EDITORIAL

ARTÍCULOS

RELIME 20-1

1665-2436

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa

Vol. 20, Núm. 1, marzo 2017

Vol. 20, Núm. 1, 2017

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa

Relime

Clame Comité Latinoamericano de Matemática Educativa

Publicación oficial de investigación del Comité Latinoamericano de Matemática Educativa

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa

Departamento de Matemática Educativa – Cinvestav
AP 14-740, México 07000, DF
M É X I C O

Portada: «Opus 1» de Oscar Reutersvärd en 1934. Reproducida con permiso de los herederos del artista.

Publicación oficial de investigación del Comité Latinoamericano de Matemática Educativa, Clame A.C. Consejo Directivo: *Presidente:* Olga Lidia Pérez González – Cuba; *Secretario:* Hugo Parra Sandoval – Venezuela; *Tesorera:* Daniela Reyes Gasperini – Argentina; *Vocal Norteamérica:* Rebeca Flores García – México; *Vocal Caribe:* Juan Mazueta Concepción – República Dominicana; *Vocal Centroamérica:* Luis Moreno Chandler – Panamá*; Vocal Sudamérica:* Marcela Parraguez González – Chile.

Publicación cuatrimestral. Se publica en los meses de marzo, julio y noviembre. Vol. 20, Núm. 1, marzo, 2017. Tiraje 1000 ejemplares. Suscripciones: suscripcion@relime.org. Contribuciones e información: relime@clame.org.mx, http://www.clame.org.mx.

Relime es una revista indizada en:
ISI Web of Knowledge, SSCI – Social Sciences Citation Index y Journal Citation Reports • ERIH – European Reference Index for the Humanities • Conacyt – Índice de Revistas Mexicanas de Investigación Científica y Tecnológica • Scopus – Elsevier Database • ZDM – Zentralblatt für Didaktik der Mathematik • IBZ – International Bibliography of Periodical Literature in the Humanities and Social Sciences • Clase – Citas Latinoamericanas en Ciencias Sociales y Humanidades • Iresie – Índice de Revistas de Educación Superior e Investigación Educativa • Latindex – Sistema Regional de Información en Línea para Revistas Científicas de América Latina, el Caribe, España y Portugal • Redalyc – Red de Revistas Científicas de América Latina y el Caribe, España y Portugal • EBSCO – Information Services • Dialnet • Scielo-México – Scientific Electronic Library Online • Thomson Gale – Gale Iberoamérica.

2017 Impreso en México

Volumen 20 – Número 1 – 2017

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa

Clame Comité Latinoamericano de Matemática Educativa

Publicación oficial del Comité Latinoamericano de Matemática Educativa

ISSN 1665 – 2436.

Edición Colegio Mexicano de Matemática Educativa A.C. – México,
RFC CMM 040505 IC7.
Impreso en México

2017

Volumen 20 Número 1 Marzo de 2017

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa

REVISTA LATINOAMERICANA DE INVESTIGACIÓN EN MATEMÁTICA EDUCATIVA, Vol. 20, No. 1, marzo 2017, es una publicación cuatrimestral editada por el Colegio Mexicano de Matemática Educativa, A. C., a través del Comité Latinoamericano de Matemática Educativa, calle Av. Instituto Politécnico Nacional, 2508, Col. San Pedro Zacatenco, Delegación Gustavo A. Madero, C.P. 07360, Tel. (55) 57473819, www.clame.org.mx/relime.htm, relime@clame.org.mx. Editor responsable: Ricardo Cantoral. Reservas de Derechos al Uso Exclusivo No. 04-2013-042513070000-102, ISSN: 1665-2436, ambos otorgados por el Instituto Nacional del Derecho de Autor. Impresa por Editorial Progreso, S. A. de C. V., Sabino No. 275, Col. Sta. María la Ribera, C.P. 06400, Delegación Cuauhtémoc, México, D. F., este número se terminó de imprimir en marzo de 2017, con un tiraje de 1,000 ejemplares más sobrantes.

“Relime se publica con el apoyo de Conacyt, Cinvestav y Clame”

EDITORIAL

LA TRANSICIÓN DE RELIME AL CONTEXTO EDITORIAL DIGITAL

TRANSITION OF RELIME TO DIGITAL PUBLISHING CONTEXT

GISELA MONTIEL ESPINOSA
Departamento de Matemática Educativa - Cinvestav, IPN – México

Relime ha mantenido un sitio web donde ha dado acceso a todos sus artículos publicados, buscando difundir y posicionar la investigación de nuestra comunidad. Sin embargo, la estrategia que utilizamos ha dejado de ser la ideal en el contexto digital actual, pues el mundo editorial en él evolucionó más rápido de lo que muchos pudimos prever.

El mundo editorial académico, en particular el de la producción científica, es uno de los que más transformaciones está viviendo; lo sentimos sobre todo aquellas iniciativas que nacimos bajo la racionalidad de la publicación impresa. Si bien la transición se puede percibir sólo como una adaptación técnica, ésta demanda de entender y formar parte de una cultura digital; y los cambios en la cultura, resultan ser tareas complejas que deben llevar a cabo los colectivos, en su beneficio y en el de cada uno miembros.

Un excelente ejemplo de este cambio gira en torno al *acceso abierto*. El formato PDF (por su nombre en inglés: Portable Document Format) de nuestros artículos impresos alojados en nuestro sitio web, se considera acceso al archivo; pero no representa acceso abierto a la aportación científica difundida en él.

Hay dos aspectos fundamentales para hablar de acceso abierto: el nivel de acceso al contenido y los grados de libertad que tiene el lector para usarlo y compartirlo, manteniendo los derechos establecidos en las políticas editoriales de la publicación. Estos cambios sobre lo que se entiende por *abierto*, nos obligan a redefinirlo constantemente a propósito de las posibilidades que nos brinda Internet para comunicarnos a través de diversos dispositivos digitales.

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (2017) *20* (1): 5-7.
DOI: 10.12802/relime.17.2010

Durante los pasados 19 años, nuestra comunidad académica, principalmente iberoamericana, se ha mantenido al tanto de las aportaciones publicadas en la Relime, ya sea por el ejemplar que reciben en la Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa o en la Escuela de Invierno en Matemática Educativa (en México), o porque consultan nuestro sitio web con regularidad. En los últimos años la visibilidad de la revista incrementó gracias a su posición en los índices científicos de mayor impacto internacional, incrementando con ello el interés de la comunidad por leerla y publicar en ella.

Actuar en sintonía con la cultura digital actual, en este caso manifestada a través del acceso abierto, permitirá que, aunado a lo anterior, las aportaciones científicas de nuestros artículos sean accesibles a todo aquel, en el mundo, que necesite un resultado de investigación concreto, conozca o no a la revista, o a los índices de evaluación científica donde se encuentre.

Para lograr este tipo de acceso, nuestros artículos deben también estar escritos en el lenguaje de las máquinas, pues ellas realizan los procesos de búsqueda mediante los cuales un artículo se vuelve accesible a quien lo necesita. En esta ampliación de lenguaje, debemos reconocer las iniciativas emprendidas por Redalyc y Scielo, para apoyar a las revistas científicas en la *marcación* de sus artículos, bajo estándares científicos internacionales. Esta tarea ejemplifica bien la naturaleza multidisciplinar de este quehacer: se deben conocer los estándares y códigos para la marcación, y entender qué es lo que se está marcando. No basta entonces, sólo con vivir en la Red, debemos comunicarnos, convivir e interactuar con ella.

Igual de relevantes que el acceso a los resultados de investigación, son los grados de libertad que el lector tiene al usarlos y compartirlos. Los rangos de *licencias Creative Commons* son, quizá, el mejor referente que tenemos en el mundo editorial académico para valorar estos grados de libertad, con base en los cuales se determina si una publicación es *más* o *menos abierta*. En ese sentido, elegir una licencia va más allá de seleccionar una opción e insertar un logo en el sitio web o en el artículo; se trata de tomar postura respecto a qué aporta la revista a la generación de nuevo conocimiento científico y en qué medida lo quiere hacer, a partir de lo publicado.

Ha sido tal el impacto de esta redefinición del concepto *abierto* en la cultura digital, que hoy se discute y se emprenden iniciativas sobre *Ciencia Abierta* (*Open Science*) y *Datos Abiertos* (*Open Data*), que permitan a las comunidades participar de la investigación científica en una cultura *de todos y para todos*; abriendo el acceso a los datos para estudiarlos desde distintas tradiciones, perspectivas y metodologías. Esta dinámica de hacer ciencia produce, naturalmente, *Conocimiento Abierto* (*Open Knowledge*); que todo parece indicar, será el nivel de *acceso abierto* al que debemos aspirar.

En este sentido, para la *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* resulta de suma importancia llevar a cabo la transición al contexto editorial digital, que, sumada a las tareas e iniciativas regulares de difusión y producción, continúen fortaleciendo la generación de conocimiento científico en Matemática Educativa desde y para nuestra región. En el proceso necesitaremos de la comunidad, ya sea con su participación activa, con sus opiniones o recomendaciones, y en ocasiones con su paciencia, porque los procesos de transición no son inmediatos, pero son en beneficio de todos y de cada uno de nosotros.

Este 2017 es un año de transición para la Relime, con la que pretendemos integrar cambios de forma dinámica, quizá para que de ahora en adelante estos sean progresivos y con ello vivamos con naturalidad la era digital.

Gisela Montiel Espinosa

Valparaiso, Chile. Marzo, 2017

Nota: Agradezco a mi estudiante, Sergio Rubio-Pizzorno, la lectura y los comentarios a esta editorial. Valoro enormemente su acompañamiento en este periodo en el que he buscado encontrar la ruta óptima para la integración de nuestro quehacer académico al mundo digital en general. Conocer y entender la perspectiva de las nuevas generaciones ayuda sobremanera a reconocer los cambios que vienen.

Cesário Almeida, Luis Casas García, Ricardo Luengo González

ESTUDO DA ESTRUTURA COGNITIVA DOS ALUNOS DOS 9.º (14-15 ANOS DE IDADE) E 12.º ANOS (17-18 ANOS DE IDADE) DE ESCOLARIDADE SOBRE O CONCEITO DE PROBABILIDADE: O CONTRIBUTO DAS TEORIAS DOS CONCEITOS NUCLEARES E DOS CONCEITOS THRESHOLD

Study of the cognitive structure of Portuguese students in years 9 (14-15 year-olds) and 12 (17-18 year-olds) concerning the notion of Probability: A contribution of Theories of Nuclear Concepts and Threshold Concepts

RESUMEN

Con base en las Teorías de los Conceptos Nucleares y de los Conceptos Threshold, se pretende, con este artículo, presentar los resultados obtenidos sobre la estructura cognitiva, referida a la noción de Probabilidad, de alumnos de 9º (14-15 años de edad) y 12º (17-18 años de edad) curso de escolaridad, en Portugal. Tras ser impartida la enseñanza sobre este tema, en primer lugar fueron encuestados 344 alumnos y en un segundo momento 325. Los datos recogidos, de las Redes Asociativas Pathfinder (PFNET), permitieron identificar los conceptos que asumen un mayor relieve, su correspondiente organización y la relación entre las Teorías de los Conceptos Nucleares y de los Conceptos Threshold. Los resultados muestran que ambas teorías constituyen una destacada herramienta didáctica para la organización de la práctica docente y un referente pedagógico importante en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la Probabilidad.

PALABRAS CLAVE:

- *Probabilidad*
- *Teoría de los Conceptos Nucleares*
- *Conceptos Threshold*
- *Representación del Conocimiento*
- *Redes Asociativas Pathfinder*

ABSTRACT

Based on the Theories of Nuclear Concepts and Threshold Concepts, this paper aims at presenting the results of the cognitive structure of Portuguese students in years 9 (14-15 year-olds) and 12 (17-18 year-olds), concerning the notion of Probability. After having been taught the subject, 344 students were inquired in a first moment, and 325 in a second one. The Pathfinder Associative Networks (PFNETs) thus obtained led to identify the most relevant concepts in the students' conceptual framework, their respective organization and the possible relationship between the Theories of Nuclear Concepts and Threshold Concepts. The results show that both theories are useful tools to organize the teaching practice and a valuable and effective pedagogical framework, which should be taken into account in the teaching and learning processes of Probability.

KEY WORDS:

- *Probability*
- *Theory of Nuclear Concepts*
- *Threshold Concepts*
- *Knowledge Representation*
- *Pathfinder Associative Networks*

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (2017) *20* (1): 9-38.
Recepción: Julio 23, 2014 / Aceptación: Marzo 31, 2016. DOI: 10.12802/relime.17.2011

RESUMO

Com base na Teoria dos Conceitos Nucleares e dos Conceitos *Threshold*, pretende-se, neste artigo, apresentar os resultados obtidos sobre a estrutura cognitiva dos alunos dos 9.º (14-15 anos de idade) e 12.º (17-18 anos de idade) anos de escolaridade portugueses, em torno da noção de Probabilidade. Após a lecionação desta temática, e utilizando uma amostra de 344 alunos, num 1.º Momento, e de 325, num 2.º Momento, os dados recolhidos, através das Redes Associativas Pathfinder (PFNET), permitiram-nos identificar os conceitos mais significativos, as relações mais relevantes e estabelecer conexões entre as Teorias dos Conceitos Nucleares e dos Conceitos *Threshold*. Os resultados mostram que ambas as Teorias constituem uma outra ferramenta didática para organizar a prática pedagógica e um referencial pedagógico rico e fecundo, que deve ser levado em consideração no processo de Ensino e Aprendizagem da Probabilidade.

PALAVRAS CHAVE:

- *Probabilidade*
- *Teoria dos Conceitos Nucleares*
- *Conceitos Threshold*
- *Representação do Conhecimento*
- *Redes Associativas Pathfinder*

RÉSUMÉ

Basé sur les théories de Concepts Nucléaires et Threshold Concepts, cet article vise à présenter les résultats obtenues sur la structure cognitive des élèves portugaises dans les années 9 (14-15 ans) et 12 (17-18 ans), concernant à la notion de probabilité. Après l'enseignement du sujet, 344 élèves ont été interrogés dans en premier temps, et 325 dans un second temps. Les Pathfinder Associatifs Réseaux (PFNET) ainsi obtenus ont permis d'identifier des concepts les plus remarquables dans le cadre conceptuel des élèves et leur respective organisation, aussi bien que la relation possible entre les théories de Concepts Nucléaires et Threshold Concepts. Les résultats montrent que les deux théories sont des outils utiles pour organiser la pratique de l'enseignement et un cadre pédagogique précieux et efficace, qui devrait être pris en compte dans les processus d'enseignement et d'apprentissage des probabilités.

MOTS CLÉS:

- *Probabilités*
- *Théorie des Concepts Nucléaires*
- *Threshold Concepts*
- *Représentation des Connaissances*
- *Pathfinder Associatifs Réseaux*

1. Introdução

A procura e a compreensão organizativa dos conceitos associados a um dado conteúdo sempre desempenharam um papel relevante na Didática da Matemática e, nas últimas décadas, têm-se assumido como uma matéria de pesquisa importante entre investigadores educacionais. Apesar dos significativos avanços registados nos últimos tempos, a forma como a mente humana funciona e se organiza constitui, ainda, um enigma. Todavia, um dado amplamente aceite é o de que a informação é armazenada na memória de um individuo ajustando-se a uma certa disposição das ideias, ou, no contexto da aprendizagem de certos temas específicos da Matemática, a uma organização cognitiva de conceitos, noções e exemplos.

Em diferentes países, as novas propostas curriculares têm assumido a inclusão e o reconhecimento da importância do tema matemático Probabilidade desde os primeiros anos de escolaridade.

Esta temática constitui um tópico matemático extremamente interessante, prático e peculiar, sustentado pela diferente abordagem epistemológica que a sua aprendizagem pressupõe. Como refere Azcárate (1996) ele pressupõe a quebra de alguma primazia dada à lógica do sim/não, verdade/falso, do modelo determinístico, introduzindo nos estudantes uma forma diferente de pensar, ao admitir a existência, para além destas duas últimas possibilidades, de todo um intervalo no qual prevalece a incerteza e o acaso.

Para a sua abordagem didático-pedagógica, Batanero (2005, p. 250-251) enumera os elementos do significado de Probabilidade considerados relevantes - *o campo de problemas no qual emerge o objeto matemático, os elementos linguísticos, os procedimentos e algoritmos, as definições e propriedades dos objetos e as suas relações com outros objetos matemáticos e os argumentos e demonstrações das propriedades.* Em paralelo Gal (2005) reflete sobre o que deve ser entendido por literacia probabilística e alega que esta designação sugere, para além de crenças, atitudes, hábitos mentais e uma perspetiva crítica, um conjunto amplo de conhecimentos factuais e certas aptidões formais e informais. Nesta lógica sugere cinco aspetos importantes que se devem ter em consideração no seu ensino - *as grandes ideias, descobrir probabilidades, a linguagem, o contexto e as questões críticas* (Gal, 2005, p.46).

Com este trabalho, e após a seleção dos termos/conceitos/exemplo, verificamos que ao longo do processo de aprendizagem da noção de Probabilidade, existem conceitos que pela sua relevância, ao estabelecerem múltiplas relações, podem ser classificados como Conceitos Nucleares. Ainda podemos comprovar que os alunos, ao longo da sua escolarização, mantêm um número reduzido de conceitos como Nucleares nas suas representações da estrutura cognitiva sobre a Probabilidade, assim como a manutenção de algumas relações que estabelecem com outros termos e que se conservam e preservam no tempo, não se verificando um aumento da complexidade destas representações. Finalmente, constatamos a tendência para que os Conceitos Nucleares sejam também os conceitos mais fáceis de entender para os alunos e por esta razão, tendencialmente, não podem ser considerados potenciais Conceitos *Threshold*. No entanto provou-se a existência de uma relação significativa forte e positiva com que são referidos os potenciais Conceitos *Threshold* e os nós extremidade das PFNET.

2. Marco teórico

2.1. *O conceito de probabilidade e a sua didática*

O objeto matemático deste estudo – Probabilidade - constitui, presentemente, um conteúdo e uma componente essencial nos percursos formativos dos jovens e a sua relevância é reconhecida nas respetivas diretivas curriculares, assim como nos resultados das investigações didáticas.

O termo Probabilidade é utilizado frequentemente, e de um modo mais ou menos intuitivo, nas mais variadas situações do dia-a-dia, as quais apresentam "*uma característica comum, que é o facto de não se conseguir prever com exactidão e de antemão, qual o resultado da situação de incerteza*". (Graça Martins e Ponte, 2010)

No decorrer do desenvolvimento formal da noção de Probabilidade, foram-lhe sendo outorgados diferentes significados, justificados pela necessidade da resolução de situações práticas em diferentes períodos da história e do progresso de outros campos da Matemática, nos quais a Probabilidade encontrou os elementos imprescindíveis a um formalismo axiomático necessário para a construção de um modelo matemático.

Historicamente, a visão mais *clássica*, ou Laplaciana, dominou durante um largo período de tempo o ensino da Teoria da Probabilidade. Posteriormente, com a implementação da Matemática Moderna, veio-se introduzir uma conceção mais formal e *axiomática* desta área da Matemática. Todavia, com o crescente interesse e consciencialização da aplicabilidade deste conceito a inúmeras e diferentes áreas do saber, assistiu-se a uma inclusão da noção de Probabilidade como o *limite da frequência relativa* de um acontecimento numa sucessão de experiências. Porém, existem experiências aleatórias que, pelas suas especificidades, nunca mais, ou dificilmente, se repetirão. Nestas situações é conveniente interpretar a Probabilidade como manifestação do *grau de convicção* que cada individuo atribui à ocorrência dos acontecimentos, com base na experiência e informação anteriores.

Os diferentes conceitos de Probabilidade referidos, evidenciam a natureza complexa deste conceito Matemático e Batanero, Henry e Parzysz (2005) sugerem que a abordagem pedagógica desta noção não se pode limitar a uma única perspetiva, de tal modo que os alunos para alcançar um nível adequado de compreensão da Probabilidade é necessário que sejam capazes de relacionar as abordagens clássica, frequencista, subjetiva e axiomática.

A investigação didática nas últimas duas décadas em torno da Teoria da Probabilidade foi bastante extensa e rica. Ao nível do currículo as pesquisas apontam que, apesar de se verificar explicitamente o cumprimento, nestes textos, de algumas das recomendações apontadas pela didática da Probabilidade, ainda subsistem evidências que apontam para a necessidade de uma revisão, nos programas, das temáticas da Estatística e das Probabilidades (Batanero, 2004, 2005; Gal, 2005; Caldeira, 2009; Millán, 2013).

A relevância dos recursos materiais no processo de Ensino-Aprendizagem da Probabilidade tem também merecido a atenção da comunidade científica. A investigação realizada tem demonstrado que a utilização de programas informáticos específicos tem facilitado a aquisição de diferentes conceitos probabilísticos e um melhor desempenho dos estudantes, em complementaridade com a evidência da proficuidade do trabalho colaborativo para melhorar os seus conhecimentos (Azcárate e Serradó, 2006; Mercado, 2013; Alexander e Bueno, 2013).

A importância do papel do professor no contexto educativo/probabilístico também tem sido objeto de estudo. Assim, as conceções e as visões dos professores sobre Probabilidade têm-se demonstrado diversificadas, insuficientes e por vezes erróneas, pelo que urge organizar cursos dentro de um quadro conceptual, como parte de programas oficiais de formação de professores (Azcárate, 1996; Batanero, Díaz Godino e Roa, 2004; Pratt, 2005; Batanero, 2009; Batanero, Ruiz e Arteaga, 2009; Mannan, 2012; Anasagasti e Berciano, 2013; Díaz Godino, 2013).

Os estudos sobre a aprendizagem da Probabilidade por parte dos alunos têm-se também multiplicado. As conceções, os significados, as metodologias, as diferentes representações, os conceitos e a sua organização, as dificuldades de aprendizagem, os procedimentos e a linguagem, têm sido objeto de pesquisa com alunos. As conclusões apontam para a existência de conflitos e para a dificuldade que esta temática induz nos estudantes (Batanero e Díaz, 2007; Lopes, 2011, 2013; Almeida, Casas e Luengo, 2013).

2.2. *As teorias dos Conceitos Nucleares e dos Conceitos Threshold*

A compreensão é um processo mental através do qual atribuímos um significado aos dados que recebemos, os quais podem ser imagens, palavras, conceitos, relações, estruturas ou, inclusive, notas emocionais. Neste contexto, entendemos o termo "conceito" como uma representação mental, abstrata e geral de um objeto, uma noção abstrata, uma ideia geral e/ou a compreensão que um individuo tem de uma palavra/conteúdo. Quando se trata da compreensão de um conceito, referimo-nos à aquisição de diferentes atributos que o constituem, de modo que, por exemplo, o conceito de "homem" caracteriza-se por atributos como "animal", "racional", "humano", entre outros. Como Tall e Vinner (1981) mostraram, a estrutura completa associada a um conceito inclui tanto a sua definição, como as imagens mentais que evocam as propriedades e processos que lhe são inerentes.

Assim, quando um conceito é invocado por um sujeito, produz-se na sua mente uma variedade de imagens pessoais associadas ao referido conceito, apesar de, habitualmente, neste processo transmitir-se o conceito através de um símbolo, ou um nome, o que ajuda à sua manipulação mental e permite comunicá-lo. É preciso reconhecer que a simples definição verbal de um conceito apresenta a limitação de referir-se somente a uma parte desse conceito. No entanto, quando se transmite um conceito é necessário utilizar um conjunto de palavras, com o intuito de especificá-lo e, por esta razão, neste trabalho trataremos, como uma primeira aproximação, a compreensão de conceitos mediante o estudo das palavras associadas a eles.

A Teoria dos Conceitos Nucleares (TCN), desenvolvida por Casas e Luengo, afirma que à medida que os alunos progridem na escolaridade, o conhecimento sobre determinada temática é estruturado de uma forma cada vez mais simples e em torno de um conjunto limitado de conceitos relevantes - Conceitos Nucleares (CN) - que, no entanto, não são necessariamente os mais gerais nem os mais abstratos (Casas, 2002; Casas e Luengo, 2003, 2004 e 2005).

Os principais elementos distintivos da TCN são a "*Organização geográfica do conhecimento*" e as noções de "*Conceito Nuclear*" e de "*Caminho de Custo Mínimo*" (Casas, 2002; Antunes, 2010; Carvalho, 2011; Luengo, Casas, Mendoza e Arias, 2011; Veríssimo, 2013; Luengo, 2013; Almeida, 2014). Esta teoria emprega, como suporte metodológico, as Redes Associativas Pathfinder (PFNET) (Schvaneveldt, Dearholt e Durso, 1985,1988), baseada na Teoria dos Grafos.

Com aplicações em áreas tão diversificadas como a Matemática, a Contabilidade, a Informática, a Engenharia Telemática, a Avaliação das Aprendizagens, a Análise do conhecimento, a Física, entre outros, (Kudikyala e Vaughn, 2005; Arias, 2008; Clariana, Engelmann e Yu, 2013; Sarwar, 2012; Almeida, 2011; Carvalho, 2011; Großschedl e Harms, 2013), as PFNET têm como virtude o modo como os resultados finais são apresentados. Estes surgem na forma de uma representação organizada no plano – as redes – que permitem, com relativa comodidade, identificar os conceitos mais/menos importantes, ou valorizados, para além da apresentação de um conjunto de índices (coerência, similaridade e de complexidade) e outros indicadores quantitativos, que suportam análises comparativas, e mais refinadas, entre redes (Casas e Luengo, 2005; Antunes, 2010; Carvalho, 2011; Almeida, 2011; Almeida, et al., 2013; Veríssimo, 2013; Almeida, 2014).

Neste contexto, assume muita importância a noção de estrutura cognitiva. Adotaremos aquela apresentada por Casas (2002, p.73), na qual refere que "Por tal se entiende el patrón de relaciones entre los conceptos en la memoria. Más exactamente definido, sería el constructo hipotético que se refiere en la organización de las relaciones entre conceptos en la memoria semántica o a largo plazo".

A estrutura cognitiva não é rígida mas, bem pelo contrário, evolui individualmente com a aquisição de novos atributos subjetivos e objetivos e uma estrutura cognitiva mais coerente e melhor estabelecida corresponde ao que entendemos ser uma melhor compreensão de um conceito.

Entre as técnicas utilizadas para conhecer a estrutura cognitiva dos sujeitos podemos assinalar a ordenação de cartões, o escalonamento multidimensional, a análise de conglomerados ou, ainda, as Redes Associativas Pathfinder (PFNET), todas elas baseadas na atribuição de valores de proximidade entre termos. Amplamente utilizadas na psicologia cognitiva, estas técnicas servem para que o sujeito faça explicitamente a conexão entre conceitos e se fundamentem no constructo da memória a largo prazo, segundo o qual se assume que as ideias mais relacionadas na memória a largo prazo têm maior proximidade semântica (Jonassen, Beissner e Yacci, 1993).

Convém destacar que estas técnicas podem-se complementar-se com outras, entre as quais se incluem a associação de palavras, os protocolos de pensamento em voz alta, as entrevistas, os mapas conceptuais, a avaliação de tarefas concretas realizadas pelos sujeitos ou o uso de questionários. Como veremos, no presente trabalho recorre-se a comparar os dados obtidos mediante um questionário no qual se identificam os conceitos de mais fácil e difícil compreensão para os alunos segundo o proposto por Meyer e Land, e que descrevemos de seguida.

Meyer e Land (2003) desenvolveram e introduziram a noção de Conceito *Threshold* (CT), os quais constituem noções, ou ideias, que inicialmente para os estudantes são complicadas e problemáticas, mas que, no entanto, quando compreendidas, transformadas e integradas podem constituir um dos fundamentos essenciais à aprendizagem, pois funcionam como "portais", ou "janelas", para o conhecimento (Meyer e Land, 2003, 2005; Davies, 2003). Os mesmos autores referem que esta tipologia de Conceitos *Threshold* verifica, provavelmente, as seguintes características: *Transformadora* – no sentido em que, uma vez compreendidos, o seu efeito potencial na aprendizagem dos alunos, provoca uma mudança significativa da perceção de um assunto ou, pelo menos, de parte dele; *Irreversibilidade* – é improvável a mudança de perspetiva provocada pela compreensão de um Conceito *Threshold*, e caso ela seja esquecida é à custa de um considerável esforço; *Integradora* – o conceito expõe as possíveis conexões com outros temas, as quais, numa fase inicial, se mantinham indetetáveis e incompreensíveis; *Limitadora* – embora não necessariamente sempre, estes conceitos podem definir as fronteiras de um assunto ou área de conhecimento, e; *Problemáticos* – esta característica entendida na dimensão da compreensão do conceito, a qual pode assumir diferentes formas, como definido em Perkins (1999).

Apesar de não conhecermos estudos da aplicação específica de ambas as teorias à temática das Probabilidades, todavia é reconhecida a relevância da identificação dos diferentes elementos imprescindíveis para a construção gradual do conhecimento dos estudantes (Batanero, 2005; Gal, 2005).

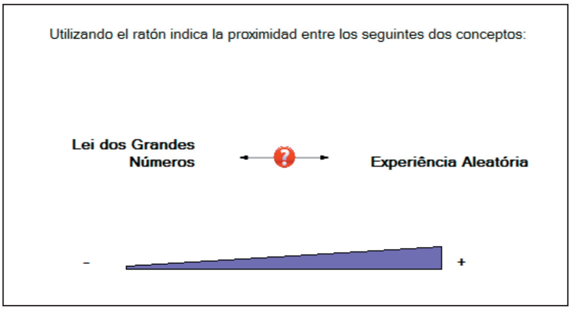
Em síntese, adotando como marco teórico a Teoria dos Conceitos Nucleares, e as Redes Associativas Pathfinder, obtivemos a representação da estrutura cognitiva e identificamos os Conceitos Nucleares, nós polares (NP) e extremidade (NE), dos alunos em relação à noção de Probabilidade e a partir destes elementos, e outros, reconhecemos potenciais Conceitos *Threshold*, com vista à compreensão do modo como um grupo de estudantes dos 9.º e do 12.º anos organizam as suas ideias em torno da Probabilidade. Assim, com este estudo pretendemos contribuir ao que era proposto por Ausubel (1978) "Averígüese lo que el alumno sabe y actúese en consecuencia".

3. Aspetos metodológicos da investigação

O objetivo geral desta investigação consistiu na "Compreensão d*a organização conceptual dos alunos dos 9.º (14-15 anos de idade) e 12.º (17-18 anos de idade) anos de escolaridade sobre a noção de Probabilidade, com base no marco teórico da Teoria dos Conceitos Nucleares e dos Conceitos Threshold."*

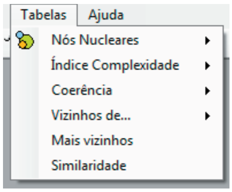
Para a consecução desta finalidade, utilizou-se uma metodologia por questionário para recolher os dados, apesar de esta apresentar características diferentes das habituais, já que se substituiu, em alguns momentos, o questionário em suporte papel por um instrumento informático – *Goluca* - que nos permitiu formular as questões, recolher os dados e apresentar alguns resultados, já que outros foram tratados com *software* específico de análise de dados (SPSS 20 e Excel 2007).

O programa informático *Goluca*, desenvolvido por Casas, Luengo e Godinho (Godinho, 2007; Casas, Godinho e Luengo, 2011), sistematiza, no mesmo *software* três procedimentos essenciais da técnica das redes PFNET: 1) Permite estabelecer relação entre os termos (A); 2) Representa a estrutura cognitiva (B) , e; 3) Permite a análise da representação da estrutura (C).



(A)

(B)



(C)

Figura 1. (A) Estabelecimento da relação entre os termos, (B) Representação das redes PFNET e (C) Análise das PFNET

Para identificar os potenciais Conceitos Threshold, utilizamos um questionário em papel, adaptado de Holloway, Alpay e Bull (2009), com o objetivo complementar de estabelecer relações entre estes e as diferentes tipologias dos conceitos das redes PFNET (nó extremidade, nó polar e Conceito Nuclear). Este instrumento de recolha de dados, para além do género e do ano de escolaridade, questionava os alunos sobre o conceito/ideia/exemplo que acharam ser o mais e o menos difícil de compreender no momento da aprendizagem do conceito de Probabilidade. Para além desta informação, e através de uma escala de *Likert*, o questionário incluía um conjunto de asserções para analisar as várias dimensões caracterizadoras dos Conceitos *Threshold* – transformadora, irreversibilidade, integradora e limitadora (Meyer e Land, 2003)

Optou-se por um desenho de investigação descritivo com características transversais, facto sustentado pela inquirição de diferentes grupos de estudantes condicionada por um corte no tempo.

Nesta lógica, o desenho da presente investigação obrigou ao delineamento de três fases sequenciais e funcionalmente dependentes:

> 1.ª FASE – Definição dos termos, conceitos, noções e exemplos a serem utilizados na elaboração das Redes Associativas Pathfinder. A seleção destes elementos constituiu uma etapa fundamental do nosso estudo. Para tal inquiriram-se vinte e dois professores, analisaram-se seis manuais escolares do 9.º ano de escolaridade e o programa de Matemática dos Ensinos Básico e Secundário e levou-se em consideração artigos que clarificam os elementos do significado (Batanero, 2005) e da literacia (Gal, 2005) probabilística, no sentido de corroborar da relevância dos termos identificados.
>
> 2.ª FASE – Inquirição, num 1.º momento, dos estudantes do 9.º (14-15 anos de idade) e do 12.º ano (17-18 anos de idade) de escolaridade. As respostas dadas pelos alunos foram efetuadas em computador e, por esta razão, as mesmas ocorreram em salas de aula de informática, utilizando o programa *Goluca*, nos meses de janeiro e fevereiro de 2013. Optou-se por estas datas, já que este tema foi lecionado no 1.º período do ano letivo de 2012/13 (setembro a novembro de 2012), tanto no 9.º ano como no 12.º ano.
>
> 3.ª FASE - Inquirição, num segundo momento, dos estudantes do 9.º e do 12.º ano de escolaridade e passagem do questionário, em papel, para a deteção dos potenciais Conceitos *Threshold*. Esta fase teve como objetivo a análise da sedimentação das estruturas cognitivas dos discentes, obtidas na fase anterior e ocorreu nos meses de maio e junho de 2013. Também, nesta fase, preocupar-nos-emos, com a possível deteção, através de um questionário em papel, dos potenciais *Threshold*.

Os termos selecionados, num total de onze, e sustentados nas respostas dos 22 professores inquiridos, nos 6 manuais escolares, nos programas de Matemática dos 9. e 12.º anos de escolaridade e nos elementos do significado (Batanero, 2005) e da literacia da Probabilidade (Gal, 2005), foram, atendendo à sua maior ou menor generalidade, os seguintes:

Figura 2. Hierarquia dos conceitos/termos/noções/exemplos associados à Probabilidade

Definidos os termos/conceitos/exemplos a utilizar para a construção das redes PFNET, decidiu-se por efetuar a recolha de dados, com os mesmos estudantes, em dois momentos distintos – 1.º Momento e 2.º Momento (*Figura 3*).

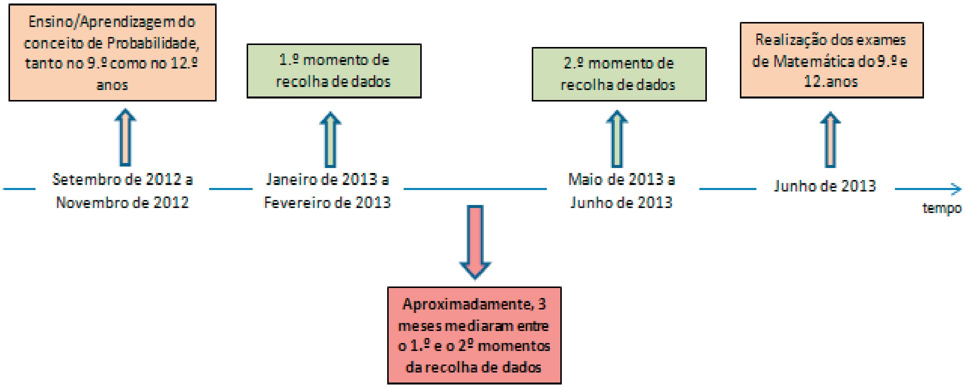


Figura 3. Organização, em termos temporais, do 1.º e 2.º Momentos de recolha de dados nos 9.º e 12.º anos

O 1.º Momento de recolha de dados foi planificado para ser executado após a lecionação da temática das Probabilidades e no qual pretendia-se obter as primeiras representações da estrutura cognitiva dos estudantes, dadas através das redes associativas Pathfinder, sobre este conceito.

O 2.º Momento de obtenção de informação teve como objetivos averiguar da consolidação e evolução das representações da estrutura cognitiva em torno da Probabilidade, analisar a sedimentação deste conhecimento e a estabilidade temporal das conceções cognitivas dos estudantes.

A distribuição dos alunos auscultados, nos dois momentos de recolha de dados, foi, de acordo com o Ano de Escolaridade e com o Género, a que consta na Tabela I.

TABELA I

Distribuição dos alunos da amostra, nos 1.º e 2.º momentos, de acordo com Ano de Escolaridade e com o Género

	1.º MOMENTO			2.º MOMENTO		
Género/Ano	9.º ANO	12.º ANO	Total	9.º ANO	12.º ANO	Total
Masculino	116	43	159	105	46	151
Feminino	134	51	185	121	53	174
Total	250	94	344	226	99	325

A construção das Redes Associativas Pathfinder baseia-se na determinação de um conjunto de características/relações comuns e são compostas por nós que estabelecem entre si distintas relações, expressas através de arestas, que descrevem a maior ou menor proximidade entre os conceitos. Para estabelecer as relações entre os termos, procedeu-se à inquirição dos estudantes para quantificar as relações entre os termos, previamente definidos. Aos diferentes sujeitos foi solicitado para que, na sua opinião, indicassem a maior (menor) proximidade entre os pares de conceitos que, sucessivamente, vão aparecendo no *layout* do *Goluca*, num total de $C_2^n = \frac{n(n-1)}{2} = \frac{11 \times 10}{2} = 55$. Quanto maior (menor) for o peso atribuído, maior (menor) será a proximidade entre os conceitos/termos.

Através deste procedimento é gerada uma matriz (*Tabela* II) que reflete numericamente a relação estabelecida entre os termos considerados e que constitui a base quantitativa para a representação da estrutura cognitiva do aluno.

TABELA II
Matriz de proximidade de um aluno do 9.º ano sobre o conceito de Probabilidade, obtida com o software Goluca

	TCC	*EA*	*CPCF*	*Pro*	*Quo*	*LMD*	*Acon*	*VN*	*LL*	*Aca*
Técnicas de contagem de casos (TCC)										
Experiência Aleatória (EA)	0,216									
Casos Possíveis e casos favoráveis (CPCF)	0,506	0,848								
Probabilidade (Pro)	0,558	0,913	0,923							
Quociente (Quo)	0,535	0,126	0,535	0,535						
Lançamento de moedas / dados (LMD)	0,545	0,565	0,952	0,935	0,148					
Acontecimento (Acon)	0,181	0,906	0,939	0,881	0,252	0,510				
Valor numérico (VN)	0,532	0,548	0,497	0,116	0,835	0,500	0,177			
Lei (ou regra) de Laplace (LL)	0,194	0,929	0,526	0,558	0,506	0,187	0,197	0,168		
Acaso (Aca)	0,926	0,568	0,868	0,490	0,168	0,935	0,542	0,126	0,116	
Lei dos Grandes Números (LGN)	0,219	0,129	0,165	0,506	0,503	0,184	0,148	0,487	0,145	0,226

Com os dados obtidos nesta matriz, o Goluca calcula uma matriz de correlações na qual se definem os pesos das ligações entre os vários conceitos. Uma vez que todos os conceitos estão relacionados com maior, ou menor grau na matriz de dados, existe uma rede geométrica correspondente em que todos eles estão ligados entre si. Todavia, e em virtude do elevado número de ligações que apresenta, esta rede é demasiado complexa e, face a este facto, perde alguma utilidade interpretativa. A ideia fundamental subjacente às Redes Associativas Pathfinder é descartar os caminhos mais supérfluos e reter os caminhos mais significativos da rede. O procedimento básico para encontrar qual o caminho / ligação que se incorpora nas várias fases do processo iterativo, é que este só é considerado se não existe um caminho indireto, através de outros nós, cuja soma de pesos seja menor que o caminho direto referido (Casas, 2002; Casas e Luengo, 2005). Usando um algoritmo devido a Kamada e Kawai (1989), o programa gera uma rede no plano que exibe apenas as ligações entre conceitos e que correspondem aos caminhos de peso mínimo, de tal modo que apenas as relações mais fortes e relevantes são representadas.

Estas representações permitem destacar qual, ou quais, são, dentro da estrutura cognitiva do estudante, os conceitos importantes e que relações estabelecem, facultando uma visão detalhada da organização conceptual, com uma interferência mínima por parte do investigador. A partir desta matriz é construída a respetiva rede Associativa Pathfinder (Figura 4).

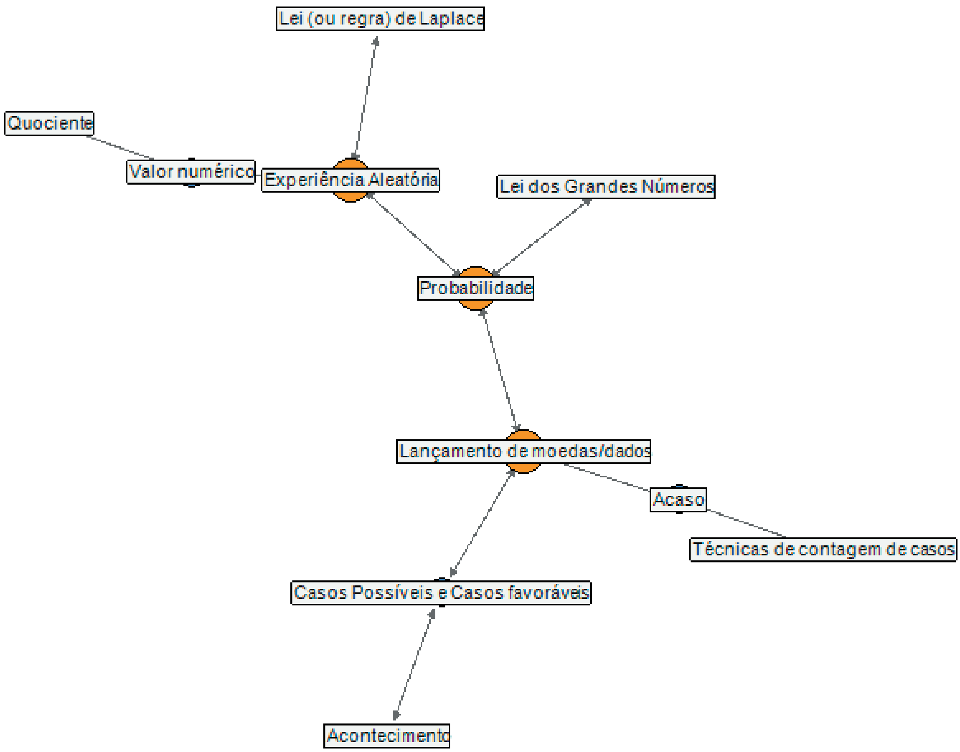


Figura 4. A rede PFNET (∞,10) de um aluno do 9.º ano de escolaridade

As redes PFNET assim obtidas oferecem amplas indicações visuais (Conceitos Nucleares, nós extremidade, nós polares, relações entre conceitos, grupos de conceitos homogéneos, distâncias,…) que, para além disso, foi complementada com indicadores quantitativos como a Coerência, Similaridade entre redes, Índice de Complexidade da rede, Índice de Centralidade da rede, entre outros, e, ainda, a informação dada pelas próprias matrizes numéricas.

Interpretaremos “*Conceito Nuclear*”, como o conceito que apresenta três ou mais ligações, sendo que o número destas ligações constitui o grau do nó nuclear e pelo facto de apresentar muitas ligações assume relevância na representação da estrutura cognitiva na aprendizagem de um determinado conteúdo. Interpretaremos “*nó extremidade*” como o conceito que, na rede Associativa *Pathfinder*, apresenta uma só ligação e, em consequência, ainda não está devidamente incorporado na estrutura cognitiva dos alunos. Definiremos, ainda, “*nó polar*” como aquele que apresenta exatamente duas ligações (Casas, 2002; Casas e Luengo, 2003, 2004, 2005).

A *Coerência* de uma rede (Schvaneveldt et al., 1988) permite avaliar o conhecimento do tema tratado e apresenta um valor que varia no intervalo [-1,1] (Casas e Luengo, 2004; Antunes, 2010; Veríssimo, 2013).

O *Índice de Similaridade* de duas redes é calculado a partir da análise das ligações totais existentes nas duas redes e das ligações comuns às redes e varia no intervalo [0,1] (Casas, 2002).

O *Índice de Complexidade da Rede* (ICR), elaborado por Casas (2002), é um indicador numérico que permite avaliar quantitativamente a complexidade das distintas redes PFNET e fornece, também, um valor que varia entre 0 e 1 e. Quanto maior é o seu valor, maior é a complexidade da rede. Este índice depende do produto de três fatores: Densidade da rede (D), Fator dos nós nucleares (N) e Fator do grau dos nós nucleares (FN).

A *Centralidade de grau* de uma rede constitui uma medida para mensurar a tipologia da estrutura cognitiva e também varia entre 0 e 1 (Clariana, Draper e Land, 2011; Clariana et al. 2013).

4. Análise dos resultados

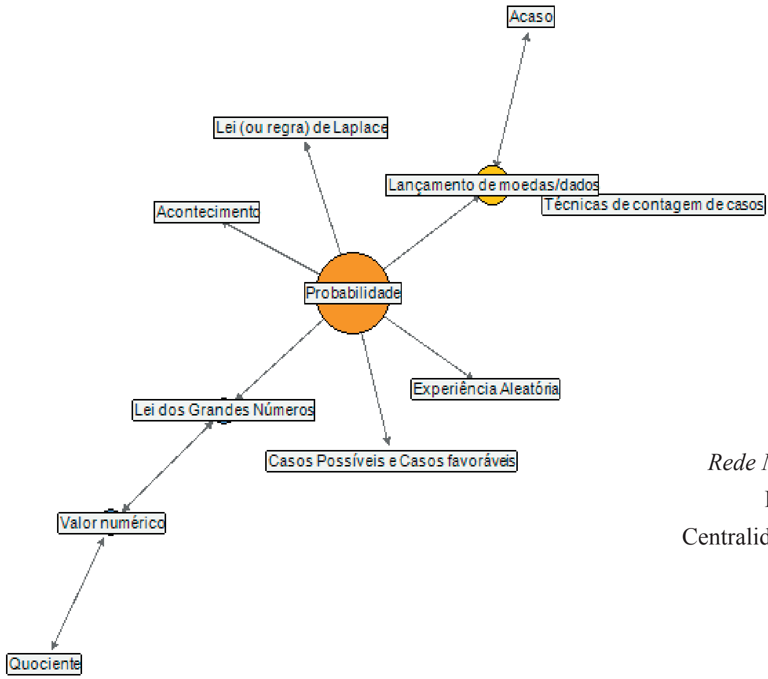
A *Tabela* III sistematiza os resultados alcançados e relativos aos diferentes indicadores quantitativos das redes PFNET, nos 1.º e 2.º momentos de recolha de dados.

TABELA III
Sistematização dos resultados dos indicadores quantitativos, relativos ao Género e Ano de Escolaridade, em ambos os momentos de recolha de dados

Indicador quantitativo da rede PFNET	*1.º Momento de recolha de Dados*		*2.º Momento de recolha de dados*	
	Género (rapazes vs raparigas)	Ano de escolaridade (9.º ano vs 12.º ano)	Género (rapazes vs raparigas)	Ano de escolaridade (9.º ano vs 12.º ano)
Número de nós extremidade	Estatisticamente iguais	Estatisticamente diferentes	Estatisticamente iguais	Estatisticamente iguais
Número de nós polares	Estatisticamente iguais	Estatisticamente diferentes	Estatisticamente iguais	Estatisticamente iguais
Número de nós nucleares	Estatisticamente iguais	Estatisticamente iguais	Estatisticamente iguais	Estatisticamente iguais
Densidade da Rede	Estatisticamente iguais	Estatisticamente iguais	Estatisticamente iguais	Estatisticamente iguais
Fator dos nós nucleares	Estatisticamente iguais	Estatisticamente iguais	Estatisticamente iguais	Estatisticamente iguais
Grau dos nós nucleares	Estatisticamente iguais	Estatisticamente iguais	Estatisticamente iguais	Estatisticamente iguais
Fator do grau dos nós nucleares	Estatisticamente iguais	Estatisticamente iguais	Estatisticamente iguais	Estatisticamente iguais
Coerência	Estatisticamente iguais	Estatisticamente diferentes	Estatisticamente iguais	Estatisticamente diferentes
Índice de complexidade da rede	Estatisticamente iguais	Estatisticamente iguais	Estatisticamente iguais	Estatisticamente iguais

Relativamente às várias medidas quantitativas, no 1.º e no 2.º momento de recolha de dados, a variável género não foi discriminatória, isto é os diferentes indicadores apresentaram valores estatisticamente iguais. Em relação ao ano de escolaridade somente a variável Coerência da rede mantém valores estatisticamente diferentes, em ambos os momentos de recolha de dados, com valores mais altos no ano terminal do Ensino Secundário.

As Redes Médias PFNET para os dois anos de escolaridade e nos dois momentos apresentam-se nas Figuras seguintes:

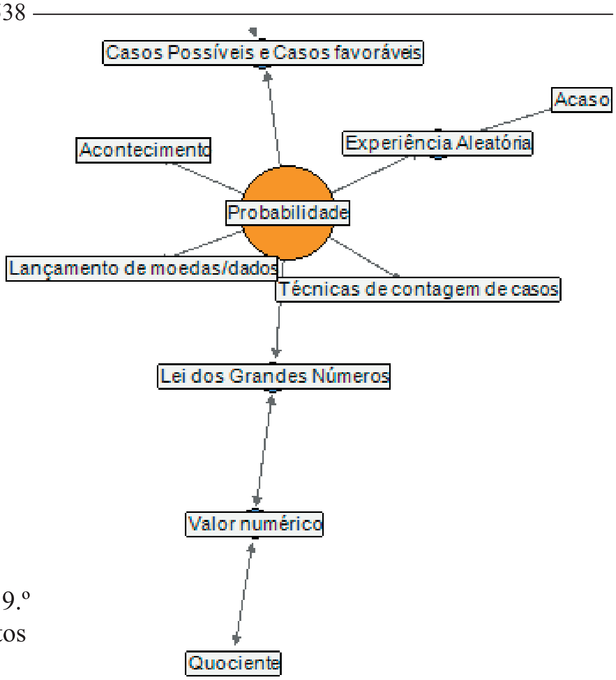


Rede Média 9.º ano M1

ICR =2,716

Centralidade de rede = 0,513

Similaridade=0,538



Rede Média 9.º ano M2

ICR =0,91

Centralidade de rede =0,511

Figura 5. As Redes Médias do 9.º ano nos dois momentos de recolha de dados

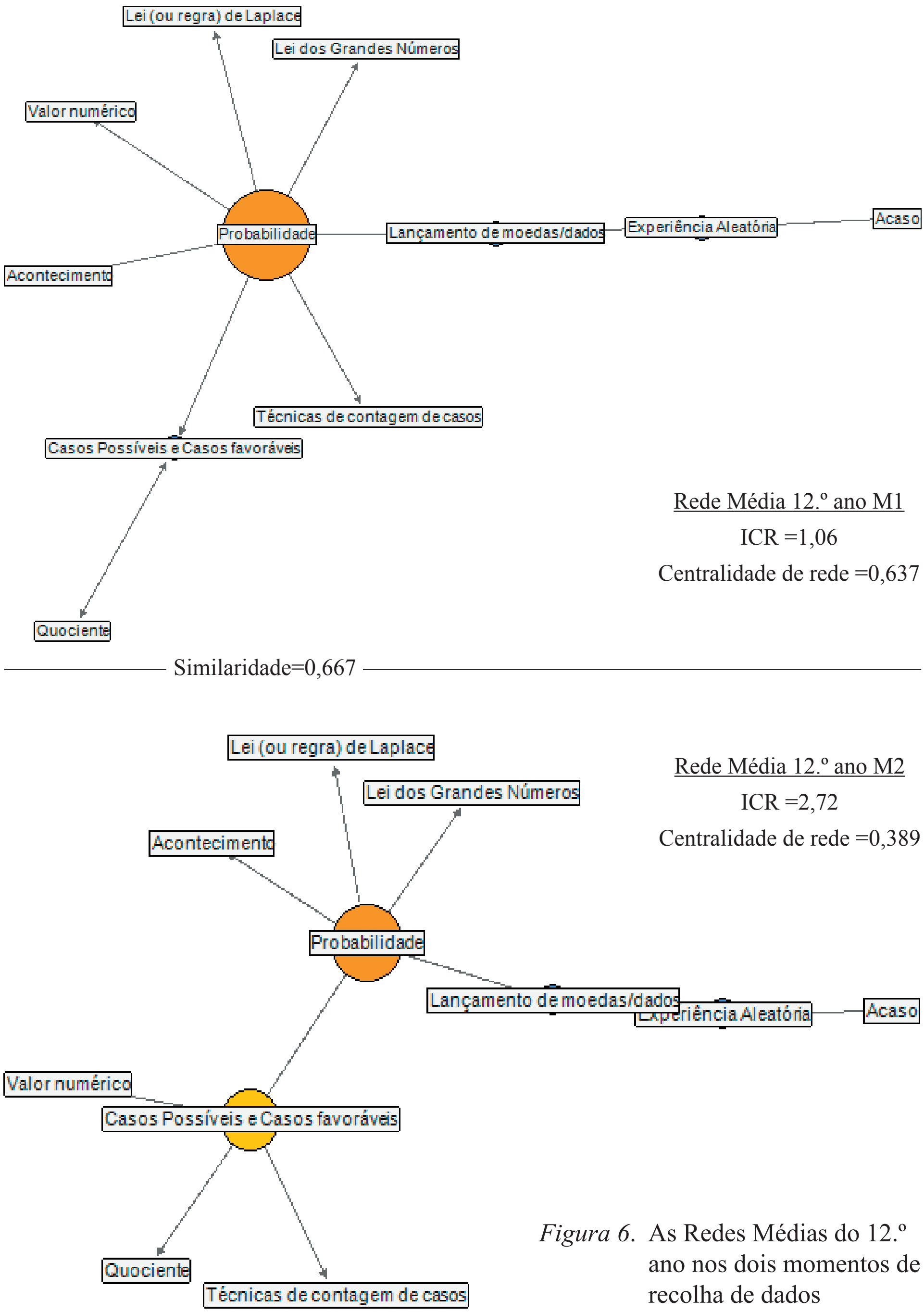


Figura 6. As Redes Médias do 12.º ano nos dois momentos de recolha de dados

Em relação à tipologia dos conceitos a *Tabela* IV mostra os conceitos presentes nestas Redes Médias.

TABELA IV
Tipologia dos conceitos nas redes médias nos dois momentos de recolha de dados e para os dois anos de escolaridade

	9.º ano M1	*9.º ano M2*	*12.º ano M1*	*12.º ano M2*
Acaso	Nó extremidade	Nó extremidade	Nó extremidade	Nó extremidade
Acontecimento	Nó extremidade	Nó extremidade	Nó extremidade	Nó extremidade
Casos possíveis e favoráveis	Nó extremidade	Nó polar	Nó polar	Conceito Nuclear
Experiência Aleatória	Nó extremidade	Nó polar	Nó polar	Nó polar
Lançamento de dados / moedas	Conceito Nuclear	Nó extremidade	Nó polar	Nó polar
Lei (ou regra) de Laplace	Nó extremidade	Nó extremidade	Nó extremidade	Nó extremidade
Lei dos Grandes Números	Nó polar	Nó polar	Nó extremidade	Nó extremidade
Probabilidade	Conceito Nuclear	Conceito Nuclear	Conceito Nuclear	Conceito Nuclear
Quociente	Nó extremidade	Nó extremidade	Nó extremidade	Nó extremidade
Técnicas de contagem de casos	Nó extremidade	Nó extremidade	Nó extremidade	Nó extremidade
Valor Numérico	Nó polar	Nó polar	Nó extremidade	Nó extremidade

Parece-nos evidente que o ano de escolaridade mais constante ao nível da tipologia dos termos/ideias/exemplos é o 12.º ano, já que dos onze conceitos considerados somente um altera a tipologia do 1.º para o 2.º momento ("Casos possíveis e caso favoráveis"), o que é demonstrativo de uma maior consolidação da estrutura cognitiva dos estudantes.

Em relação aos estudantes mais jovens, oito dos conceitos conservam a sua tipologia e três variam na sua tipologia ("Experiência aleatória", "Casos possíveis e favoráveis" e "Lançamento de moedas/dados").

Uma leitura mais transversal, e comparando a tipologia dos conceitos desde o 1.º momento de recolha de dados no 9.º ano, para o 2.º momento de recolha de dados no 12.º ano de escolaridade constatamos que:

- Os conceitos "Acaso", "Acontecimento", "Lei (ou regra) de Laplace", "Quociente" e "Técnicas de contagem de casos", mantêm-se nestes anos escolares como nó extremidade, ou seja, não se encontram devidamente consolidados na estrutura cognitiva;
- A noção de "Probabilidade" é o único conceito que se mantém, nestes anos e momentos, como Conceito Nuclear, isto é, assume relevância na estrutura cognitiva;
- O conceito "Experiência aleatória", que inicialmente é um nó extremidade, passa a nó polar;
- Tanto o conceito "Valor numérico" como a "Lei dos Grandes Números" diminuem de importância cognitiva ao passar de nó polar a nó extremidade;
- A importância do exemplo "Lançamento de dados/moedas" é diminuída, em virtude de passar de Conceito Nuclear (9.º ano, 1.º momento) para nó extremidade (12.º ano, 2.º momento).
- Por oposição, o estatuto cognitivo dos "Casos possíveis e dos casos favoráveis" amplia-se, ao passar de nó extremidade, no 9.º ano (1.º momento), a Conceito Nuclear, no 12.º ano (2.º momento).

Globalmente estes resultados permitiram-nos constatar que existem conceitos que se mantêm no tempo pouco consolidados na estrutura cognitiva dos estudantes, os quais referem-se à especificidade desta temática Matemática ("Acaso" e "Acontecimento") e a questões ligada aos procedimentos e algoritmos probabilísticos ("Lei (ou regra) de Laplace", "Técnicas de contagem de casos" e "Quociente"). Houve um aumento, do 9.º para o 12.º ano, da importância cognitiva dos "Casos possíveis e dos casos favoráveis" aspeto que nos parece associado à utilização/dificuldade do Cálculo Combinatório para determinar estas quantidades.

A Comparação do Índice de Complexidade das redes do 9.º ano (1.º momento) com o do 12.º ano (2.º momento) apresenta, no teste de *Mann - Whitney*, o valor do *Sig*.=0,780 (>0,05) que é indicador de que em termos da complexidade das redes não há diferenças estatisticamente significativas entre o 9.º ano (1.º momento) e o 12.º ano (2.º Momento).

Como referimos anteriormente, na 3.ª Fase da investigação, utilizou-se um questionário, em papel, constituído por quatro grupos de questões. As questões I e II pretendem caracterizar os inquiridos em relação ao Ano de Escolaridade (9.º ano/12.º ano) e ao Género (Masculino/Feminino). Com a questão III pretendeu-se saber, de entre os conceitos utilizados nas redes PFNET, qual tinha sido, na opinião dos estudantes, o termos menos complicado/fácil e o mais complicado/difícil de entender.

Em relação ao conceito mais complicado/difícil de entender, obtivemos:

TABELA V

Conceito mais complicado/mais difícil de entender referido pelos estudantes

Conceitos	*9.º ano Masculino*	*9.º ano Feminino*	*9.º ano Total*	*12.º ano Masculino*	*12.º ano Feminino*	*12.ºano Total*	*Total*
Acaso	2	5	7	4	4	8	15
Acontecimento	2	4	6	0	0	0	6
Casos possíveis e casos favoráveis	1	7	8	2	2	4	12
Experiência aleatória	1	3	4	3	2	5	9
Lançamento de moedas/dados	0	2	2	0	0	0	2
Lei (ou regra) de Laplace	37	32	69	1	2	3	72
Lei dos Grandes Números	35	25	60	13	20	33	93
Probabilidade	3	0	3	2	3	5	8
Quociente	11	26	37	2	2	4	41
Técnicas de contagem de casos	8	7	15	15	15	30	45
Valor numérico	6	9	15	3	4	7	22
Total	106	120	226	45	54	99	325

O conceito mais complicado/difícil de entender no 9.º ano de Escolaridade foi a "Lei (ou regra) de Laplace" (69) e a "Lei dos Grandes Números" (60), verificando-se também este último conceito (33) juntamente com as "Técnicas de contagem de casos" (30) como os mais complicados de entender pelos estudantes do 12.º ano. O menos referido como complicado/difícil foi o "Lançamento de moedas/dados", em ambos os anos de escolaridade.

Daqui resultou que o conceito que parece perpetuar-se no tempo (tanto no 9.º como no 12.º ano) como o mais difícil de entender no 9.º e no 12.º ano, é a "Lei dos Grandes Números", que surge neste contexto como problemático/difícil e, consequentemente de acordo com Meyer e Land (2003), um candidato a Conceito *Threshold*.

A IV, e última questão deste questionário, pretendia, em relação ao conceito referido por cada estudante como o mais complicado/difícil de entender, saber a opinião destes sobre diferentes aspetos desse conceito (num total de 13 itens). Para tal foi utilizada uma escala na qual num dos extremos encontra-se o "1-*totalmente em desacordo*" e no outro extremo "5-*totalmente de acordo*".

TABELA VI
Médias e desvios padrões dos itens do questionário

			N=325	
			Média	*Desvio padrão*
It1	–	Eu acho que o conceito é fácil de explicar a um outro colega.	2,47	1,041
It2	–	O entendimento do conceito transformou/mudou a minha maneira de pensar sobre outros assuntos.	2,64	1,134
It3	–	Eu consigo ver aplicações do conceito a outras áreas e disciplinas.	2,90	1,264
It4	–	O conceito é algo que eu agora consigo ver como central e fundamental, mas que foi complicado de entender.	2,89	1,129
It5	–	Eu ter entendido o conceito implicou ter uma melhor visão sobre as relações entre diferentes matérias, que antes não tinha.	2,87	1,139
It6	–	Eu já entendi realmente o conceito.	2,87	1,375
It7	–	Compreender o conceito foi como um "clique" e agora vejo o que realmente significa.	2,60	1,199
It8	–	Muitas coisas organizaram-se e reuniram-se para entender o conceito.	2,82	1,070
It9	–	Agora que entendi o conceito, acho que seria difícil esquecê-lo.	2,78	1,318
It10	–	Entender o conceito fez-me sentir mais como um matemático.	2,49	1,193
It11	–	Foi fácil ver como o conceito se ajusta e complementa a outros temas e assuntos.	3,08	1,161
It12	–	Assim que entendi o conceito, outros temas matemáticos já estudados começaram a fazer mais sentido.	2,84	1,110
It13	–	Não vou ter que manter atualizado o meu conhecimento sobre o conceito.	2,56	1,252

Com exceção do It11- "*Foi fácil ver como o conceito se ajusta e complementa a outros temas e assuntos*", todos os restantes itens apresentam médias de respostas abaixo de "*3 – Nem em desacordo nem em acordo*" e com uma variabilidade, nas respostas, semelhante. Daqui resulta que os alunos se situam globalmente, e em média, numa perspetiva de discordância relativamente às várias afirmações que os itens expressam.

Paralelamente, e para mensurar a relação existente entre as frequências com que surgem como potenciais CT e as diferentes tipologias dos conceitos nas redes PFNET (NE, NP e CN), calculamos o coeficiente de correlação de *Spearman*. Os coeficientes foram determinados com as variáveis: frequência como CT e frequência como NE (no 9.º, no 12.º ano e em relação ao total de alunos), frequência como CT e frequência como NP (no 9.º, no 12.º ano e em relação ao total de alunos) e ainda, frequência como CT e frequência como CN (no 9.º, no 12.º ano e em relação ao total de alunos). Os valores destes coeficientes foram:

TABELA VII
Coeficientes de correlação de *Spearman* (ρ) entre os potenciais Conceitos *Threshold* (CT) e as diferentes tipologias dos conceitos nas PFNET (NE, NP e CN)

$\rho(CT_9 \text{ e } NE_9) = 0,743^{**}$	$\rho(CT_{12} \text{ e } NE_{12}) = 0,389$	$\rho(CT_{Total} \text{ e } NE_{Total}) = 0,636^{*}$
$\rho(CT_9 \text{ e } NP_9) = -0,251$	$\rho(CT_{12} \text{ e } NP_{12}) = -0,216$	$\rho(CT_{total} \text{ e } NP_{Total}) = -0,273$
$\rho(CT_9 \text{ e } CN_9) = -0,797^{**}$	$\rho(CT_{12} \text{ e } CN_{12}) = -0,537$	$\rho(CT_{total} \text{ e } CN_{Total}) = -0,682^{*}$

*A correlação é significativa no nível 0,05 (2 extremidades).
**A correlação é significativa no nível 0,01 (2 extremidades).

A leitura destes valores permitiu-nos retirar algumas conclusões. A primeira foi a existência de uma correlação positiva e significativa da frequência com que são referidos os potenciais Conceitos *Threshold* e os nós extremidade, tanto no 9.º ano (0,743) como para o total de alunos (0,636), sendo que quanto mais alunos referiram um CT mais alunos também o referiram como nó extremidade. No 12.º ano esta correlação apesar de positiva foi baixa e não significativa.

Em segundo, valores de correlações baixas negativas da frequência com que são referidos os Conceitos *Threshold* e os nós polares tanto no 9.º ano (-0,251) como no 12.º (-0,216) como no total (-0,273), no entanto todos estes valores não foram significativos.

O último aspeto prende-se com o facto de haver correlações negativas e significativas da frequência com que foram referidos os potenciais Conceitos *Threshold* e os Conceitos Nucleares tanto no 9.º ano (-0,797) como para a totalidade dos alunos (-0,682), sendo que quanto mais alunos referem um CT menos alunos referem-no como Conceito Nuclear. No 12.º (-0,537) e apesar do coeficiente indicar uma correlação moderada negativa, esta não foi, no entanto, significativa.

5. Conclusões

No decorrer no nosso trabalho empírico, e nos dois momentos de recolha de dados, foram obtidas um total de 669 (1.º momento – 344 e 2.º momento – 325) representações das estruturas cognitivas de estudantes, dadas através das Redes Associativas *Pathfinder*, em torno do conceito de Probabilidade.

A partir das redes Médias PFNET dos dois momentos de recolha de dados, podemos observar que no grupo de estudantes mais jovens, emerge um Conceito Nuclear "Probabilidade", em torno do qual orbitam os termos "Acontecimento", "Lançamento de moedas/dados", "Experiência aleatória", "Lei dos Grandes Números" e os "Casos possíveis e favoráveis", todos estes associados à linguagem específica desta temática matemática. O exemplo "Lançamento de dados/moedas" perde importância, ao passar de Conceito Nuclear, no 1.º momento, a nó extremidade, no 2.º momento de recolha de dados. Constata-se a existência de uma "cauda" formada pela "Lei dos Grandes Números", "Valor numérico" e "Quociente" e, diametralmente opostos como nós extremidade nesta disposição, "Acaso" e "Quociente", constituindo estes últimos conceitos os menos consolidados na estrutura cognitiva dos alunos em torno da Probabilidade. É curioso no 9.º ano a fraca ligação existente entre a Probabilidade e a sua vertente mensurável dada pelos termos "Quociente" e "Valor Numérico".

Também os termos "Acaso" e "Quociente" surgem, nas redes médias PFNET dos estudantes do 12.º ano de escolaridade e nos dois momentos de recolha de dados, muito afastados. São redes muito centradas no Conceito Nuclear "Probabilidade", apesar de, no 2.º momento de recolha de dados, o termo "Casos possíveis e favoráveis" aumentar a sua relevância nestas representações das estruturas cognitivas, e por esta razão passar a Conceito Nuclear, aspeto que, na nossa opinião, se prende com reconhecimento da importância que os alunos atribuem à utilização do Cálculo Combinatório para determinar estas quantidades. Ainda para este nível de ensino é recorrente a existência de uma "cauda", agora formada pelas noções de "Lançamento de moedas/dados", "Experiência aleatória" e "Acaso", aspeto que nos parece natural já que temos um exemplo de uma experiência aleatória e que, por esta razão, está envolvida em incerteza. A imprevisibilidade associada a este tema matemático, expressa através do termo "Acaso" e da "Experiência aleatória", não surgem muito próximos de "Probabilidade".

Apesar do incremento do grau de dificuldade dos conteúdos probabilísticos do 9.º ano para o 12.º ano, não há diferenças estatisticamente significativas no Índice de Complexidade das redes, nos dois anos de escolaridade e nos dois momentos, o que é numericamente demonstrativo da inexistência de um aumento de complexidade das PFNET. Este facto evidencia que no ano escolar em que os alunos aprofundam a temática das probabilidades a respetiva estrutura cognitiva não se torna mais complexa, privilegiando relações já existentes/consolidadas em anos escolares anteriores.

O conceito mais complicado/difícil de entender simultaneamente no 9.º ano como no 12.º ano de escolaridade foi a "Lei dos Grandes Números". Daqui resulta que é este conceito que parece perpetuar-se no tempo como o mais difícil de entender em ambos os anos de escolaridade. Pelo facto de ser uma noção problemática e difícil de entender, constitui um candidato a ser um potencial Conceito *Threshold*. Todavia o questionário utilizado não evidenciou que esta noção verificava também as outras características associadas a este tipo de conceito – Transformadora, Integradora, Irreversível e Limitadora.

A existência de uma correlação positiva e significativa da frequência com que são referidos os potenciais Conceitos *Threshold* e os nós extremidade, tanto no 9.º ano, como para o total de alunos, sendo que quanto mais alunos referem um CT mais alunos também o referem como nó extremidade. No 12.º ano esta correlação, apesar de positiva, é baixa. Parece-nos que pelo facto de os nós extremidade ainda não estarem devidamente consolidados na estrutura cognitiva dos estudantes não invalida que, pela importância de alguns deles ("Lei dos Grandes Números"), se invista mais fecundamente no seu processo de Ensino/Aprendizagem.

Neste trabalho conseguimos detetar como potencial Conceito *Threshold* a "Lei dos Grandes Números" e, ainda, mostrar a relação existente entre os nós extremidade das PFNET e os conceitos mais difíceis/complicados de entender (potenciais Conceitos *Threshold*). Consideramos que para os estudantes alcançarem um nível adequado de compreensão sobre a Probabilidade, estes devem ser capazes de estabelecerem conexões que relacionem os seus diferentes significados. Nesta lógica opinamos a "Lei dos Grandes Números" pela sua proficuidade em estabelecer pontes entre as diferentes conceções de Probabilidade (Laplaciana, Frequencista e Subjetiva), deve ser uma noção mais abordada e com mais profundidade no 9.º ano de escolaridade e reforçado o seu ensino e aprendizagem no ano terminal do ensino secundário (12.º ano).

Apesar de não conhecermos estudos da aplicação específica destas Teorias à temática das Probabilidades, todavia, alguns destas conclusões estão patentes em investigações aplicadas a outros assuntos matemáticos. Podemos encontrar em Casas (2002) e Antunes (2011), a constatação da existência de um número reduzido de Conceitos Nucleares presentes na estrutura cognitiva e sobre os quais os alunos centram o seu conhecimento. Nas pesquisas destes mesmos autores, verificou-se também um não aumento do Índice de Complexidade das PFNET, a existência de ligações que se mantêm no tempo e a constatação da relevância da metodologia das redes PFNET no processo de Ensino e Aprendizagem.

Por outro lado a identificação do potencial Conceito *Threshold* "Lei dos Grandes Números" vem mostrar a importância que este conceito assume enquanto um dos modos de descobrir probabilidades (Gal, 2005) através de procedimentos e algoritmos (Batanero, 2005), assume enquanto elemento de "*(…) hacer inferencias que conecten los enfoques subjetivo, clásico y frecuencial*" (Sánchez e Valdez, 2013, p.39).

Ao possibilitar a identificação dos conceitos mais significativos e as relações mais relevantes da estrutura cognitiva dos alunos, estamos convictos que as Teorias dos Conceitos Nucleares e dos Conceitos *Threshold* constituem uma outra ferramenta didática para organizar a prática pedagógica e um referencial pedagógico rico e fecundo, que deve ser levado em consideração no processo de Ensino e Aprendizagem da Probabilidade. Trabalhos como os de Veríssimo (2013) ou Veríssimo, Godinho, Luengo e Casas (2014), que permitiram desenhar unidades didáticas baseadas nos resultados da investigação, constituem exemplos das aplicações em desenvolvimento e de sugestões futuras com base nesta linha de pesquisa.

Referências

Alexander, D. & Bueno, F. (2013). Técnicas Monte Carlo para la enseñanza de la estadística. En J. M. Contreras, G. R. Cañadas, M. M. Gea y P. Arteaga (Eds.), *Actas de las Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria*, 579-586. Granada: Universidad de Granada.

Almeida, C. (2011). *O contributo das Redes Associativas Pathfinder à avaliação das aprendizagens em Matemática: Aplicação aos exames de Matemática da 1.ª chamada do 9.º ano de escolaridade do Ensino Básico português.* Trabalho Final de Master. Badajoz: Universidad de Extremadura.

Almeida, C., Casas, L. & Luengo, R. (2013). A organização conceptual dos estudantes, dada através das Redes Associativas Pathfinder, do conceito de Probabilidade: Um estudo com alunos do 9.º ano de Escolaridade do Ensino Básico Português. En J. M. Contreras, G. R. Cañadas, M. M. Gea y P. Arteaga (Eds.), *Actas de las I Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria*, 83-90. Granada: Universidad de Granada.

Almeida, C. (2014). *Estudo da estrutura cognitiva dos alunos dos 9.º e 12.º anos sobre o conceito de Probabilidade: o contributo das Teorias dos Conceitos Nucleares e dos Conceitos Threshold*. Tese de Doutoramento. Badajoz: Universidad de Extremadura.

Anasagasti, A. & Berciano, A. (2013). Prueba exploratoria sobre competencias de futuros maestros de Primaria: Conocimiento del bloque relativo al tratamiento de la información, azar y probabilidad, en el currículo escolar de Matemáticas. En J. M. Contreras, G. R. Cañadas, M. M. Gea y P. Arteaga (Eds.), *Actas de las I Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria*, 531-538. Granada: Universidad de Granada.

Antunes, A. (2010). *Estructura Cognitiva y Conceptos Nucleares en la Enseñanza/Aprendizaje de la Trigonometría: Estudio Comparativo Realizado con Alumnos del 10.º al 12.º Año de Enseñanza Secundaria a través de la Aplicación de Diferentes Metodologías*. Tese de Doutoramento. Badajoz: Universidad de Extremadura.

Arias, J. (2008). *Evaluación de la Calidad de Cursos Virtuales: Indicadores de Calidad y Construcción de un Cuestionario de Medida. Aplicación al Ámbito de Asignaturas de Ingeniería Telemática*. Tese de Doutoramento. Badajoz: Universidad de Extremadura.

Ausubel, D. (1978). *Psicología educativa. Un punto de vista cognoscitivo*. México: Trillas.

Azcárate, P. (1996*). Estudio de las concepciones disciplinares de futuros profesores de primaria en torno a las nociones de la aleatoriedad y probabilidad*. Granada: Comares.

Azcárate, P. & Serradó, A. (2006). Tendencias didácticas en los libros de texto de matemáticas para la ESO. *Revista de Educación*, *340*, 341-378.

Batanero, C. (2004). Ideas estocásticas fundamentales ¿Qué Contenidos se Debe Enseñar en la Clase de Probabilidad?. Em J. Fernandes, M. Sousa & S. Ribeiro (Orgs.), *Ensino e aprendizagem de probabilidades e estatística – Atas do I Encontro de Probabilidades e Estatística na Escola,* 9-30. Braga: Universidade do Minho.

Batanero, C., Díaz Godino, J. & Roa, R. (2004). Training teachers to teach probability. *Journal os Statistics Educacion*, *12* (1).

Batanero, C. (2005). Significados de la probabilidad en la educación secundaria. *Relime - Revista Latinoamericana de Investigación en Educación en Matemática Educativa*, *8*(3), 247-263.

Batanero, C. & Henry, M. & Parzysz, B. (2005). The nature of chance and probability. In G. A. Jones (Ed.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning*, 15-37. New York, USA: Springer.

Batanero, C. & Díaz, C. (2007). Probabilidad, grado de creencia y proceso de aprendizaje. Ponencia Invitada en las *XIII Jornadas Nacionales de Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas*. Granada: Espanha.

Batanero, C. (2009). Retos para la formación Estadística de los Profesores. *Actas do II Encontro de Probabilidades e Estatística na Escola*. Braga: Universidade do Minho.

Batanero, C., Ruiz, B. & Arteaga, P. (2009). Comparación de distribuiciones: Una actividad sencilla para los futuros professores?. *Actas do II Encontro de Probabilidades e Estatística na Escola*. Braga: Universidade do Minho.

Caldeira, S. (2009). *A estatística e as probabilidades no ensino secundário: Análise dos programas de Matemática A e B na perspectiva do professor e dos alunos*. Tese de Mestrado. Lisboa: Universidade de Lisboa.

Carvalho, J. (2011). *Estudio de las posibilidades de aplicación a la enseñanza de la Matemática del entorno PmatE: Validación y aportaciones en 1.ºciclo de Enseñanza Básica de Portugal*. Tese de Doutoramento. Badajoz: Universidad de Extremadura.

Casas, L. (2002). *El Estudio de la Estructura Cognitiva de Alumnos a Través de Redes Asociativas Pathfinder. Aplicaciones y Posibilidades en Geometria*. Tese de Doutoramento. Badajoz: Universidad de Extremadura.

Casas, L. & Luengo, R. (2003). Redes Asociativas Pathfinder y Teoria de los Conceptos Nucleares. Aportaciones à la Investigación em Didáctica de las Matemáticas. En E. Castro, P. Flores, T. Ortega, L. Rico, & A. Vallecinos (Eds). *Investigación en Educación Matemática. VII Simposio de la Sociedade Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM)*, 179-188. Granada: Universidad de Granada.

Casas, L. & Luengo, R. (2004). Representación del Conocimento y Aprendizaje. Teoria de los Conceptos Nucleares. *Revista Española de Pedagogia R.E.P. 227*, 59-84.

Casas, L. & Luengo, R. (2005). Conceptos Nucleares en la Construcción del Concepto de Ángulo. *Enseñanza de las Ciencias*, *23*(2), 201–216.

Casas, L., Luengo, R. & Godinho, V. (2011). Software GOLUCA: Knowledge Representation in Mental Calculation. *US-China Education Review*, *4*, 592-600.

Clariana, R., Draper, D. & Land, S. (2011). An automated measure of group knowledge structure convergence. Apresentação na *Annual Meeting of the Association for Educational Communications and Technology*. Jacksonville: EUA.

Clariana, R., Engelmann, T. & Yu, W. (2013). Using centrality of concept maps as a measure of problem space states in computer-supported collaborative problem solving. *Education Tech Research, 61*, 423–442.

Davies, P. (2003). Threshold Concepts: how can we recognise them?. Paper apresentado em *EARLI Conference*, August. Itália: Padova.

Díaz Godino, J. (2013). Diseño y análisis de tareas para el desarrollo del conocimiento didáctico matemático de profesores. En J. M. Contreras, G. R. Cañadas, M. M. Gea y P. Arteaga (Eds.), *Actas de las I Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria*, 1-16. Granada: Universidad de Granada.

Gal, I. (2005). Towards "probability literacy" for all citizens: building blocks and instructional dilemas. Em Jones, G. (Ed.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning*, 39-43.

Godinho, V. (2007*). Implementação do software GOLUCA e aplicação à modificação de redes conceptuais*. Trabalho de DEA. Badajoz: Universidad de Extremadura.

Graça Martins, M. & Ponte, J. (2010). *Organização e tratamentos de dados*. Lisboa: Ministério da Educação – DGIDC.

Großschedl, J. & Harms, U. (2013). Assessing conceptual knowledge using similarity judgments. *Studies in Educational Evaluation*, *39*, 71–81.

Holloway, M., Alpay, E. & Bull, A. (2009). A Quantitative Approach to Identifying Threshold Concepts in Engineering Education. In *EE2010 conference*.

Jonassen, D., Beissner, K., & Yacci, M. (1993). *Structural Knowledge: Techniques for Representing, Conveying and Acquiring Structural Knowledge*. Hillsdale: Erlbaum.

Kamada, T. & Kawai, S. (1989). An algorithm for drawing general undirected graphs. *Information Processing Letters*, *31* (1), 7–15.

Kudikyala, U. & Vaughn, R. (2005). Software requirement understanding using Pathfinder networks: discovering and evaluating mental models. *The Journal of Systems and Software*, *74*, 101–108.

Lopes, J. (2011). Uma Proposta Didático-Pedagógica para o Estudo da Concepção Clássica de Probabilidade. *Bolema*, *24*(39), 607-628.

Lopes, J. (2013). Una propuesta para la enseñanza del teorema de Bayes a través de un juego de dados y de resolución de problemas. En J. M. Contreras, G. R. Cañadas, M. M. Gea y P. Arteaga (Eds.), *Actas de las I Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria*, p. 601-608. Granada: Universidad de Granada.

Luengo, R., Casas, L., Mendoza, M. & Arias, J. (2011). Possibilities of "Nuclear Concepts Theory" on Educational Research, a Review. *International Conference "The future of Education",* June. *F*lorence: Italia.

Luengo, R. (2013). La Teoría de los Conceptos Nucleares y su aplicación en la investigación en Didáctica de las Matemáticas. *UNIÓN - Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, *34*, 9-36.

Maanan, M. (2012). *Evaluación del conocimiento de los futuros profesores de educación primaria sobre Probabilidad*. Tese de Doutoramento. Granada: Universidad de Granada.

Mercado, M. (2013). Exploración de conceptos de probabilidad con Geogebra. En J. M. Contreras, G. R. Cañadas, M. M. Gea y P. Arteaga (Eds.), *Actas de las I Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria*, 309-318. Granada: Universidad de Granada

Meyer, J. & Land, R. (2003). *Threshold Concepts and Troublesome Knowledge: Linkages to Ways of Thinking and Practising within the Disciplines - Occasional Report 4, ETL Project*. University of Edinburgh: Scotland.

Meyer, J. & Land, R. (2005). Threshold concepts and troublesome knowledge (2): Epistemological considerations and a conceptual framework for teaching and learning. *Higher Education*, *49* (3), 373–388.

Millán, E. (2013). Razonamiento Combinatorio y el currículo español. En J. M. Contreras, G. R. Cañadas, M. M. Gea y P. Arteaga (Eds.), *Actas de las I Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria*, 539-545. Granada: Universidad de Granada.

Perkins, D. (1999). The many faces of constructivism. *Educacional Leadership*, *57*(3), 6-11.

Pratt, D. (2005). How do teachers foster students' understanding of probability? En G. A. Jones (Ed.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and learning*, 345-366. New York: Springer.

Sánchez, E. & Valdez, J. (2013). La cuantificación del azar: una articulación de las definiciones subjetiva, frecuencial y clásica de probabilidade. En J. M. Contreras, G. R. Cañadas, M. M. Gea y P. Arteaga (Eds.), *Actas de las I Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria*, 39-45. Granada: Universidad de Granada.

Sarwar, G. (2012). *Comparing the Effect of Reflections, Written Exercises, and Multimedia Instruction to Address Learners' Misconceptions using Structural Assessment of Knowledge.* Tese de Doutoramento. Canada: Ottawa.

Schvaneveldt, R., Dearholt, D. & Durso, F. (1985). *Pathfinder: Scaling with network structures (Memorandum in Compute and Cognitive Science, MCCS.85-9*). New Mexico: State University.

Schvaneveldt, R., Dearholt, D. & Durso, F. (1988). Graph Theoretic Foundations of Pathfinder Networks. *Computer Mathematics Applications*, *15*(4), 337-345.

Tall, D. & Vinner, S. (1981) Concept Image and Concept Definition in Mathematics with Particular Reference to Limits and Continuity. *Educational Studies in Mathematics*, *12*(2), 151-169.

Veríssimo, S. (2013). *A introdução das ideias da Teoria dos Conceitos Nucleares no ensino da Geometria e as suas implicações*. Tese de Doutoramento. Badajoz: Universidad de Extremadura.

Verissimo, S., Godinho, V., Luengo, R. y Casas, L. (2014). Identificação de conceitos prévios dos alunos recorrendo a métodos qualitativos. *Indagatio Didactica, 6*(3), s/p. Disponível em http://revistas.ua.pt/index.php/ID/article/view/3000/2785

Autores

Cesário Almeida. Instituto Politécnico de Beja, Portugal. calmeida@ipbeja.pt

Luis Casas García. Universidad de Extremadura, España. luisma@unex.es

Ricardo Luengo González. Universidad de Extremadura, España. rluengo@unex.es

Alejandro Andrade Lotero, Amparo Lotero Botero, Edgar A. Andrade Londoño

LA HIPÓTESIS DE LOS CUADROS DE SIGNIFICADO EN LA SOLUCIÓN DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS

The Frames of Meaning Hypothesis: Children's Mathematical Problem-Solving Abilities

RESUMEN

El presente texto tiene la intención de describir un fenómeno observado cuando niños y niñas de 6 y 7 años, quienes aún no habían recibido instrucción formal de la división, intentaron dar solución a un problema de repartición por medio de dibujos. El fenómeno llamado "cuadros de significado" intenta explicar por qué algunos niños tuvieron éxito en la solución de problemas y otros no. Por medio de un estudio de casos ilustramos empíricamente esta hipótesis, la cual se presenta como una herramienta teórica y metodológica poderosa para la conceptualización de la solución de problemas aritméticos y la comprensión que subyace al pensamiento matemático de los niños de esta edad. No obstante, es necesario seguir expandiendo nuestro análisis y la aplicación de este marco de referencia. Esto conllevaría a reconsiderar prácticas educativas y evaluativas convencionales. En este artículo intentamos señalar un camino por el cual podrían realizarse estos cambios.

PALABRAS CLAVE:

- *Cuadros de significado*
- *Resolución de problemas*
- *Pensamiento matemático*
- *Educación primaria*

ABSTRACT

This paper intends to describe a phenomenon observed when children aged 6 and 7 years old, who had not yet received formal instruction about division, tried to solve a problem of distribution by means of drawings. The phenomenon called "frames of meaning" attempts to explain why some children were successful in solving problems and others were not. We illustrate this hypothesis empirically through a case study. This hypothesis is a powerful theoretical and methodological tool for understanding the underlying mathematical thinking and arithmetic problem-solving abilities of children this age. However, it is necessary to continue to expand our analysis and the application of this framework. This would lead to reconsider conventional educational and evaluative practices. In this article we try to point the way by which these changes could be made.

KEY WORDS:

- *Frames of meaning*
- *Problem solving*
- *Mathematical thinking*
- *Elementary education*

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (2017) *20* (1): 39-70.
Recepción: Septiembre 13, 2013 / Aceptación: Mayo 31, 2016. DOI: 10.12802/relime.17.2012

RESUMO

Este artigo pretende descrever um fenômeno observado quando as crianças com idade entre 6 e 7 anos, que ainda não tinha recebido a divisão de instrução formal, tentou resolver um problema de distribuição por meio de desenhos. O fenômeno chamado de "quadros de sentido" tentativas de explicar por que algumas crianças foram bem sucedidos na resolução de problemas e outros não. Através de um estudo de caso ilustram essa hipótese empiricamente, que se apresenta como uma poderosa ferramenta teórica e metodológica para a conceituação do problema de aritmética resolver e entender o pensamento matemático subjacente de crianças desta idade. No entanto, é necessário continuar a expandir a nossa análise e da aplicação deste quadro. Isso levaria a repensar as práticas educativas convencionais e avaliativas. Neste artigo vamos tentar apontar o caminho pelo qual essas mudanças poderiam ser feitas.

PALAVRAS CHAVE:

- *Quadros de significado*
- *Resolução de problemas*
- *Pensamento matemático*
- *Ensino fundamental*

RÉSUMÉ

Cet article se propose de décrire un phénomène observé lorsque les enfants âgés de 6 et 7 ans, qui n'avait pas encore reçu la division de l'enseignement formel, a tenté de résoudre un problème de répartition au moyen de dessins. Le phénomène appelé «cadres de sens» tente d'expliquer pourquoi certains enfants ont réussi à résoudre les problèmes et d'autres pas. Grâce à une étude de cas illustrent cette hypothèse de manière empirique, qui est présenté comme un outil théorique et méthodologique puissant pour la conceptualisation de résoudre et de comprendre la pensée mathématique sous-jacente des enfants de cet âge problème d'arithmétique. Cependant, il est nécessaire de continuer à développer notre analyse et l'application de ce cadre. Cela conduirait à reconsidérer les pratiques éducatives classiques et d'évaluation. Dans cet article nous essayons de montrer la voie par laquelle ces changements pourraient être apportés.

MOTS CLÉS:

- *Cadres de sens*
- *La résolution de problèmes*
- *La pensée mathématique*
- *L'enseignement élémentaire*

1. La Hipótesis de los Cuadros de Significado en la Solución de Problemas Matemáticos

El presente texto tiene la intención de describir un fenómeno observado cuando niños y niñas de primaria intentaron dar solución a problemas complejos de operaciones aritméticas por medio de dibujos. Los participantes aún no habían recibido instrucción formal acerca de los algoritmos simbólicos adecuados para resolver este tipo de problemas. El fenómeno que aquí nos concierne, al cual hemos llamado *cuadros de significado*, intenta explicar por qué algunos niños tuvieron éxito en la solución de problemas y otros no. También intenta comprender por qué las soluciones que plantearon estos niños parecen poner en juego muchos elementos de recursos cognitivos que forman escenarios de sentido. Aquí ilustramos la hipótesis de los *cuadros de significado* estudiando detenidamente varios casos de soluciones a un problema matemático de enunciado verbal en el contexto de repartición discreta, llamado *el caso de los niños y las canicas de colores.* Este problema hizo parte de una prueba de competencia matemática que fue presentado a niños y niñas de 6 y 7 años de varios colegios públicos en la ciudad de Medellín, Colombia.

En este artículo presentamos una breve introducción a nuestra conceptualización acerca de la hipótesis de los cuadros de significado, la manera como los cuadros de significado se manifiestan en la resolución de problemas matemáticos, y, finalmente, un estudio de casos en el cual ilustramos empíricamente esta hipótesis en el contexto de problemas de repartición.

2. Resolución de Problemas

Esta investigación pretende aportar a la literatura en el campo de la resolución de problemas en el dominio de las matemáticas. No obstante, el presente aporte no se incluye en la corriente dedicada a estudiar la resolución de problemas como una dicotomía entre experto y novato (cf. Chi, Feltovich, y Glaser, 1981; Gobbo y Chi, 1986; Hmelo-Silver y Pfeffer, 2004; Nehm y Ridgway, 2011). Estas investigaciones que contrastan el desempeño del novato con la del experto han mostrado que los expertos son capaces de, por ejemplo, distinguir los componentes relevantes del problema de aquellos detalles contextuales superficiales, identificar la estructura formal del problema, y de generalizar a otros problemas de estructura similar (Nehm y Ridgway, 2011).

No obstante, en varias ocasiones se ha señalado que es injusto identificar experticia con éxito para solucionar problemas (Bodner y Domin, 2000; Camacho y Good, 1989; Domin y Bodner, 2012; Silver, Mitchell, y Gist, 1995). En efecto, equiparar experticia con solución exitosa de problemas esconde un aspecto problemático. Cuando el objetivo es instruir a un sujeto hacia la experticia, lo que antes eran problemas se convierten en ejercicios rutinarios. Por lo tanto, bajo esa mirada no se estudia la resolución de problemas en el sentido estricto del término. En cambio, la presente investigación se circunscribe dentro de la línea que estudia las diferencias entre aquellas personas que solucionan exitosamente el problema y aquellas que son infructuosas en su intento por resolverlo (Camacho y Good, 1989; Silver et al., 1995).

Nuestra línea de investigación se acerca a los estudios de ecología conceptual realizados en enseñanza de la ciencia y su crítica hacia la idea de cambio conceptual (diSessa, 1993, 2002) para una introducción en español a esta discusión ver por ej. Bello (2004) o Flores (2004). En este sentido, en lugar de presuponer la transición desde un concepto ingenuo hacia un concepto científico, se asume que en este tránsito es necesaria la reorganizacion de una gran cantidad de entidades mentales o recursos cognitivos. Estos recursos pueden estar débilmente organizados o, por el contrario, formar sistemas complejos y coherentes de conocimiento (diSessa, 1993; Smith, diSessa, y Roschelle, 1994). Por ejemplo, en vez de asumir que los niños tienen ideas erradas acerca de algún concepto como el de cardinalidad en matemáticas o fuerza en ciencia física, se entiende que hay una estructuración a partir de elementos cognitivos primitivos. Estos elementos, a diferencia de las estructuras generales propuestas por Piaget (e.g., Piaget y Inhelder, 2007), son diversos, de fino tamaño, y dependientes del contexto de su uso (diSessa, 2002).

Aunque nuestra investigación se ha encaminado a entender el aprendizaje de niños de edad escolar básica en varias áreas de conocimiento, tales como en matemáticas, ciencia y tecnología (Lotero Botero, Andrade Londoño, y Andrade Lotero, 2011, 2012), en el presente artículo mostramos nuestros resultados de investigación en el área del aprendizaje de las matemáticas.

3. El Contexto de los Problemas Matemáticos

Los problemas matemáticos de enunciado textual escrito son habituales en evaluaciones formativas del aprendizaje a pequeña escala (Kulm, 1990; Romberg, Zarinnia, y Collis, 1990), en evaluaciones sumativas de escala nacional, tales como las pruebas Saber (Castillo Ballén, Triana, Duarte-Agudelo, Pérez-Abril, y Lemus-Espinosa, 2007), e internacional como las pruebas Pisa y TIMSS (Adams, 2005; Mullis, Martin, Gonzalez, y Chrostowski, 2004), así como también en actividades de instrucción (Mulligan, 1992; Verschaffel, Greer, y de Corte, 2000; Xin, Wiles, y Lin, 2008).

No obstante, en nuestra mirada a la educación básica hemos encontrado que los niños frecuentemente confunden la operatividad simbólica con el sentido de solución matemática durante la solución de problemas. Anteriores investigaciones acerca de la solución de problemas matemáticos de enunciado escrito han puesto de presente la dificultad de los niños para usar procedimientos algorítmicos convencionales y aplicarlos a la solución de un problema (Koedinger y Nathan, 2004; Mulligan, 1992). Por ejemplo, Kroedinger y Nathan (2004) hallaron que la mayoría de los niños les resulta difícil solucionar un problema presentado como una ecuación, y en cambio recurren a procedimientos *ad hoc* para dar solución a problemas de enunciado escrito. Algunos de estos procedimientos *ad hoc* son, por ejemplo, comenzar desde el final y devolverse, así como la estrategia de *ensayo y error*. Menos de la mitad de los niños intentan emplear los algoritmos enseñados por los profesores, y una porción menor aún tiene éxito al aplicarlos.

Otras investigaciones han mostrado que los niños tienen dificultad para construir respuestas con sentido, es decir, saber que la representación del resultado se refiere a algo en la realidad (Bodner y Domin, 2000; Domin y Bodner, 2012; Verschaffel, De Corte, y Lasure, 1994). Por ejemplo, Bodner y Domin (2000) encontraron que muchos estudiantes universitarios, al intentar resolver problemas de química, llegaron a respuestas sin sentido. Muchos estudiantes escribieron fórmulas químicas cuyos términos, letras y números "no pueden ser correctamente llamados símbolos porque no representan o simbolizan nada que tenga realidad física" (Bodner y Domin, 2000, p. 27). Por su parte, Verschaffel et al. (1994) han mostrado que muchos estudiantes no consideran que las matemáticas escolares tienen relación con el mundo real, y pocos de ellos presentan respuestas basadas en consideraciones realistas.

Otros estudios han mostrado que cuando los niños construyen sus propias representaciones, inventadas en situaciones prácticas que presentan problemas con sentido para ellos, se les facilita entender por qué deben usar ciertos procedimientos para resolver los problemas matemáticos involucrados en estas situaciones (Carolan, Prain, y Waldrip, 2008; Greeno y Hall, 1997; Roth y Bowen, 1994). Por ejemplo, Greeno y Hall (1997) argumentan que, si los niños necesitan construir tablas y gráficas para un reporte de un proyecto, ellos aprenderán si estas representaciones son efectivas para comunicar sus resultados o no. "Pero si los estudiantes simplemente completan la tarea de construir representaciones en formas previamente especificadas, ellos no tendrán la oportunidad de aprender las ventajas y desventajas de ciertos tipos de formas de representación…" (Greeno y Hall, 1997, p. 1-2).

Además, en nuestra propia investigación encontramos que no es únicamente un problema de comprensión del enunciado escrito. Por supuesto, es cierto que aquellos niños que no entienden el enunciado no pueden resolver el problema, pero no todo aquel que comprende el enunciado es capaz de plantear una solución con sentido (Lotero Botero et al., 2011).

En efecto, entonces, los problemas matemáticos de enunciado verbal son usados comúnmente en evaluaciones del aprendizaje, pero los resultados muestran que una gran población de estudiantes tiene serias dificultades para resolverlos. A continuación, expondremos nuestra hipótesis de por qué ciertos estudiantes pueden solucionar correctamente un problema y cuáles son las características de los recursos cognitivos que ponen en juego.

4. Hipótesis de los Cuadros de Significado

La hipótesis de los cuadros de significado implica que cuando un sujeto resuelve un problema, éste pone en juego una gran cantidad de recursos cognitivos y epistémicos que generan un alto orden local en su sistema cognoscitivo general. Para usar una metáfora visual, un cuadro de significado es una estructura que se construye entre la comprensión semántica de un problema y la solución visible y material que se le da al problema. Esta estructura está compuesta por recursos cognitivos en forma de pequeñas unidades que pertenecen a tres clases: (a) abstracciones fenomenológicas simples que derivan en esquemas anticipatorios (diSessa, 1993; Von Glasersfeld, 1997), (b) conocimientos de sistemas representacionales (diSessa y Sherin, 2000; Greeno y Hall, 1997), y (c) expectativas epistémicas acerca de cuál debería ser la solución bajo determinadas condiciones particulares (Conlin, Gupta, y Hammer, 2010; Scherr y Hammer, 2009). Además, debido a que el producto del cuadro de significado es una estructura visible y material, este significado se expresa como un recurso semiótico (Goodwin, 2003; Kaltenbacher, 2007) que inicia en quien genera el cuadro y es completado por quien lo interpreta.

Así como los p-prims (diSessa, 1993), el cuadro de significado no implica la utilización de un sistema de conocimiento previamente archivado mentalmente que se activa al momento que el sujeto reconoce la correspondencia entre la estructura de este modelo abstracto con la estructura de una situación particular, al estilo de los expertos (Chi et al., 1981). En cambio, se entiende el cuadro de significado como el acto de construcción de solución dentro de una estructura local de conocimiento (a partir inicialmente de esquemas anticipatorios). El desarrollo de una estructura local se refiere a un desarrollo situado, en pequeños pedazos, multidimensional e inestable (diSessa, 1993, 2002; Lesh y Lehrer, 2003). Un esquema anticipatorio se refiere a los patrones de comportamiento que son generados por la expectativa de vivencias pasadas y la predicción acerca de cómo se actúa en circunstancias similares (Von Glasersfeld, 1997). En el caso del aprendizaje, un esquema anticipatorio existe cuando no se ejecutan las actividades que llevarían a una solución, sino que se anticipan sin tener que ser implementadas (Hackenberg, 2010).

En efecto, así como las actividades constructivas propuestas por Lesh y colaboradores (Lesh y Doerr, 2000; Lesh y Lehrer, 2003), la construcción de un cuadro de significado implica algo más que dar una breve respuesta a la pregunta y, en cambio, involucra el desarrollo explícito de una explicación. En este sentido, el sujeto construye un sistema conceptual expresado en un sistema representacional que es útil y cumple con un propósito de sentido para el sujeto (Lesh y Carmona, 2003).

La idea de que existe un *cuadro* hace referencia a que el sujeto percibe esta organización local con un sentido de completitud. Es decir, cuando el sujeto construye una respuesta al problema, él o ella subjetivamente percibe que está completa, coherente e integrada, sobre todo cuando la persona considera que ha dado con la respuesta *correcta*.

Ahora bien, el significado es construido subjetivamente, pero es visible y externalizado como una comunicación de sentido. Por ello, el significado de cada cuadro es completado también por la interpretación de la persona que lo recibe o evalúa y de la práctica social en la que se enmarca. Por ejemplo, la solución de un problema es considerada como solución debido a que hay un parámetro de *solución final*. Aquel quien determina la solución final interpreta la solución presentada por el primer sujeto y puede determinar su completitud, coherencia y congruencia. No obstante, esta tercera persona no usa criterios arbitrarios, sino que se basa en la organización de las prácticas prevalentes de su grupo sociocultural (Brown, Collins, y Duguid, 1989; Lave y Wenger, 1991) y en la racionalidad de la disciplina de conocimiento en la que se circunscribe (Habermas, 1984).

Así pues, el cuadro de significado es construido por una persona, como un proceso cognitivo que aparece como un significado privado. El conocimiento matemático es, no obstante, una composición dialéctica entre un modo de conocimiento instrumental y otro comunicativo. El significado privado se relaciona con el esquema o invariante proveniente de la experiencia instrumental. A su vez, la representación de la solución se halla en la intersección entre la intersubjetividad de quien crea el cuadro y de quien observa e interpreta el significado. La representacion de la solucion hace que el significado sea publico, y este significado publico puede interpretarse como completo o incompleto, coherente o incoherente.

Estos cuadros de significado son considerados completos cuando articulan los invariantes o esquemas apropiados a situaciones particulares (Nunes y Bryant, 2005). Pero no siempre expresan el sentido por medio de signos y reglas convencionales, sino que pueden hacer uso de otros recursos semióticos para integrar la articulación de todas las partes (Hull y Nelson, 2005; Kaltenbacher, 2007; Yañez y Chávez, 2009). Por ejemplo, en el caso que en el presente artículo ilustramos, los niños resolvieron un problema matemático de repartición por medio de dibujos sin apelar necesariamente a procedimientos algorítmicos.

4.1. *Cuadros de Significado Matemático*

Usualmente la escuela no promueve la formación de cuadros de significado, es decir, la integración y articulación de diversas piezas de habilidades y recursos cognitivos en la actividad de solución de problemas. En cambio, la escuela ha fomentado la memorización de partes incompletas que se hacen pasar por un todo. O por lo menos, en las expectativas del aprendiz, éste confunde la parte con el todo, es decir, la proposición de un algoritmo aislado con el cuadro completo de significado.

El cuadro de significado matemático se expresa como una manera de solucionar un problema que requiere no sólo un alto nivel de organización, sino también integrar diversos elementos de pensamiento lógico, representacional, y situado – es decir, el desempeño de un sujeto haciendo uso del contexto (Carraher, Carraher, y Schliemann, 1985; Nunes y Bryant, 2005).

Asumimos que los cuadros de significado que se convierten en el fundamento de conceptos matemáticos provienen originariamente de la posibilidad de comprender los problemas como actividades de transformación, conservación y organización, previstos por ejemplo en la lógica de significaciones (Piaget y García, 1997; Piaget y Inhelder, 2007). En este sentido, originariamente el cuadro de significado matemático se correlaciona con la capacidad del niño de poner en juego la secuencia de transformaciones, conservaciones e invariantes que son fundacionales de la competencia matemática.

Este sentido de secuencialidad incorpora la capacidad de anticipar otras partes del problema que no pueden ser representadas en un único momento (Hackenberg, 2010; Von Glasersfeld, 1997). Un dibujo, un algoritmo, una gráfica, siendo representaciones particulares de una solución, implican otros pasos del procedimiento que pueden quedar implícitos en el cuadro pero que hacen parte de la capacidad de anticipación del niño. Por ejemplo, como ilustraremos más adelante, el niño o niña puede dibujar grupos iguales de canicas de varios colores diferentes para resolver un problema de repartición, pero la acción de repartición es anticipada y por ello queda implícita mas no representada explícitamente.

4.2. *Cuadros de Significado en torno a las Operaciones de Correspondencia*

Una parte de nuestras investigaciones se ha centrado en apoyar el aprendizaje de las operaciones aritméticas basadas en la correspondencia (Lotero Botero et al., 2011). Ésta operación lógico-matemática es de gran importancia en el pensamiento numérico del niño, y es fundamental para la comprensión de muchos otros conceptos matemáticos, tales como la multiplicación, división, fracción, razón, proporción y función (Hackenberg, 2010; Nunes y Bryant, 2005).

Aquí presentamos el estudio de la solución de un problema matemático relacionado con la multiplicación y división que involucra la comprensión de la operación de correspondencia. Este problema de enunciado verbal es un problema complejo dado que comprende varios pasos para su solución. Algunos de estos pasos requieren efectuar la operación mental de correspondencia uno a muchos.

Nuestra hipótesis es que los niños, dado que ellos aún no han recibido instrucción formal en los algoritmos de multiplicación y división, únicamente serán capaces de solucionar este problema si crean un cuadro de significado completo, basado en el pensar y representar la acción de repartir una colección de objetos. Otros autores han llamado *proto-esquemas* a la capacidad lógico-matemática que demuestran los niños previa a la instrucción escolar (Resnick, Bill, y Lesgold, 1992), e incluso se han propuesto diversas estrategias que los niños utilizan cuando no dominan los respectivos algoritmos aritméticos (Mulligan y Mitchelmore, 1997). Aquí proponemos que la capacidad de crear cuadros de significado explicaría el por qué algunos niños son capaces de proponer una solución viable al problema y otros no. Aquellos niños quienes logran construir el cuadro de significado completo consiguen comprender, resolver y comunicar la respuesta correcta. Aquellos niños que no forman un cuadro de significado completo no logran resolver el problema de manera correcta, pero dependiendo de cuan completo esté el cuadro la respuesta puede ser rastreada hasta conocer el tipo de recursos cognitivos que fueron movilizados en el planteamiento de la solución.

En efecto, un cuadro de significado completo es la manera ideal como un sujeto puede responder a las preguntas: ¿puedo resolver el problema?, ¿qué operación mental necesito?, ¿cómo expreso la solución?, ¿cómo apoyo mi pensamiento en ésta representación externa?, ¿qué esperan los adultos que sea mi respuesta? Es evidente que nuestra hipótesis no implica que estas preguntas se realicen de manera consciente en la mente del sujeto. No obstante, la hipótesis sí presume que un cuadro de significado se construye dando respuesta a estas preguntas.

Las preguntas que han guiado la presente investigación son: ¿qué soluciones dan los niños a problemas complejos de repartición a partir de un enunciado escrito?, ¿qué características tendrían estas soluciones en tanto construcciones de cuadros de significado?, ¿qué recursos cognitivos y habilidades de pensamiento se ponen en juego en la construcción de un cuadro de significado? Responder a estas preguntas contribuirá a ampliar nuestro conocimiento teórico y metodológico sobre la resolución de problemas en varios aspectos. En primer lugar, servirá para contribuir a un conocimiento más detallado, multidimensional y sistemático del pensamiento, competencia y desempeño de niños en edad escolar, así como a la manera como intentan dar solución a problemas matemáticos complejos. En segundo lugar, investigaciones de esta línea sirven para comprender cómo apoyar la enseñanza para desarrollar la capacidad de solución de problemas, que tengan en consideración la realidad compleja y sistemática del conocimiento de los niños.

A continuación, ilustraremos la hipótesis de los *cuadros de significado* presentando varios casos de soluciones que niños y niñas de 6 y 7 años de colegios públicos dieron a un problema matemático con formato de enunciado textual. Este problema fue llamado *el caso de los niños y las canicas de colores* e hizo parte de una prueba más extensa con varios puntos de competencia matemática para estudiantes entre transición y tercero de educación básica. Los estudiantes recibieron nueve meses de instrucción basado en el programa educativo *Matemáticas a Color* (Lotero Botero et al., 2011).

5. Metodología

5.1. *Participantes*

Los datos aquí presentados fueron tomados de una investigación macro que incluyó 1038 estudiantes de grados Kínder a Tercero, 26 profesores y tres colegios de estrato socioeconómico bajo de la ciudad de Medellín, Colombia. Los participantes que respondieron al problema de repartición de las canicas que aquí examinamos fueron parte de una muestra aleatoria de 72 niños de un total de 243 niños en cinco grupos de primero de primaria de los tres colegios involucrados. Las 72 respuestas fueron revisadas en su totalidad por varios miembros del equipo de investigación y fueron clasificadas con respecto a diferentes niveles de complejidad y completitud de los cuadros de significado que los niños construyeron. Con mayor detenimiento se examinan las respuestas de ocho estudiantes (M = 3, F = 5). Estas respuestas fueron escogidas debido a que sus características son representativas de la tipología obtenida, como se explica en la sección de resultados.

5.2. *Materiales e Intervención*

En la investigación macro mencionada, los estudiantes de grados kínder a 3° trabajaron con *Matemáticas a Color* la mayor parte del tiempo de sus clases regulares de matemáticas entre marzo y noviembre de 2011. Los estudiantes recibieron cada uno, de acuerdo a su respectivo grado, tres cuadernos de un programa de matemáticas básicas desarrollado por los autores, denominado

Matemáticas a Color. Además de los cuadernos de guías, *Matemáticas a Color* incluye un conjunto de materiales tangibles (bolitas y plantillas, cubos de madera, regletas Cuisenaire) con el cual cada niño/niña trabaja autónomamente, disponiéndolos de acuerdo con las pautas establecidas en esos cuadernos.

Las actividades de aprendizaje del programa fueron diseñadas a partir de concebir las operaciones aritméticas como representaciones simbólicas de acciones de transformación de cantidades (el detalle de este diseño se presenta en otros artículos, Andrade Londoño, Andrade Lotero, y Lotero Botero, en elaboración). La filosofía del programa Matemáticas a Color asume que la educación matemática en la escuela primaria debe, en primer término, fomentar el desarrollo del pensamiento matemático de los niños y sólo subsidiariamente su capacidad de cálculo. Esto implica que el niño pueda dar sentido a esa simbología matemática en un proceso de construcción de significado guiado por un diseño pedagógico intencional con ese fin. Es decir, la simbología matemática es un punto de llegada en un proceso de aprendizaje, y no un punto de partida.

Los estudiantes trabajan actividades de transformación de cantidades de agregar o quitar, o de componer y repartir grupos iguales. Siguiendo las pautas de las guías y con los objetos tangibles, los estudiantes disponen los objetos y luego representan dichas disposiciones en dibujos, palabras y, finalmente, símbolos matemáticos. Sin embargo, en el grado de primero de primaria sólo se trabajó la representación simbólica de la suma y la resta, pero no la de multiplicación y división.

Las actividades con manipulativos no son usados como una ilustración o ejemplo de algún principio u operación matemático. Por el contrario, estas actividades conducen a los niños a experimentar por sí mismos las transformaciones posibles bajo una lógica empírica, y luego, representarlas con dibujos, palabras y símbolos. Como cualquier otra acción, la transformación de cantidades implica una sucesión de momentos. De lo que se trata aquí es que los niños experimenten estas transformaciones, tomando conciencia de los momentos de la secuencia: cantidad inicial, cantidad que transforma, cantidad final. El niño organiza objetos tangibles en una secuencia espacial, en la cual cada posición corresponde a cada momento de la secuencia temporal de la transformación.

El ejemplo de la Figura 1 de una guía de trabajo para el grado primero, la cual le pide al estudiante en la parte de arriba que debe hallar la cantidad que resulta luego de quitar tres bolitas a la cantidad inicial de tres bolitas. En la parte de debajo de la guía se debe hallar la cantidad que resulta luego de agregar cuatro bolitas a la cantidad inicial de cuatro bolitas.

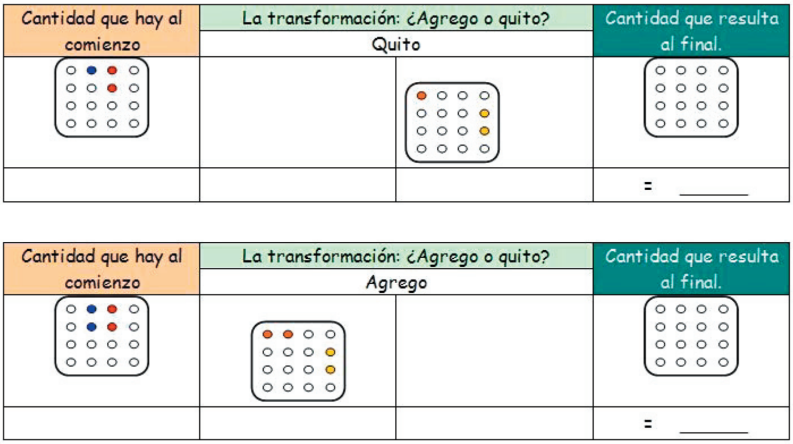
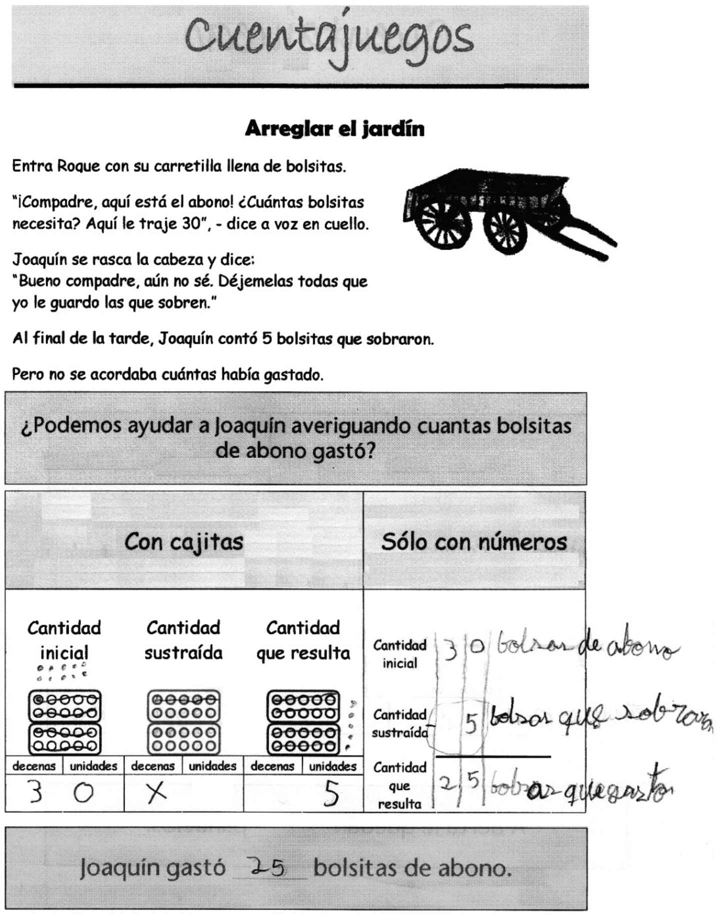


Figura 1. Las operaciones de suma y resta como actividades de agregar o quitar.

Adicionalmente, los libros de Matemáticas a Color contienen problemas de enunciado verbal, llamados *Cuentajuegos*, en los que los estudiantes trabajan la organización del significado de la narración, acomodándolo en la representación del significado de la transformación, a la manera de una sucesión lineal. En la Figura 2 se ejemplifica un problema para el grado primero que implica organizar una sucesión en la que se halla directamente el resultado de la transformación. Particular énfasis se pone en que el significado de la narración incluya el sentido de la sucesión temporal de las acciones sobre las cantidades. Además, se le pide al niño o niña que represente la solución al problema en varias modalidades, con los manipulativos, con los dibujos de los manipulativos, y con la notación aritmética y números. En este problema el estudiante debe hallar la cantidad de bolsas que se han gastado luego de conocer que había 30 y al final de la tarde quedaron 5.

Al final de la experiencia en el mes de noviembre se pidió a una muestra aleatoria de 72 de los estudiantes de primer grado participantes, el 30% del total, completar una prueba de veinte preguntas. La prueba se llevó a cabo en un salón diferente al salón de clases y los estudiantes contaron con una hora y media para responder. El cuestionario apuntaba a evaluar el estatus de cada estudiante con respecto a su logro de los estándares desarrollados para matemáticas de primer grado (MEN, 2003). Un aspecto importante de esta prueba es que incluyeron preguntas para evaluar la capacidad de solución de problemas a partir de un enunciado verbal. Se incluyeron dos tipos de problemas de enunciado, uno que denominamos simple, que podría ser resuelto mediante una sola operación matemática, y otro complejo, involucrando más de un paso para su solución. Además, se incluyó un cuestionario de comprensión de lectura del texto de estos problemas.


Cuentajuegos

Arreglar el jardín

Entra Roque con su carretilla llena de bolsitas.

"¡Compadre, aquí está el abono! ¿Cuántas bolsitas necesita? Aquí le traje 30", - dice a voz en cuello.

Joaquín se rasca la cabeza y dice:
"Bueno compadre, aún no sé. Déjemelas todas que yo le guardo las que sobren."

Al final de la tarde, Joaquín contó 5 bolsitas que sobraron.

Pero no se acordaba cuántas había gastado.

¿Podemos ayudar a Joaquín averiguando cuantas bolsitas de abono gastó?

Con cajitas						Sólo con números
Cantidad inicial		Cantidad sustraída		Cantidad que resulta		Cantidad inicial: 3 0 bolsas de abono
						Cantidad sustraída: 5 bolsas que sobraron
decenas	unidades	decenas	unidades	decenas	unidades	Cantidad que resulta: 2 5 bolsas que gastó
3	0	X			5	

Joaquín gastó 25 bolsitas de abono.

Figura 2. El problema de arreglar el jardín

Las veinte preguntas del cuestionario de primer grado se dividieron de la siguiente manera: 1-3) formar una cantidad X a partir de escoger los numerales apropiados que sumen tal cantidad — por ejemplo, formar el 12 escogiendo entre el 5, 7, 6, 8; 4-6) escribir en numerales la cantidad escrita en palabras — por ejemplo, siete decenas y cuatro unidades; 7-12) encontrar el resultado de operaciones de suma o resta modelando cantidades visibles o abstractas — por ejemplo, el dibujo muestra una bolsa y dos dulces por fuera, dentro de la bolsa hay cuatro dulces, ¿cuántos dulces hay en total?; 13-15) encontrar la diferencia entre dos cantidades — por ejemplo, María tiene cinco años y Juan tiene nueve, ¿cuál es la diferencia de edad entre los dos niños?; 16) comprensión de una gráfica de barras comparando cantidades; 17-19) preguntas de comprensión de lectura del problema complejo; 20) problema complejo (como se describe más adelante). Estos tópicos y la estructura conceptual en la que se basan están fundamentados en las trayectorias de aprendizaje para conceptos matemáticos elaborados por Cobb y McClain (2002), Sarama y Clements (2004) y Nunes y Bryant (2005).

Las muestras de trabajo presentadas a continuación corresponden al problema complejo de la prueba de grado primero. Este problema se ilustra a continuación.

5.2.1. *El Problema de la Repartición de Canicas*

El problema complejo de la prueba de grado primero contenía el siguiente enunciado:

> "Un grupo de amigos se ha reunido a jugar a las canicas. Son 3 niñas y 2 niños. Entre todos han comprado una bolsa de canicas. Las canicas son de dos colores: 20 canicas verdes y 5 canicas azules. Los niños quieren repartir las canicas por partes iguales. Además, quieren que a cada uno le corresponda la misma cantidad de cada color. ¿Cómo repartirán las canicas el grupo de amigos?"

La prueba idealmente se soluciona determinando la repartición en partes iguales de dos conjuntos de canicas en correspondencia con un conjunto de niños. Un ejemplo de solución es: repartir las canicas verdes en cinco partes iguales; repartir las canicas azules en cinco partes iguales; asignar una parte de canicas verdes y una parte de canicas azules a cada niño. O, de otra manera, repartir una a una las canicas verdes a cada niño hasta que se acaben; luego repartir las canicas azules una a una a cada niño hasta que se acaben.

5.2.2. *Análisis de Contenido*

El tipo de análisis que aquí se plantea asume que el contenido del texto emerge en el proceso mismo en el que el investigador analiza un texto relativo a un contexto particular (Bell, 2001; Krippendorff, 2004). La atención se centra en el proceso del análisis mismo y no ignora las contribuciones del analista acerca de qué cuenta como contenido. Entre otras, algunas características importantes de este tipo de análisis asumen que (a) los textos (escritos o multimodales) no tienen cualidades objetivas independientes de quien los lee; (b) los textos no tienen un único significado; (c) los textos tienen significado relativo a su contexto en particular; y (d) las inferencias que se realizan deben tener en cuenta el corpus de datos que conforma el contexto del texto (Krippendorff, 2012).

En el caso del análisis de representaciones visuales el análisis es similar a las representaciones verbales, pero estas dos difieren en algunas dimensiones. Por ejemplo, el discurso verbal se expresa linealmente mientras que el dibujo es una unidad no lineal (Yañez y Chávez, 2009). Este hecho crea diferentes posibilidades y limitaciones a la manera como el sujeto construye y comunica los significados (Penn, 2000). En todo caso, la calidad del análisis de contenido depende de que las hipótesis sean precisas y los conceptos estén claramente definidos y sin ambigüedades (Bell, 2001). Además, es necesario que las respuestas a las preguntas de investigación se fundamenten empíricamente tanto en la observación directa como en la argumentación plausible a partir de la observación del contenido (Bell, 2001; Krippendorff, 2012). En la presente investigación las representaciones visuales que construyeron los niños fueron analizadas con respecto a las siguientes preguntas:

- ¿qué procesos cognitivos son evidentes en el dibujo?,
- ¿de qué manera expresan y cómo se apoyan en la representación del problema?, y
- ¿qué consideran los niños, dado las características evidenciadas en las dos preguntas anteriores, que debe ser la respuesta correcta?

A continuación, presentamos los resultados cuantitativos de la prueba marco y luego analizamos varios ejemplos de cómo niños de primero de primaria, entre los seis y siete años, dieron individualmente respuesta al problema de las canicas. Se intentará ilustrar qué son los cuadros de significado y cómo ésta hipótesis explica cuáles son las soluciones exitosas que presentaron los niños a este problema.

Desafortunadamente, no poseemos registro en video o un diario de campo para señalar qué partes comenzó a dibujar primero el niño o la niña, o cuáles fueron sus razones para incluir o dejar de incluir ciertos elementos. Por ello, la reconstrucción de los cuadros de significado fue triangulada entre los integrantes del equipo de investigación. Cada hipótesis expresada fue argumentada y sustentada en la evidencia — es decir, en las partes del dibujo que justifican cada hipotesis — y luego debatida hasta que cualquier diferencia de interpretación fuese dirimida. En ocasiones se recurrió a los diarios de clase de los profesores, así como a las impresiones registradas por los investigadores a lo largo del acompañamiento del proyecto.

6. Resultados

Las respuestas a la prueba general (no solo a la pregunta del problema complejo) fueron evaluadas dándole un valor numérico de *1* a una respuesta correcta y *0* a una respuesta incorrecta o no respuesta. Estos valores numéricos se tabularon como se presenta en la Tabla 1 que resume los porcentajes de éxito en comprensión de lectura y resolución del problema complejo, en este caso el problema de la repartición de las canicas, así como el promedio de éxito en las 20 preguntas de la prueba.

TABLA I
Porcentaje de éxito en la prueba de salida del proyecto macro

Comprensión de Lectura Problema Complejo	*Problema Complejo*	*Éxito Total en la Prueba (20 Preguntas)*
76,8%	47,3%	64,2%

Como se puede apreciar, el 47,3% de los niños solucionaron correctamente el problema de repartición de las canicas no obstante no haber recibido enseñanza formal en multiplicación o división. Además, llama la atención que a pesar de que más de las tres cuartas partes de los estudiantes comprendieron adecuadamente el enunciado del problema (76,8%), sólo menos de la mitad propuso una respuesta acertada. Es claro que la comprensión de lectura, aunque condición necesaria, no es suficiente para resolver un problema matemático adecuadamente.

Desde nuestra perspectiva, en lo que media entre la comprensión de lectura y la solución adecuada del problema aparece lo que hemos denominado *cuadros de significado*, como se discute a continuación. Es de notar que todos los nombres de los participantes que aparecen en el texto son seudónimos.

6.1. *Un Cuadro de Significado Completo: El Caso de Samuel*

En la Figura 3 puede apreciarse la solución planteada por Samuel, un estudiante de la profesora Milena. Una primera mirada a esta respuesta evidencia una gran cantidad de detalles y diferentes modos de expresión. Esta solución es lo que nosotros llamaríamos un cuadro de significado completo. En el recuadro de solución puede apreciarse el dibujo de dos niños y tres niñas, veinte canicas de color verde y cinco azules, cinco grupos de canicas correspondiendo a cada niño, y una descripción escrita de esta correspondencia. A continuación, comentamos parte por parte este cuadro de significado.

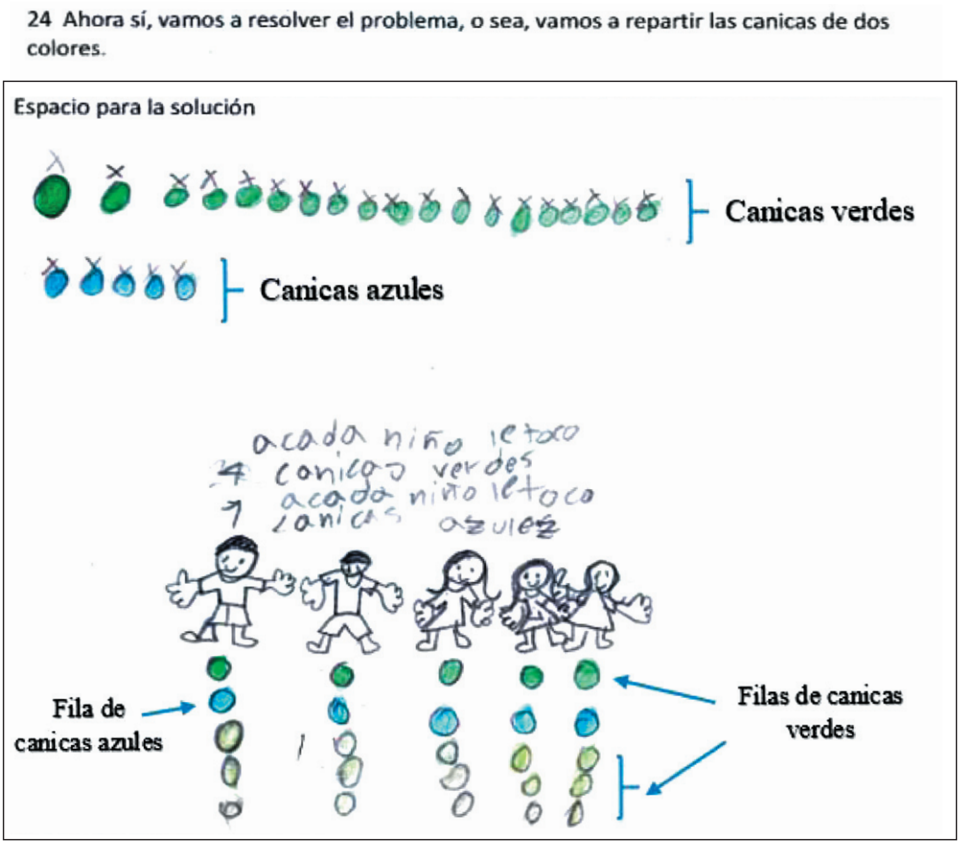


Figura 3. La solución planteada por Samuel

En el espacio de solución, en el primer cuarto de arriba para abajo, Samuel dibujó una fila horizontal de veinte canicas verdes y otra de cinco canicas azules. Todo apunta a que éste fue el comienzo de la solución del problema. Aquí el niño parece situarse tomando representacionalmente el total de las canicas a repartir. Las equis que aparecen encima de cada canica fueron colocadas posteriormente, como un apoyo para la solución. Este elemento será comentado más adelante.

En el espacio de solución, en el tercer cuarto de arriba para abajo, Samuel dibujó dos niños y tres niñas. Es posible que este haya sido la segunda parte dibujada. Hasta aquí, se han dibujado las condiciones cuantitativas iniciales del enunciado.

En un tercer momento, suponemos con base en la evidencia, Samuel comenzó a repartir los conjuntos de canicas. En el espacio de solución, en el cuarto inferior de la hoja, hay cinco grupos de canicas en filas verticales, y cada grupo contiene cuatro canicas verdes y una azul. Podemos observar que esta organización responde a una operación de correspondencia uno a muchos. Ahora bien, esta operación mental estuvo apoyada en la manera como se utilizó el espacio de solución. Arriba comentamos como las filas horizontales de canicas tienen unas equis anotadas encima de cada canica. He aquí la ilustración de una secuencia de transformación en donde la solución está distribuida entre la capacidad del niño de realizar una operación mental y la organización espacial de la representación. Suponemos que Samuel utilizó el segundo procedimiento ilustrado por nosotros en el análisis de la prueba. Esto es, repartió una a una las canicas verdes a cada niño hasta que se acabaron; luego repartió las canicas azules una a una a cada niño hasta que se acabaron. Para Samuel, la repartición implicó que a medida que tachaba secuencialmente de a una canica en las filas horizontales del primer cuarto del espacio del problema, iba haciendo un círculo debajo de cada niño asignándole una canica.

Finalmente, en el centro del espacio de solución se encuentra una descripción verbal de las cantidades que compone cada grupo de partes iguales que le correspondió a cada niño. Es de destacar que Samuel usó la expresión *a cada niño*. Esta expresión lleva implicada la operación de correspondencia y, según nuestra experiencia enseñando matemáticas a grupos de diversas edades, no es una expresión que se entienda fácilmente. Samuel escribió: “A cada niño le tocó 4 canicas verdes. A cada niño le tocó 1 canica azul.”

6.2. *Cuadros de Significado Coherentes pero Parciales: Los Casos de Camila y Estefanía*

A continuación, presentamos otros casos que evidencian cómo los cuadros de significado pueden estar completos para el niño, pero que para el adulto que interpreta pueden ser soluciones parciales. En estos casos, el adulto con su interpretación incluye y asigna las partes que le hacen falta al cuadro de significado. Estos cuadros, no obstante, parcialmente completados para el adulto, están lo suficientemente completos y explícitos como para que el significado sea externamente comprensible.

El cuadro de significado construido por Camila es suficientemente coherente para ser considerado completo, a pesar de que la solución al problema no se haya hecho tan explícita como en el caso de Samuel (ver Figura 4). Es posible ver que se incluyeron las variables cuantitativas del enunciado del problema en este dibujo. Aquí se encuentran tres niñas y dos niños, veinte canicas verdes y cinco azules. Además, hay cinco bolsas, una para cada niño. Dentro de cada bolsa hay cuatro canicas verdes y una azul.

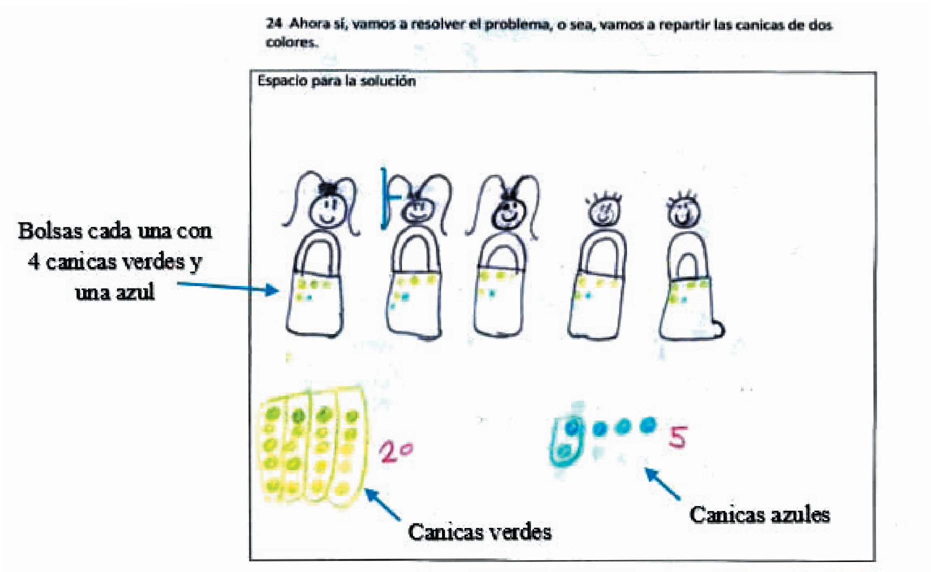


Figura 4. El dibujo realizado por Camila

Esta es nuestra interpretación del cuadro de significado de Camila: Ella comenzó dibujando las niñas y los niños. Estos dibujos, a diferencia de Samuel, no presentan al niño completo, sino sólo su cabeza. Se utilizó una convención cultural, como es la forma del cabello y el peinado, para indicar el género del sujeto. En este sentido, la representación de los niños es más abstracta que la que utilizó Samuel. Luego, Camila dibujó una bolsa por cada niño pensando que la respuesta al problema era encontrar la cantidad de canicas que debían ir en correspondencia con cada una de estas bolsas. Después, dibujó el total de canicas verdes y azules. Pero no es un conjunto desorganizado. Por el contrario, las canicas se encuentran organizadas en filas y columnas, como en una especie de tabla. Además, las cantidades de canicas están simbolizadas cada una con un numeral, 20 y 5. Lo que es más interesante, sin embargo, es observar las agrupaciones que realizó dentro de las tablas de canicas. Ella dividió las 20 canicas verdes en grupos de cinco. Debido a que son cinco niños y sólo cuatro canicas verdes por cada niño, deducimos que primero se intentó utilizar la primera estrategia de solución, la cual implica una forma de agrupamiento, pues inicialmente quería repartir grupos. No obstante, esta estrategia no le funcionó porque las tablas no se organizaron análogamente con el número de grupos. Camila se encontró en un callejón sin salida en su primer intento de acomodación de tantos grupos con relación a tantas unidades porque organizó filas de a cuatro canicas siendo cinco niños, es decir, la fila de niños no es del mismo tamaño que las filas de canicas. Camila termina remitiéndose a la segunda estrategia también utilizada por Samuel, repartir de a una canica por cada niño hasta que se acaben. El agrupamiento de dos canicas azules puede haber obedecido al mismo intento fallido. Finalmente, es evidente que su respuesta se encuentra en las bolsas que dibujó debajo de cada niño. Hay cuatro canicas verdes y una azul en cada bolsa. Sin embargo, no incluyó una respuesta verbal o con números para indicar este resultado, pero no obstante es evidente que percibió, así como nosotros también, que había llegado a la respuesta correcta.

En resumen, consideramos que Camila construyó un cuadro de significado completo. No obstante, este cuadro no está tan completo como el que realizó Samuel. Este segundo tipo de cuadro incluye una sofisticación representacional importante, y se hallan diferentes sistemas representacionales. Así como Samuel, ella también utilizó la representación para apoyarse en la resolución del problema. Utilizó la organización espacial de las canicas en una tabla para ayudarse a encontrar la cantidad de canicas que iban en la bolsa de cada niño. Es decir, primero se representaron las condiciones iniciales y luego se apoyó en esta representación para realizar la acción de repartición. Además, al haber dibujado una bolsa por cada niño, organizó la representación en el sentido de identificar en dónde debía encontrarse la respuesta al problema, es decir, la cantidad de canicas de cada color en cada bolsa. No obstante, el cuadro no incluyó una respuesta escrita o en símbolos numéricos.

De otra parte, el cuadro de significado de Estefanía está completo, pero parece menos complejo y organizado que el de Camila (ver Figura 5), porque no organizó espacialmente las canicas, ni tampoco dibujó unas bolsas para cada niño. Su respuesta está implícita en la parte superior de cada niño, en donde dibujó correctamente la cantidad de canicas verdes y azules que le corresponden a cada uno. No obstante, existe menos información para interpretar el modo como resolvió el problema. Una explicación es que las pequeñas líneas dibujadas encima de las canicas verdes son un indicio de que listó en correspondencia cada canica del grupo de abajo con las canicas que iba dibujando encima de cada niño. La manera poco ordenada de estos grupos anuncia que Estefanía debió haber requerido mayor concentración de su parte para no cometer un error a lo largo del procedimiento. No obstante, es posible que la organización espacial de los dibujos de los niños le haya facilitado ir colocando las canicas mientras repartía una a una. También es posible que haya hecho un conteo para verificar que ya estaba el total de canicas que se repartía, demostrando un dominio del principio de conservación de la cantidad. Finalmente, tampoco incluye números para expresar su respuesta.

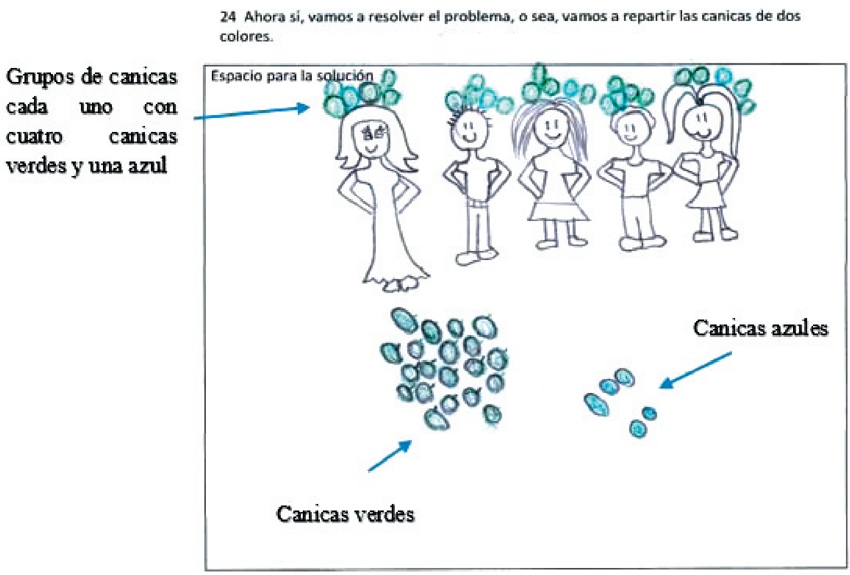


Figura 5. La solución planteada por Estefanía

En estos tres cuadros completos de significado, el de Samuel, Camila y Estefanía, se aprecian las tres cantidades implicadas en la acción de repartir: la cantidad total a repartir, el número de grupos, y la cantidad de cada grupo. Reconocer estas tres cantidades y otorgarle el significado que le corresponde en la acción es de vital importancia para el aprendizaje formal de la multiplicación (Lotero Botero et al., 2011).

6.3. *Cuadros de Significado Incompletos: Los Casos de Karen y María*

A continuación, presentamos dos cuadros de significado incompleto, los cuales ilustran que no todos los niños lograron concebir el problema como una totalidad. Además, estos dibujos también reflejan que la solución de un problema incluye una gran cantidad de partes organizadas en un sistema de representación. Si alguna parte clave falla, o si la organización de estas partes no es coherente, el significado del cuadro queda incompleto.

El dibujo realizado por Karen ilustra un cuadro de significado incompleto (ver Figura 6). A diferencia de los cuadros presentados anteriormente, aquí el dibujo se muestra mucho más simple y plano. En la parte superior, dibujó 25 canicas del mismo color. En la parte inferior, dibujó cinco bolsas con cinco canicas cada una. En realidad, se han dibujado correctamente el total de canicas y de niños, pero estos no se encuentran diferenciados; las canicas por colores y las bolsas por niñas y niños. El total de 25 canicas, si uno ignorase el color de las canicas, se encuentra repartido correctamente de a cinco canicas por cada una de las cinco bolsas. No obstante, es evidente que esta no es la respuesta correcta al enunciado del problema, pues el color de las canicas importa en este contexto. Sin embargo, Karen ha demostrado que tiene el dominio numérico de la repartición, y de la asignación en correspondencia, aunque no utiliza numerales. Es evidente que siguió la misma lógica de repartición que los ejemplos anteriores, es decir, primero dibujó las canicas, luego las bolsas, y luego se apoyó en el dibujo para colocar la cantidad de canicas dentro de cada bolsa.

Nosotros, adultos investigadores, completamos el significado del cuadro interpretando la ausencia de diferenciación entre los dos colores de canicas. Sin esta variable, la solución planteada no responde a las expectativas presentadas en el enunciado original del problema. No conocemos la razón por la cual Karen no realizó esta distinción. Podemos especular que no era porque no contase con lápices de diferente color, dado que las canicas están en amarillo, las bolsas de color azul, y las canicas dentro de las bolsas en negro. Tampoco sabemos si para ella misma este cuadro de significado estaba completo. Lo cierto es que éste evidencia que la construcción requiere incluir coherentemente una gran cantidad de elementos, algunos de ellos que aquí hacen falta, pues no evidenció tener domino sobre lo que más adelante se formaliza como organización de conjuntos disyuntos.

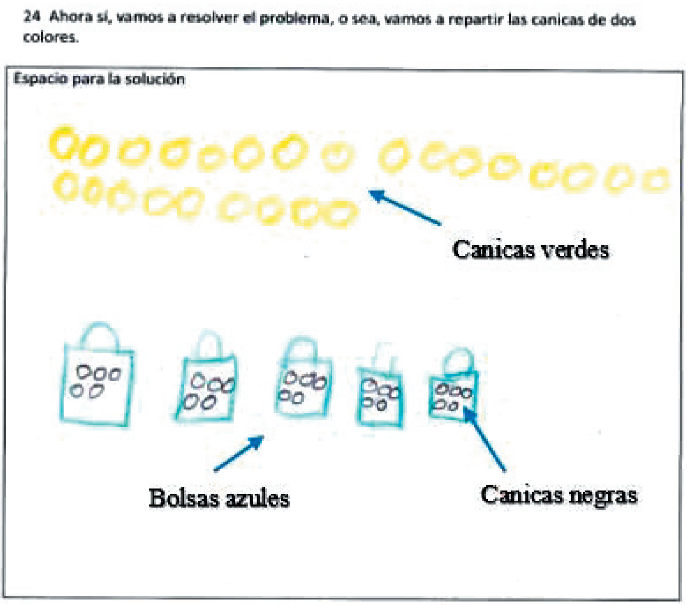


Figura 6. La solución planteada por Karen

Asimismo, el dibujo realizado por María es otra muestra de un cuadro de significado incompleto (ver Figura 7). No es sólo la ausencia de color lo que demuestra que el resultado está incompleto. Según nuestra interpretación, únicamente se dibujan las variables cuantitativas iniciales del enunciado del problema. Al lado izquierdo dibujó veinte canicas y al lado derecho cinco. En el centro, hacia la izquierda, dibujó tres niñas y hacia la derecha dos niños. No obstante, no fue más allá en su búsqueda de una solución. Es evidente que no intentó efectuar la repartición de canicas de cada color para cada niño.

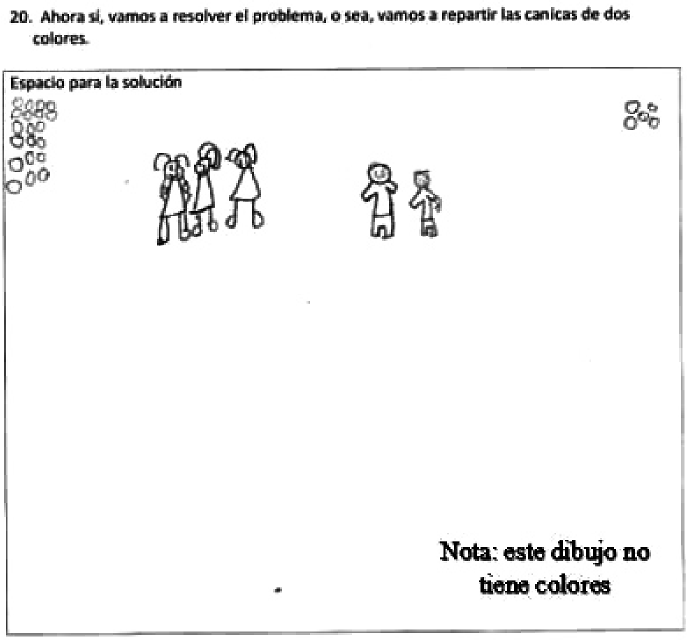


Figura 7. El dibujo realizado por María

En estos dos ejemplos se ilustra que no todos los cuadros de significado pueden ser interpretados completamente. Además, cuando los cuadros de significado están incompletos puede deberse a distintas razones. En el caso de Karen, la falencia parece centrarse más que en la falta de un esquema anticipatorio, en la no inclusión del color como una variable importante del problema. En el caso de María, tal vez es la falta del esquema anticipatorio de la correspondencia uno a muchos, pues su comprensión de la situación y la capacidad para representar las condiciones iniciales del problema sí parecen estar presentes.

6.4. *Cuadros de Significado Incoherentes: Los casos de Manuela y José*

A continuación, presentamos dos dibujos que ilustran cuadros de significado incoherentes. Los dibujos de Manuela (ver Figura 8) y José (ver Figura 9) muestran no sólo ausencia de completitud sino también dificultades para pensar con sentido de conservación lógico-matemática. Manuela dibujó en total diez niños. En su dibujo es posible distinguir que hay tres niñas y dos niños, pero hacia la esquina superior derecha hay otros cinco niños. La ausencia de más elementos deja ver que no intentó nada más, es decir, no llegó a ninguna solución, pues ni siquiera las cantidades iniciales se encuentran representadas. ¿Acaso se trató de una situación sin significado para ella?

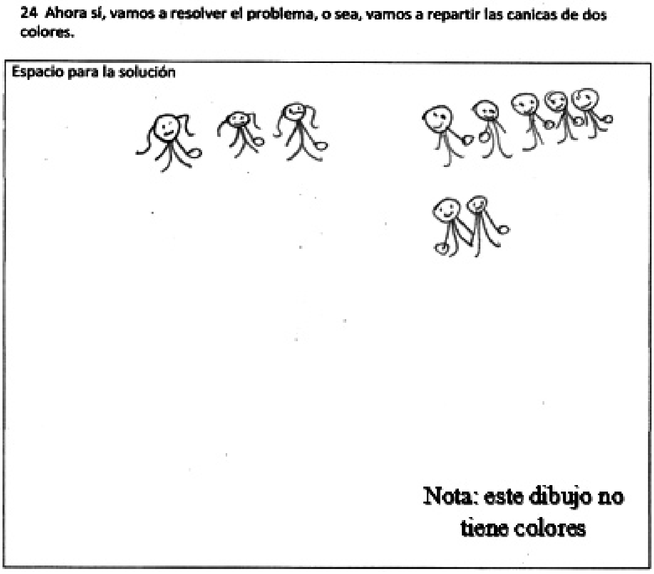


Figura 8. El dibujo realizado por Manuela

El caso de José es muy similar, pues dibujó dos conjuntos de canicas, uno a la izquierda y otro a la derecha. Una inspección minuciosa revela que mientras el conjunto de la derecha puede estar representando el conjunto de canicas azules que enuncia el problema, por su parte, el conjunto de la izquierda, el más grande, no puede estar representando correctamente la cantidad de canicas verdes, debido a que hay dibujadas veinticinco canicas en lugar de veinte. No nos es posible afirmar qué significan estos grupos de canicas. Por ejemplo, ¿representa el grupo de la izquierda el total (25 canicas) y el grupo de la derecha la cantidad de niños y niñas (5), o la cantidad para cada niño (5 canicas)? Podemos inferir que en la representación no se evidencia un intento explícito de establecer la relación de correspondencia.

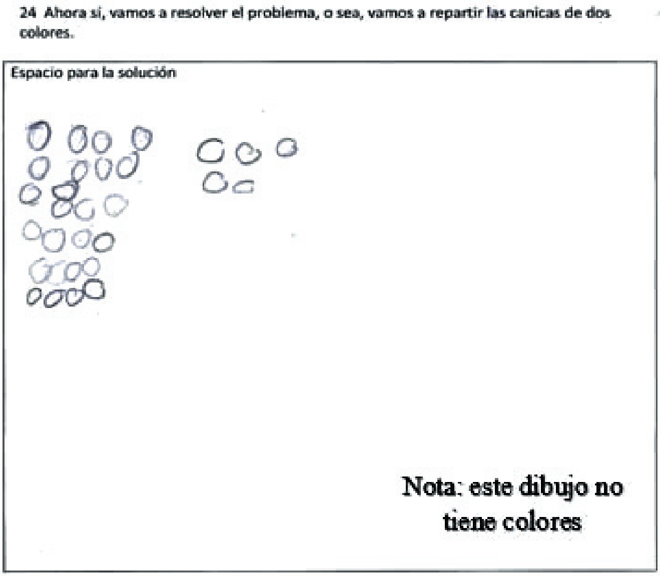


Figura 9. El dibujo realizado por José

En estos dos casos, nos atrevemos a afirmar que estos niños demuestran no haber desarrollado aún un sentido de la repartición en correspondencia. Además, se evidencia una dificultad para producir cuadros de complejidad simbólica y representacional, debido a que tampoco existen números o frases enmarcando los elementos del dibujo.

7. Discusión

Es evidente que los niños pueden representar la solución a un problema matemático de enunciado verbal de diferentes maneras. En otras palabras, no existe una única manera de representar el problema y dar solución al mismo. Sin embargo, luego de revisar la evidencia presentada, no consideramos que la explicación del por qué ciertos niños dan respuesta al problema y otros no se deba a que los primeros se encuentran en una etapa más avanzada de pensamiento o desarrollo cognitivo que estos últimos. Tampoco se debe únicamente a que los niños que resolvieron el problema saben más operaciones o conceptos matemáticos que los otros. En cambio, la evidencia nos muestra que en la solución de un problema intervienen varias competencias y recursos cognitivos de granularidad más pequeña que una etapa de pensamiento, y que incluso van más allá de únicamente el razonamiento lógico-matemático. Nuestra alternativa teórica hace referencia a que, entre la comprensión del problema verbal y la solución correcta, un sujeto debe construir un cuadro de significado completo.

¿Qué es, entonces, el cuadro de significado? Un cuadro de significado implica que cuando un sujeto resuelve un problema, éste pone en juego una gran cantidad de recursos cognitivos y epistémicos para generar un alto orden local en su sistema cognoscitivo. Estos recursos cognitivos están compuestos por pequeñas unidades cognitivas fenomenológicas, así como de otras habilidades y conocimientos de sistemas representacionales particulares. El significado es construido subjetivamente, pero es visible y externalizado como una comunicación de sentido. Por ello, el significado de cada cuadro es completado también por la interpretación de la persona que lo recibe o evalúa.

En la solución de Samuel se encuentra un cuadro de significado completo. En su sistema epistémico general responsable de pensar las operaciones de correspondencias existe evidentemente un alto orden local. Esto significa que existe una alta coordinación, coherencia y congruencia entre todas las partes que componen el cuadro de significado. En efecto, su respuesta contiene muchas partículas de pensamiento y representación organizadas coherentemente. No es sólo la descripción verbal de la repartición la que da respuesta correcta al problema, sino también el dibujo de las filas verticales con las cantidades correctas de canicas por colores, el dibujo de la cantidad de niños y niñas, de las filas horizontales que le sirvieron como apoyo para incluir las variables cuantitativas iniciales del enunciado del problema y para plantear la operación mental de correspondencia uno a uno. Es evidente que Samuel ya posee un claro sentido de conservación de la cantidad. También el cuadro está completo porque evidencia la capacidad de realizar un modelo del problema como una coordinación de un sistema de representaciones gráficas, icónicas, verbales y símbolos numéricos. Es decir, la solución contiene dibujos con colores y formas que simbolizan objetos (y personas) de la realidad, palabras que conforman enunciados y proposiciones que incluyen números para cuantificar estos objetos. Pero no es un simple sistema de representación, sino que esta representación hizo parte de la solución, pues apoyó el pensamiento descargando recursos cognitivos en el tercer paso de la solución. Finalmente, a diferencia de otros estudiantes que no han aprendido matemáticas con el método de Matemáticas a Color, Samuel, así como los otros niños de los colegios participantes en el programa, decidió resolver el problema mediante un dibujo.

En efecto, los niños parecen tener un sentido de qué es lo que se espera de ellos y qué considera el docente debería ser la respuesta correcta a un problema dado. Diferentes enmarcaciones de las condiciones de presentación de un problema llevan a que el niño conciba diferentes respuestas y active diferentes recursos cognitivos para un mismo enunciado (Scherr y Hammer, 2009). Estas diferencias son, por ejemplo, el modo de representación, la suficiencia de la respuesta, así como la expectativa de necesidad de auto-corrección. En la escuela, a los niños tradicionalmente se les enseñado a creer que una respuesta matemática es una respuesta que utiliza un algoritmo y termina en un número (Verschaffel et al., 1994).

El problema es que muchas veces se ha diagnosticado que los niños de estas edades usan operaciones aritméticas sin sentido, debido a que esperan que, por ejemplo, todo problema matemático que incluye dos cantidades es un problema de multiplicación. Adicionalmente, una gran cantidad de padres de familia espera que si su hijo es bueno en matemáticas es porque él o ella multiplican o dividen rápidamente dos cantidades. Estas expectativas socioculturales enmarcan la manera de buscar y presentar la solución de un problema. Sin embargo, los problemas complejos en raras ocasiones incluyen soluciones cuyo resultado se obtenga a partir de la operación de dos cantidades que se enuncian en la descripción del problema.

8. Conclusiones

A lo largo de este artículo hemos ilustrado un fenómeno que hemos llamado *cuadros de significado*. Este fenómeno intenta explicar por qué ciertos niños tienen éxito para hallar la solución a un problema y otros no. Para ilustrar nuestra hipótesis hemos presentado y analizado detenidamente el contenido de ocho dibujos de niños y niñas de 6 y 7 años de varios colegios públicos como solución a un problema matemático con formato de enunciado textual en el contexto de repartición discreta. Este estudio de caso ilustra empíricamente la hipótesis de que los niños generan cuadros de significado para solucionar problemas matemáticos. La evidencia sugiere que las soluciones planteadas parecen poner en juego muchas partículas de recursos cognitivos. Estas partículas pertenecen a al menos tres tipos: a) abstracciones fenomenológicas simples que derivan en esquemas anticipatorios, c) conocimientos de sistemas representacionales, y c) expectativas epistémicas acerca de la solución del problema. Además, entendemos que este significado se expresa como un recurso semiótico que inicia en quien genera el cuadro y es completado por quien lo interpreta.

Debido a que no todos quienes comprenden adecuadamente el enunciado del problema logran proponer una solución adecuada indica, en nuestra opinión, que el problema de la construcción de significado es mucho más profundo que la comprensión de la semántica del texto del problema. Según hemos tratado de exponer, el niño es un sujeto activo que construye un cuadro de significado a la manera de una interfaz entre la comprensión semántica del problema y la comprensión del significado de las operaciones matemáticas como acciones de transformación de cantidades. Esta capacidad para construir cuadros de significado, creemos nosotros, puede haber sido fomentada por las actividades de aprendizaje propuestas en *Matemáticas a Color*. El niño logra interpretar la clase o clases de acciones de transformación implicadas, la incógnita del problema y su relación con las demás cantidades, y proponer una representación que incluye dibujos, cantidades y símbolos. Esto sería lo que media entre la comprensión de la semántica del texto y la posibilidad de proponer y expresar una solución matemática adecuada.

Sin embargo, las limitaciones de la presente investigación son varias. Por un lado, nuestro análisis de contenido proviene de una reconstrucción *post facto*. En futuras investigaciones hemos decidido incluir la metodología de *entrevistas cognitivas* (Clement, 2000; diSessa, 2007) a una pequeña muestra de estudiantes. Por medio de estas entrevistas se pretende conocer, a partir de las verbalizaciones que exponen los mismos estudiantes, las razones por las cuales consideran importante incluir ciertos elementos y no otros en sus dibujos. Por otro lado, nuestro análisis no incluye información acerca del desarrollo micro-genético (Bermejo, 2005; Garcia-Mila, Gilabert, y Rojo, 2011) de estos cuadros de significado. En futuros artículos examinaremos la evidencia longitudinal acerca de cómo un estudiante ensambla poco a poco las piezas necesarias para construir cuadros de significado completos.

Con todo, para nosotros es evidente que la hipótesis de los cuadros de significado es una herramienta teórica y metodológica para la conceptualización de la solución de problemas aritméticos y la organización en correspondencia que subyace al pensamiento matemático. Por ello, es necesario seguir expandiendo nuestro análisis y la aplicación de este marco de referencia a otros campos del pensamiento matemático, a otras áreas disciplinares y, en general, a la solución de problemas.

Agradecimientos

Los datos que se recogieron en este estudio provienen del proyecto No. 4600033072 de 2011, financiado por la Secretaría de Educación de Medellín, Colombia.

Referencias bibliográficas

Adams, R. (2005). *PISA 2003 Technical Report: Programme for International Student Assessment*: OECD Publishing.

Andrade Londoño, E., Andrade Lotero, L. A., y Lotero Botero, L. A. (en elaboración). Beyond the Times-Tables: Making Sense of Multiplication.

Bell, P. (2001). Content analysis of visual images. En T. V. Leeuwen y C. Jewitt (Eds.), *Handbook of visual analysis* (pp. 10-34). Oaks, California: SAGE Publications.

Bello, S. (2004). Ideas previas y cambio conceptual. *Educación química, 15*(3), 210-217. Obtenido de http://depa.fquim.unam.mx/sie/Documentos/153-bel.pdf.

Bermejo, V. (2005). Microgénesis y cambio cognitivo: adquisición del cardinal numérico. *Psicothema, 17*(4), 559-562. Obtenido de http://www.psicothema.com/psicothema.asp?id=3145.

Bodner, G. M., y Domin, D. S. (2000). Mental models: The role of representations in problem solving in chemistry. *University Chemistry Education, 4*(1), 24-30. Obtenido de http://1393-chemed.chem.purdue.edu/chemed/bodnergroup/PDF_2008/70%20Mental%20Models%20UCEd.pdf.

Brown, J. S., Collins, A., y Duguid, P. (1989). Situated cognition and the culture of learning. *Educational Researcher, 18*(1), 32. doi:10.3102/0013189x018001032

Camacho, M., y Good, R. (1989). Problem solving and chemical equilibrium: Successful versus unsuccessful performance. *Journal of Research in Science Teaching, 26*(3), 251-272. doi:10.1002/tea.3660260306.

Carolan, J., Prain, V., y Waldrip, B. (2008). Using representations for teaching and learning in science. *The Journal of the Australian Science Teachers Association, 54*(1), 18-23.

Carraher, T. N., Carraher, D. W., y Schliemann, A. D. (1985). Mathematics in the streets and in schools. *British journal of developmental psychology*. doi:10.1111/j.2044-835x.1985.tb00951.x.

Castillo Ballén, M., Triana, N., Duarte-Agudelo, P., Pérez-Abril, M., y Lemus-Espinosa, E. (2007). Sobre las pruebas saber y de Estado: una mirada a su fundamentación y orientación de los instrumentos en lenguaje. *Bogotá: Instituto Colombiano para el Fomento de la Educación Superior, ICFES*.

Chi, M. T., Feltovich, P. J., y Glaser, R. (1981). Categorization and representation of physics problems by experts and novices. *Cognitive Science, 5*(2), 121-152. doi:10.1207/s15516709cog0502_2.

Clement, J. (2000). Analysis of clinical interviews: Foundations and model viability. En R. Lesh y A. Kelly (Eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 547-589). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Cobb, P., y McClain, K. (2002). Supporting students' learning of significant mathematical ideas. En G. Wells y G. Claxton (Eds.), *Learning for life in the 21st century: Sociocultural perspectives on the future of education* (pp. 154-166). New York: Cambridge University Press.

Conlin, L. D., Gupta, A., y Hammer, D. (2010). *Framing and Resource Activation: Bridging the Cognitive-Situative Divide Using a Dynamic Unit of Cognitive Analysis*. Paper presentado en CogSci, Portland, USA. http://dhammer.phy.tufts.edu/home/publications_files/conlin%20gupta%20hammer%20cog%20sci%202010.pdf

diSessa, A. (1993). Toward an epistemology of physics. *Cognition and Instruction, 10*(2-3), 105-225. doi:10.1080/07370008.1985.9649008.

diSessa, A. (2002). Why "conceptual ecology" is a good idea. *Reconsidering conceptual change: Issues in theory and practice*, 28-60. doi:10.1007/0-306-47637-1_2.

diSessa, A. (2007). An interactional analysis of clinical interviewing. *Cognition and Instruction, 25*(4), 523-565. doi:10.1080/07370000701632413.

diSessa, A., y Sherin, B. L. (2000). Meta-representation: An introduction. *The Journal of Mathematical Behavior, 19*(4), 385-398. doi:10.1016/s0732-3123(01)00051-7.

Domin, D., y Bodner, G. (2012). Using students' representations constructed during problem solving to infer conceptual understanding. *Journal of Chemical Education, 89*(7), 837-843. doi:10.1021/ed1006037.

Flores, F. (2004). El cambio conceptual: interpretaciones, transformaciones y perspectivas. *Educación química, 15*(3), 256-269. Obtenido de https://eva.fing.edu.uy/pluginfile.php/68483/mod_resource/content/4/Flores_cambioconceptual_EdQuimica15%283%292004.pdf.

Garcia-Mila, M., Gilabert, S., y Rojo, N. (2011). Strategy change in knowledge acquisition: The microgenetic methodology. *Infancia y Aprendizaje, 34*(2), 169-180. doi:10.1174/021037011795377566 Obtenido de http://dx.doi.org/10.1174/021037011795377566.

Gobbo, C., y Chi, M. (1986). How knowledge is structured and used by expert and novice children. *Cognitive development, 1*(3), 221-237. doi:10.1016/s0885-2014(86)80002-8.

Goodwin, C. (2003). The semiotic body in its environment. *Discourses of the body*, 19-42. Obtenido de https://www.researchgate.net/publication/228901991_The_semiotic_body_in_its_environment.

Greeno, J. G., y Hall, R. P. (1997). Practicing representation: Learning with and about representational forms. *Phi Delta Kappan, 78*, 361-367. Obtenido de https://www.researchgate.net/publication/238695196_Practicing_Representation_Learning_with_and_about_Representational_Forms.

Habermas, J. (1984). *The theory of communicative action, Vol. I*. Bostonm, Massachusetts: Beacon Press.

Hackenberg, A. J. (2010). Students' reasoning with reversible multiplicative relationships. *Cognition and Instruction, 28*(4), 383-432. doi:10.1080/07370008.2010.511565.

Hmelo-Silver, C. E., y Pfeffer, M. G. (2004). Comparing expert and novice understanding of a complex system from the perspective of structures, behaviors, and functions. *Cognitive Science, 28*(1), 127-138. doi:10.1016/s0364-0213(03)00065-x.

Hull, G. A., y Nelson, M. E. (2005). Locating the semiotic power of multimodality. *Written Communication, 22*(2), 224-261. doi:10.1177/0741088304274170.

Kaltenbacher, M. (2007). Perspectivas en el análisis de la multimodalidad: desde los inicios al estado del arte. *Revista Latinoamericana de Estudios del Discurso, 7*(1), 31-57. Obtenido de http://www.comunidadaled.org/descarga/7-1.pdf#page=33.

Koedinger, K. R., y Nathan, M. J. (2004). The real story behind story problems: Effects of representations on quantitative reasoning. *The Journal of the Learning Sciences, 13*(2), 129-164. doi:10.1207/s15327809jls1302_1.

Krippendorff, K. (2004). *Content analysis: An introduction to its methodology* (2nd ed.). Beverly Hills: Sage Publications.

Kulm, G. (1990). New directions for mathematics assessment. En G. Kulm (Ed.), *Assessing higher order thinking in mathematics* (pp. 71-80). USA: AAAS.

Lave, J., y Wenger, E. (1991). *Situated learning: Legitimate peripheral participation*. New York, NY: Cambridge University Press.

Lesh, R., y Carmona, G. (2003). Piagetian Conceptual Systems and Models for Mathematizing Everyday Experiences. En R. Lesh y H. M. Doerr (Eds.), *Beyond constructivism: Models and Modeling Perspectives on Mathematics Problem Solving, Learning, and Teaching*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Lesh, R., y Doerr, H. (2000). Symbolizing, communicating, and mathematizing: Key components of models and modeling. En P. Cobb, E. Yackel, y K. McClain (Eds.), *Symbolizing and communicating in mathematics classrooms* (pp. 361-384). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Lesh, R., y Lehrer, R. (2003). Models and modeling perspectives on the development of students and teachers. *Mathematical Thinking and Learning, 5*(2-3), 109-129. doi:10.1080/10986065.2003.9679996.

Lotero Botero, L. A., Andrade Londoño, E. A., y Andrade Lotero, L. A. (2011). La crisis de la multiplicación: una propuesta para la estructuración conceptual. *Voces y Silencios: Revista Latinoamericana de Educación, 2*(Número Especial), 27. Obtenido de dialnet.unirioja.es.proxyiub.uits.iu.edu/descarga/articulo/4058881.pdf.

Lotero Botero, L. A., Andrade Londoño, E. A., y Andrade Lotero, L. A. (2012). *Tangibles, Construction of Meaning and Math Problem Solving*. Paper presentado en The Future of Education 2nd Edition, Florence, Italy. http://www.pixel-online.net/edu_future2012/common/download/Paper_pdf/548-ITL75-FP-Botero-FOE2012.pdf

MEN. (2003). *Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas*. http://www.eduteka.org/pdfdir/MENEstandaresMatematicas2003.pdf.

Mulligan, J. T. (1992). Children's solutions to multiplication and division word problems: a longitudinal study. *Mathematics Education Research Journal, 4*(1), 24-41. doi:10.1007/bf03217230.

Mulligan, J. T., y Mitchelmore, M. C. (1997). Young children's intuitive models of multiplication and division. *Journal for Research in Mathematics Education*, 309-330. doi:10.2307/749783.

Mullis, I. V. S., Martin, M. O., Gonzalez, E. J., y Chrostowski, S. J. (2004). *TIMSS 2003 International Mathematics Report: Findings from IEA's Trends in International Mathematics and Science Study at the Fourth and Eighth Grades*: ERIC.

Nehm, R. H., y Ridgway, J. (2011). What do experts and novices "see" in evolutionary problems? *Evolution: Education and Outreach, 4*(4), 666-679. doi:10.1007/s12052-011-0369-7.

Nunes, T., y Bryant, P. (2005). *Las Matemáticas y su Aplicación: La Perspectiva del Niño*. Buenos Aires: Siglo XXI Editores.

Penn, G. (2000). Semiotic analysis of still images. En M. W. Bauer y G. Gaskell (Eds.), *Qualitative research with text, image and sound: A practical handbook* (pp. 227-245). Thousand Oaks, California: SAGE Publications Ltd.

Piaget, J., y García, R. (1997). *Hacia una lógica de significaciones*. Barcelona: Gedisa.

Piaget, J., y Inhelder, B. (2007). *Psicología del niño*. Madrid: Ediciones Morata.

Resnick, L. B., Bill, V., y Lesgold, S. (1992). Developing thinking abilities in arithmetic class. En A. Demetriou y A. Efklides (Eds.), *Neo-Piagetian theories of cognitive development: Implications and applications for education* (pp. 210-230). New York: Routledge.

Romberg, T. A., Zarinnia, E. A., y Collis, K. F. (1990). A new world view of assessment in mathematics. *Assessing higher order thinking in mathematics, 89*, 21. doi:10.5860/choice.28-2839.

Roth, W. M., y Bowen, G. M. (1994). Mathematization of experience in a grade 8 open-inquiry environment: An introduction to the representational practices of science. *Journal of Research in Science Teaching, 31*(3), 293-318. doi:10.1002/tea.3660310308.

Sarama, J., y Clements, D. H. (2004). Building Blocks for early childhood mathematics. *Early Childhood Research Quarterly, 19*(1), 181-189. doi:10.1016/j.ecresq.2004.01.014.

Scherr, R. E., y Hammer, D. (2009). Student behavior and epistemological framing: Examples from collaborative active-learning activities in physics. *Cognition and Instruction, 27*(2), 147-174. doi:10.1080/07370000902797379.

Silver, W. S., Mitchell, T. R., y Gist, M. E. (1995). Responses to successful and unsuccessful performance: The moderating effect of self-efficacy on the relationship between performance and attributions. *Organizational Behavior and Human Decision Processes, 62*(3), 286-299. doi:10.1006/obhd.1995.1051.

Smith, J. P., diSessa, A., y Roschelle, J. (1994). Misconceptions reconceived: A constructivist analysis of knowledge in transition. *The Journal of the Learning Sciences, 3*(2), 115-163. doi:10.1207/s15327809jls0302_1.

Verschaffel, L., De Corte, E., y Lasure, S. (1994). Realistic considerations in mathematical modeling of school arithmetic word problems. *Learning and Instruction, 4*(4), 273-294. doi:10.1016/0959-4752(94)90002-7.

Verschaffel, L., Greer, B., y de Corte, E. (2000). *Making Sense of Word Problems* (Vol. 42). Lisse, Netherlands.

Von Glasersfeld, E. (1997). *Anticipation in the constructivist theory of cognition.* Paper presentado en CASYS'97 - International Conference on Computing Anticipatory Systems, Liege.

Xin, Y. P., Wiles, B., y Lin, Y.-Y. (2008). Teaching conceptual Model–Based word problem story Grammar to Enhance Mathematics problem solving. *The Journal of Special Education*. doi:10.1177/0022466907312895.

Yañez, C. J., y Chávez, R. M. (2009). Semiótica del dibujo infantil: una aproximación latinoamericana sobre la influencia de la televisión en los niños: casos de estudios en ciudades de Chile, El Salvador y México. *Arte, individuo y sociedad, 21*, 151-164. Obtenido de revistas.ucm.es.proxyiub.uits.iu.edu/index.php/ARIS/article/download/ARIS0909110151A/5765.

Autores

Alejandro Andrade. Indiana University, Estados Unidos. Investigador Asociado de Alandra Investigación Educativa, Colombia. laandrad@indiana.edu

Amparo Lotero Botero. Investigadora Asociada y Directora de Alandra Investigación Educativa, Colombia. a.loterobotero@alandradifuciencia.org

Edgar A. Andrade Londoño. Investigador Asociado de Alandra Investigación Educativa, Colombia. edandrade@alandradifuciencia.org

João Pedro da Ponte, Joana Mata-Pereira, Marisa Quaresma, Isabel Velez

FORMAÇÃO DE PROFESSORES DOS PRIMEIROS ANOS EM ARTICULAÇÃO COM O CONTEXTO DE PRÁTICA DE ENSINO DE MATEMÁTICA

Elementary teachers' professional Development in Interrelation with the context of mathematics teaching practice

RESUMEN

Este artículo se centra en un proceso de formación docente realizado en una perspectiva curricular de la enseñanza exploratoria, que valora la orientación para la práctica y la reflexión colectiva entre los participantes. Su objetivo es analizar los cambios que los maestros refieren sentir en sus perspectivas y prácticas de enseñanza y la forma en que miran la formación llevada a cabo. El marco teórico tiene como sustento una concepción de práctica profesional que asume el papel central de las nociones de tarea y comunicación y una perspectiva sobre la construcción de dispositivos formativos enmarcados en el abordaje exploratorio. Los participantes son 19 maestros de 1º a 6º ano de enseñanza. La recolección de datos es a través de registros de bitácoras diarias, un cuestionario de respuestas abiertas y entrevistas. Los resultados muestran que, como consecuencia del trabajo realizado, los profesores comenzaron a valorar la enseñanza exploratoria y las discusiones colectivas y a asumir una alta expectativa sobre las capacidades de los estudiantes. En cuanto a la formación destacan la conexión con su práctica y los momentos de intercambio de experiencias.

PALABRAS CLAVE:

- *Desarrollo profesional*
- *Formación de maestros*
- *Abordaje exploratorio*
- *Tareas*
- *Discusión colectiva*

ABSTRACT

This paper focuses on a professional development process framed by an exploratory curricular perspective which values an orientation towards practice and the collective reflection among the participants. Its goal is to analyze the changes that teachers refer to have felt in their perspectives about teaching as well as how they regard the work carried out. The theoretical framework is based in a conception of professional practice that assumes the central role of the concepts of task and communication and a perspective about the design of professional development frameworks based on the exploratory

KEY WORDS:

- *Professional development*
- *Teacher education*
- *Exploratory approach*
- *Tasks*
- *Whole class discussion*

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (2017) *20* (1): 71-94.
Recepción: Diciembre 16, 2014 / Aceptación: Agosto 30, 2016. DOI: 10.12802/relime.17.2013

approach. The participants are 19 teachers from grades 1 to 6. The study is based on a researcher's journal, an open response questionnaire and interviews. The results show that the participants came to enhance exploratory learning and whole class discussions and to assume a high expectation regarding the students' abilities. Concerning the work carried out, the participants highlight the connection with their practice and the moments of sharing experiences.

RESUMO

Este artigo incide sobre um processo de formação conduzido numa perspetiva curricular de ensino exploratório, que valoriza a orientação para a prática e a reflexão coletiva entre os formandos. O seu objetivo é analisar as mudanças que os professores referem ter sentido nas suas perspetivas sobre o ensino e o modo como encaram a formação realizada. O quadro teórico tem por base uma conceção da prática profissional que assume como nucleares os conceitos de tarefa e comunicação e uma perspetiva da construção de dispositivos de formação baseada na abordagem exploratória. Os participantes são 19 professores, do 1.º ao 6.º ano de escolaridade. O estudo tem por base registos em diário de bordo, um questionário de resposta aberta e entrevistas. Os resultados mostram que, como consequência do trabalho realizado, os professores passaram a valorizar o ensino exploratório e as discussões coletivas e a assumir uma expectativa elevada sobre as capacidades dos alunos. Relativamente à formação destacam a ligação com a sua prática e os momentos de partilha de experiências.

PALAVRAS CHAVE:

- *Desenvolvimento profissional*
- *Formação contínua*
- *Abordagem exploratória*
- *Tarefas*
- *Discussão coletiva*

RÉSUMÉ

Cet article met l'accent sur un processus de formation réalisée dans une perspective d'enseignement exploratoire, que value une orientation vers la pratique et la réflexion collective parmi les participants. Notre but est d'analyser les changements qui les enseignants ont ressenti dans leurs points de vue sur d'enseignement et la façon dont ils regardent la formation effectuée. Le cadre théorique est fondée sur une conception de la pratique professionnelle que prend comme nucléaires les concepts de tâche et communication e une perspective de la construction de dispositifs de formation qui suivent l'approche exploratoire. Les participants sont 19 enseignants de 1er à 6ème année de l'école. L'étude est basée sur les enregistrements d'un journal de bord, un questionnaire à réponse ouverte et des entrevues. Les résultats montrent que, par suite du travail effectué, les enseignants valorise l'enseignement exploratoire et les discussions collectives et assument une forte expectative sur les capacités des élèves. En ce qui concerne la formation, ils soulignent le lien avec leur pratique et des moments de partage d'expériences.

MOTS CLÉS:

- *Formation professionnelle*
- *Formation continue*
- *Approche exploratoire*
- *Tâches*
- *Discussion collective*

1. Introdução

No quadro das orientações curriculares internacionais para o ensino da Matemática tem vindo a afirmar-se cada vez mais o valor de uma abordagem exploratória no ensino da Matemática (Ponte, 2005) na qual o aluno assume um papel ativo na construção do conhecimento matemático. Esta abordagem coloca um sério desafio aos professores.

A abordagem exploratória representa um corte com a tradição em que o professor começa por apresentar um método de resolução de um certo tipo de tarefa, muitas vezes com base em um ou dois exemplos, e depois indica novas tarefas para os alunos praticarem esse método. Ou seja, neste caso, o professor primeiro demonstra o método e depois dá tarefas para o aluno praticar. Em contrapartida, na abordagem exploratória, o papel do professor é selecionar e propor tarefas adequadas e promover o envolvimento dos alunos na sua resolução. Cabe-lhe acompanhar e apoiar os alunos, mas sem se substituir a estes na resolução das tarefas e, na sequência, proporcionar momentos em que os alunos apresentam as suas resoluções e em que se sistematizam as aprendizagens.

No caso da abordagem exploratória, são os alunos que têm de começar por construir os seus próprios métodos para resolver as questões propostas, usando os seus conhecimentos prévios. Numa etapa seguinte, confrontam-se as diferentes estratégias seguidas por diversos alunos e procura-se chegar a um método robusto e eficaz que possa ser assumido por todos os alunos da turma. O trabalho de cunho exploratório cria múltiplas oportunidades para os alunos construírem e aprofundarem a sua compreensão de conceitos, procedimentos, representações e ideias matemáticas. Os alunos são assim chamados a desempenhar um papel ativo na interpretação das questões propostas, na representação das informações dadas e na conceção e concretização de estratégias de resolução das tarefas. Além disso, devem ser capazes de apresentar e justificar as suas resoluções aos colegas e ao professor. Pela imprevisibilidade das situações que o professor enfrenta ao longo deste processo (Rowland & Zazkis, 2013; Schön, 1983), trata-se um papel muito mais complexo e exigente do que aquele que assume num ensino de cunho mais tradicional baseado na exposição e prática.

As perspetivas atuais sobre a formação de professores, nomeadamente dos professores em serviço, enfatizam o valor da investigação pelo próprio professor (Llinares & Krainer, 2006) e salientam a importância da mobilização de aspetos da prática do professor, tanto quanto possível em situações autênticas (Smith, 2001). O presente estudo debruça-se sobre uma oficina de formação[1] que valoriza

[1] Oficina de formação é a designação corrente em Portugal de uma ação de formação com um forte pendor prático, que habitualmente envolve a produção e experimentação de materiais didáticos em sala de aula, e que corresponde a 25 horas de trabalho presencial e 25 horas de trabalho autónomo por parte dos formandos.

um olhar investigativo sobre a prática, que envolveu professores dos 1.º e 2.º ciclos do ensino básico[2] sobre o ensino dos temas de números e álgebra, numa perspetiva exploratória. O nosso objetivo é analisar as mudanças que os professores referem ter sentido nas suas perspetivas sobre o ensino destes temas bem como o modo como avaliam o trabalho de formação realizado.

2. Prática profissional e processos de formação

A prática profissional do professor pode ser caraterizada por dois aspetos fundamentais: as tarefas propostas aos alunos e a comunicação que se estabelece na sala de aula (Ponte, Branco, Quaresma, Velez & Mata-Pereira, 2012). No que respeita às tarefas, Pólya (1945) distingue entre exercício e problema, conforme os alunos disponham ou não de métodos de resolução já anteriormente aprendidos para a questão em causa. Stein e Smith (1998) falam de tarefas de nível cognitivo elevado ou reduzido, conforme o tipo de dificuldades que colocam ao aluno. Por sua vez, Ponte (2005) aponta duas dimensões fundamentais nas tarefas, a estrutura e o grau de desafio. Na sua perspetiva, as tarefas com um grau de desafio mais elevado são os problemas (mais estruturados) e as investigações (mais abertas). Além disso, sublinha o interesse educativo das explorações enquanto tarefas relativamente acessíveis e com aspetos abertos, nas quais os alunos têm que conceber e concretizar estratégias de resolução a partir dos seus conhecimentos prévios.

Pelo seu lado, a comunicação que se estabelece na sala de aula pode assumir um caráter sobretudo unívoco, que se processa essencialmente num só sentido, com uma voz (a do professor) dominando todas as outras, ou um caráter dialógico, se existe um relativo equilíbrio de vozes, tendo os alunos possibilidade de participar de modo significativo na aula e ter iniciativas de intervenção no discurso (Brendefur & Frykholm, 2000). Nos últimos anos, as discussões coletivas têm vindo a ganhar um interesse crescente como momento de trabalho particularmente produtivo na sala de aula. Relativamente à atuação do professor na preparação destas discussões, Stein, Engle, Smith e Hughes (2008) salientam a importância de uma boa preparação, propondo quatro "práticas" para o efeito: antecipar, monitorizar, selecionar e sequenciar. No que respeita à condução das discussões propriamente ditas estes autores propõem uma prática adicional

[2] Em Portugal, o 1.º ciclo do ensino básico corresponde aos quatro primeiros anos de escolaridade e o 2.º ciclo aos 5.º e 6.º anos escolares.

relativa ao estabelecimento de conexões. Pelo seu lado, na condução das discussões coletivas, Wood (1999) destaca sobretudo a importância da exploração de desacordos entre os alunos, enquanto Sherin (2002) aponta a necessidade do professor manter o equilíbrio entre promover a participação dos alunos no discurso matemático e promover a abordagem de assuntos matemáticos importantes.

Para promover o desenvolvimento da prática profissional do professor é necessário proporcionar-lhe oportunidades de formação de qualidade. Na verdade, o problema central da formação de professores de Matemática é a construção, colocação em prática e aperfeiçoamento de dispositivos de formação que proporcionem um efetivo desenvolvimento dos professores envolvidos, tendo em conta as suas capacidades e interesses e os objetivos formativos definidos (Goodchild, 2014; Goodchild, Fuglestad, & Jaworski, 2013; Loucks-Horsley, Hewson, Love, & Stiles, 1998). Como indica Smith (2001), é muito frequente, a formação dar pouca ou nenhuma atenção ao conhecimento sobre o modo como os professores aprendem, para se centrar apenas no modo de transmitir um conjunto de conteúdos. Tanto na formação inicial como na formação de professores já em serviço, predominam os processos centrados nos conteúdos de formação, aquilo que Lesne (1984) considera o modo de trabalho pedagógico de "tipo transmissivo". Ao fazer isso, a formação acaba por reproduzir a lógica do ensino que pretende que o aluno aprenda um certo conteúdo com base na "apresentação" desse mesmo conteúdo pelo professor, de modo mais ou menos atrativo, mas sem tomar em consideração a atividade que o aluno pode ser chamado a desenvolver, para além de prestar atenção ao que é dito e tomar notas no seu caderno. Segundo Watson e Mason (2007), um modo de trabalho pedagógico alternativo, capaz de proporcionar oportunidades de formação de qualidade, poderá envolver tarefas como a resolução de problemas matemáticos pelos professores, a construção de sequências de tarefas, o estudo e reflexão sobre a prática e o estudo de referenciais teóricos.

As ideias-chave da abordagem exploratória podem ajudar a construir dispositivos de formação ajustados aos mais diversos contextos. Nesta perspetiva, a formação deve proporcionar oportunidades para que os professores trabalhem com artefactos próprios da prática de ensino da Matemática – tarefas, materiais didáticos, representações de situações da sala de aula em transcrições de diálogos ou em registos vídeo, resoluções de problemas realizadas por alunos, etc. (Smith, 2001). Deve, igualmente, criar oportunidades para a conceção de tarefas a realizar na sala de aula pelos próprios professores e posterior reflexão sobre a sua realização na sala de aula, com vista a novas intervenções, de novo na sala de aula.

Na construção de dispositivos de formação é igualmente necessário conhecer bem os participantes – saber o que os preocupa, o que lhes interessa, e sobretudo saber até que ponto estão dispostos a questionar-se e a expor-se perante os outros, bem como a investir na formação para a sua aprendizagem. O levantamento de necessidades de formação pode proporcionar informação muito útil, mas muitas vezes só nas primeiras sessões da formação se consegue perceber qual é efetivamente a disponibilidade dos formandos para se envolverem nas propostas de trabalho que lhes são apresentadas. Por isso, a criação de dispositivos de formação e desenvolvimento profissional do professor apropriados para cada situação constitui um campo de trabalho que coloca sempre fortes desafios aos educadores matemáticos.

Como indica Ponte (1999), a construção de dispositivos de formação apropriados implica articular dois movimentos contraditórios – por um lado, os processos de desenvolvimento profissional do professor que seguem a sua lógica e ritmos próprios e, por outro lado, valorizar os contributos da Didática que presidem à definição dos objetivos e conteúdos do processo formativo. Não se pode ignorar nem uns nem outros. Para conseguir essa articulação é necessário saber colocar objetivos exequíveis, prescindindo da ideia tão comum que, com uma simples ação de formação, é possível proporcionar uma profunda mudança nos participantes. Por outras palavras, é necessário identificar em cada situação o que pode ser o contributo específico do processo formativo para o desenvolvimento do professor. Depois, tendo em conta que, tal como os alunos, também os professores aprendem a partir da sua atividade e da reflexão sobre a sua atividade (Christiansen & Walther, 1986), ou seja, através da participação nas práticas educacionais (Crawford & Adler, 1996), é preciso criar oportunidades para atividade significativa, mobilizando para isso problemas e situações da prática profissional. Tal como os alunos aprendem Matemática trabalhando em tarefas matemáticas e argumentando com os seus colegas ou refletindo sobre os seus raciocínios e os seus resultados, também os professores fazem as suas aprendizagens profissionais sobretudo a partir da sua atividade e da reflexão sobre a sua atividade realizada em contextos tanto quanto possível próximos da sua prática profissional. Deste modo, professores aprendem por processos basicamente análogos aos dos alunos, estando a diferença no objeto fundamental da sua atividade – num caso a Matemática, no outro o ensino-aprendizagem da Matemática.

Em resumo, a conceção de uma ação de formação de professores é essencialmente um processo de design (Loucks-Horsley et al., 1998) que deve ter em conta uma perspetiva teórica sobre os processos de aprendizagem profissional dos professores bem como sobre as condições que os influenciam. Para cada situação concreta é preciso construir processos formativos adequados.

É preciso saber quem são os participantes, quais os objetivos definidos para a formação, quais os processos formativos que se irão privilegiar, que recursos e materiais se podem mobilizar, que obstáculos é provável encontrar e como se irão ultrapassar. É também fundamental saber que necessidades de formação sentem os participantes e que investimento estão dispostos a fazer. Entre todos estes aspetos, a questão da relação dos processos formativos com os conhecimentos prévios, as necessidades e a disponibilidade dos participantes sobressai como essencial. Na verdade, faz uma grande diferença proporcionar aos professores a possibilidade de aprenderem através da experimentação, reflexão e discussão sobre as suas próprias experiências de trabalho com alunos em sala de aula ou por processos distanciados das suas práticas. No entanto, é preciso ter em atenção que os processos formativos mais significativos são também os que requerem maior disponibilidade e investimento pessoal por parte do professor.

3. A oficina

A oficina de formação foi realizada a solicitação de um Centro de Formação de Professores, situado numa zona rural a cerca de 50 km de Lisboa. A oficina decorreu de janeiro a maio de 2013 em 8 sessões de cerca de três horas (a última sessão teve quatro horas) em horário pós-laboral, com uma frequência aproximadamente quinzenal. Atendendo ao forte pendor prático que carateriza este tipo de formação, a oficina envolveu a produção, experimentação e reflexão coletiva sobre o uso de tarefas matemáticas em sala de aula, bem como momentos de discussão de orientações curriculares, conceitos e processos matemáticos, e problemáticas de cunho didático. De acordo com os normativos oficiais para este tipo de formação, ao trabalho realizado presencialmente (25 horas) correspondeu idêntico período para trabalho autónomo por parte dos formandos. Os participantes eram 19 professores, dos quais 16 dos quatro primeiros anos de escolaridade e três dos 5.º e 6.º anos, todos com vínculo profissional a escolas do ensino público e mais de 6 anos de experiência profissional. A maioria destes professores tinha participado anteriormente no Programa de Formação Contínua para Professores do 1.º e 2.º Ciclo do Ensino Básico (Serrazina, 2013), que decorreu de 2006 a 2011.

Os objetivos e a natureza da formação foram acordados com o Centro de Formação, tendo em conta os interesses e necessidades sentidos pelos professores que se prendiam com a concretização das orientações curriculares em vigor (Ministério da Educação, 2007). Deste modo, o objetivo que orientou a formação foi dar a conhecer aos professores as potencialidades de uma abordagem exploratória ao ensino da Matemática, tendo por base tarefas desafiantes mas acessíveis aos alunos e uma comunicação dialógica na sala de aula, em que se salientam os momentos de discussão coletiva. Procurávamos, também, que, no quadro desta abordagem, os professores pudessem valorizar as estratégias dos alunos na resolução das tarefas.

Um resumo dos assuntos trabalhados e das atividades realizadas na oficina encontra-se na Tabela 1. Em cada sessão alternaram-se momentos de apresentação de ideias e informações relevantes por parte da equipa de formadores, com trabalho prático por parte dos professores na sequência dessas apresentações (em pares ou trios) e, finalmente, momentos de discussão coletiva. Nestes momentos era dada a palavra aos professores para apresentarem as suas resoluções ou as dos seus alunos e era encorajado que se interpelassem mutuamente apresentando ideias concordantes ou discordantes. Nestas discussões o papel dos formadores era o de procurar valorizar o trabalho dos professores e, ao mesmo tempo, enquadrá-lo nas perspetivas curriculares e relacioná-lo com resultados de investigações sobre a aprendizagem dos alunos.

TABELA I
Temas e atividades de formação

Sessão	*Assuntos trabalhados*	*Principais atividades realizadas*
1	– Apresentação da Oficina e modo de trabalho; – Orientações curriculares atuais; – Organização da aula a partir de tarefas.	– Resolução de uma tarefa (sequência crescente) e sua discussão – Observação de vídeo e momento de discussão. – Proposta de tarefa a realizar com os alunos.
2	– Documentos curriculares e recursos para o professor.	– Análise de documentos curriculares portugueses e internacionais sobre os tópicos (Adição e divisão de números naturais, Sequências, Números racionais e adição de números racionais). – Análise dos documentos de apoio (brochuras, etc.). – Discussão da Tarefa realizada nas aulas com os seus alunos.

3	– Sequências.	– Análise do Programa, das Metas, e da Brochura da Álgebra sobre Sequências. – Realização de uma tarefa sobre sequências (Exploração com números). – Análise do trabalho dos alunos em duas tarefas de sequências. – Proposta de tarefa a realizar com os alunos.
4	– Números naturais e algoritmos.	– Pesquisa de materiais na Internet. – Realização de uma tarefa matemática – Cálculo mental (com discussão de estratégias [decomposição, compensação, algoritmo], abordagem da reta vazia, sentido de número). – Análise de resoluções de alunos numa tarefa (Caracol). – Discussão da tarefa realizada nas aulas com os seus alunos.
5	– Números naturais e algoritmos.	– Sentido de Número e Pensamento Relacional. – Tarefa matemática (sobre pensamento relacional – exploração matemática, análise de respostas de alunos, discussão coletiva). – Análise do significado das operações a partir de exemplos (adição, subtração, multiplicação, divisão). – Algoritmos nos documentos curriculares. – Análise do Programa e das Metas sobre Aprendizagem dos Números Naturais e Operações. – Proposta de tarefa a realizar com os alunos.
6	– Números racionais.	– Análise do Programa sobre Aprendizagem dos Números Racionais. – Tarefa matemática (Os combustíveis – exploração matemática). – Análise da prática profissional (Os combustíveis, fase de preparação, trabalho de grupo, discussão – reflexão sobre a organização da aula em 3 fases usando aulas em vídeo). – Discussão da tarefa realizada nas aulas.

7	– Números racionais.	– Análise de manuais sobre a introdução dos algoritmos da adição e da multiplicação (Que preparação fazem? Que oportunidades dão para a compreensão dos algoritmos?). – Apresentação e discussão de ideias fundamentais sobre o Ensino e a Aprendizagem da Proporcionalidade. – Tarefa matemática (IMLNA-Quadrados, 1.ª e 2.ª partes). – Análise de resoluções de alunos na resolução de tarefas sobre proporcionalidade direta (IMLNA-Quadrados, 1.ª e 2.ª partes, colares). – Proposta de tarefa a realizar com os alunos.
8	– Proporcionalidade; – Balanço final.	– Discussão da tarefa realizada nas aulas. – A aula em três fases (revisão sobre as aulas em vídeo do 1.º e 2.º ciclo e discussão sobre as potencialidades e problemas na realização deste tipo de aula). – Realização e discussão das tarefas de números do TIMSS. – Resultados dos alunos portugueses no TIMSS. – Balanço final da formação.

No final das sessões 1, 3, 5 e 7 foram propostas tarefas relacionadas com o tema nelas trabalhado que os professores adaptaram aos seus alunos e propuseram nas suas aulas. Nas sessões 2, 4, 6 e 8, em momentos de discussão coletiva, os professores relataram os aspetos que consideraram mais salientes do trabalho que teve lugar nas suas turmas, interpelando-se uns aos outros e respondendo a questões colocadas pelos formadores, nomeadamente sobre as estratégias seguidas pelos alunos, sobre as dificuldades sentidas pelos alunos na interpretação e realização das tarefas e sobre a condução da aula. Em quase todas as sessões (sessões 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8) os professores realizaram explorações matemáticas, tendo oportunidade de trabalhar em pares ou trios em tarefas semelhantes às que poderiam propor aos alunos e de apresentar depois as suas estratégias e soluções, durante a discussão coletiva. Assim, por exemplo, na sessão 3 os formandos trabalharam a tarefa "explorações com números" (figura 1), relacionada com o tópico Sequências e regularidades e na sessão 5 trabalharam a tarefa "O caracol" (figura 2), relacionada com as Representações matemáticas.

Procure descobrir relações entre os seguintes números:

0	1	2	3
4	5	6	7
8	9	10	11
12	13	14	15
16	17	18	19
…	…	…	…

Faça um registo das conclusões a que for chegando.

Figura 1. Tarefa "Explorações com números"

Um caracol sobe um muro com 10 metros de altura. Em cada dia sobe 2 metros mas de noite deixa-se escorregar 1 metro. Ao fim de quantos dias chega o caracol ao cimo do muro?

Figura 2. Tarefa "O caracol"

Em quatro sessões (3, 4, 5, 7) os formandos analisaram respostas dadas pelos alunos a tarefas matemáticas e em três (1, 6, 8) tiveram oportunidade de observar em vídeo e discutir a condução por parte do professor da atividade na sala de aula, alternando o trabalho em pares ou trios com a discussão coletiva. Algumas sessões (em especial a 2) deram bastante atenção à discussão de documentos curriculares, materiais de apoio e manuais escolares. Houve um forte paralelismo entre as situações de trabalho nas sessões de formação e as propostas feitas para a prática profissional: em ambos os casos propunham-se tarefas para trabalhar, havia momentos de trabalho autónomo e momentos de discussão coletiva, procurava-se valorizar as estratégias e soluções dos formandos / alunos, prestando atenção aos conceitos e representações matemáticas e também à comunicação e ao raciocínio.

Neste conjunto de atividades é de destacar: (i) a análise das orientações curriculares atuais no que respeita ao ensino dos números e da álgebra no 1.º e 2.º ciclo e recursos para o professor; (ii) a organização da aula de Matemática em três fases, tendo por base tarefas de natureza exploratória – introdução da tarefa, trabalho autónomo dos alunos, discussão coletiva de toda a turma; e (iii) a abordagem dos temas sequências, números naturais e algoritmos, números racionais e proporcionalidade. Nas sessões 2, 4 e 6, a discussão das tarefas realizadas pelos professores nas suas aulas foi efetuada na parte final para poder beneficiar dos contributos conceptuais introduzidos no início da sessão e por proporcionar uma forma natural de encerrar os trabalhos do dia. Na sessão 8, essa discussão foi feita logo no início, uma vez que esta sessão encerrou com um balanço da formação.

As atividades de formação estiveram a cargo de três formadores[3] que alternavam papéis de formador e observador durante as sessões de formação. Após cada sessão presencial da oficina, a equipa de formação reunia-se para refletir sobre o trabalho realizado pelos professores e reajustar os objetivos e atividades previstas para a sessão seguinte.

4. Metodologia de investigação

Este estudo tem caraterísticas de uma investigação realizada no contexto da sua própria prática de formação, numa abordagem de observação participante (Jorgensen, 1989). Para isso, a equipa identificou à partida um conjunto de questões que pretendia ver respondidas, estabeleceu diversos procedimentos de recolha de dados e empreendeu uma análise e reflexão final sobre os dados recolhidos. Três dos membros da equipa alternaram papéis de formador e observador e o quarto membro assumiu o papel de observador em todas as sessões.

Um dos processos de recolha de dados foi a utilização de um diário de bordo (informações provenientes deste instrumento são assinaladas por DB) escrito por um dos membros da equipa e completado com contribuições dos restantes. Também entrevistámos (informações assinaladas por E), através de entrevistas semiestruturadas, três formandas, selecionadas entre aquelas que tinham tido maior envolvimento nas sessões de formação. Estas entrevistas procuravam saber qual a perspetiva das professoras sobre as diversas atividades realizadas, nomeadamente (i) a apresentação e discussão de documentos curriculares, (ii) a realização de tarefas matemáticas e análise das possíveis dificuldades dos alunos, (iii) a análise do trabalho de alunos em tarefas matemáticas, (iv) a análise e discussão de situações de sala de aula apresentadas em vídeo, e (v) a adaptação de tarefas, a sua realização na sala de aula, reflexão e partilha de experiências com os colegas e ainda a sua perspetiva sobre a dinâmica da formação, em especial os momentos de discussão coletiva bem como a correspondência entre o trabalho realizado e as necessidades de formação sentidas. Além disso, como parte do processo de avaliação da formação, todos os professores responderam a um questionário (assinalado por Q) com cinco questões de resposta aberta sobre o modo como encaravam diversos aspetos da formação e as aprendizagens por si realizadas. A análise de dados envolveu

[3] Os formadores são três dos autores deste artigo, que alternaram papéis de formador e de observador. Entre estes, o primeiro autor é professor universitário e investigador sénior. Os restantes formadores e o quarto elemento da equipa são doutorandas em processo de formação como formadoras e investigadoras.

dois movimentos complementares de interpretações diretas e de agregação em categorias (Stake, 1995). Como pontos principais de análise, em primeiro lugar, procuramos perceber as perspetivas dos formandos quanto aos aspetos de ordem didática que receberam especial ênfase durante a formação, nomeadamente em relação (i) à análise de documentos curriculares, (ii) às tarefas exploratórias, (iii) à discussão coletiva e (iv) às suas expectativas em relação aos alunos. Em segundo lugar, relativamente à formação, procuramos também saber o modo como encaram dois aspetos que foram centrais na conceção da dinâmica da formação (i) os momentos de partilha de experiências entre os professores e (ii) a relação entre a atividade realizada na formação e a prática profissional. Os registos em diário de bordo proporcionam informação sobre o desenrolar das atividades, dando indicações sobre os aspetos mais marcantes da oficina tal como foram sendo percebidos pelos formadores. Por outro lado, os questionários e as entrevistas mostram como a formação foi percebida pelos professores participantes.

5. Perspetivas dos professores sobre as atividades realizadas

Nesta seção analisamos as perspetivas dos professores sobre o trabalho feito na formação na análise de documentos curriculares, na análise das potencialidades das tarefas exploratórias e dos momentos de discussão coletiva. Selecionámos estas questões por representarem momentos marcantes do trabalho realizado na formação. As informações e reflexões registadas no diário de bordo apresentam a perspetiva dos formadores e as respostas dos professores ao questionário e à entrevista proporcionam evidências sobre a sua própria perspetiva.

5.1. *Análise de documentos curriculares*

Durante a formação, especialmente nas sessões iniciais, por diversas vezes foram analisados documentos curriculares nacionais e internacionais. A equipa de formação considerou que a apresentação com algum detalhe destes documentos e o seu uso pelos professores para identificar as orientações relativas aos tópicos abordados era um trabalho importante a realizar. De acordo com o que registámos no diário de bordo (DB), os professores seguiram tal análise com atenção mas sem revelar um grande envolvimento. O modo como os professores trabalharam nas sessões de formação leva-nos a pensar que não usam estes documentos no seu dia-a-dia profissional, organizando as suas aulas sobretudo a partir dos manuais e outros materiais que interpretam os documentos curriculares oficiais.

Nas respostas ao questionário, esta atividade é referida apenas por uma pequena parte dos formandos. Aqueles que a referem perspetivam-na como um aspeto positivo:

> Nas escolas nem sempre existem momentos para se explorarem detalhadamente os documentos estruturantes, neste caso em particular o Programa da Matemática. *(Luísa, Q)*
>
> Podemos afirmar que se conseguiu obter uma maior consciência dos conteúdos de ensino, das metas curriculares e do programa dos diferentes ciclos. *(Filipa, Q)*

Nas suas reflexões, Luísa e Filipa consideram que a análise de documentos curriculares deveria ser realizada no contexto escolar, e o modo como se exprimem sugere que tal não acontece com frequência. Assim, ter presente estes documentos parece ser um aspeto a ter em conta na formação, para que os professores tomem conhecimento do seu papel e conteúdo e, eventualmente, reflitam sobre eles.

5.2. *Tarefas exploratórias*

Logo no início da formação foi possível verificar que a proposta de tarefas exploratórias na sala de aula aos seus alunos não fazia parte da prática profissional da maioria dos professores. Durante a formação foram vários os momentos em que os professores trabalharam em tarefas de tal natureza e diversas as situações em que as realizaram na sua sala de aula. Os registos realizados no diário de bordo (DB) dos formadores mostram que, no decurso da oficina, os formandos valorizaram a realização de tarefas exploratórias nas suas aulas, com os seus alunos e o seu relato posterior nas sessões de formação. Como eles próprios indicaram, apesar de muitos deles terem frequentado anteriormente outras ações de formação, nunca tinham apresentado aos alunos tarefas como as que lhes foram aqui propostas e muito menos discutido com os colegas as resoluções dos alunos. Inicialmente, quando a proposta foi feita, a maioria dos professores sentiu indisfarçável incomodidade e alguns ensaiaram propostas para anular este trabalho. No entanto, no final da formação vários professores identificaram estas tarefas como potencialmente interessantes para promover a aprendizagem dos alunos.

Catarina é uma das formandas que valorizaram a introdução de propostas de trabalho exploratório:

> [A formação] fez-me abrir mais um bocadinho e pensar assim, não Catarina, tens que começar também… A deixar que os meninos descubram. Mas estar a dar a matéria diretamente, eles se calhar não apreendem tanto aquilo que eu estou a dizer ou a fazer, eles aprendem muito mais, se forem eles a descobrir. *(Catarina, E)*

Também Paula referiu a influência da formação na proposta de tarefas de exploração na sala de aula, destacando ainda as potencialidades destas tarefas no desenvolvimento do pensamento matemático dos alunos:

> [A formação] também me permitiu promover e pensar em atividades de exploração e de investigação que posso realizar em contexto sala de aula, ou seja [levar os alunos a] "pensar matematicamente". *(Paula, Q)*

A professora referiu-se ainda a possíveis situações de sala de aula em que se podem usar tarefas de exploração para que os alunos passem de uma fase mais concreta para situações mais abstratas:

> Num grupo de quarto ano e depois de os alunos já terem passado por inúmeras etapas experimentais e de manipulação concreta pretende-se já que estes consigam resolver situações um pouco abstratas desenvolvendo estratégias e explorando-as com os seus pares. *(Paula, Q)*

Apesar de valorizarem as potencialidades das tarefas de exploração na aprendizagem dos alunos, alguns dos professores refletiram sobre algumas dificuldades e desafios que estas tarefas podem trazer às suas práticas profissionais, como é o caso de Catarina:

> Este tipo de atividades exploratórias, este tipo de atividades que nós podemos fazer com eles, às vezes deixa o professor… Pelo menos eu falo por mim… Deixamos um bocadinho para trás… O que é pena porque eles aprendem muito assim… Das que nós fizemos, qualquer uma delas, para trabalhar bem aquela atividade, explorá-la com eles… Trabalhá-la com eles… Um dia, uma hora não dá, duas horas não dá… Até pode ser para a semana toda… *(Catarina, E)*

A professora salientou que a proposta de tarefas de exploração pode implicar dificuldades na gestão do tempo, ainda que destaque o potencial destas tarefas para a aprendizagem dos alunos.

Já Teresa apontou um desafio que se coloca em turmas com características particulares:

> No trabalho de natureza exploratória, em turmas demasiado grandes e com dificuldades de aprendizagem, o acompanhamento de todos os alunos na fase de exploração é complicado porque é preciso tempo para ajudar todos os alunos através da reformulação de questões a compreender o problema e a resolvê-lo. *(Teresa, Q)*

Na sua reflexão, Teresa destacou o tempo necessário ao acompanhamento dos alunos como um desafio para o professor, mas evidenciou uma compreensão da importância do questionamento no trabalho de natureza exploratória. Pelas intervenções apresentadas, a formação parece ter contribuído para uma compreensão mais aprofundada, por parte dos formandos, do conceito de tarefas de natureza exploratória e também das suas potencialidades para a aprendizagem dos alunos.

5.3. *Discussão coletiva*

Um momento de trabalho muito significativo das sessões de formação foram as discussões coletivas. Estas discussões eram realizadas após a concretização das mais diversas atividades – após a exploração matemática de tarefas, a análise de trabalho dos alunos, a análise de sítios web, a análise de manuais ou a análise do trabalho do professor. Com o decorrer do tempo, as discussões passaram a ser um modo de trabalho valorizado como forma de construir coletivamente conhecimento na sequência de um trabalho preparatório adequado (DB).

Nas suas reflexões, os professores destacaram os momentos de discussão coletiva em sala de aula como uma das alterações metodológicas às suas práticas profissionais. Por exemplo, Jorge apontou este momento como um dos mais importantes das atividades da formação e da sala de aula:

> Era a altura da partilha do trabalho de cada grupo. Este momento, foi uma experiência riquíssima pois, transferido para a realidade da sala de aula, é o momento que permite a reflexão sobre o que e como foi realizado. Apesar de conseguirmos verificar, pela observação da tarefa, como é que os alunos chegaram ou não aos resultados, é através da comunicação final que podemos entender a forma como é percebido e resolvido cada obstáculo da tarefa. *(Jorge, Q)*

Ana valorizou as tarefas de exploração propostas na formação como um ponto de partida para a realização de discussões coletivas, no contexto particular da sua turma:

> A realização e adaptação destas tarefas permitiu uma diversificação de metodologia ao nível da minha sala de aula, já que foi possível a sua aplicação aos dois níveis de ensino que integram a minha turma (1.º e 2.º anos), possibilitando a discussão coletiva e a aquisição de conceitos. *(Ana, Q)*

Num registo idêntico, Paula referiu que os momentos de discussão coletiva podem ser motivadores para os alunos quando estes desenvolvem previamente tarefas de natureza exploratória:

> Deixar os alunos inventarem as suas próprias estratégias e procedimentos é uma opção pedagógica que pode ser de extrema importância. E solicitar-lhes que as partilhem, surpreendentemente enriquecedor! *(Paula, Q)*

Pelo seu lado, Teresa evidenciou outros aspetos relevantes numa discussão coletiva, mostrando uma forte apropriação do conceito:

> É na discussão coletiva que os alunos apresentam as suas ideias e defendem as suas posições, que o professor reformula as questões de modo a fomentar o debate e no final faz-se a síntese. *(Teresa, Q)*

A professora salientou ainda o papel da formação na compreensão de que a discussão coletiva pode ser produtiva independente do desempenho dos alunos:

> Aprendi nesta formação que pode ser aplicado a todos os alunos desde que o acompanhamento do professor seja mais minucioso em todas as fases. *(Teresa, Q)*

A valorização do impacto da discussão coletiva em alunos com maiores dificuldades foi ainda destacada por Ana:

> Também pude observar que foi muito importante para os alunos comunicar aos colegas as suas ideias e estratégias, apresentando-as e defendendo-as. Esta apresentação à turma permitiu aos alunos com maiores dificuldades compreenderem as diferentes estratégias de resolução para posterior aplicação em atividades do mesmo género. *(Ana, Q*)

Na primeira discussão coletiva onde os professores apresentaram as resoluções dos seus alunos (sessão 2), eles referiam apenas erros e dificuldades, dando uma imagem negativa das capacidades dos alunos. Isto foi contrariado pelos formadores, que, conhecedores das resoluções dos alunos através de digitalizações previamente enviadas pelos formandos por correio eletrónico, destacavam aquilo que os alunos conseguiam fazer, ressaltando as suas estratégias e resoluções. Com o decorrer do tempo, passou a prevalecer a valorização do trabalho dos alunos e todos os professores procuravam enfatizar nas resoluções que apresentavam os aspetos mais originais e mais interessantes (DB). E a verdade é que um aspeto particularmente interessante referido pelos professores nas suas reflexões relaciona-se com as mudanças que se registaram nas suas expectativas sobre o que os alunos são capazes de realizar em sala de aula:

> [A formação promoveu] a autoconfiança nas minhas capacidades como professora, que incluiu sem dúvida, a criação de expetativas elevadas acerca do que os alunos podem aprender em Matemática. *(Paula, Q)*

Também Catarina salientou que a formação a leva a olhar de um modo diferente para o trabalho dos alunos:

> Ai o meu aluno não conseguiu… Uma metade não conseguiu, mas a outra metade conseguiu e isso também é importante, portanto elevou a nossa… Pelo menos elevou a minha moral a pensar assim: Catarina, tens que ver mais pelo lado positivo e menos pelo lado negativo! *(Catarina, E*)

A professora referiu ainda que as tarefas propostas na formação influenciaram a sua visão sobre o que os alunos são ou não capazes de concretizar em sala de aula, pois apesar das suas expectativas iniciais, pôde verificar que as tarefas propostas se adequavam aos seus alunos:

> Eu cheguei a levar daqui. . . Propostas para nós fazermos com os meninos, pensava assim, isto não vai dar certo… Eles não vão achar isto interessante, e foram essas as atividades que, pelo menos uma delas que eu fiquei bastante até… Feliz e fiquei motivada e foi aí que me deu o tal clique… Que eles realizaram… Eles fizeram um trabalho em grupo, foi espetacular… E aí vi… Dá mesmo, vale a pena… *(Catarina, E)*

É de notar que os momentos de discussão mais interessantes vividos na formação tiveram por base a realização de tarefas matemáticas e a análise de resoluções dos alunos. A discussão de documentos curriculares – em especial as Metas e o Programa de Matemática (Ministério da Educação, 2007) também foi valorizada pelos professores, mas não proporcionou situações de debate e de participação semelhantes aos das atividades anteriores (DB).

Deste modo, a formação parece ter contribuído para algumas mudanças no discurso dos professores, no sentido da valorização da natureza exploratória do trabalho em sala de aula e das potencialidades das discussões coletivas e ainda sobre as suas expetativas relativamente ao desempenho dos alunos.

6. Perspetiva dos professores sobre a formação

Nesta secção analisamos as perspetivas dos professores sobre aspetos estruturantes da formação, nomeadamente o modo como foi promovida a partilha de experiências entre os participantes e a sua perspetiva sobre a relação entre a formação e a prática de ensino. Tal como na seção anterior, as informações e reflexões registadas no diário de bordo (DB) apresentam a perspetiva dos formadores e as respostas dos professores ao questionário (Q) e à entrevista (E) proporcionam evidências sobre a sua própria perspetiva.

6.1. *Partilha de experiências*

Um dos aspetos mais destacados pelos formandos foi a possibilidade de partilharem experiências durante toda a formação. Catarina e Marina salientaram que a partilha de experiências não surge naturalmente no dia-a-dia dos professores e salientaram a formação como potenciadora destas situações:

> Esta partilha de todos que houve com os colegas… Nós aprendemos uns com os outros, porque estarmos fechados na sala de aula, às vezes… Cometemos o erro constantemente e não nos apercebemos que estamos a cometer esse erro… É a minha opinião. *(Catarina, E)*

> Nesta profissão cada vez mais absorvente, em que são exigidas ao professor, cada vez mais competências e tarefas a realizar, muitas delas de ordem burocrática, nas escolas os momentos de partilha são difíceis de operacionalizar, por isso considero que foram uma mais-valia a partilha de experiências entre os formandos, pois conseguimos sempre aprender coisas novas. *(Marina, Q)*

Um dos momentos de partilha mais valorizado foi promovido a cada duas sessões de formação e consistiu na discussão de situações de sala de aula vividas pelos professores durante a realização de tarefas de exploração sobre Números e Álgebra (DB). Jorge é um dos participantes que destacou estes momentos:

> A análise e reflexão sobre o trabalho realizado pelos alunos apresentadas nas sessões de formação foi um momento importantíssimo de partilha de experiências. Esta partilha foi tão mais enriquecedora na medida da diversidade dos contextos de origem: anos diferentes do mesmo ciclo e diferentes ciclos (1.º e 2.º). *(Jorge, Q)*

As situações de partilha de experiências foram também realçadas por Paula, que enfatizou ainda a relação desta partilha com a sua própria prática:

> Através da partilha de situações práticas dos formandos e da nossa própria experimentação em sala de aula, conseguimos obter uma visão abrangente, reflexiva e crítica de cada situação. *(Paula, Q)*

Pelo seu lado, Luísa evidenciou que a partilha de experiências a surpreendeu, particularmente pelas alterações que os colegas propuseram para as tarefas apresentadas na formação:

> É a troca de experiências, o ouvir, a forma como eles abordavam as tarefas ou como as completavam mesmo em casa, as arranjavam para os anos… Eu nunca fiz grandes arranjos às minhas tarefas, foram muito idênticas às que eram propostas mas vi colegas que faziam grandes… Algumas mudanças e adaptavam àquilo que eles achavam. *(Luísa, E)*

Finalmente, para Paula, "há ainda a salientar a participação, a partilha, a troca de experiências entre os formandos e formadores que, favoreceu o trabalho cooperativo, trabalho de grupo e trabalho de sala de aula" *(Q)*. Na sua perspetiva, a importância da troca de experiências na formação não se cingiu aos formandos, valorizando igualmente a partilha entre formandos e formadores.

Assim, a partilha de experiências revela-se uma mais-valia nesta formação, onde os professores podem conhecer situações algo semelhantes às vivenciadas nas suas salas de aula, mas que enriquecem o seu conhecimento sobre as potencialidades dessas situações. Salientam particularmente a importância de conhecerem situações vivenciadas em anos diferentes do ano que lecionam e possibilidades de adequação das tarefas.

6.2. *Relação entre a formação e a prática*

Uma questão largamente valorizada pelos professores foi a ligação estabelecida entre a formação e a prática, ou seja, o paralelismo entre atividades desenvolvidas na formação e atividades equivalentes em sala de aula ou também entre a formação e outros aspetos da sua prática profissional.

Um dos aspetos destacados foi a realização de tarefas tanto por parte dos formandos como por parte dos seus alunos. Como referiu Luísa “esta oficina proporcionou que trabalhássemos com os nossos alunos durante a aplicação das tarefas e que trabalhássemos nós próprios durante as sessões” *(Q)*. A professora salientou ainda o envolvimento dos restantes formandos neste processo:

> Algumas [tarefas] não conhecia de todo, mas é uma mais-valia para nós fazermos, porque eu reparei... Durante a resolução, aquele envolvimento de toda a gente, todos queriam saber e depois como é que o outro… Esquecemos um bocadinho... Resolvemos mesmo para nós, não era para os alunos... [os formandos] esqueceram-se e envolveram-se na tarefa e tentaram eles próprios resolver. *(Luísa, E)*

Pelo seu lado, Jorge salientou que a resolução de tarefas matemáticas durante a formação não correspondeu linearmente à resolução realizada na sala de aula:

> Era realizada a tarefa que seria apresentada em sala de aula por cada um dos formandos. Este trabalho era feito em grupo, tal como seria com os alunos... Esta adequação ambiental permitia refletir sobre as possíveis dificuldades das crianças na execução da tarefa e conduzir para uma adaptação à especificidade dos alunos. *(Jorge, Q)*

Além das atividades da formação com características de natureza exploratória que eram passíveis de transpor para a sala de aula, os formandos destacaram ainda outros aspetos que relacionaram a formação diretamente com a sua prática profissional. Por um lado, a formação foi encarada como um desafio à sua prática profissional:

> [A oficina de formação] tem uma fortíssima ligação com a prática docente... Esta formação contribuiu para o meu desenvolvimento profissional na medida em que influenciou diretamente a minha prática profissional ao exigir do meu trabalho diário um desafio inovador e uma reflexão sobre a prática pedagógica. *(Jorge, Q)*

Por outro lado, este desafio foi visto como uma possibilidade de introduzir novas práticas que contribuam para o sucesso dos alunos:

> Esta oficina, no meu ponto de vista, promoveu o debate e a troca de experiências e saberes, o que constituiu um verdadeiro enriquecimento para mim, com claras implicações na vida quotidiana da escola. A troca de experiências entre colegas de diversas escolas e o trabalho colaborativo são sem dúvida essenciais para a melhoria da nossa prática profissional, é através de troca de ideias e materiais entre professores com problemas e necessidades comuns, que surgem ideias para a introdução de novas atividades, novos processos e um mesmo objetivo profissional (o sucesso dos nossos alunos). *(Luísa, Q)*

Deste modo, os professores reconheceram o valor formativo de se envolverem ativamente na resolução das tarefas matemáticas, tal como os seus alunos. Notaram, também, que esta resolução constituía um ponto de partida para aprofundarem o seu conhecimento sobre a tarefa de modo a poderem usá-la na sala de aula, eventualmente com adaptações. Alguns deles notaram ainda que, mais do que tarefas específicas para usar neste ou naquele tópico, o que lhe foi proposto foi um modo de trabalho que em muitos aspetos desafiava as suas práticas atuais.

7. Conclusão

O desafio lançado pela nossa proposta formativa de natureza exploratória parece ter influenciado positivamente os professores que frequentaram a oficina de formação, levando-os a considerar favoravelmente esta perspetiva e a procurar pô-la em prática em algumas das suas aulas, como reportaram nas sessões de formação. Muito especialmente, os professores valorizaram as tarefas abertas e os momentos de discussão coletiva. No que se refere ao formato da formação, os participantes valorizaram a partilha de experiências e a forte relação estabelecida entre a formação e a sua prática de ensino.

O design adotado na formação (Loucks-Horsley et al., 1998) permitiu que os objetivos visados fossem em grande medida atingidos. A ênfase na abordagem exploratória (Ponte, 2005), tanto no que respeita ao trabalho a realizar na sala de aula pelos professores como ao trabalho efetuado nas sessões se formação, mostrou propiciar envolvimento e aprendizagem significativa da sua parte. A própria sintonia entre o estilo de trabalho usado na formação e o que se sugeria que pudesse ser feito na sala de aula foi notado e valorizado por muitos dos professores participantes.

Na verdade, a forte ligação dos momentos formativos com situações de prática profissional (Smith, 2001), nomeadamente considerando tarefas matemáticas, resoluções de alunos e momentos de trabalho em sala de aula, revelaram-se apropriados para os objetivos de formação indicados no início deste artigo para o trabalho com este grupo de professores. Especial relevo merecem os momentos de discussão coletiva (Ponte, 2005; Sherin, 2002; Stein et al., 2008) nas sessões de formação, que proporcionaram amplo espaço de participação aos formandos, valorizaram os seus saberes e as suas práticas, e proporcionaram um modelo vivo de como poderia ser o trabalho da sua sala de aula, tal como referem Lunenberg, Korthagen e Swennen (2007). Nesta formação, as tarefas propostas e o modo de condução da comunicação (Ponte et al., 2012) revelaram-se elementos estruturantes fundamentais tanto da prática profissional como do processo formativo.

São numerosos os professores que reportam ter realizado aulas no âmbito da formação em que as suas práticas se modificaram no que respeita às tarefas que propõem, à forma como as introduzem e o modo como as discutem no fim com toda a turma. Além disso, são vários os professores que indicam ter passado a ver com um novo olhar as capacidades dos alunos. Consideramos ser de salientar a valorização do ensino exploratório, das discussões coletivas e das capacidades dos alunos que os professores destacam como sendo consequência do trabalho realizado na formação. Saber se na sequência deste trabalho os participantes mudaram ou não de modo significativo as suas práticas transcende o âmbito deste estudo. Conjeturamos que a medida em que estas perspetivas irão informar as suas práticas futuras dependerá muito do trabalho de coordenação ao nível dos seus agrupamentos[4] e da política nacional para o ensino da Matemática, pois só através da conjugação de diferentes níveis de atuação – formação, trabalho nas organizações escolares e política central – se podem conseguir mudanças profundas e duradoiras para o ensino da Matemática.

8. Referências

Brendefur, J., & Frykholm, J. (2000). Promoting mathematical communication in the classroom: Two preservice teachers' conceptions and practices. *Journal of Mathematics Teacher Education, 3*(2), 125-153.

[4] Agrupamentos de escolas sob uma só direção, e que incluem normalmente entre 1000 e 4000 alunos, são a forma atual de organização das instituições escolares em Portugal.

Christiansen, B., & Walther, G. (1986). Task and activity. In B. Christiansen, A. G. Howson, & M. Otte (Eds.), *Perspectives on mathematics education* (pp. 243-307). Dordrecht: D. Reidel.

Crawford, K., & Adler, J. (1996). Teachers as researchers in mathematics education. In A. J. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, & C. Laborde (Eds.), *International handbook of mathematics education* (pp. 1187-1205). Dordrecht: Kluwer.

Goodchild, S. (2014). Mathematics teaching development: Learning from developmental research in Norway. *ZDM - The International Journal on Mathematics Education*, *46*(2), 305-316.

Goodchild, S., Fuglestad, A. B., & Jaworski, B. (2013). Critical alignment in inquiry-based practice in developing mathematics teaching. *Educational Studies in Mathematics*, *84*(3), 393-412.

Jorgensen, D. L. (1989). *Participant observation: A methodology for human studies*. Newbury Park, CA: Sage.

Lesne, M. (1984). *Trabalho pedagógico e formação de adultos*. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian.

Llinares, S., & Krainer, K. (2006). Mathematics (student) teachers and teacher educators as learners. In A. Gutierrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future* (pp. 429-460). Rotterdam: Sense.

Loucks-Horsley, S., Hewson, P. W., Love, N., & Stiles, K. E. (1998). *Designing professional development for teachers of science and mathematics*. Thousand Oaks, CA: Corwin.

Lunenberg, M., Korthagen, F., & Swennen, A. (2007). The teacher educator as a role model. *Teaching and Teacher Education*, *23*, 586-601.

Ministério da Educação (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: Autor.

Pólya, G. (1945). *How to solve it: A new aspect of mathematical method*. Princeton: Princeton University Press.

Ponte, J. P. (1999). Didácticas específicas e construção do conhecimento profissional. In J. Tavares, A. Pereira, A. P. Pedro, & H. A. Sá (Eds.), *Investigar e formar em educação: Actas do IV Congresso da SPCE* (pp. 59-72). Porto: SPCE.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM.

Ponte, J. P., Branco, N., Quaresma, M., Velez, I., & Mata-Pereira, J. (2012). Perspetivas teóricas no estudo das práticas profissionais dos professores de matemática. In A. P. Canavarro, L. Santos, A. M. Boavida, H. Oliveira, L. Menezes & S. Carreira (Eds.), *Práticas de ensino da Matemática: Atas do Encontro de Investigação em Educação Matemática* (pp. 267-279). Lisboa: SPIEM.

Rowland, T., & Zazkis, R. (2013). Contingency in the mathematics classroom: Opportunities taken and opportunities missed. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, *13*(2), 137–153.

Serrazina, L. (2013). O programa de formação contínua em matemática para professores do 1.º ciclo e a melhoria do ensino da Matemática. *Da Investigação às Práticas, 3*(2), 75-97.

Schön, D. A. (1983). *The reflective practitioner: How professionals think in action*. Aldershot Hants: Avebury.

Sherin, M. G. (2002). A balancing act: Developing a discourse community in the mathematics classroom. *Journal of Mathematics Teacher Education, 5*, 205-233.

Smith, M. S. (2001). *Practice-based professional development for teachers of mathematics*. Reston, VA: NCTM.

Stake, R. (2009). *A arte de investigação com estudos de caso*. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian.

Stein, M. K., Engle, R. A., Smith, M., & Hughes, E. K. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: Five practices for helping teachers move beyond show and tell. *Mathematical Thinking and Learning, 10*, 313-340.

Stein, M. K., & Smith, M. S. (1998). Mathematical tasks as a framework for reflection: From research to practice. *Mathematics Teaching in the Middle School, 3*(4), 268-275.

Watson, A., & Mason, J. (2007). Taken-as-shared: a review of common assumptions about mathematical tasks in teacher education. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *10*, 205-215.

Wood, T. (1999). Creating a context for argument in mathematics class. *Journal for Research in Mathematics Education, 30*(2), 171-191.

Autores

João Pedro da Ponte. Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, Portugal. jpponte @ie.ulisboa.pt

Joana Mata-Pereira. Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, Portugal. joanamatapereira @campus.ul.pt

Marisa Quaresma. Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, Portugal. mq@campus.ul.pt

Isabel Velez. Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, Portugal. velez@campus.ul.pt

Sergio Martínez Juste, José María Muñoz Escolano,
Antonio M. Oller Marcén, Tomás Ortega del Rincón

ANÁLISIS DE PROBLEMAS DE PROPORCIONALIDAD COMPUESTA EN LIBROS DE TEXTO DE 2º DE ESO

Analysis of compound proportion problems in 8th grade textbooks

RESUMEN

En este trabajo realizamos un estudio detallado de los problemas de proporcionalidad compuesta de doce libros de texto españoles de segundo curso de Educación Secundaria Obligatoria (13-14 años). En concreto, se realiza un análisis de contenido textual y *a priori*, clasificando los problemas atendiendo a su contexto, su estructura, su posición y papel dentro de la Unidad Didáctica correspondiente y a la tipología de magnitudes utilizadas. Entre otros resultados se concluye que, aunque la presencia de problemas varía ligeramente en cuanto a número entre los distintos textos, el tratamiento es bastante homogéneo respecto a su contexto, estructura y magnitudes implicadas: la mayoría de los problemas son de contexto realista, de valor perdido y con cinco cantidades de magnitud extensivas. También se detecta poca presencia de problemas de comparación cuantitativa y de situaciones de tipo inversa-inversa, así como poca presencia y variedad de magnitudes intensivas.

PALABRAS CLAVE:

- *Clasificación de problemas*
- *Proporcionalidad compuesta*
- *Libros de texto*
- *Secundaria*

ABSTRACT

In this work, we make a detailed study of compound proportionality problems from twelve 8th grade (age 13-14) Spanish textbooks. In particular, we perform an *a priori*, textual content analysis, classifying the problems according to their context, their structure and their position and role in the lesson where they appear. We also focus on the typology of the magnitudes used by the authors. Among other results, we conclude that, even if the number of problems varies slightly between different books, the treatment given to them is quite homogeneous regarding the context, structure and use of magnitudes: most of them are realistic missing value problems in which five quantities of extensive magnitudes appear. We also detect very few problems involving quantitative comparison or situations of 'inverse-inverse' type together with a very little use of intensive magnitudes.

KEY WORDS:

- *Problem classification*
- *Compound proportion*
- *Textbooks*
- *Secondary*

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (2017) *20* (1): 95-122.
Recepción: Febrero 17, 2014 / Aceptación: Abril 2, 2015. DOI: 10.12802/relime.17.2014

RESUMO

Neste trabalho realizamos um estudo pormenorizado dos problemas de proporcionalidade composta de doze livros de texto espanhóis de segundo ano de Educação Secundária Obrigatória (13-14 anos). Mais concretamente, é realizada uma análise de conteúdo textual e a priori, classificando os problemas atendendo ao seu contexto, à sua estrutura, à sua posição e papel dentro da Unidade Didática correspondente e à tipologia de magnitudes utilizadas. Entre outros resultados é concluído que, embora a presença de problemas varie ligeiramente quanto ao número entre os diferentes textos, o tratamento é bastante homogéneo relativamente ao seu contexto, estrutura e magnitudes envolvidas: a maioria dos problemas são de contexto realista, de valor perdido e com cinco quantidades de magnitude extensivas. Também se detecta pouca presença de problemas de comparação quantitativa e de situações de tipo inversa-inversa, bem como pouca presença e variedade de magnitudes intensivas.

PALAVRAS CHAVE:

- *Classificação de problemas*
- *Proporcionalidade composta*
- *Livros de texto*
- *Escola secundária*

RÉSUMÉ

Dans ce travail nous étudions en détail les problèmes de proportionnalité composée de douze livres de texte en langue espagnole de la deuxième année de l'enseignement secondaire (13-14 ans). Plus précisément, une analyse de contenu textuel et *a priori* est effectuée en classifiant les problèmes en fonction de leur contexte, leur structure, leur position et rôle au sein de l'unité et selon les types de grandeurs utilisées. Parmi des autres résultats, il est conclu que, bien que la présence de problèmes varie légèrement en nombre entre les différents textes, le traitement est assez homogène par rapport à leur contexte, leur structure et les grandeurs utilisées : la plupart des problèmes sont problèmes « du valeur perdu » dans un contexte réaliste, et impliquent cinq quantités de grandeurs extensives. Peu de présence de problèmes de comparaison quantitatives et de situations de type inverse-inverse, et peu de présence de grandeurs intensives sont détectés.

MOTS CLÉS:

- *Classification des problèmes*
- *Proportionnalité composée*
- *Manuels scolaires, école*
- *Secondaire*

1. Introducción

Según múltiples expertos en Educación Matemática, el llamado "razonamiento proporcional", así como el manejo y la comprensión de situaciones relacionadas con la proporcionalidad, constituye uno de los tópicos matemáticos más importantes en la formación del alumnado de Secundaria. Tradicionalmente, ha supuesto la culminación de la formación aritmética de los estudiantes y su cotidianidad, junto con sus numerosas aplicaciones prácticas, justifica que se le dedique gran atención. De hecho, está presente en los currículos oficiales de Educación Primaria y Secundaria de muchos países. Por ejemplo, el número racional como razón y la proporcionalidad aritmética es uno de los 13 estándares propuestos por el National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 1989) para los cursos correspondientes a 6º de Educación Primaria y 1º y 2º de Secundaria Obligatoria (de 11 a 14 años). Esta importancia se refuerza, además, si tenemos en cuenta la antigüedad de las ideas implicadas y su largo devenir histórico (Oller y Gairín, 2013).

Pese a esta atención, estudios recientes como el TIMSS de 2011 (Mullis, Martin, Foy, & Arora, 2012); así como diversos trabajos de investigación (Fernández y Llinares, 2011; Sánchez, 2013; Valverde & Castro, 2009) muestran las dificultades que encuentran los estudiantes de distintos niveles educativos (Educación Primaria, Educación Secundaria o Diplomatura de Maestro) al afrontar situaciones de proporcionalidad. Una de las dificultades cognitivas más importantes es la llamada "ilusión de proporcionalidad" (Van Dooren, De Bock, Janssens, & Verschaffel, 2008). En este sentido, cabe destacar que las dificultades a la hora de aplicar correctamente este tipo de razonamientos, así como las técnicas utilizadas a la hora de resolver los problemas se han mantenido como una constante a través del tiempo (Gómez, 2006). Incluso la propia tipología de los problemas planteados también se ha mantenido a lo largo del tiempo, variando tan solo los contextos (Gómez, 2006; Oller, 2012).

El principal foco de interés de este trabajo es realizar una revisión bibliográfica de textos escolares actuales para analizar problemas planteados sobre proporcionalidad, concretamente, los relativos a proporcionalidad compuesta (o proporcionalidad múltiple).

Aunque el currículo oficial español no menciona expresamente la proporcionalidad compuesta, sí aparecen recogidas en él las relaciones de proporcionalidad directa e inversa entre magnitudes y la aplicación de la proporcionalidad en la resolución de problemas. Además, una revisión de libros de texto de distintas épocas (Oller, 2012) muestra que la proporcionalidad compuesta sigue recibiendo un tratamiento específico en un buen número de libros de texto. Su inclusión en los temarios también se justifica por su aplicación al cálculo del interés simple.

Todo lo anterior justifica la necesidad de prestar atención al tratamiento de la proporcionalidad compuesta ya que, como comenta Schubring (1987), "la práctica docente no está tan determinada por los decretos ministeriales como lo está por los libros utilizados para la enseñanza" (p. 41) o como afirman Monterrubio y Ortega (2009, p. 38), "el libro de texto es un recurso habitual en el desarrollo del proceso de enseñanza y aprendizaje, hasta el punto de que, en muchas ocasiones, es el propio manual el que determina el currículo real". En la misma línea, Rodríguez (2006), considera el libro de texto como principal herramienta de instrucción que llega a utilizarse como currículo.

Según Ortega, Pecharromán y Sosa (2011) "el aprendizaje de los conceptos matemáticos a través de la resolución de problemas es un procedimiento altamente valorado y esta práctica es fundamental en la consolidación de los aprendizajes" (p. 100). En este sentido, los problemas presentes en los libros de texto juegan un papel principal en la enseñanza ya que su resolución habitualmente supone una de las principales tareas que realizan los estudiantes, especialmente en las unidades didácticas de proporcionalidad aritmética.

Así, el objetivo principal de este trabajo consiste en analizar los problemas de proporcionalidad compuesta propuestos en libros de texto españoles así como los tipos de magnitudes que aparecen en dichos problemas. Este análisis se efectúa con el propósito de caracterizar la enseñanza que se imparte, detectando posibles deficiencias que permitan plantear posibles mejoras en la enseñanza.

2. Marco teórico

2.1. *Clasificación de problemas de proporcionalidad compuesta*

Son muchos los trabajos encaminados a presentar diferentes maneras de clasificar los problemas matemáticos escolares. Para Díaz y Poblete (2001, p. 36) "establecer categorías en los problemas constituye, a nuestro juicio, la base conceptual de cualquier procedimiento didáctico en el currículo escolar". Si bien, como nos advierte Blanco (1993, p. 39), "ninguna clasificación puede ser exhaustiva, estableciéndose siempre intersecciones entre los diversos apartados y apareciendo actividades de difícil catalogación, y todo esto por la enorme diversidad de problemas que pueden proponerse de diferentes niveles y contenidos". Conejo y Ortega (2013) ejemplifican esta aseveración al completar y ampliar anteriores clasificaciones de problemas de Borasi y Schoenfeld, atendiendo al contexto, formulación, soluciones y métodos de resolución de los problemas, en el primer caso y atendiendo a la definición de problema y a los objetivos que persigue la tarea, en el segundo caso.

Otras posibles clasificaciones surgen al considerar el contexto en el que se enmarca el enunciado del problema. Esta atención a los contextos se hace patente en el diseño de las pruebas PISA donde, además de los contenidos a tratar, se consideran las diferentes situaciones para el planteamiento de los problemas. En este caso se trata de cuatro diferentes contextos: situación personal, situación educativa o laboral, situación pública y situación científica.

Díaz y Poblete (2001) realizan una doble clasificación, además de atender a la naturaleza de los problemas matemáticos, se preocupan por el contexto en el que se plantea el problema. De esta forma, resumen la diferenciación de los problemas según su naturaleza en rutinarios y no rutinarios. Y al hablar de los contextos los clasifican en contextos reales, realistas, *fantasistas*[1] y puramente matemáticos. Los problemas reales serían aquellos que se producen efectivamente en la realidad y comprometen al alumno a actuar. Si los problemas son susceptibles de producirse realmente y, por tanto, son una simulación de la realidad se consideran realistas. Por el contrario, los problemas *fantasistas* son fruto de la imaginación y no tiene una base real. Por último, los problemas puramente matemáticos son aquellos que evocan exclusivamente a objetos matemáticos y sus relaciones.

Si tenemos en cuenta el soporte en el que se presentan los problemas, podemos considerar otras clasificaciones generales para los problemas matemáticos sin tener en cuenta el contenido tratado. En concreto, si nos centramos en los problemas que aparecen en manuales escolares puede tener interés, como señala Oller (2012), considerar la posición de los problemas dentro de las unidades didácticas de libros de texto respecto al discurso en que se institucionaliza las técnicas de resolución. De esta forma, podemos distinguir entre:

- Problemas introductorios, formulados como motivación al contenido y que no aparecen resueltos.
- Problemas que aparecen totalmente resueltos y que suelen acompañar a las explicaciones teóricas del tópico a tratar.
- Problemas que aparecen al final de cada epígrafe en los que se divide una unidad didáctica destinados a reforzar los conceptos o procedimientos tratados en el epígrafe. Este enfoque abunda en la consideración, por parte del alumno, de la resolución de problemas como una mera identificación de técnicas.
- Problemas presentados en listados al final de las unidades didácticas.

[1] Aunque este término no existe en castellano, hemos optado por mantener el utilizado por Díaz y Poblete en su trabajo.

Dentro del ámbito concreto de la aritmética, donde se encuadran los problemas de proporcionalidad compuesta objeto de nuestro interés, existen clasificaciones específicas que debemos tener en consideración para realizar un análisis más fino. Una de estas clasificaciones se aborda en Puig y Cerdán (1988). En este trabajo se realiza un estudio profundo de los problemas aritméticos elementales verbales distinguiendo entre problemas que se resuelven en una etapa o en más de una; según la necesidad de realizar una o más operaciones aritméticas binarias para alcanzar la solución. A partir de ahí, se estudian las estructuras aditivas y multiplicativas para problemas en una etapa y el método de análisis-síntesis para la resolución de problemas aritméticos de varias operaciones combinadas (PAVOC).

Centrándonos en los problemas de proporcionalidad, ejemplos de PAVOC, encontramos diferentes clasificaciones para el caso específico de los problemas de proporcionalidad simple directa. Algunas de estas clasificaciones se recogen en Fernández (2009). En particular se desarrolla la clasificación de Cramer y Post (1993), donde se diferencian los siguientes tipos de problemas de proporcionalidad simple directa:

- Problemas de valor perdido: Se conocen tres datos de una proporción y se desea calcular el cuarto valor desconocido.
- Problemas de comparación numérica: Se conocen (o pueden calcularse) dos razones que se pretenden comparar.
- Problemas de comparación y predicción cualitativas: Requieren comparaciones que no dependen de forma específica de valores numéricos.

Otras tipologías de problemas de proporcionalidad simple directa recogidas en Fernández (2009) atienden a contextos (velocidad, escala, mezcla y densidad) o a estructuras “parte-todo”, “parte-parte” (Singer & Resnick, 1992) o a características semánticas (Lamon, 1993). Sin embargo, la de Cramer y Post (1993), a diferencia de éstas, es naturalmente transportable, como pondremos de manifiesto a continuación, a las situaciones de proporcionalidad inversa y proporcionalidad compuesta.

Bosch (1994) estudia la proporcionalidad desde un punto de vista funcional y define un “sistema proporcional y compuesto” como aquel que puede definirse mediante $n+1$ variables $X_1, X_2, \ldots, X_n, X$ de forma que las n primeras (que llamaremos “variables independientes”) determinan completamente el estado del sistema y la última (que llamaremos “variable dependiente”) puede expresarse a partir de las anteriores mediante la relación

$$f(X_1, X_2, \ldots, X_n) = X,$$

siendo f una función homogénea del tipo:

$$[1] \qquad f(X_1, X_2, \ldots, X_n) = k, \Pi_{i=1}^{n} X_i^{p_i} \quad \text{con} \quad p_i \in \{-1, 1\},$$

donde k es la constante de proporcionalidad.

Usando este enfoque presentamos una forma de definir y clasificar los problemas de valor perdido y de comparación en situaciones de proporcionalidad compuesta.

La definición anterior incluye como casos particulares las representaciones funcionales clásicas de la proporcionalidad simple: directa si $p = 1$ e inversa si $p = -1$. Además, la definición de proporcionalidad compuesta dada en este trabajo está orientada al tratamiento de los problemas de valor perdido: Dada una tupla de valores conocidos para todas las variables $(a_1, \ldots, a_n, a)$ y otra tupla $(b_1, \ldots, b_n, x)$ donde x, valor de la variable dependiente, es desconocido y $(b_1, \ldots, b_n)$, valores de las variables independientes, son conocidos, se trata de calcular el valor numérico x.

Así, fijado el número de magnitudes, esta caracterización permite clasificar los problemas de valor perdido atendiendo a la relación entre cada una de las variables independientes y la dependiente. Dicha información se puede codificar en un par (a, b) siendo a el número de variables independientes con relación directa con la variable dependiente, esto es, el número de $p_i = 1$ en la expresión [1]; y b el número de variables independientes con relación inversa con la variable dependiente, esto es, el número de $p_i = -1$ en la expresión [1].

Cuando se hace referencia a esta clasificación en los libros de texto estudiados a menudo se hace explícita la relación existente. De esta forma un problema de proporcionalidad compuesta con tres magnitudes de tipo (1,1) suele identificarse como un problema de "Directa – Inversa" [2] o esquemáticamente tipo "D-I" (Uriondo, 2007).

En la Tabla I se presenta toda la tipología de situaciones según el criterio anterior para las situaciones que involucran 2, 3 y 4 magnitudes.

[2] Otros textos consultados (Pancorbo, 2008) utilizan una terminología diferente, se habla de proporcionalidad "compuesta directa" para el tipo (2,0), "compuesta inversa" para el tipo (0,2) y "compuesta mixta" para el tipo (1,1).

TABLA I
Clasificación funcional de problemas de valor perdido en proporcionalidad compuesta de hasta cuatro magnitudes

		Proporcionalidad	*Relación funcional*
$n=1$ Dos magnitudes	(1,0)	Directa	$X=k\cdot X_1$
	(0,1)	Inversa	$X=k\cdot \frac{1}{X_1}$
$n=2$ Tres magnitudes	(2,0)	Directa - Directa	$X=k\cdot X_1\cdot X_2$
	(1,1)	Directa - Inversa	$X=k\cdot \frac{X_1}{X_2}$
	(0,2)	Inversa - Inversa	$X=k\cdot \frac{1}{X_1\cdot X_2}$
$n=3$ Cuatro magnitudes	(3,0)	D - D - D	$X=k\cdot X_1\cdot X_2\cdot X_3$
	(2,1)	D - D - I	$X=k\cdot \frac{X_1\cdot X_2}{X_3}$
	(1,2)	D - I - I	$X=k\cdot \frac{X_1}{X_2\cdot X_3}$
	(0,3)	I - I - I	$X=k\cdot \frac{1}{X_1\cdot X_2\cdot X_3}$

Las principales diferencias entre los problemas de valor perdido y los de comparación son la invariabilidad de la constante de proporcionalidad y la existencia de una variable diferenciada, la variable dependiente.

A diferencia de lo que ocurre en los problemas de valor perdido, en los problemas de comparación el cociente

$$C(X_1, \ldots, X_n, X) = \frac{X}{\Pi_{i=1}^{n} X_i^{p_i}}$$

no es constante. Se trata de comparar su valor para dos tuplas diferentes de valores de todas las variables (de forma cuantitativa en los problemas de comparación numérica o de forma cualitativa si no se explicitan los valores de las magnitudes en los problemas de comparación y predicción cualitativa).

Un problema de comparación numérica es aquel en el que se dan dos tuplas completas de valores $(a_1, \dots, a_n, a)$ y $(b_1, \dots, b_n, b)$ para las magnitudes y hay que comparar el valor que toma C en cada caso.

Al no tener X una posición privilegiada y ser equivalentes las situaciones para los cocientes C y C^{-1}, la tipología de problemas se reduce. En la Tabla II, se presenta la clasificación de los problemas de comparación en proporcionalidad compuesta hasta cuatro magnitudes atendiendo a la relación funcional entre las magnitudes. Denominaremos las variables como $(X_1, \dots, X_{n+1})$. En la columna "Da lugar a valor perdido", presentamos los tipos de problemas de valor perdido a los que da lugar la estructura $C(X_1, \dots, X_{n+1})$ dependiendo de cuál sea la variable dependiente.

TABLA II

Clasificación funcional de problemas de comparación en proporcionalidad compuesta de hasta cuatro magnitudes

<table>
<tr><th></th><th colspan="2">Da lugar a valor perdido</th></tr>
<tr><td rowspan="2">$n=1$
Dos magnitudes</td><td>$\frac{X_1}{X_2}$</td><td>(1,0) Directa</td></tr>
<tr><td>$X_1 \cdot X_2$</td><td>(0,1) Inversa</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$n=2$
Tres magnitudes</td><td>$\frac{X_1}{X_2 \cdot X_3}$</td><td>(2,0) Directa-Directa / (1,1) Directa-Inversa</td></tr>
<tr><td>$X_1 \cdot X_2 \cdot X_3$</td><td>(0,2) Inversa-Inversa</td></tr>
<tr><td rowspan="3">$n=3$
Cuatro magnitudes</td><td>$\frac{X_1}{X_2 \cdot X_3 \cdot X_4}$</td><td>(3, 0) D-D-D / (1,2) D-I-I</td></tr>
<tr><td>$\frac{X_1 \cdot X_2}{X_3 \cdot X_4}$</td><td>(2,1) D-D-I</td></tr>
<tr><td>$X_1 \cdot X_2 \cdot X_3 \cdot X_4$</td><td>(0,3) I-I-I</td></tr>
</table>

2.2. *Clasificación de las magnitudes involucradas en problemas aritméticos*

Los problemas de proporcionalidad compuesta son PAVOC en los que las operaciones a realizar son de naturaleza multiplicativa y en ellos se conjugan todos los elementos de la aritmética elemental: números naturales y racionales, las magnitudes, las operaciones e interrelaciones entre estos objetos, así como su significado (Gairín y Oller, 2011).

Diversos estudios (Lamon, 1993; Puig y Cerdán, 1988; Vergnaud, 1983) señalan que la dificultad en los problemas multiplicativos no puede solo explicarse a partir de su estructura semántica, sino que es necesario tener en cuenta el tipo de magnitud involucrada y el tipo de número.

En González y Gómez (2011), se plantean diferentes clasificaciones de las magnitudes involucradas en problemas aritméticos según distintos criterios, a saber:

- Distinción entre magnitudes extensivas (es decir, aquellas que son aditivas, como el peso, la cardinalidad o la superficie) e intensivas (que son razones y no son aditivas, como la velocidad, el precio unitario, la densidad o la temperatura).
- Distinción entre magnitudes continuas (como la longitud) y discretas (como el valor monetario).
- Distinción entre magnitudes fundamentales (como la longitud) y derivadas (como la superficie).
- Distinción entre magnitudes escalares (como la masa) y vectoriales (como la fuerza).

Existen investigaciones sobre el aprendizaje de la proporcionalidad simple que hacen referencia al papel de las magnitudes analizando las dificultades de los estudiantes al resolver problemas en función de que las magnitudes involucradas sean continuas, discretas, extensivas o intensivas. No existe un consenso claro entre los investigadores sobre el papel de las magnitudes continuas y discretas a este respecto ya que si bien algunos estudios apuntan a que los estudiantes más jóvenes emplean las magnitudes discretas con mayor éxito en contextos de proporcionalidad (Fernández y Llinares, 2011; Tournaire & Pulos, 1985), otros estudios señalan resultados en sentido contrario (Boyer, Levine, & Huttenlocher, 2008; Spinillo & Bryan, 1999). Por otro lado, Vergnaud (1983) y Schwartz (1988) señalan que la presencia de magnitudes intensivas es un factor importante en las situaciones de proporcionalidad aritmética. Así, Nunes, Despli y Bell (2003) reportan que los escolares de 7 y 8 años tienen mayores dificultades al resolver problemas de proporcionalidad simple de comparación cualitativa cuando las magnitudes involucradas son intensivas frente a las extensivas. Además, señalan que otro factor que también influye es la relación (directa o inversa) que se establece en los problemas.

2.3. *Estudio de libros de texto*

Para Gómez (2011):

> Observar el proceso de aprendizaje de la humanidad requiere dirigir la atención a la historia de las ideas matemáticas, a través del único registro disponible de las mismas. Esto es, a través de textos y manuales escolares y mediante un análisis de los mismos. (p.50)

Esta necesidad de analizar los textos y manuales escolares se refleja en los múltiples estudios realizados sobre el tema y en la preocupación por el desarrollo de herramientas metodológicas que permitan llevar a cabo dichos análisis (González y Sierra, 2004; Ruiz de Gauna, Dávila, Etxeberría y Sarasúa, 2013). Occelli y Valeiras (2013) realizan una revisión y clasificación de trabajos de este tipo publicados en importantes revistas nacionales e internacionales relacionadas con la didáctica de las ciencias.

El tratamiento de la proporcionalidad en libros de texto ha sido abordado por autores de distintos países bajo diversos enfoques. Guacaneme (2002) analiza en profundidad el discurso de cinco textos escolares colombianos de séptimo grado (12-13 años) respecto a los conceptos de razón, proporción y magnitudes directa e inversamente proporcionales, señalando distintas deficiencias en su tratamiento como que la proporcionalidad compuesta es presentada sin definición y no se relaciona con los demás contenidos. Pino y Blanco (2008) realizan un interesante estudio comparativo sobre los problemas de proporcionalidad contenidos en ocho textos de Chile y España para estudiantes de 12-13 años concluyendo que la mayoría de los problemas eran "de traducción simple" y "ejercicios de reconocimiento y algorítmicos" (Blanco, 1993) de manera que las tareas matemáticas que debían realizar los alumnos consistían únicamente en aplicar procedimientos o algoritmos conocidos. Lundberg (2011) clasifica distintas técnicas para la resolución de problemas de proporcionalidad simple directa e inversa que ofrecen cinco libros de texto suecos para estudiantes de 16-17 años donde se pondera la gran variedad de técnicas encontradas (de naturaleza aritmética, funcional, geométrica,…) pero también se señala que éstas no se relacionan entre sí y que no se presentan justificaciones sobre ninguna de ellas. Finalmente, Martínez, Muñoz y Oller (2014) estudian las distintas estrategias de resolución de problemas de proporcionalidad compuesta que aparecen en cuatro libros de texto españoles de 2º de ESO concluyendo que existía una cierta heterogeneidad y se revelaba una tendencia por parte de los textos a priorizar el empleo de aquellas que son de naturaleza más algorítmica o automática.

3. Objetivos y método

Como se ha indicado en la introducción, el objetivo principal de la presente investigación consiste en analizar los problemas de proporcionalidad compuesta y los tipos de magnitudes que en ellos aparecen en libros de texto españoles. Con el fin de profundizar en este análisis, a continuación enunciamos los siguientes objetivos específicos:

1. Clasificar los problemas de proporcionalidad compuesta según diferentes criterios, analizar su estructura y determinar la frecuencia con la que aparecen dichas estructuras;
2. Localizar el lugar de aparición de los problemas en las unidades didácticas en función de su tipo;
3. Determinar las magnitudes tratadas en los problemas de proporcionalidad compuesta y clasificarlas según diferentes criterios;
4. Estudiar la relación entre la clasificación de las estructuras y los tipos de magnitud que aparecen en ellas.

Para alcanzar estos objetivos, realizamos un estudio centrado en el conocimiento didáctico de análisis de actividades (Occelli y Valeiras, 2013) mediante un análisis de libros de texto. Para Van Dormolen (1986), el análisis de texto puede hacerse a priori o a posteriori según si el estudio se produce para evaluar el texto como herramienta didáctica sin tener en cuenta la instrucción llevada a cabo con él (a priori) o para comparar su propuesta curricular con los resultados de aprendizaje obtenidos (a posteriori). Además, Gómez (2011) plantea que el análisis puede realizarse siguiendo dos líneas diferentes: textual, para analizar un contenido matemático en su dimensión curricular y metodológica; epistemológica, para conocer cómo se han concebido las matemáticas escolares en diferentes momentos de la historia.

El análisis de contenido es (Bardin, 1986) un conjunto de instrumentos metodológicos aplicados a discursos. Para López (2002), el análisis de contenido:

> Se sitúa en el ámbito de la investigación descriptiva y pretende, sobre todo, descubrir los componentes básicos de un fenómeno determinado extrayéndolos de un contenido dado a través de un proceso que se caracteriza por el intento de rigor de medición (p. 174)

Para Krippendorff (1990) el análisis de contenido, como técnica de investigación, debe "formular inferencias reproducibles y válidas que puedan aplicarse a su contexto" (p. 28).

Zapico (2006) señala que las principales características del análisis de contenido son, su corte deductivo, la sistematización y la combinación de métodos cualitativos y cuantitativos. Sus propiedades hacen que el análisis de contenido sea uno de los métodos de investigación en textos escolares más empleados.

Castiello (2002) estructura el análisis de contenido en las siguientes etapas:

1. Localizar y seleccionar las partes de las unidades de muestreo que presenten datos sobre el fenómeno a estudiar;
2. Aislar los datos y convertirlos en las unidades de registro;

3. Establecer un sistema de categorías de registro y de codificación que permita clasificar los datos brutos en las categorías y describir las características relevantes del contenido;
4. Codificar el conjunto de textos seleccionados aplicando técnicas para la selección y codificación de datos;
5. Interpretar los datos obtenidos, asignando sentido y significación al análisis, explicando los posibles modelos descriptivos detectados y desarrollando una construcción teórica de relaciones entre los datos y su contexto.

Esta secuenciación favorece la reproducibilidad del estudio, mientras que la validez y fiabilidad internas se mejoran con la presencia de tres investigadores que actúan sobre los mismos registros observacionales (Goetz y Lecompte, 1988).

Por tanto, para la realización de nuestro estudio juzgamos conveniente realizar un análisis textual y a priori de textos escolares dentro del paradigma metodológico del análisis del contenido según los pasos anteriores.

En el currículo oficial de mínimos del Ministerio de Educación y Ciencia para la etapa de Educación Secundaria Obligatoria (ESO, de 12 a 16 años), se hace referencia explícita a la proporcionalidad en los cursos 1º, 2º y 4º (Opción A). Sin embargo, y puesto que la Opción A (terminal) para 4º de la ESO no se imparte a todos los estudiantes y ya que los libros de texto de 1º de ESO no tratan la proporcionalidad compuesta, centramos nuestro estudio en el tratamiento de los problemas de proporcionalidad compuesta en los libros de texto de 2º de ESO.

Para la selección de los textos que forman la muestra se recurrió a los fondos bibliográficos de la Facultad de Educación y del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Zaragoza y del IES Leonardo de Chabacier de Calatayud. Para seleccionar la muestra el criterio seguido fue la presencia de la proporcionalidad compuesta dentro de las unidades dedicadas a la proporcionalidad aritmética. De esta manera, la muestra resultante quedó constituida por 12 libros de texto de 2º ESO de diferentes editoriales (ver Apéndice). Todos ellos son textos relativamente recientes y pertenecientes a editoriales de prestigio y ampliamente implantadas en el territorio español.

A continuación, se presentan las diferentes categorías de análisis establecidas para el estudio:

– Tipo de problema según su contexto (Díaz y Poblete, 2001).

Real	*Fantasista*
Realista	Puramente matemático

- Tipo de problema según la clasificación de Cramer y Post (1993).

  VP: Problema de valor perdido.
  CN: Problema de comparación numérica.
  CC: Problema de comparación y predicción cualitativa.

- Tipo de problema según su estructura funcional conforme a la tipología presentada en las tablas I y II. Como veremos, apenas aparecen en el estudio problemas CC y CN. Además, los problemas VP de más de tres magnitudes son anecdóticos, por lo que prestaremos especial atención a los problemas VP con tres magnitudes. La clasificación según su estructura funcional de acuerdo a la Tabla I es:

  T1: Problema tipo (2,0) con estructura $X = k \cdot X_1 \cdot X_2$.

  T2: Problema tipo (1,1) con estructura $X = k \cdot \dfrac{X_1}{X_2}$.

  T3: Problema tipo (0,2) con estructura $X = k \cdot \dfrac{1}{X_1 \cdot X_2}$.

- Tipo de problema dependiendo de su posición y papel dentro de la unidad didáctica en la que se localiza:

  PI: Problemas introductorios.
  PR: Problemas completamente resueltos en el libro de texto.
  PD: Problema propuesto dentro de la unidad apoyando las explicaciones de un epígrafe concreto.
  PF: Problema propuesto en listados de ejercicios al final de la unidad.

- Tipo de magnitud (González y Gómez, 2011).

  E: Magnitud extensiva. C: Magnitud continua.
  I: Magnitud intensiva. D: Magnitud discreta.

De esta forma cada magnitud quedará clasificada en uno de los cuatro tipos siguientes: E-C, E-D, I-C o I-D.

4. Resultados

Entre los 12 libros de texto analizados se han contabilizado un total de 167 problemas en los que se presentan situaciones de proporcionalidad compuesta. Es decir, una aparición media de 13,9 problemas de proporcionalidad compuesta por libro estudiado. El menor número de problemas en un texto es de 6, mientras que la cantidad máxima detectada es 30. Pese a esa diferencia, el número de problemas tratados en la mayoría de los libros es bastante uniforme, como observamos en el Gráfico 1. Tan solo un libro (García, Pérez y Uriondo, 1996) se aleja de forma clara de la media por contener 30 problemas de proporcionalidad compuesta.

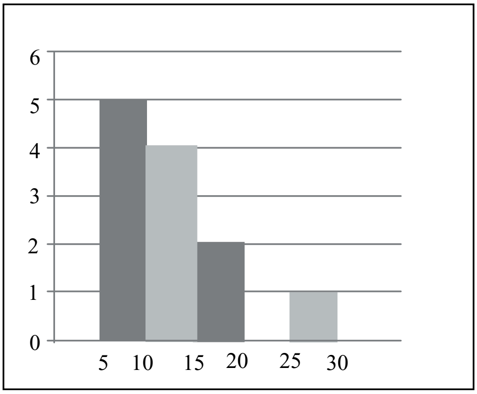


Gráfico1. Histograma de la variable "número de problemas"

Al margen de lo anterior, se han observado escasas diferencias entre los textos más antiguos y los más recientes, por lo que presentaremos los resultados conjuntamente. No obstante, en los resultados referidos al objetivo 1, señalaremos algunas particularidades detectadas especialmente en los textos de García y otros (1996) y de Bujanda y Mansilla (2000).

A continuación, se presentan los resultados del análisis de contenido según las categorías de análisis y objetivos presentados en la sección anterior.

4.1. *Resultados referidos al objetivo 1*

Teniendo en cuenta el contexto, aparecen 154 problemas de contexto realista y 13 puramente matemáticos (sin contexto) y ninguno de contexto real o de contexto *fantasista*. En la Figura 1 se ejemplifica la distinción entre problemas realistas y puramente matemáticos estudiados. De los problemas puramente matemáticos, 10 aparecen en García y otros (1996), el dato atípico comentado anteriormente. Esto explica el elevado número de problemas que aparecen en este texto. Si solo considerásemos los problemas de contexto realista, este libro contendría un número de problemas mucho más cercano a la media.

7. Un escursionista está haciendo un recorrido de 300 km. Durante los 4 primeros días ha cubierto un total de 120 km andando 6 horas diarias. ¿En cuántos días finalizará el recorrido si ha decidido rebajar en 1 hora el tiempo que va andar cada día?

8. Sabiendo que *C* es directamente proporcional a *A* y a *B*, calcula el valor de *x* por el método de reducción a la unidad o utilizando la proporcionalidad:

a) A — B — C
4 — 10 — 20
5 — x — 30

b) A — B — C
3 — 8 — 15
x — 16 — 40

Figura 1. Un problema realista frente a un problema puramente matemático (García et al., 1996, p. 192)

Centrándonos en la tipología de problemas de proporcionalidad, aparecen 165 problemas VP, mientras que solo aparecen 2 problemas CN, y ningún problema CC.

Los dos únicos problema CN se encuentran en el mismo texto (Bujanda y Mansilla, 2000). En uno de los problemas aparecen 3 magnitudes y tiene una estructura tipo $\frac{X_1}{X_2 \cdot X_3}$, mientras que en el otro aparecen 5 magnitudes y tiene una estructura tipo $\frac{X_1 \cdot X_2}{X_3 \cdot X_4 \cdot X_5}$.

Respecto a los problemas VP, en 156 de ellos se trabajan 3 magnitudes, mientras que en los 9 problemas restantes se trabajan 4 magnitudes. En la Tabla III exponemos los tipos de problemas VP con 4 magnitudes. Estos problemas se encuentran en solo 4 de los 12 textos estudiados, estando concentrados mayoritariamente en el texto de Bujanda y Mansilla (2000) que recoge 5 de los 9 problemas detectados.

TABLA III
Número de problemas de valor perdido con 4 magnitudes analizados según su estructura

Tipo	(3,0)	(2,1)	(1,2)	(0,3)
Nº de problemas	4	2	3	0

Los problemas VP con 3 magnitudes suponen el 93 % de los problemas estudiados. Además, todos los libros analizados presentan este tipo de problemas. Sin embargo, su presencia es desigual si tenemos en cuenta la distinción en problemas de tipos T1, T2 y T3, como observamos en el Gráfico 2:

- Todos los libros trabajan problemas de tipo T1;
- Hay dos textos que no presentan problemas de tipo T2;
- En la tercera parte de los textos no hallamos problemas de tipo T3.

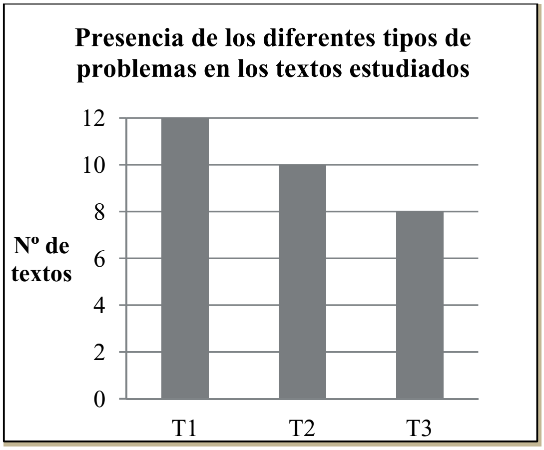


Gráfico 2. Número de textos analizados en los que se trabaja cada tipo de problema

Esta mayor presencia de los tipos T1 y T2, se pone también de manifiesto al estudiar el número de problemas de cada tipo encontrados en el análisis. Como observamos en el Gráfico 3:

- Hay 77 problemas de tipo T1. Esto supone el 49% de los problemas VP con 3 magnitudes;
- Aparecen 58 problemas de tipo T2 (el 37%);
- Los problemas de tipo T3 son los menos trabajados, con un total de 21 problemas (tan solo el 14%).

De esta manera, si tenemos en cuenta el número de libros en los que se trabaja cada estructura, encontramos una media de 6,4 problemas de tipo T1, 5,8 problemas de tipo T2 y 2,6 problemas de tipo T3.

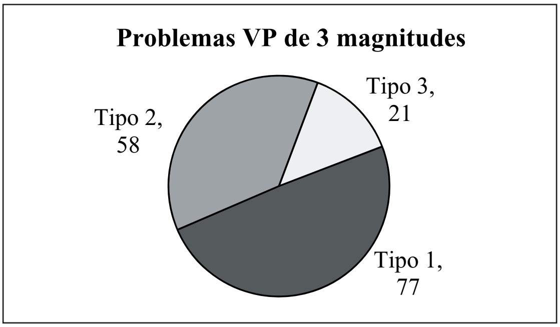


Gráfico 3. Frecuencia de los distintos tipos de problemas VP con 3 magnitudes

4.2. *Resultados referidos al objetivo 2*

En la siguiente tabla de contingencia se presentan los resultados del estudio conjunto de la categoría de análisis "Tipo de problema según su estructura" (VP con 3 magnitudes) y "Tipo de problema según su lugar de aparición en el texto":

TABLA IV
Frecuencias de cada tipo de problema en función de su aparición en el texto.

	PR	*PD*	*PF*
T1	11	35	29
T2	9	25	24
T3	2	10	9
Total	22	70	62

En ningún libro de texto aparecen problemas PI por lo que no los hemos introducido en la tabla anterior.

En cuanto a los problemas resueltos (PR), los 11 de tipo T1 se reparten entre 10 de los textos analizados, los 9 problemas resueltos T2 se reparten entre 8 libros de texto y los 2 problemas resueltos T3 pertenecen a dos libros de texto diferentes.

De los problemas que se presentan dentro del epígrafe de la proporcionalidad compuesta (PD), los 35 problemas T1 se reparten entre 11 de los textos analizados, los 25 problemas T2 entre 9 de los textos y los 10 problemas T3 pertenecen a 8 libros diferentes.

De los problemas finales (PF), los 29 problemas T1 se reparten entre 10 de los textos analizados, los 24 problemas T2 entre otros 9 de los textos y los 9 problemas T3 se concentran en 5 textos.

Todos los problemas de valor perdido con más de tres magnitudes y los de comparación son problemas PF.

4.3. *Resultados referidos al objetivo 3*

Como se observa en el Gráfico 4, de las 468 cantidades de magnitud que se han analizado en los problemas de proporcionalidad compuesta, la mayoría (un 88% aproximadamente) pertenecen a magnitudes extensivas, mientras que la incorporación de cantidades de magnitud intensivas tiene un peso mucho menor (12% aproximadamente).

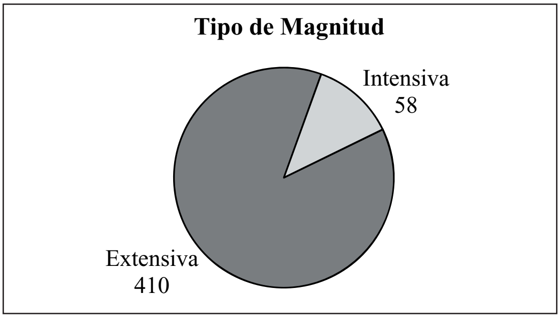


Gráfico 4. Frecuencias absolutas de las cantidades de magnitud extensivas e intensivas encontradas

Las magnitudes extensivas tratadas en los problemas, presentadas de mayor a menor frecuencia, son las siguientes: cardinalidad (154), tiempo (128), longitud (47), valor económico (36), masa (24), capacidad (12), superficie (7), energía (2). Como se observa en el Gráfico 5 las cantidades referentes a la cardinalidad y al tiempo suponen aproximadamente los dos tercios de las cantidades de magnitud extensiva analizadas. Las magnitudes físicas, salvo el tiempo y la longitud, tienen una presencia testimonial.

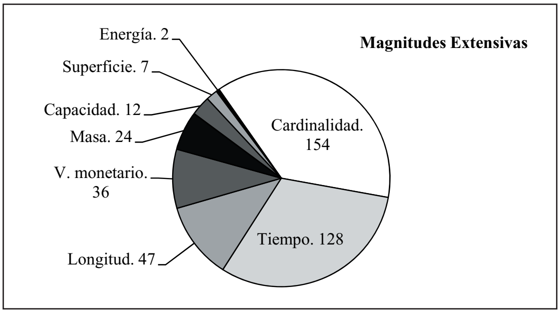


Gráfico 5. Número de cantidades de cada magnitud extensiva observadas ordenadas por frecuencia

En cuanto a las magnitudes intensivas, se observa claramente que aquellas expresadas como "horas/día" aparecen de manera mayoritaria. De hecho suponen el 78% de todas las cantidades de magnitud intensivas. Si comparamos esta presencia con la de las cantidades de magnitud extensivas anteriores, comprobamos que solamente existen 3 magnitudes extensivas con una presencia mayor: la cardinalidad, el tiempo y la longitud. Sin embargo, otras magnitudes intensivas conocidas y trabajadas en otros ámbitos, como la velocidad, tienen una aparición anecdótica. La velocidad de desplazamiento (longitud por unidad de tiempo) aparece una única vez, y otro tipo de velocidades tienen una frecuencia similar. En concreto, aparece en dos ocasiones la velocidad de lectura (número de hojas leídas por unidad de tiempo) y el caudal de un grifo (volumen de líquido emanado por unidad de tiempo).

La presencia de las magnitudes discretas y continuas está muy repartida, siendo algo menor (aproximadamente un 40%) la de las magnitudes discretas (esencialmente cardinalidad y valor monetario[3] ya que el resto de magnitudes extensivas son continuas y entre las intensivas casi no aparecen).

4.4. *Resultados referidos al objetivo 4*

Al analizar la presencia de magnitudes extensivas en los diferentes tipos de problemas según su estructura, encontramos que en todos los problemas analizados se trabaja alguna magnitud extensiva. Es decir, no hay problemas de ninguno de los tipos en los que las tres magnitudes que aparecen sean intensivas.

Esta situación no se mantiene al analizar la presencia de magnitudes intensivas. El comportamiento no es homogéneo entre los tres tipos de problemas (ver Gráfico 6):

- En 13 de los 75 problemas de tipo T1 (un 19%) se trata alguna magnitud intensiva;
- En 14 de los 58 problemas de tipo T2 (un 25%) se trata alguna magnitud intensiva;
- En todos los problemas de tipo T3 aparece alguna magnitud intensiva.

[3] Consideramos el valor monetario como una magnitud discreta siguiendo la opinión de González y Gómez (2011, p. 357) que lo presentan el valor monetario como ejemplo paradigmático de magnitud discreta.

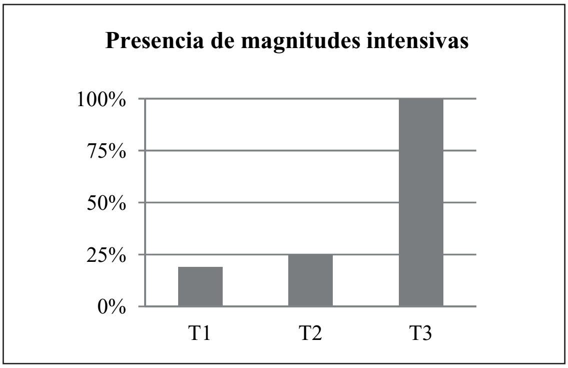


Gráfico 6. Porcentaje de problemas, según su tipo, en los que aparecen magnitudes intensivas

A pesar a la escasa presencia de las magnitudes intensivas en los textos analizados, llama la atención que todos los problemas de tipo T3 involucren al menos una magnitud de esta naturaleza, mientras que en más del 75% de los problemas de las otras tipologías se da una ausencia total de magnitudes intensivas.

5. Discusión de los resultados

Presentamos a continuación las principales conclusiones que resultan del análisis realizado. Se presentan en forma discursiva relacionando éstas con los resultados previos, siguiendo el orden de los objetivos de la investigación, y asociando implicaciones para la docencia.

Respecto a la tipología de los problemas, tras el análisis realizado, concluimos que el tratamiento dado por todos los textos analizados a los problemas de proporcionalidad compuesta es muy uniforme en cuanto al contexto, la estructura de problemas y el número de magnitudes involucradas. Se trata en su gran mayoría de problemas rutinarios, con contextos realistas, de valor perdido e involucran tres magnitudes. La aparición de otro tipo de problemas es anecdótica y marginal. Estos resultados coinciden en parte con los obtenidos para proporcionalidad aritmética en 1º de ESO por Pino y Blanco (2008). También estos resultados son coincidentes con los obtenidos por Conejo y Ortega (2013) para otros contenidos matemáticos (geometría y estadística) en otros niveles (3º y 4º de ESO) cuando señalan que la mayoría de problemas analizados durante su estudio eran aplicación inmediata de contenidos no implícitos en el enunciado y cuyos objetivos didácticos son mayoritariamente aprender las técnicas estándar en dominios particulares.

En nuestra investigación se descubre que la instrucción asociada a los enunciados propuestos en los textos analizados requiere que se centre en las técnicas que resuelven este tipo de problemas más que en los conceptos que involucran ya que no encontramos problemas no rutinarios u otro tipo de problemas, como los de comparación cualitativa, que pongan el énfasis en la comprensión del fenómeno de la proporcionalidad compuesta. En este punto, nos hacemos eco de la investigación de Fernández (2009) y, como él, proponemos la inclusión de problemas de comparación cualitativa en el currículo ya que la resolución de estos problemas requiere de los estudiantes la comprensión del fenómeno de la proporcionalidad en contraste con los problemas de valor perdido y de comparación cuantitativa en los que se prima el uso de habilidades memorísticas o mecanizadas para su resolución.

Si nos centramos en la estructura de los problemas de valor perdido con tres magnitudes, se ha encontrado que el tipo T3 recibe menor atención por parte de los autores en la elaboración de problemas, tanto por el número de textos en los que se trata, como por la frecuencia de problemas de tipo T3 que encontramos en los textos en los que se trabaja. Por tanto, parece haber una preferencia por la estructura cociente (de una magnitud entre el producto de otras dos), de la que derivan los tipos T1 y T2, que por la estructura producto de tres magnitudes, de la que deriva el tipo T3. Para plantear un problema VP con 3 magnitudes basta elegir una situación de proporcionalidad con una de las dos estructuras anteriores, dar valores para tres de las magnitudes y posteriormente dar valores para dos de ellas y pedir que se averigüe el tercero (ver Figura 2). Como consecuencia, se ha encontrado una mayor preferencia por las relaciones de proporcionalidad directa entre pares de magnitudes frente a las relaciones de proporcionalidad inversa.

30 ▼▼▼ En un taller de confección, con 6 máquinas tejedoras, se han fabricado 600 chaquetas en 10 días.

a) ¿Cuántas prendas se fabricarían con 5 máquinas en 15 días?

b) ¿Cuántas máquinas habría que poner en producción para fabricar 750 prendas en 15 días?

c) Si se trabajara solamente con 5 máquinas, ¿cuántos días se tardaría en fabricar 750 prendas?

Figura 2. Un problema de tipo T1 y dos de tipo T2 a partir de una misma estructura cociente (Colera y Gaztelu, 2012).

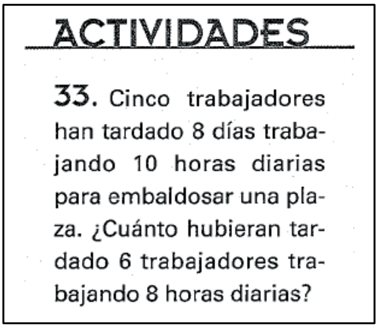
Este hecho está en clara relación con las dificultades para dotar de significado al producto de magnitudes. Según Freudenthal (1973), los procesos matemáticos que dotan de significado al producto de dos magnitudes son complicados y, por tanto, la dificultad es mayor aún mayor cuando se trata de dotar de significado al producto de 3 o 4 magnitudes. Como se refleja en la Tabla III, no aparecen problemas del tipo (0,3), pero sí los tipos (3,0), (2,1) y (1,2) en los que hay relaciones de proporcionalidad directa y se ha detectado una preferencia por esta proporcionalidad en detrimento de la inversa. Parece que los autores de los textos de alguna forma intuyeron estas dificultades señaladas por Freudenthal y optaron por proponer menos problemas de este tipo. De hecho, el número de problemas con cuatro magnitudes que se ha encontrado es muy pequeño. Para que el alumno pueda dotar de significado a estos productos de magnitudes, sería necesario que realizara un trabajo discusivo con magnitudes, trabajo que no se detecta en ninguno de los textos.

En el análisis se ha encontrado una escasa presencia de problemas resueltos de tipo T3, aun teniendo en cuenta el ya menor tratamiento de este tipo de problemas. Aunque, hay 8 textos en los que aparecen problemas de tipo T3, sólo dos incluyen un problema resuelto de tipo T3 y otros cinco textos los incluyen en los problemas finales del tema. En consecuencia, hay 6 textos en los que se plantean problemas de tipo T3 a resolver por los alumnos sin haber ejemplificado cómo resolver estos problemas previamente. Este fenómeno se da en mucha menor medida en los problemas de tipos T1 y T2, donde solo 2 textos proponen este tipo de problemas sin ejemplificación previa. También es destacable que no haya problemas introductorios de proporcionalidad compuesta al principio de la unidad didáctica de proporcionalidad en los textos estudiados y que puedan ser resueltos por los estudiantes antes de introducir los contenidos. Esta ausencia quizá sea achacable a que en aquellos textos en que presentan este tipo de problemas, éstos problemas se presentan al principio de la unidad y la proporcionalidad compuesta no es el único contenido que se trata en dicha unidad (también suele englobar proporcionalidad simple directa e inversa, interés simple, porcentajes, etc.). Conejo y Ortega (2013) señalan la importancia de este tipo de problemas ya que “proporcionan una motivación a los alumnos para estudiar ciertos contenidos y acerca las matemáticas escolares a lo que realmente son, una herramienta para resolver problemas” (p. 34). Estas observaciones implican la conveniencia de incluir en la docencia, justamente por su mayor dificultad, problemas resueltos del tipo T3 y dar mayor importancia a los problemas de proporcionalidad inversa.

Se ha descubierto la escasa variedad de magnitudes tratadas en los textos. Las extensivas se centran en la cardinalidad y el tiempo. También se tratan el valor monetario y la longitud, pero en mucha menor medida. La escasa variedad de las magnitudes intensivas es todavía más acusada, y la gran mayoría de cantidades de estas magnitudes detectadas viene expresada en "horas/días". En general, y salvo las mencionadas tiempo y longitud, se trabajan muy poco las magnitudes físicas (masa, capacidad, área, energía, velocidad, densidad…). Una mayor presencia de estas magnitudes físicas sería adecuada para comprobar que la proporcionalidad compuesta es un conjunto de contenidos que permiten la resolución de problemas matemáticos relacionados con otras áreas curriculares y, muy especialmente, con situaciones de contextualizadas (Díaz y Poblete, 2001).

Por otro lado, la poca variedad de magnitudes presentes en los contextos de los problemas puede llevar consigo un impedimento para la aparición de algunas estrategias informales que podrían poner en juego los alumnos cuando se enfrentan a ellos. Como hemos apuntado en la sección 2.2, algunos autores señalan la influencia de los tipos de magnitud presentes en el enunciado sobre las dificultades encontradas por los alumnos al resolver problemas. Así, Lamon (1993) distingue como categorías semánticas distintas a aquellos problemas de proporcionalidad simple directa en los que aparecen cantidades de magnitud bien compactadas (*well chunked*); esto es, aquellas cuyo cociente genera una nueva cantidad de magnitud que es intensiva y es bien conocida por los estudiantes (por ejemplo: longitud y tiempo, cuyo cociente genera la magnitud velocidad), frente a los problemas en los que las cantidades de magnitud presentes no lo cumplen (*associated sets*) (por ejemplo: pizzas y niños, generarían la magnitud "pizza por niño"). En consecuencia, es importante abundar en la presencia de unas y otras magnitudes, y ello implica el tratamiento multiplicativo de las magnitudes acompañando a las multiplicaciones de las cantidades.

En los textos analizados, se ha detectado una clara preferencia por la inclusión de magnitudes extensivas. Aproximadamente, aparecen siete magnitudes extensivas por cada una intensiva. Sin embargo, en el análisis conjunto entre el tipo de magnitud y el tipo de problema hemos puesto de manifiesto que en todos los problemas de tipo T3, al menos, aparece una magnitud intensiva (generalmente expresada en "horas/día"). Este fenómeno es justo el contrario del acaecido en los tipos T1 y T2, en los que el porcentaje de aparición de magnitudes intensivas es muy bajo. Estos hechos parecen estar íntimamente ligados a las dificultades para dar significado al producto de tres magnitudes y con la abundante aparición de cantidades de magnitud expresadas en "horas/día" dentro de las magnitudes intensivas. En efecto, la inclusión de este tipo de cantidades aporta un método que permite construir de forma sencilla un problema de proporcionalidad compuesta de tres magnitudes a partir de un problema de proporcionalidad simple en el que una de las magnitudes involucradas sea el tiempo (y también con otro tipo de magnitudes). El proceso consiste en descomponer la magnitud tiempo en el producto de dos magnitudes, una en la que se exprese el tiempo en días y otra en la que se exprese en "horas/día" de forma que el producto produzca una cantidad de magnitud expresada en horas. Así, el problema T3 de la Figura 3 se obtendría a partir de un enunciado de proporcionalidad inversa de tipo (0,1) como: *"Cinco trabajadores han tardado 80 horas para embaldosar una plaza. ¿Cuánto hubieran tardado 6 trabajadores?"* descomponiendo la cantidad de 80 horas en el producto de 8 días y 10 horas/día.


ACTIVIDADES

33. Cinco trabajadores han tardado 8 días trabajando 10 horas diarias para embaldosar una plaza. ¿Cuánto hubieran tardado 6 trabajadores trabajando 8 horas diarias?

Figura 3. Un problema T3 (Pancorbo, 2008, p. 133)

Consideramos como Nunes y otros (2003) que en la docencia de las magnitudes deben abundar los casos de magnitudes intensivas y extensivas, pero el hecho de que en los textos el número de las primeras es muy inferior a las segundas, es muy importante que los docentes puedan disponer de un método para crear enunciados de problemas del tipo T3. Por otra parte, las dificultades que tienen los profesores para construir enunciados de problemas (Ortega et al., 2011) enfatizan la importancia de disponer de un método como el que aquí se ha descrito para tal fin.

Agradecimientos

Este artículo surge del trabajo desarrollado por el grupo de investigación "S119-Investigación en Educación Matemática" financiado por el Plan Autonómico de Investigación del Gobierno de Aragón y el Fondo Social Europeo.

Referencias bibliográficas

Almodóvar, J. A., Corbalán, F., García, P., Gil, J. y Nortes, A. (1999). *Matemáticas Órbita 2000 2º ESO*. Madrid, España: Santillana.

Arias, J. M y Maza, I. (2012). *Matemáticas ESO 2*. Madrid, España: Bruño.

Becerra, M. V., Martínez, R., Pancorbo, L. y Rodríguez, R. (1996). *Matemáticas 2*. Aravaca, España: McGraw-Hill.

Calvino, S. y Sánchez, A. (1999). *Matemáticas 2*. León, España: Evergráficas.

Carrasco, M. A., Martín, R. y Ocaña, J.M. (2011). *Mate_02*. Zaragoza, España: Edelvives.

Cólera, J. y Gaztelu, I. (2012). *Matemáticas 2 Educación Secundaria*. Madrid, España: Anaya.

García, F. J. (2007). *Matemáticas 2º ESO*. Madrid, España: Editex.

Sánchez, J. L. y Vera, J. (2008). *Matemáticas Serie Cota 2º Secundaria*. Madrid, España: Oxford University Press.

Bardin, L. (1986). *El análisis de contenido*. Madrid, España: Akal.

Blanco, L. J. (1993). *Consideraciones elementales sobre la resolución de problemas*. Badajoz, España: Univérsitas editorial.

Bosch, M. (1994). *La dimensión ostensiva en la actividad matemática: El caso de la proporcionalidad.* (Tesis Doctoral no publicada). Universitat Autónoma de Barcelona, Barcelona, España.

Boyer, T. W., Levine, S. C., & Huttenlocher, J. (2008). Development of proportional reasoning: Where young children go wrong. *Developmental Psychology*, *44*(5), 1478-1490. doi: 10.1037/a0013110

Bujanda, M. P. y Mansilla, S. (2000). *Matemáticas Números 2º Secundaria*. Madrid, España: Ediciones SM.

Castiello, J.M. (2002). *Los desafíos de la educación intercultural: migraciones y currículum.* (Tesis Doctoral no publicada). Universidad de Oviedo, Oviedo, España.

Conejo, L. y Ortega, T. (2013). Clasificación de los problemas propuestos en aulas de Educación Secundaria Obligatoria. *Educación Matemática*, *25*(3), 7-38.

Cramer, K. & Post, T. (1993). Connecting Research to Teaching Proportional Reasoning. *Mathematics Teacher, 86*(5), 404-407.

Díaz, M. V. y Poblete, A. (2001). Contextualizando tipos de problemas matemáticos en el aula. *Números*, *45*, 33-41.

Fernández, A. (2009). *Razón y proporción: Un estudio en la escuela primaria.* Valencia, España: Publicacions de la Universitat de València.

Fernández, C. y Llinares, S. (2011). De la estructura aditiva a la multiplicativa: efecto de dos variables en el desarrollo del razonamiento proporcional. *Infancia y Aprendizaje, 34:1*, 67-80. doi: 10.1174/021037011794390111

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task*. Dordrecht, Holanda: D. Reidel Publishing Company.

Gairín, J. M. y Oller, A.M. (2011). Proporcionalidad aritmética en Secundaria. Ideas para una propuesta didáctica. En J. L. Lupiáñez, M. C. Cañadas, M. Molina, M. Palare y A. Maz (Eds.), *Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de la Matemática y Educación Matemática - 2011* (pp. 179-189). Granada, España: Dpto. Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada.

García, F., Pérez, S. A. y Uriondo, J. L. (1996). *Matemáticas 2º de Secundaria*. Madrid, España: Alhambra Longman.

Goetz, J. P. y Lecompte, M. D. (1988). *Etnografía y diseño cualitativo en investigación educativa*. Madrid, España: Morata.

Gómez, B. (2006). Los ritos en la enseñanza de la regla de tres. En A. Maz, M. Torralbo y L. Rico (Coords.), *José Mariano Vallejo, el matemático ilustrado. Una mirada desde la Educación Matemática* (pp. 49-69). Córdoba, España: Publicaciones Universidad de Córdoba.

Gómez, B. (2011). El análisis de manuales y la identificación de problemas de investigación en Didáctica de las Matemáticas. *PNA*, *5*(2), 49-65.

González, M. J. y Gómez, P. (2011). Magnitudes y medida. Medidas directas. En I. Segovia y L. Rico (Coords.), *Matemáticas para maestros* (pp. 351-374). Madrid, España: Pirámide.

González, M. T. y Sierra, M. (2004). Metodología de análisis de libros de texto de matemáticas. Los puntos críticos en la enseñanza secundaria en España durante el siglo XX. *Enseñanza de las Ciencias*, *22*(3), 389-408.

Guacaneme, E. A. (2002). Una mirada al tratamiento de la proporcionalidad en textos escolares de matemáticas. *Revista EMA*, 7(1), 3-42.

Krippendorff, K. (1990). *Metodología de análisis de contenido. Teoría y práctica*. Barcelona, España: Paidós.

Lamon, S. J. (1993). Ratio and Proportion: Connecting Content and Children's Thinking. *Journal for Research in Mathematics Education, 24*, 41-61. doi: 10.2307/749385

López, F. (2002). El análisis de contenido como método de investigación. *XXI Revista de Educación*, *4*, 167-179.

Lundberg, A. (2011). Proportion in mathematics textbooks in upper secondary school. In M. Pytlak, T. Rowland, & E. Swoboda (Eds.), *Proceedings of the 7th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 336-345). Rzeszów, Polonia: University of Rzeszów.

Martínez, S., Muñoz, J. M. y Oller, A. (2014). Tratamiento de la proporcionalidad compuesta en cuatro libros de texto españoles. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 435-444). Salamanca, España: SEIEM.

Monterrubio, M. C. y Ortega, T. (2009). Creación de un modelo de valoración de textos matemáticos. Aplicaciones. En M. J. González, M. T. González y J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII* (pp. 37-53). Santander, España: SEIEM.

Mullis, I.V.S., Martin, M. O., Foy, P., & Arora, A. (2012). *TIMSS 2011 International results in mathematics*. Chestnut Hill, USA: Boston College.

NCTM - National Council of Teachers of Mathematics. (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. Reston, USA: NCTM.

Nunes, T., Desli, D. & Bell, D. (2003). The development of children's understanding of intensive quantities. *International Journal of Educational Research, 39*(7), 651–675. doi: 10.1016/j.ijer.2004.10.002

Occelli, M. y Valeiras, N. (2013). Los libros de texto de ciencias como objeto de investigación: Una revisión bibliográfica. *Enseñanza de las Ciencias*, *31*(2), 133-152. doi: 10.5565/rev/ec/v31n2.761

Oller, A. M. (2012). *Proporcionalidad aritmética: Una propuesta didáctica para alumnos de secundaria.* (Tesis Doctoral no publicada). Universidad de Valladolid, Valladolid, España.

Oller, A. M. y Gairín, J. M. (2013). La génesis histórica de los conceptos de razón y proporción y su posterior aritmetización. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *16*(3), 317-338. doi: 10.12802/relime.13.1632

Ortega, T., Pecharromán, C. y Sosa, P. (2011). La importancia de los enunciados de problemas matemáticos. *Educatio Siglo XXI*, *29*(2), 99-116.

Pancorbo, L. (2008). *Matemáticas Vector 2*. Barcelona, España: Vicens Vives.

Pino, J. y Blanco, L. J. (2008). Análisis de los problemas de los libros de texto de matemáticas para alumnos de 12 a 14 años de edad de España y de Chile en relación con los contenidos de proporcionalidad. *Publicaciones*, *38*, 63-88.

Puig, L. y Cerdán, F. (1988). *Problemas aritméticos escolares*. Madrid, España: Síntesis.

Rodríguez, J. (2006). La investigación sobre los libros de texto y materiales curriculares. *Primer seminario internacional de textos escolares.* Santiago de Chile, Chile: Mineduc.
Ruiz de Gauna, J., Dávila, P., Etxeberría, J. y Sarasua, J. (2013). Los libros de texto de Matemáticas del Bachillerato en el periodo 1970 - 2005. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *16*(2), 245-276. doi: 10.12802/relime.13.1624
Sánchez, E. A. (2013). Razones, proporciones y proporcionalidad en una situación de reparto: Una mirada desde la teoría antropológica de lo didáctico. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *16*(1), 65-97.
Schubring, G. (1987). On the methodology of analysing historical textbooks: Lacroix as textbook author. *Learning of Mathematics*, *7*(3), 41-51.
Schwartz, J. (1988). Intensive quantity and referent transforming arithmetic operations. En Hiebert, J., & Behr, M. (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (pp. 41–52). Hillsdale, NJ: Erlbaum.
Singer, J. A. & Resnick, L. B. (1992). Representation of Proportional Relationships: Are Children Part-part or Part-whole Reasoners? *Educational Studies in Mathematics, 9*, 55-73. doi: 10.1007/BF02309531
Spinillo, A. G. & Bryant, P. (1999). Proportional reasoning in young children: Part–part comparisons about continuous and discontinuous quantity. *Mathematical Cognition, 5*, 181–197. doi: 10.1080/135467999387298
Tournaire, F. & Pulos, S. (1985). Proportional reasoning: A review of the literature. *Educational Studies in Mathematics*. *16*(2), 181-204. doi: 10.1007/BF02400937
Uriondo, J. L. (2007). *Matemáticas Serie Trama 2º Secundaria*. Madrid, España: Oxford University Press.
Valverde, A. G. y Castro, E. (2009). Actuaciones de maestros en formación en la resolución de problemas de proporcionalidad directa. En M. J. González, M. T. González y J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII* (pp. 523-531). Santander, España: SEIEM.
Van Dooren, W., De Bock, D., Janssens, D., & Verschaffel, L. (2008). The linear imperative: An inventory and conceptual analysis of students' over-use of linearity. *Journal for Research in Mathematics Education, 39*(3), 311-342. Doi: 10.2307/30034972
Van Dormolen, J. (1986). Textual analysis. In B. Christiansen, A. G. Howson & M. Otte (Eds.), *Perspectives on Mathematics Education* (pp. 141-171). Dordrecht, Holanda: Reidel.
Vergnaud, G. (1983). Multiplicative structures. In R. Lesh & M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematics concepts and processes* (pp. 127-173). New York, USA: Academic Press.
Zapico, M. H. (2006). Interrogantes acerca de análisis de contenido y del discurso en los textos escolares. *Primer seminario internacional de textos escolares*. Santiago de Chile, Chile: Mineduc.

Autores

Sergio Martínez Juste. Departamento de Matemáticas, Universidad de Zaragoza, España. sergiomj@unizar.es

José María Muñoz Escolano. Departamento de Matemáticas, Universidad de Zaragoza, España. jmescola@unizar.es

Antonio M. Oller Marcén. Centro Universitario de la Defensa de Zaragoza, España. oller@unizar.es

Tomás Ortega del Rincón. Departamento de Didáctica de las Ciencias Experimentales, Sociales y de la Matemática, Universidad de Valladolid, España. ortega@am.uva.es

La Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (*Relime*) es la publicación oficial de investigación del Comité Latinoamericano de Matemática Educativa (Clame AC). Se edita tres veces por año. Acepta artículos en español, portugués, inglés y francés. Está dirigida a investigadores en Matemática Educativa, a profesores de matemáticas y ciencias, y estudiantes de licenciatura y posgrado interesados en conocer los resultados recientes de las investigaciones y en profundizar en el conocimiento de un tema en particular.

Objetivos:

1. *Relime* pretende ser un foro abierto a las diversas escuelas del pensamiento (paradigmas, teorías, metodologías, métodos, enfoques) en nuestra disciplina, la Matemática Educativa, sin definir perspectivas únicas y con un profundo respeto a las tradiciones educativas y los contextos de los diversos sistemas educativos de nuestra región.
2. Dar a conocer resultados de investigación original en Matemática Educativa que se realizan en América Latina y el Caribe y en el resto del mundo.
3. Contribuir al proceso de profesionalización de la Matemática Educativa en nuestra región.
4. Fomentar una cultura de divulgación e investigación entre los distintos grupos de investigación en nuestra región.
5. Propiciar el debate y la reflexión profunda sobre problemas de investigación que fortalezca la disciplina en nuestra área geográfica.
6. Fortalecer la calidad de la investigación en Matemática Educativa y la vinculación entre comunidades nacionales e internacionales.

INSTRUCCIONES TÉCNICAS PARA AUTORES

LAS CONTRIBUCIONES

Toda contribución propuesta a Relime se somete a un estricto proceso de arbitraje. Las contribuciones deberán ser resultado de investigaciones teóricas o experimentales, estudios de caso, etnográficos, etc., en formato de artículo. Estas contribuciones deberán ser trabajos inéditos de investigación, no estar en arbitraje en otra revista ni tratarse de traducciones previamente publicadas en su lengua original.

CARACTERÍSTICAS DE LOS MANUSCRITOS

Relime publica artículos en castellano, portugués, inglés y francés. Acepta ensayos teóricos originales así como propuestas que sean resultado de estudios experimentales, de casos, de observación, etnográficos, etc.

Los artículos deberán tener un máximo de nueve mil palabras, incluyendo referencias, figuras, cuadros y anexos. En caso de que su propuesta exceda esta extensión, el Comité de Redacción decide si considera la posibilidad de publicarlo siempre que tal propuesta no ocupe todo el espacio disponible en un número de la revista.

En el caso de reportes de estudios experimentales, de casos, de observación, etnográficos, etcétera, recomendamos que los escritos contengan:

1) Resumen del trabajo, deberá tener un máximo de 10 renglones escrito en español, portugués, inglés y francés y de 5 palabras clave en las cuatro lenguas. Resumen, título y palabras clave deben ser escritos en los cuatro idiomas.
2) Una exposición del problema de investigación (su pertinencia y relevancia en el tema que se aborda).
3) Indicaciones globales acerca de la estructura teórica del reporte.
4) Justificación de la metodología usada.
5) Desarrollo de algunos ejemplos y análisis de resultados.
6) Referencias bibliográficas.

Si se trata de ensayos teóricos y filosóficos, nuestra recomendación es la siguiente:

1) Iniciar con una exposición del problema de investigación (su pertinencia y relevancia en el tema que se aborda).
2) Revisión de la literatura que incluya trabajos importantes que sustenten la investigación, en el que se refleje una variedad de resultados actuales. Esta revisión debe incluir investigaciones internacionales pertinentes y no limitarse a estudios de un solo país.
3) Ofrecer indicaciones sobre la estructura teórica o filosófica en la cual se desarrolla el tema del artículo.
4) Exposición detallada de la posición del autor dentro del tema o los temas de exposición. Esto debe reflejarse a través del desarrollo de ideas, más que de una lista de reflexiones.

5) Implicaciones o consecuencias de la investigación en el área.
6) Referencias bibliográficas.

PROCESO DE EVALUACIÓN EN RELIME

Los artículos propuestos a Relime serán leídos por dos miembros del Comité de Redacción, y si el contenido atiende a la originalidad y satisface los criterios anteriores, así como a la claridad de la presentación e interés para la comunidad de matemática educativa, serán evaluados en forma "ciega" por dos investigadores reconocidos y con experiencia dentro del área. En el proceso de evaluación se garantizará el anonimato de autores y evaluadores.

El resultado del dictamen puede ser:

A. Sugerencia de publicar el artículo sin modificaciones.
B. Sugerencia de publicar el artículo bajo reserva de hacer ligeras modificaciones.
C. Sugerencia de reestructurar el artículo atendiendo a los comentarios, lo que precisaría una nueva revisión.
D. Sugerencia de rechazo del artículo.

FORMATO DE LAS CONTRIBUCIONES

Todas las contribuciones deberán estar escritas en procesador de texto Word 6.0 o superior, tipo de letra Times New Roman, tamaño 11 y utilizar un espacio anterior y posterior de 4 pt, lo que significa que no se requiere dar espacio entre un párrafo y otro. Los cuatro márgenes de la página deberán ser de 2.5 cm. Para las expresiones matemáticas debe usarse el editor de ecuaciones.

ENCABEZADOS PRINCIPALES

El estilo de letra para los encabezados principales es tipo VERSALES en formato minúsculas, utilizando un espacio anterior de 36pt y el posterior de 12pt, lo que significa que no se requiere dar espacio entre un encabezado y los párrafos subsecuentes. Enumerar las secciones de los encabezados principales (usando 1, 2, 3, etc.) y utilizar el estilo de alineación centrada.

Subtítulos

El estilo de letra para los subtítulos del artículo es tipo Times New Roman, tamaño 11 y cursiva. La primera letra debe escribirse con mayúsculas. Utilizar un espacio anterior de 24 pt y el posterior de 10 pt, lo que significa que no se requiere dar espacio entre un subtítulo y los párrafos subsecuentes. Los subtítulos deberán enumerarse 1.1., 1.2, 1.3, etc., según corresponda en estilo tipo Normal. Los subtítulos posteriores a un encabezado principal deben tener un espacio anterior y posterior de 6 pts.

Estilo para las tablas

Las tablas deben tener una alineación centrada. El estilo de letra del texto en el interior de la tabla debe ser tipo Times New Roman, Normal, tamaño 10 y con un espacio anterior y posterior de 2 pto. Enumerar las tablas, usando tipo de letra VERSALES tamaño 10, en formato minúscula: TABLA I, TABLA II, TABLA III, etc., utilizando un espacio anterior de 6 pto y posterior de 0 pto. El número de la tabla debe escribirse en la parte superior y su título debajo, utilizando un estilo de alineación centrada y tipo de letra normal tamaño 10.

Estilo para las figuras e imágenes

Las figuras e imágenes deben tener una alineación centrada. El estilo de letra debe ser tipo Times New Roman, tamaño 10 y tipo Cursiva y Normal. Escribir el número de la figura o imagen en formato tipo cursiva y el título en formato tipo normal. Utilizar un espacio anterior de 2 pt y el posterior de 4 pt. Las imágenes y figuras deberán adjuntarse en un archivo independiente al manuscrito en formato de alta resolución.

Transcripciones

Para las transcripciones usar el estilo de letra normal, tipo Times New Roman tamaño 10. Utilizar un interlineado sencillo.

Usar estilos de transcripción como los siguientes:

Estudiante: Para graficar utilicé uno de los métodos que vimos en clase. Me pareció que era el más simple para resolverlo

Profesor: ¿Por qué consideras que ese método es más simple?

Si las líneas de la transcripción requieren ser numerados, entonces usar el estilo de transcripción enumerada como sigue:

[122] Entrevistador: En la primera actividad se te propuso determinar la función velocidad ¿Podrías explicar cómo la hallaste?

[123] Alumno: Hum... pues...

En el caso de que no se requiera hacer referencia a los números, se sugiere usar el primer estilo de transcripción (indicada párrafos arriba).

Reconocimientos

Los reconocimientos a personas, fondos, asociaciones, etc. deberán colocarse en una sección separada antes de las referencias bibliográficas. Los nombres de organizaciones financieras deberán escribirse completos.

Bibliografía, referencias y notas

Solicitamos emplear el estilo de la APA (Publication Manual of the American Psychological Association, 6th ed., 2009) para las citas de pie, notas, referencias textuales y bibliografía. (Pueden apoyarse en el siguiente link: http://www.apastyle.org/learn/tutorials/basics-tutorial.aspx; o bien, consultar el Manual).

La bibliografía deberá escribirse en forma de lista sin enumerar y en orden cronológico. El estilo de letra debe ser Times New Roman 9. Para escribir una referencia debe usarse alineación justificada para el primer renglón. A partir del segundo renglón deberán establecer una sangría especial de 0.63 cm.

Las notas deberán escribirse al final de cada página del documento. El estilo de letra que deberá usarse es Times New Roman 9 en formato normal.

Información complementaria

1) No se devolverán los artículos originales.
2) El editor se reserva el derecho de hacer algunas modificaciones necesarias para mantener el estilo de la publicación.
3) Los textos pueden ser publicados en otro órgano editorial previo permiso expreso, por escrito, y haciendo referencia explícita de la fuente.
4) Los autores recibirán gratuitamente dos ejemplares del número en que se haya publicado su artículo.
5) No se realizarán pagos a los autores por los artículos que se publiquen en *RELIME*. Para mayores informes, puede visitar la página web: http://www.clame.org.mx/relime.htm o bien el correo electrónico:

relime@clame.org.mx

Suscripción a Relime

Costo del volumen 20 (tres números)

Suscripción Institucional:
Volumen US$ 120
Cada número US$ 50

Suscripción Individual:
Volumen US$ 50
Cada número US$ 20

Suscripción Miembros Clame:
Volumen US$ 20
Cada número US$ 10

Estos costos NO aplican a *números especiales*,
NO incluyen gastos de envío, NI comisión bancaria por transferencias
o depósitos de cheques emitidos fuera de México

Las suscripciones deberán solicitarse al correo electrónico
suscripcion@relime.org

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa
Volumen 20, Número 1

Diseño y Web: Emilio Serna Hernández
Servicios Editoriales Recrea
(Miembro CANIEM - 3663)
sernandem@yahoo.com.mx

Se imprimió en los talleres de
Editorial Progreso S.A. de C.V.
Sabino # 275
Col. Santa María la Ribera
Delegación Cuauhtémoc
06400 México, D. F.

Marzo de 2017
Tiraje: 1000 ejemplares más sobrantes