la base de la respuesta a la pregunta siguiente: ¿qué es lo que permite que el texto como expresión externa de acontecimiento sea comprendido como asignación de sentido?

La comprensión está condicionada por la contradicción que aparece entre la necesidad de asignarle sentido a las manifestaciones externas de la realidad y a la imposibilidad de subordinar lo innato y lo aprendido a ese fin. Dicha contradicción está latente hasta su solución gracias a la posibilidad creciente del sujeto para asignarle sentido a la realidad objetiva a través del pensamiento. En esta contradicción se expresa la interacción entre lo psíquico y lo social en el sujeto. En consecuencia la enunciación de la ley postulará que siempre que surja la necesidad de asignarle sentido a la realidad objetiva y se tenga la posibilidad de subordinar lo innato y lo adquirido a ello, surgirá la comprensión.

En consecuencia se define la comprensión de problemas matemáticos como la *actividad dirigida a la búsqueda de las relaciones contenidas en un texto necesarias para satisfacer la(s) exigencia(s) del problema y hacer una valoración integral del texto.*

3.3.2. *Elaboración de preguntas*

Las preguntas son procedimientos importantes en la dirección del proceso de enseñanza – aprendizaje de cualquier materia y en la comprensión de problemas matemáticos ocupan un lugar de primer orden. Las preguntas pueden tener diversas funciones en la enseñanza, entre ellas:

- Activar conocimientos previos.
- Motivar a los escolares por la lectura.
- Dirigir el proceso de comprensión llevado a cabo por los escolares.
- Problematizar y contextualizar el contenido del texto.
- Evaluar el aprendizaje de los escolares.

La elaboración de preguntas, por tanto, se convierte en un procedimiento necesario a dominar por los docentes, pues de ella depende en gran medida la efectividad en la dirección del proceso de enseñanza – aprendizaje de la comprensión de problemas matemáticos. A tono con lo planteado se considera que la *elaboración de preguntas es el procedimiento usado para la formulación de interrogantes empleadas en la dirección del proceso de enseñanza – aprendizaje.*

3.4. *Procedimientos de la metodología*

Los principios asumidos y las ideas teóricas abordadas sobre la comprensión textual y la elaboración de preguntas determinan la asunción de los eslabones y procedimientos que conforman la metodología.

3.4.1. *Planificación*

1. Diagnóstico de los escolares: este procedimiento va dirigido a obtener información sobre los conocimientos, intereses, motivos y otros aspectos, de los cuales dependerá el diseño y aplicación de las preguntas.
2. Determinación del objetivo de las preguntas: es importante determinar el fin con que se lee cada texto, de acuerdo a la tarea didáctica que predominará. No se emplean las mismas preguntas para motivar la lectura que para dirigir o evaluar la comprensión de un texto.

3. Selección de los textos: el maestro debe saber escoger textos auténticos en relación con los intereses y desarrollo cognitivo de los escolares; así como con el objetivo que persigue con la lectura. La extensión del mismo dependerá también del diagnóstico y es un aspecto esencial a tener en cuenta para seleccionar un texto.

3.4.2. *Diseño*

1. Operacionalización de la habilidad en correspondencia al texto: el estudio minucioso del texto por el maestro es otro procedimiento de gran valor, solamente así puede determinar las operaciones que se revelan a partir del texto y el nivel de desempeño que exige del escolar.
2. Determinación de los formatos de preguntas a elaborar: para lograr variedad en las preguntas es necesario emplear variados formatos, pero su selección depende del objetivo de la lectura, características del texto y de los escolares.
3. Formulación de las preguntas: consiste en la redacción de las preguntas. Es importante tener en cuenta la o las respuestas posibles de cada pregunta.

3.4.3. *Implementación*

1. Aplicación de las actividades en el grupo escolar: es importante la determinación de los medios y planos para presentar las preguntas, es decir, elegir si las preguntas elaboradas se presentarán de forma oral y/o escrita y los medios para presentárselas a los escolares (hojas de trabajo, folletos, softareas, juegos, tarjetas, pancartas, etc.)
2. Diagnóstico del estado final: el maestro debe comparar los resultados obtenidos en el aprendizaje de los escolares y en su desempeño después de la aplicación de la metodología con los iniciales. Deberá valorar cuanti y cualitativamente los mismos.

4. Ejemplificación de la metodología

A continuación se describirá el proceso de implementación de la metodología elaborada en un caso particular. El mismo fue seleccionado de una de las clases impartidas en el grupo escolar tomado como muestra.

1. - *Planificación:* En esta etapa se hizo un estudio minucioso del diagnóstico de los escolares, con énfasis en las potencialidades y necesidades tanto en el orden cognitivo como afectivo – motivacional. Luego se formuló un texto que se ajustara a las características psicopedagógicas de los escolares muestreados y que posibilitara potenciar la unidad entre lo instructivo, lo educativo y lo desarrollador. Por último se realizó el análisis de los términos matemáticos y del vocabulario común que aparecen en él e inciden directamente en la comprensión del mismo.

Texto: Durante el año 2001 se produjeron 285 incendios forestales en Cuba. De ellos, 40 fueron intencionales. La quinta parte de ellos fue por causa natural. El resto tuvo otras causas.

2. - *Diseño:* El inicio de la etapa tuvo lugar con el análisis del problema para la identificación de las operaciones cognitivas que más directamente inciden en la búsqueda de la vía de solución y su valoración integral como texto. Teniendo en cuenta el referido estudio y las características psicopedagógicas de los escolares de quinto grado se determinaron como esenciales para la comprensión del mismo las operaciones cognitivas que a continuación se plantean por las siguientes razones:

- Identificación de información explícita: es esencial que los escolares identifiquen la temática a la que se hace alusión en el texto, además de los datos que se ofrecen, tales como: total de incendios y la información que se ofrece de ellos por tipo de causa.
- Identificación de información implícita: está implicada en el proceso de comprensión de la relación cuantitativa existente entre el total de incendios y los que ocurrieron por causa natural; así como sus formas de representación (numérica o gráficamente).
- Elaboración de inferencias: constituye el eslabón central del proceso de comprensión, pues posibilita construir datos no dados explícitamente en el texto a partir de relaciones lógicas más complejas (parte - todo), tales como: a) cantidad de incendios por causa natural, b) cantidad de incendios por causas diferentes a la natural e intencional, c) otras relaciones cuantitativas que se quieran establecer.
- Valoración: está implicada en la elaboración de juicios en relación con los incendios forestales, por lo que resulta útil para el cumplimiento de la función educativa de los problemas matemáticos a partir de aprovechar sus potencialidades para la educación de la responsabilidad ciudadana.
- Creación: está implicada en la elaboración por parte de los escolares de preguntas que conlleven a la aplicación de operaciones de cálculo para responderlas.

Al identificar las operaciones cognitivas que más directamente inciden en la comprensión del texto elaborado se tuvo en cuenta las ventajas que tiene cada formato de pregunta para cada tipo de operación cognitiva. Luego se elaboraron las preguntas que a continuación se muestran teniendo en cuenta todos los aspectos hasta aquí señalados.

1. Pregunta cerrada de selección simple. Operación: identificación de información explícita. Nivel I.

   En el texto se hace referencia a los:

   a) __ incendios ocurridos en Cuba durante el año 2001.
   b) __ incendios ocurridos por años en Cuba.
   c) __ incendios forestales ocurridos en el año 2001 en Cuba.
   d) __ incendios ocurridos en Cuba por causa natural.

2. Pregunta cerrada de selección simple. Operación: identificación de información implícita. Nivel I.

   El número 2001 en el texto representa:

   a) __ la cantidad de incendios ocurridos en Cuba.
   b) __ el año en que ocurrieron los incendios forestales en Cuba.
   c) __ la fecha en que ocurrieron los incendios a que se hace referencia en el texto.
   d) __ el año en que más incendios forestales ocurrieron.

3. Pregunta cerrada de pareado. Operación: identificación de información implícita. Nivel I.

   Enlaza los elementos de la columna A con los de la B.

A. Datos numéricos	B. Información que representa
a) 1/5 de 285	__ cantidad de incendios intencionales
b) 40	__ número de incendios forestales en el año 2001
c) 285	__ cantidad de incendios por causa natural
	__ no se sabe

4. Pregunta abierta. Operación: formulación de inferencia. Nivel II.

   ¿Cuántos incendios forestales por causa natural ocurrieron en Cuba durante el año 2001?

5. Pregunta cerrada de verdadero y falso. Operación: formulación de inferencias. Nivel II.

   Escribe verdadero (v) o falso (f), según la información del texto leído.

   a) __ más de la mitad de los incendios forestales fueron intencionales.
   b) __ ocurrieron más incendios por causa natural que intencionales.
   c) __ la mayor cantidad de incendios forestales fueron naturales.
   d) __ más de cien incendios ocurrieron por causa natural.

6. Pregunta abierta. Operación: valoración. Nivel II.

   ¿Qué opinas de la actitud de las personas que provocan incendios forestales?

7. Pregunta abierta breve. Operación: elaboración de inferencias unido a creación. Nivel III.

   Elabora una pregunta a partir del contenido del texto, la cual requiera de emplear una operación de cálculo para responderla.

8. Pregunta abierta. Operación: problematización del contenido. Nivel III.

   ¿Cuántos incendios forestales del año 2001 no tuvieron una causa natural o no fueron intencionales?

3. - *Implementación:* En esta etapa se hizo un estudio minucioso del diagnóstico de los escolares, con énfasis en las potencialidades y necesidades tanto en el orden cognitivo como afectivo – motivacional. Luego se formuló un texto que se ajustara a las características psicopedagógicas de los escolares muestreados y que posibilitara potenciar la unidad entre lo instructivo, lo educativo y lo desarrollador. Por último se realizó el análisis de los términos matemáticos y del vocabulario común que aparecen en él e inciden directamente en la comprensión del mismo.

En esa etapa se determinó presentar todas las preguntas en una hoja de trabajo con el objetivo de aprovechar óptimamente el tiempo en función del trabajo independiente de los escolares – forma adoptada para la organización de la clase – pues copiar las preguntas en la pizarra o las libretas requiere de mayor tiempo. En el momento en que se realizó esta actividad, ya se había trabajado de manera frontal con los escolares en varias ocasiones, pues habían transcurrido cinco meses del referido curso escolar, por lo que se consideró que tenían un adecuado adiestramiento para realizar la actividad de forma independiente. Las respuestas a las preguntas uno, dos y seis fueron exigidas de forma oral, ya que las dos primeras son las más sencillas y la seis, por su parte, exige de exposición de juicios, confrontación de criterios y otras acciones que resultan menos factibles realizarlas por escrito. El resto de las respuestas fueron exigidas en el plano escrito. A continuación se describirá lo ocurrido de forma generalizada:

Preguntas 1 y 2. Todas las respuestas ofrecidas a estas preguntas fueron correctas.

Pregunta 3. Los incisos b) y c) fueron enlazados correctamente por todos los escolares. En el inciso a) se equivocaron dos escolares, los cuales seleccionaron la última opción de la columna B. Los mismos recibieron atención individualizada al planteársele actividades donde se les exigía escribir fracciones representadas gráficamente y leerlas. Luego se les indicó que analizaran nuevamente la pregunta y la respondieron bien. De ello se infiere la importancia de la traducción del código verbal al matemático y viceversa en la comprensión de problemas y la necesidad de realizar ejercicios de este tipo en cada uno de los contenidos que se van enseñando para lograr mayor efectividad en las clases de resolución de problemas.

Preguntas 4, 5 y 8. Las preguntas cuatro y ocho fueron respondidas correctamente por todos los escolares. En la pregunta cinco el inciso c) fue respondido de forma incorrecta por 4 escolares. Al realizar un análisis individual con ellos para indagar sobre el razonamiento llevado a cabo todos expusieron que lo consideraron verdadero al comparar la cantidad de incendios por causa natural con los intencionales. Ello evidencia que los mismos hicieron una comprensión limitada del texto, pues habían ocurrido otros incendios por causas diferentes a las señaladas por ellos. El error cognitivo antes expuesto fue corregido a partir de las siguientes preguntas:

- ¿Cuáles fueron las causas de los incendios ocurridos en el año 2001 en Cuba, según el texto?
- ¿Cuál fue la causa que generó mayor cantidad de incendios?

Pregunta 7. Todos los escolares respondieron correctamente la pregunta, aunque resulta necesario aclarar que los mismos no hallaron nuevas relaciones entre los datos que ofrecía el texto. Por ello elaboraron preguntas similares a las que se les plantearon a ellos, mostrando de esta forma que poseen insuficiente desarrollo de la capacidad para establecer relaciones.

Todo el proceso realizado con el texto fue útil para evaluar el aprendizaje de los escolares durante la clase, enfatizando en los logros, las insuficiencias y las causas de estas últimas.

5. Implementación de la metodología en la práctica educativa

La aplicación de la propuesta se realizó durante el curso escolar 2010 – 2011. Para la realización de la investigación se seleccionó en la Escuela Vocacional de Arte "Luis Casas Romero" del municipio Camagüey una muestra intencional conformada por 14 escolares de quinto grado, por recibir clases del principal autor del artículo. El rendimiento académico de los escolares era promedio y mostraban mayor interés por el estudio de las asignaturas del área de Humanidades. Sentían motivación por la realización de debates y poseían una buena expresión oral. Se caracterizaban por tener adecuadas relaciones con sus compañeros, lo que facilitó el trabajo grupal.

Para constatar el dominio de los escolares sobre la comprensión de problemas matemáticos se aplicó una prueba pedagógica. La misma poseía características similares a las actividades analizadas anteriormente. Consistía en responder 10 preguntas relacionadas con un problema compuesto dependiente, las que estaban en correspondencia con los tres niveles de desempeño cognitivo que se asumen en la investigación (reproducción, aplicación y creación). Se midió el dominio de las operaciones cognitivas más importantes, como son: identificar, inferir, valorar y contextualizar información. El procesamiento de la información obtenida se realizó teniendo en cuenta las operaciones cognitivas y los niveles de desempeño cognitivo de la manera siguiente:

- Sin nivel: son considerados aquellos escolares que no responden correctamente al menos 3 de las 4 preguntas del primer nivel.
- Nivel I: aquellos escolares que responden correctamente al menos tres de las 4 preguntas del primer nivel.
- Nivel II: aquellos escolares que alcanzan el primer nivel y responden correctamente al menos 2 de las 3 preguntas del segundo nivel.
- Nivel III: aquellos escolares que alcanzan el segundo nivel y responden correctamente al menos 2 de las 3 preguntas del tercer nivel.

De los 14 escolares muestreados 5 (35, 7 por ciento) fueron clasificados en el primer nivel y las mayores dificultades estuvieron en la identificación de información implícita. El segundo nivel fue alcanzado por escolares 3 (21, 4 por ciento) y la operación más afectada fue la inferencia. En el tercer nivel se clasificaron 2 escolares (14, 28 por ciento), confrontándose las mayores deficiencias en la extrapolación de mensajes y contextualización. Otro de los aspectos negativos fue que no obtuvieron nivel 4 escolares (28, 57 por ciento). De allí se pudo inferir que los escolares presentaban dificultades en la comprensión de problemas matemáticos.

Se empleó también la observación sistemática al desempeño de los escolares para diagnosticar el estado inicial del problema y después para apreciar el avance paulatino de los mismos, a partir de la implementación en la práctica educativa de la metodología que se propone. En la misma se pudo obtener información sobre el poco desarrollo de habilidades para determinar las ideas esenciales, la traducción del código matemático al lingüístico, la insuficiente argumentación de sus puntos de vista y el pobre desarrollo del vocabulario matemático de los mismos.

El pre – experimento de la investigación adquirió el formato siguiente: prueba – estímulo – prueba, ya que se aplicó una prueba pedagógica inicial, luego se comenzó a aplicar la metodología en las clases y por último se valoró su efectividad a partir del análisis de los resultados de una prueba pedagógica de salida.

La implementación de la metodología comenzó desde el primer período lectivo. Se iba valorando de forma sistemática a partir del análisis de las actividades que realizaban los escolares en sus libretas y cuadernos de trabajo. También se observaba la independencia de los escolares durante la clase, su participación activa y su estado de satisfacción y motivación.

Gradualmente se fue apreciando en los mismos una mayor motivación por la actividad, independencia en la búsqueda del conocimiento, desarrollo de las habilidades comunicativas como: leer, escuchar, escribir y hablar. También permitió que fueran logrando mayores índices de valoración de su actividad y que argumentaran sus criterios. En el cuarto período de clases se realizó con este mismo objetivo una prueba pedagógica a los trece escolares que quedaban en ese momento, la cual tenía características similares a la inicial. En la misma se pudo evidenciar logros significativos en la actividad, así como en el desarrollo de habilidades comunicativas, hábitos, entre otros. Los 13 escolares fueron clasificados por niveles de desempeño cognitivo a partir de los resultados obtenidos: 2 en el primer y segundo niveles, 8 en el tercero y 1 solo dejó de obtener nivel, lo que representa el 14, 28; 64, 2 y 7, 1 por ciento respectivamente. No obstante persistieron dificultades relacionadas con la identificación de información implícita, generadas fundamentalmente por el insuficiente dominio para traducir del código matemático al lingüístico y viceversa; así como la elaboración de inferencias a partir de relaciones de parte – todo.

En la gráfica que a continuación se muestra se comparan los resultados iniciales y finales del diagnóstico.

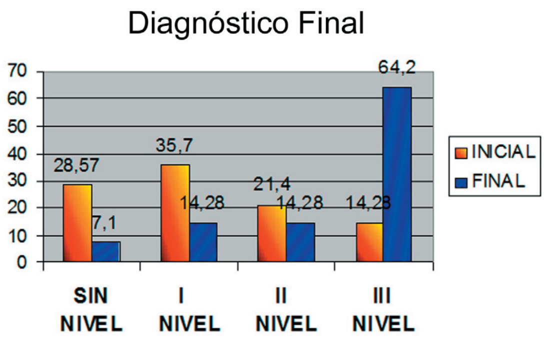


Figura 1. Resultados del diagnóstico

6. Conclusiones

La comprensión de problemas matemáticos es una actividad de gran importancia, ya que favorece además del desarrollo de habilidades, hábitos y capacidades el aprovechamiento de las potencialidades del texto para la labor educativa de una manera integradora; sustentándose la misma en el principio de la unidad entre lo instructivo, lo educativo y lo desarrollador en el proceso pedagógico, postulado por la Didáctica desarrolladora.

Los escolares muestreados en la investigación mostraron bajos niveles en su desempeño al comprender problemas matemáticos, resultando entre las operaciones cognitivas más afectadas la identificación de información implícita, la elaboración de inferencias, la extrapolación de mensajes y la contextualización de la información.

La metodología propuesta constituye una herramienta adecuada para la dirección del proceso de enseñanza – aprendizaje de la comprensión de problemas matemáticos, ya que se sustenta en el estudio de nexos entre los postulados básicos del trabajo con problemas matemáticos y la comprensión textual desde la concepción de la didáctica desarrolladora.

La implementación de la metodología en la práctica educativa permitió contribuir al desarrollo de la comprensión de problemas matemáticos en los escolares muestreados, así como a la formación de sentimientos y valores en correspondencia con el fin de la Enseñanza Primaria.

Referencias bibliográficas

Addine, F. (2013). *La Didáctica General y su enseñanza en la Educación Superior Pedagógica.* La Habana, Cuba: Pueblo y Educación.

Ballester, S., et. al. (1992). *Metodología de la enseñanza de la Matemática. Tomos I y II.* La Habana, Cuba: Pueblo y Educación.

Bermúdez, R. & Rodríguez, M. (2009): *Teoría y metodología del aprendizaje.* Segunda Edición. La Habana, Cuba: Pueblo y Educación.

Bórev, I. (1989). El análisis sistémico – integral de la obra artística. En D. Navarro (Eds.) *Textos y contextos. Tomo I* (pp. 43 – 72). La Habana, Cuba: Arte y Literatura.

Campistrous, L. & Rizo, C. (1996). *Aprende a resolver problemas aritméticos.* La Habana, Cuba: Pueblo y Educación.

Capote, M. (2005). *La etapa de orientación en la solución de problemas aritméticos para la escuela primaria.* La Habana, Cuba: Pueblo y Educación.

Chancasanampa, G. (2010): *Influencia de la comprensión lectora en la resolución de problemas matemáticos*. Obtenido en febrero 5, 2015, en http://monografias.com/trabajos81/comprensión-lectora-resolución-problemas-matemáticos

De Armas, N. (2011). Aproximación al estudio de la metodología como resultado científico. En N. De Armas & A. Valle (Eds.). *Resultados científicos en las investigaciones educacionales* (pp. 83–105). La Habana, Cuba: Pueblo y Educación.

De Guzmán, M. (1991). Para pensar mejor. Barcelona: Labor.

Díaz, Á. (2010). La comprensión lectora de los problemas matemáticos. *Innovación y Experiencias Educativas*, *44*, 32–44.

Domínguez, R. (1999). *Propuesta metodológica para una enseñanza explícita de la resolución de problemas matemáticos.* (Tesis de Maestría no publicada), IPLAC, Cuba.

Fernández, G. & Huepp, F. (2014). *Fundamentos neuropsicológicos del lenguaje.* La Habana, Cuba: Pueblo y Educación.

Frade, L. (2014). *Comprensión lectora de problemas matemáticos*. Obtenido en febrero 5, 2015, de http:// www.eleducador.com

Fridman, L. (1995). *Metodología para resolver problemas de Matemáticas*. Ciudad de México, México: Iberoamérica.

Gallardo, O. (2005): El humor: ¿texto literario? En J. Hernández, J. & O. Gallardo (Eds.), *Español, texto y comunicación* (pp. 73–85). Camagüey, Cuba: Ácana.

Geissler, E. (1975). *Metodología de la enseñanza de la Matemática de 1ro. a 4to. grado. Tercera Parte.* La Habana, Cuba: Pueblo y Educación.

González, F. (1995). *El Corazón de la Matemática.* Venezuela. ISBN 980–327–200–4.

González, V. et. al. (1995). *Psicología para educadores.* La Habana: Pueblo y Educación.

Hernández, J. (2012). Criterios para la evaluación de la comprensión de textos como sistema de relaciones cognitivo - afectivas. *Transformación*, *8* (2), 24–36.

Hernández, J. (2010). La comprensión de textos: un desafío teórico y didáctico actual. En J. Montaño & A. Abello (Eds.) *(Re)novando la enseñanza – aprendizaje de la lengua española y la literatura* (pp. 105–157). La Habana, Cuba: Pueblo y Educación.

Jungk, W. (1979). *Conferencias sobre metodología de la enseñanza de la Matemática. Primera Parte.* La Habana, Cuba: Libros para la Educación.

Kuusinen, A. V. (1961). *Manual de marxismo – leninismo.* La Habana: Imprenta Nacional de Cuba.

Labarrere G., & Valdivia, G. (1991). *Pedagogía.* La Habana: Pueblo y Educación.

Labarrere, A. (1987). *Bases psicopedagógicas de la enseñanza de la solución de problemas matemáticos en la escuela primaria.* La Habana, Cuba: Pueblo y Educación.

Labarrere, A. (1988). *¿Cómo enseñar a los alumnos de primaria a resolver problemas?* La Habana, Cuba: Pueblo y Educación.

Lothar, K. (1972). *Introducción a la Didáctica General.* La Habana, Cuba: Pueblo y Educación.

Lotman, I. (2003). La semiótica de la cultura y el concepto de texto. *Entretextos 2*, 48–54.

Luria, A. (1980). *Lenguaje y pensamiento.* Barcelona, España: Fontanella.

Ontoria, A. (2006). *Aprendizaje centrado en el alumno*. Barcelona, España: Narcea.

Peralta, R. (2012). Estrategias para la comprensión de textos escolares. Una experiencia docente (pp. 252–259). En L. Rodríguez, (Eds.) Leer en el siglo XXI. La Habana, Cuba: Gente Nueva.

Pérez, L., & Iglesias, T. (1999). Pregunta bien para que te respondan bien. En R. Mañalich (Eds.) *Taller de la Palabra* (274–277). La Habana, Cuba: Pueblo y Educación.

Pérez, K. (2014). Periodización de la enseñanza de la solución de problemas matemáticos en la escuela primaria cubana. *IPLAC 4*, 141–151.

Pérez, K., & Hernández, J. (2015). La comprensión de problemas matemáticos en la enseñanza primaria. *Transformación*, *11* (2), 15–26.

Pérez, K., Álvarez, E. & Breña, C., (2016). Reflexiones sobre el concepto de problema matemático. *Bases de la Ciencia*, *1* (3), 15–26

Perkins, D. (1995). *La escuela inteligente.* Barcelona, España: Gedisa.

Pino, D. (2005). Coordenadas para un acercamiento al texto expositivo. En J. Hernández & O. Gallardo (Eds.), *Español, texto y comunicación.* (pp. 126–135). Camagüey, Cuba: Ácana.

Polya, G. (1976). *Cómo plantear y resolver problemas matemáticos.* Ciudad de México, México: Trillas.

Quiroga, P. (2006). *Relación entre la comprensión lectora y la resolución de problemas matemáticos de los alumnos del 3° y 4° grado del nivel primaria*. Obtenido en marzo 14, 2014, de http://www.monografías.com/trabajos75/relación-comprensión-lectora-resolución-problemas

Ricoeur, P. (1998). *Teoría de la interpretación. Discurso y excedente de sentido.* Ciudad de México, México: Editores siglo XXI.

Rodríguez, J., & Abad, G. (2012). *La comprensión de textos en la resolución de problemas algebraicos en el proceso de enseñanza – aprendizaje de la matemática.* Obtenido en marzo 14, 2014, de http://www.eumed.net/rev/ced/28/rrap.htm

Rubinstein, S. L. (1966). *El proceso del pensamiento.* La Habana, Cuba: Editora Universitaria.

Rubio, R. et. al. (2006). Los niveles de asimilación y niveles de desempeño cognitivo. Reflexiones. *Humanidades Médicas 6* (1), 43–49. Obtenido en marzo 14, 2014, de http://scielo.sld.cu/scielo.php?script

Schoenfeld, A. (1991). *Ideas y tendencias en la resolución de problemas matemáticos*. Obtenido en marzo 17, 2014, de http://www.eleducador.com

Secades, J. (2007). Fundamentos teóricos en los que se sustenta la comprensión lectora con enfoque cognitivo, comunicativo y sociocultural en la enseñanza de la lengua. En A. Roméu (Eds.), *El enfoque cognitivo, comunicativo y sociocultural en la enseñanza de la lengua y la literatura* (pp. 111–139). La Habana, Cuba: Pueblo y Educación.

Vigotski, L. S. (1987). *Historia del desarrollo de las funciones psíquicas superiores*. La Habana, Cuba: Científico – Técnica.

Vila, A. & Callejo, M. (2004). *Matemáticas para aprender a pensar. Las creencias en la resolución de problemas.* Madrid, España: Ediciones Narcea S. A.

Villarreal, F. (2015). *Procedimientos didácticos.* Obtenido en diciembre 9, 2016, de http://fvg.mx/propiedad-intelectual/pi.../13-procedimientos

Yakoliev, N. (2001). *Metodología y técnica de la clase.* La Habana, Cuba: Pueblo y Educación.

Zilberstein, J., & Silvestre, M. (2002). *Hacia una Didáctica desarrolladora.* La Habana, Cuba: Pueblo y Educación.

Autores

Karel Pérez Ariza. Universidad de Camagüey Sede, “José Martí”, Cuba.
karel.perez@reduc.edu.cu

José Emilio Hernández Sánchez. Universidad de Camagüey Sede, “José Martí”, Cuba.
jose.emilio@reduc.edu.cu

La Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (*Relime*) es la publicación oficial de investigación del Comité Latinoamericano de Matemática Educativa (Clame AC). Se edita tres veces por año. Acepta artículos en español, portugués, inglés y francés. Está dirigida a investigadores en Matemática Educativa, a profesores de matemáticas y ciencias, y estudiantes de licenciatura y posgrado interesados en conocer los resultados recientes de las investigaciones y en profundizar en el conocimiento de un tema en particular.

Objetivos:

1. *Relime* pretende ser un foro abierto a las diversas escuelas del pensamiento (paradigmas, teorías, metodologías, métodos, enfoques) en nuestra disciplina, la Matemática Educativa, sin definir perspectivas únicas y con un profundo respeto a las tradiciones educativas y los contextos de los diversos sistemas educativos de nuestra región.
2. Dar a conocer resultados de investigación original en Matemática Educativa que se realizan en América Latina y el Caribe y en el resto del mundo.
3. Contribuir al proceso de profesionalización de la Matemática Educativa en nuestra región.
4. Fomentar una cultura de divulgación e investigación entre los distintos grupos de investigación en nuestra región.
5. Propiciar el debate y la reflexión profunda sobre problemas de investigación que fortalezca la disciplina en nuestra área geográfica.
6. Fortalecer la calidad de la investigación en Matemática Educativa y la vinculación entre comunidades nacionales e internacionales.

INSTRUCCIONES TÉCNICAS PARA AUTORES

LAS CONTRIBUCIONES

Toda contribución propuesta a Relime se somete a un estricto proceso de arbitraje. Las contribuciones deberán ser resultado de investigaciones teóricas o experimentales, estudios de caso, etnográficos, etc., en formato de artículo. Estas contribuciones deberán ser trabajos inéditos de investigación, no estar en arbitraje en otra revista ni tratarse de traducciones previamente publicadas en su lengua original.

CARACTERÍSTICAS DE LOS MANUSCRITOS

Relime publica artículos en castellano, portugués, inglés y francés. Acepta ensayos teóricos originales así como propuestas que sean resultado de estudios experimentales, de casos, de observación, etnográficos, etc.

Los artículos deberán tener un máximo de nueve mil palabras, incluyendo referencias, figuras, cuadros y anexos. En caso de que su propuesta exceda esta extensión, el Comité de Redacción decide si considera la posibilidad de publicarlo siempre que tal propuesta no ocupe todo el espacio disponible en un número de la revista.

En el caso de reportes de estudios experimentales, de casos, de observación, etnográficos, etcétera, recomendamos que los escritos contengan:

1) Resumen del trabajo, deberá tener un máximo de 10 renglones escrito en español, portugués, inglés y francés y de 5 palabras clave en las cuatro lenguas. Resumen, título y palabras clave deben ser escritos en los cuatro idiomas.
2) Una exposición del problema de investigación (su pertinencia y relevancia en el tema que se aborda).
3) Indicaciones globales acerca de la estructura teórica del reporte.
4) Justificación de la metodología usada.
5) Desarrollo de algunos ejemplos y análisis de resultados.
6) Referencias bibliográficas.

Si se trata de ensayos teóricos y filosóficos, nuestra recomendación es la siguiente:

1) Iniciar con una exposición del problema de investigación (su pertinencia y relevancia en el tema que se aborda).
2) Revisión de la literatura que incluya trabajos importantes que sustenten la investigación, en el que se refleje una variedad de resultados actuales. Esta revisión debe incluir investigaciones internacionales pertinentes y no limitarse a estudios de un solo país.
3) Ofrecer indicaciones sobre la estructura teórica o filosófica en la cual se desarrolla el tema del artículo.
4) Exposición detallada de la posición del autor dentro del tema o los temas de exposición. Esto debe reflejarse a través del desarrollo de ideas, más que de una lista de reflexiones.

5) Implicaciones o consecuencias de la investigación en el área.
6) Referencias bibliográficas.

PROCESO DE EVALUACIÓN EN RELIME

Los artículos propuestos a Relime serán leídos por dos miembros del Comité de Redacción, y si el contenido atiende a la originalidad y satisface los criterios anteriores, así como a la claridad de la presentación e interés para la comunidad de matemática educativa, serán evaluados en forma "ciega" por dos investigadores reconocidos y con experiencia dentro del área. En el proceso de evaluación se garantizará el anonimato de autores y evaluadores.

El resultado del dictamen puede ser:

A. Sugerencia de publicar el artículo sin modificaciones.
B. Sugerencia de publicar el artículo bajo reserva de hacer ligeras modificaciones.
C. Sugerencia de reestructurar el artículo atendiendo a los comentarios, lo que precisaría una nueva revisión.
D. Sugerencia de rechazo del artículo.

FORMATO DE LAS CONTRIBUCIONES

Todas las contribuciones deberán estar escritas en procesador de texto Word 6.0 o superior, tipo de letra Times New Roman, tamaño 11 y utilizar un espacio anterior y posterior de 4 pt, lo que significa que no se requiere dar espacio entre un párrafo y otro. Los cuatro márgenes de la página deberán ser de 2.5 cm. Para las expresiones matemáticas debe usarse el editor de ecuaciones.

ENCABEZADOS PRINCIPALES

El estilo de letra para los encabezados principales es tipo VERSALES en formato minúsculas, utilizando un espacio anterior de 36pt y el posterior de 12pt, lo que significa que no se requiere dar espacio entre un encabezado y los párrafos subsecuentes. Enumerar las secciones de los encabezados principales (usando 1, 2, 3, etc.) y utilizar el estilo de alineación centrada.

Subtítulos

El estilo de letra para los subtítulos del artículo es tipo Times New Roman, tamaño 11 y cursiva. La primera letra debe escribirse con mayúsculas. Utilizar un espacio anterior de 24 pt y el posterior de 10 pt, lo que significa que no se requiere dar espacio entre un subtítulo y los párrafos subsecuentes. Los subtítulos deberán enumerarse 1.1., 1.2, 1.3, etc., según corresponda en estilo tipo Normal. Los subtítulos posteriores a un encabezado principal deben tener un espacio anterior y posterior de 6 pts.

Estilo para las tablas

Las tablas deben tener una alineación centrada. El estilo de letra del texto en el interior de la tabla debe ser tipo Times New Roman, Normal, tamaño 10 y con un espacio anterior y posterior de 2 pto. Enumerar las tablas, usando tipo de letra VERSALES tamaño 10, en formato minúscula: TABLA I, TABLA II, TABLA III, etc., utilizando un espacio anterior de 6 pto y posterior de 0 pto. El número de la tabla debe escribirse en la parte superior y su título debajo, utilizando un estilo de alineación centrada y tipo de letra normal tamaño 10.

Estilo para las figuras e imágenes

Las figuras e imágenes deben tener una alineación centrada. El estilo de letra debe ser tipo Times New Roman, tamaño 10 y tipo Cursiva y Normal. Escribir el número de la figura o imagen en formato tipo cursiva y el título en formato tipo normal. Utilizar un espacio anterior de 2 pt y el posterior de 4 pt. Las imágenes y figuras deberán adjuntarse en un archivo independiente al manuscrito en formato de alta resolución.

Transcripciones

Para las transcripciones usar el estilo de letra normal, tipo Times New Roman tamaño 10. Utilizar un interlineado sencillo.

Usar estilos de transcripción como los siguientes:

Estudiante: Para graficar utilicé uno de los métodos que vimos en clase. Me pareció que era el más simple para resolverlo

Profesor: ¿Por qué consideras que ese método es más simple?

Si las líneas de la transcripción requieren ser numerados, entonces usar el estilo de transcripción enumerada como sigue:

[122] Entrevistador: En la primera actividad se te propuso determinar la función velocidad ¿Podrías explicar cómo la hallaste?

[123] Alumno: Hum... pues...

En el caso de que no se requiera hacer referencia a los números, se sugiere usar el primer estilo de transcripción (indicada párrafos arriba).

Reconocimientos

Los reconocimientos a personas, fondos, asociaciones, etc. deberán colocarse en una sección separada antes de las referencias bibliográficas. Los nombres de organizaciones financieras deberán escribirse completos.

Bibliografía, referencias y notas

Solicitamos emplear el estilo de la APA (Publication Manual of the American Psychological Association, 6th ed., 2009) para las citas de pie, notas, referencias textuales y bibliografía. (Pueden apoyarse en el siguiente link: http://www.apastyle.org/learn/tutorials/basics-tutorial.aspx; o bien, consultar el Manual).

La bibliografía deberá escribirse en forma de lista sin enumerar y en orden cronológico. El estilo de letra debe ser Times New Roman 9. Para escribir una referencia debe usarse alineación justificada para el primer renglón. A partir del segundo renglón deberán establecer una sangría especial de 0.63 cm.

Las notas deberán escribirse al final de cada página del documento. El estilo de letra que deberá usarse es Times New Roman 9 en formato normal.

Información complementaria

1) No se devolverán los artículos originales.
2) El editor se reserva el derecho de hacer algunas modificaciones necesarias para mantener el estilo de la publicación.
3) Los textos pueden ser publicados en otro órgano editorial previo permiso expreso, por escrito, y haciendo referencia explícita de la fuente.
4) Los autores recibirán gratuitamente dos ejemplares del número en que se haya publicado su artículo.
5) No se realizarán pagos a los autores por los artículos que se publiquen en *RELIME*. Para mayores informes, puede visitar la página web: http://www.clame.org.mx/relime.htm o bien el correo electrónico:

relime@clame.org.mx

SUSCRIPCIÓN A RELIME

Costo del volumen 20 (tres números)

Suscripción Institucional:
Volumen US$ 120
Cada número US$ 50

Suscripción Individual:
Volumen US$ 50
Cada número US$ 20

Suscripción Miembros Clame:
Volumen US$ 20
Cada número US$ 10

Estos costos NO aplican a *números especiales*,
NO incluyen gastos de envío, NI comisión bancaria por transferencias
o depósitos de cheques emitidos fuera de México

Las suscripciones deberán solicitarse al correo electrónico
suscripcion@relime.org

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa
Volumen 20, Número 2

Diseño y Web: Emilio Serna Hernández
Servicios Editoriales Recrea
(Miembro CANIEM - 3663)
sernandem@yahoo.com.mx

Se imprimió en los talleres de
Editorial Progreso S.A. de C.V.
Sabino # 275
Col. Santa María la Ribera
Delegación Cuauhtémoc
06400 México, D. F.

Julio de 2017
Tiraje: 1000 ejemplares más sobrantes