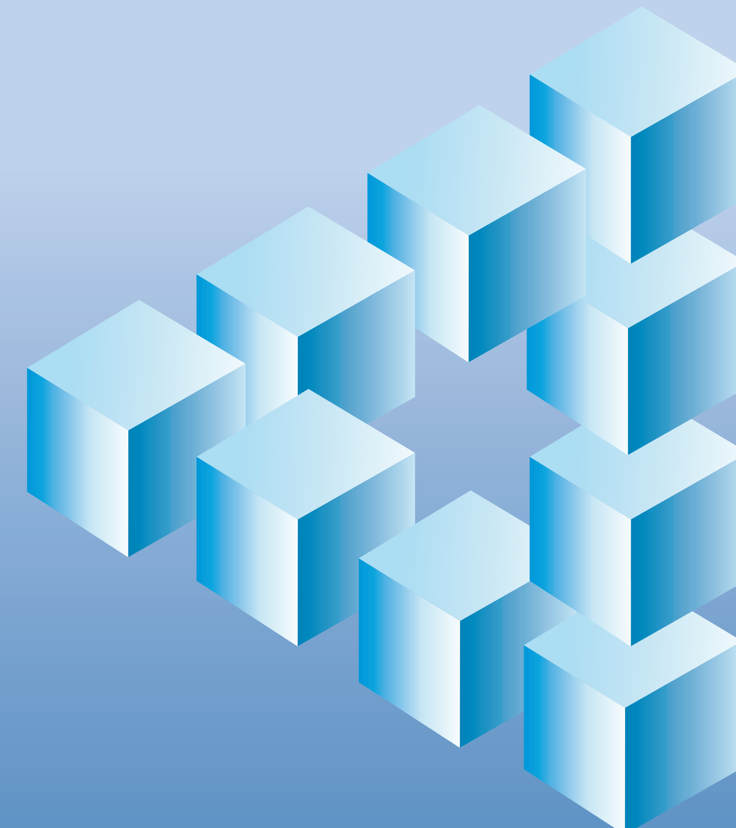
Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa

Relime



Vol. 19, Núm. 2, 2016

Clame Comité Latinoamericano de Matemática Educativa

Publicación oficial de investigación del Comité Latinoamericano de Matemática Educativa

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa

Vol. 19, Núm. 2, julio 2016

EDITORIAL

ARTÍCULOS

RELIME 19-2
01902
9 771665 243002

1665-2436

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa

Portada: «Opus 1» de Oscar Reutersvärd en 1934. Reproducida con permiso de los herederos del artista.

Publicación oficial de investigación del Comité Latinoamericano de Matemática Educativa, Clame A.C. Consejo Directivo: *Presidente:* Olga Lidia Pérez González – Cuba; *Secretario:* Hugo Parra Sandoval – Venezuela; *Tesorera:* Daniela Reyes Gasperini – Argentina; *Vocal Norteamérica:* Rebeca Flores García – México; *Vocal Caribe:* Juan Mazueta Concepción – República Dominicana; *Vocal Centroamérica:* Luis Moreno Chandler – Panamá*; Vocal Sudamérica:* Marcela Parraguez González – Chile.

Publicación cuatrimestral. Se publica en los meses de marzo, julio y noviembre. Vol. 19, Núm. 2, julio, 2016. Tiraje 1000 ejemplares. Suscripciones: suscripcion@relime.org. Contribuciones e información: relime@clame.org.mx, http://www.clame.org.mx.

Relime es una revista indizada en:
ISI Web of Knowledge, SSCI – Social Sciences Citation Index y Journal Citation Reports • ERIH – European Reference Index for the Humanities • Conacyt – Índice de Revistas Mexicanas de Investigación Científica y Tecnológica • Scopus – Elsevier Database • ZDM – Zentralblatt für Didaktik der Mathematik • IBZ – International Bibliography of Periodical Literature in the Humanities and Social Sciences • Clase – Citas Latinoamericanas en Ciencias Sociales y Humanidades • Iresie – Índice de Revistas de Educación Superior e Investigación Educativa • Latindex – Sistema Regional de Información en Línea para Revistas Científicas de América Latina, el Caribe, España y Portugal • Redalyc – Red de Revistas Científicas de América Latina y el Caribe, España y Portugal • EBSCO – Information Services • Dialnet • Scielo-México – Scientific Electronic Library Online • Thomson Gale – Gale Iberoamérica.

2016 Impreso en México

Volumen 19 – Número 2 – 2016

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa

Publicación oficial del Comité Latinoamericano de Matemática Educativa

ISSN 1665 – 2436.

Edición Colegio Mexicano de Matemática Educativa A.C. – México,
RFC CMM 040505 IC7.
Impreso en México

2016

Volumen 19 Número 2 Julio de 2016

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa

EDITORIAL

ARTÍCULOS

REVISTA LATINOAMERICANA DE INVESTIGACIÓN EN MATEMÁTICA EDUCATIVA, Vol. 19, No. 2, julio 2016, es una publicación cuatrimestral editada por el Colegio Mexicano de Matemática Educativa, A. C., a través del Comité Latinoamericano de Matemática Educativa, calle Av. Instituto Politécnico Nacional, 2508, Col. San Pedro Zacatenco, Delegación Gustavo A. Madero, C.P. 07360, Tel. (55) 57473819, www.clame.org.mx/relime.htm, relime@clame.org.mx. Editor responsable: Ricardo Cantoral. Reservas de Derechos al Uso Exclusivo No. 04-2013-042513070000-102, ISSN: 1665-2436, ambos otorgados por el Instituto Nacional del Derecho de Autor. Impresa por Editorial Progreso, S. A. de C. V., Sabino No. 275, Col. Sta. María la Ribera, C.P. 06400, Delegación Cuauhtémoc, México, D. F., este número se terminó de imprimir en julio de 2016, con un tiraje de 1,000 ejemplares más sobrantes.

“Relime se publica con el apoyo de Conacyt, Cinvestav y Clame”

EDITORIAL

RETOS Y LOGROS PARA LA COMUNIDAD DE MATEMÁTICA EDUCATIVA …

CHALLENGES AND ACHIEVEMENTS FOR COMMUNITY OF MATHEMATICS EDUCATION ...

RICARDO CANTORAL
Departamento de Matemática Educativa - Cinvestav, IPN – México

La *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* – Relime, es una publicación científica en el campo de su especialidad, recibe, evalúa y publica artículos con los más estrictos estándares de calidad académica y editorial, para lo que emplea una revisión internacional por pares a triple ciego. Desde su fundación, Relime se propuso dar visibilidad a la investigación desde y para Latinoamérica, con el fin de participar en el concurso mundial. Al día de hoy, la Revista se ha posicionado como la publicación científica número uno en el campo de su especialidad entre los países de tradición latina, tanto en Europa como en América Latina. Si observamos los dos índices de mayor reputación mundial, ISI Web of Science y SCOPUS, en ellos se muestra una clara y considerable tendencia de ascenso en sus últimos diez años de vida.

Ahora toca dar lo que llamaré un doble viraje con trascendencia estratégica: por un lado, mudarse al mundo global (Open Access en plataformas multilingües) conservando nuestra identidad y, por otra parte, formar redes de publicaciones hermanas para abrir el espacio de publicación a la ya muy numerosa comunidad de jóvenes doctores en Matemática Educativa quienes demandan espacios para la publicación, así como más y mejores puestos de trabajo. Estas dos acciones perfilan, con toda claridad, un futuro mejor para la investigación en nuestro campo en Iberoamérica y posicionan a Relime como un medio adecuado para impulsar esta política. Debemos decir, sin embargo, que seguiremos siempre abiertos a compartir con el resto del mundo nuestros hallazgos experimentales y las aportaciones teóricas fundamentales atendiendo a la diversidad, que nos ha caracterizado desde nuestra fundación.

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (2016) *19* (2): 133-134.
DOI: 10.12802/relime.13.1920

En este sentido, damos la bienvenida a la nueva (y joven) mesa directiva del *Comité Latinoamericano de Matemática Educativa* AC - Clame, organización profesional promotora de Relime y de otras grandes iniciativas. La esperanza de un verdadero cambio en el rumbo lo testifica la juventud y el talento de estos colegas. La nueva mesa directiva fue elegida y tomó posesión durante la realización de la trigésima *Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa* en las instalaciones del Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey (campus Monterrey).

En orden de posición, se conforma por

Presidencia: Dra. Olga Lidia Pérez González (Cuba)

Secretaría: Dr. Hugo Parra Sandoval (Venezuela)

Tesorería: Dra. Daniela Reyes Gasperini (Argentina)

Vocalía por Norteamérica: M. en C. Rebeca Flores García (México)

Vocalía por Centroamérica: M. en C. Luis Moreno Chandler (Panamá)

Vocalía por Sudamérica: Dra. Marcela Parraguez González (Chile)

Vocalía por el Caribe: M. en C. Juan Mazueta Concepción (República Dominicana)

Monterrey, Nuevo León
Durante la Relme 30
¡la nao va … ¡

J. Benito Búa Ares, Mª Teresa Fernández Blanco, Mª Jesús Salinas Portugal

COMPETENCIA MATEMÁTICA DE LOS ALUMNOS EN EL CONTEXTO DE UNA MODELIZACIÓN: ACEITE Y AGUA

Mathematical competence of students in the context of a modelling: Oil and water

RESUMEN

El presente artículo describe los resultados fundamentales de una investigación centrada en la modelización matemática y el uso del modelo obtenido en un contexto cercano a la realidad. Los alumnos obtienen un modelo, que toma la forma de una función, y lo aplican para contestar preguntas contextualizadas en un hipotético problema del mundo real, lo que aproxima la experiencia a las recomendaciones de la OECD y PISA sobre la resolución de problemas. En este trabajo se intenta comprobar el uso de competencias matemáticas de los alumnos asociadas al modelo obtenido.

PALABRAS CLAVE:

- *Modelización matemática*
- *Funciones*
- *Competencias*
- *Enseñanza Secundaria*

ABSTRACT

This article describes the results of a basic research focused on mathematical modelling and the use of the obtained model in the near reality context. Students obtained a model, a function, and apply it to answer questions located within a real world problem, which approximates the experience to the recommendations of the OECD/PISA problem solving. This work intended to assess the acquisition of math skills of students associated with the model obtained.

KEY WORDS:

- *Mathematical modelling*
- *Functions*
- *Competences*
- *Secondary Education*

RESUMO

Este artigo descreve os resultados de uma pesquisa básica focada em modelagem matemática e uso do modelo obtido no contexto próximo a realidade. Os estudantes ganham um modelo de trabalho e aplicá-lo a responder perguntas localizadas dentro de um problema do mundo real, que se aproxima a experiência para as recomendações da resolução de problemas PISA da OECD. Este trabalho procura avaliar a aquisição de habilidades matemáticas dos alunos associados ao modelo obtida.

PALAVRAS CHAVE:

- *Modelagem matemática*
- *Funções*
- *Competência*
- *Ensino Secundário*

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (2016) *19* (2): 135 - 163.
Recepción: Abril 16, 2014 / Aceptación: Agosto 6, 2015. DOI: 10.12802/relime.13.1921

RÉSUMÉ

Le présent article décrit les résultats fondamentaux d'une recherche centrée sur la modélisation mathématique et l'emploi du modèle obtenu dans un contexte proche de la réalité. Les élèves obtiennent un modèle, une fonction, et appliquer pour répondre à des questions concernant un problème du monde réel, ce qui approche l'expérience des recommandations de la OECD et PISA sur la résolution de problèmes. Cet article tente de évaluer l'acquisition de compétences mathématiques des élèves en rapport avec le modèle fonctionnel obtenu.

MOTS CLÉS:

- *Modélisation mathématique*
- *Fonctions*
- *Compétences*
- *Enseignement Secondaire*

1. Introducción

La modelización matemática es considerada como parte integrante de la resolución de problemas (Organisation for Economic Co-operation and Development, en adelante OECD, 2006; National Council of Teachers of Mathematics, 2000, en adelante NCTM) y, al mismo tiempo, una de las actividades propias del trabajo matemático. En ese sentido, la modelización matemática puede ser considerada como parte de la actividad matemática que un alumno debe aprender a desarrollar para alcanzar el fin último de una modelización (un modelo matemático) pero también como la forma adecuada de introducir conceptos o nociones o como una vía de que los conceptos y nociones emerjan de las necesidades que implica la generación del modelo matemático.

El objetivo fundamental de este trabajo es analizar si los alumnos son capaces de generar un modelo matemático (que toma la forma de una función) y aplicarlo en un hipotético contexto real. En la primera sección se describirá brevemente la forma en que la modelización se integra en el enfoque por competencias también desde la didáctica de la matemática, especialmente usando las praxeologías de Chevallard (1999). Las siguientes secciones se ocupan de detallar las diferentes fases de la experiencia realizada y, por último, se exponen las conclusiones fundamentales obtenidas del análisis de los resultados.

2. La modelización matemática en el contexto de las competencias

Al hablar de modelización matemática es común realizar una distinción entre *modelo* y *modelización*, de la misma forma que se realiza la distinción entre proceso y producto. Así, el término *modelización* se refiere al proceso mientras que *modelo* se refiere al resultado o al producto de ese proceso, en forma de representación física, simbólica o abstracta. Blum & Niss (1991) definen un modelo matemático como:

> Un modelo consiste en ciertos objetos matemáticos, correspondientes a "elementos básicos" de la situación original o el modelo real, y de ciertas relaciones entre estos objetos, que corresponden con relaciones entre los "elementos básicos". Para ser un poco más precisos, un modelo matemático puede ser visto como un triple (S, M, R), consistente en una situación problemática real S, una colección de entidades matemáticas M y una relación R entre los objetos y relaciones de S y los objetos y las relaciones de M (p. 39).

Otros autores son menos explícitos al definir lo que es un modelo (Barbosa, 2003; Blomhøj, 2004), aunque, como apunta Schmidt (2010), la concreción en la definición depende de los objetivos que se le atribuyen a la modelización:

> Modelización matemática en general se refiere al uso de las matemáticas para resolver problemas reales y abiertos. Al mismo tiempo, la definición exacta varía en función de los objetivos, qué modelo en el proceso de modelado se está utilizando y la naturaleza del contexto asignado a la tarea de modelización (p. 2067).

En resumen, la modelización se refiere al proceso, representado usualmente mediante esquemas descriptivos, que relacionan una situación real con las matemáticas. Mediante dicho proceso se obtiene un modelo matemático que representa una solución a la situación problemática real planteada. Las diferentes perspectivas conceden mayor o menor importancia a algún o algunos de los procesos que se pueden establecer en las relaciones entre los elementos presentes en la modelización. Así, cada esquema propuesto configura un modelo en el proceso de modelado y como consecuencia, los fines pretendidos en la modelización dan lugar a perspectivas diferentes. Kaiser & Sriraman (2006, p. 304) distinguen cinco perspectivas diferentes: Modelización realista o aplicada, modelización contextual, modelización educacional (con dos vertientes: didáctica y conceptual), modelización socio-crítica y modelización epistemológica o teórica.

El informe PISA (Programme for International Student Assessment), define la competencia matemática de la siguiente forma:

> Competencia matemática es una capacidad del individuo para identificar y entender la función que desempeñan las matemáticas en el mundo, emitir juicios fundados y utilizar y relacionarse con las matemáticas de forma que se puedan satisfacer las necesidades de la vida de los individuos como ciudadanos constructivos, comprometidos y reflexivos (OECD, 2006, p. 74).

En dicho informe se identifica competencia con capacidad, centrando esas capacidades en la resolución de problemas. El término mundo hace referencia al "(...) marco natural, social y cultural en que vive el individuo" (OECD, 2006, p. 75). Respecto al uso de las matemáticas y la relación del alumno con las matemáticas, el informe pretende que el alumno use las matemáticas y las aplique a la resolución de problemas, de forma que establezca una relación personal con las matemáticas para que lleguen a ser apreciadas hasta convertirlas en un elemento de disfrute.

La definición que aporta PISA a competencia matemática se encuentra vinculada a un uso funcional de las matemáticas, asociado a su aplicabilidad en situaciones diversas:

> El término «competencia matemática» se ha elegido con el fin de hacer hincapié en el carácter funcional del conocimiento matemático y en la posibilidad de aplicarlo de forma variada, reflexiva y perspicaz a una multiplicidad de situaciones de los más diversos tipos (OECD, 2006, p. 74).

Desde nuestro punto de vista, la importancia concedida a la funcionalidad asociada a la aplicabilidad permite que las competencias PISA puedan ser identificadas con una visión que prima el conocimiento matemático destinado a una finalidad, que, en el marco general, se puede relacionar con la obtención de un resultado a un problema contextualizado en el mundo real.

Para realizar la evaluación, PISA supone que el alumno ante un problema seguirá el siguiente esquema de cinco pasos (OECD, 2006, pp. 76-78) que caracteriza la forma en que un matemático desarrolla su labor y que PISA denomina de 'matematización':

- En el primer paso, el proceso de matematización se inicia con un problema presente en la realidad y consiste en identificar el problema real como un problema matemático.
- En el segundo paso, la persona que desea resolver el problema trata de identificar las matemáticas pertinentes al caso y reorganiza el problema según los conceptos matemáticos que han sido identificados.
- El tercer paso implica una progresiva abstracción de la realidad.
- El cuarto paso consiste en resolver el problema matemático.
- El quinto paso supone responder a la pregunta: ¿qué significado adquiere la solución estrictamente matemática al transponerla al mundo real?

En esa misma línea, PISA sostiene que un ciudadano debe percibir que las matemáticas cumplen una función que satisfaga las necesidades de la vida de los individuos, y supone que la generación de conocimiento matemático y su uso sigue un esquema conocido y reproducible, lo que hace de la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas un proceso controlable por el profesor. Por tanto, considera las matemáticas como un saber encaminado a su aplicación para resolver problemas contextualizados, preferentemente en el mundo real, olvidándose en gran medida de problemas que no representen un uso pragmático de las matemáticas en una situación concreta e identificable con el mundo que rodea al alumno.

En nuestro caso, la competencia no se reduce a la competencia matemática que PISA propone sino que es tomada en un sentido más amplio. La competencia debe incluir no solo el *saber-hacer* que predomina en las competencias de PISA (Gascón, 2011) sino que busca indagar, de forma limitada en lo que aquí exponemos, en el *saber*. De esa forma, *saber* y *saber hacer* son dos componentes complementarias del conocimiento matemático y deben ser consideradas partes íntimamente ligadas, formando una praxeología (praxis+logos). La enseñanza /aprendizaje de las matemáticas debe estructurarse en torno a praxeologías (Chevallard, 1999), identificándose la praxis con *saber-hacer* y el logos con *saber*. La praxis constituye un bloque práctico y técnico mientras que el logos constituye un bloque tecnológico y teórico. La praxis englobaría el tipo o tipos de problemas, las cuestiones que se pretenden estudiar y las técnicas que se usan. El logos engloba la descripción, explicación y justificación de las técnicas que se usan, que recibe el nombre de *tecnología*, y la fundamentación de la tecnología, que recibe el nombre de *teoría*. Así, alrededor de una tarea problemática, T, se encuentra al menos una técnica, τ, una tecnología de τ, ϕ, y una teoría de ϕ, θ. El total, indicado por $[T/\tau/\phi/\theta]$, constituye la *praxeología.* Desde nuestro punto de vista, PISA considera una tarea o problema T como una terna $[T/\tau/\phi]$, reduciendo en la práctica una praxeología al bloque práctico-técnico, $[T/\tau]$, de forma que el bloque tecnológico-teórico $[\phi/\theta]$ se presupone integrado en el bloque anterior.

La NCTM (2000) y sus Principios y Estándares para la Educación Matemática ya concedían importancia a la modelización integrada como parte de la resolución de problemas. El informe PISA, al especificar qué capacidades, asociadas al proceso de matematización, debe desarrollar el alumno, incluye la construcción de modelos (OECD, 2006, pp. 101-102): pensamiento y razonamiento, argumentación, comunicación, construcción de modelos, planteamiento y solución de problemas, representación, utilización de operaciones y lenguaje técnico, formal y simbólico, empleo de material y herramientas de apoyo.

PISA sigue, aproximadamente, el esquema aceptado como propio de un proceso de modelización y conocido usualmente como Ciclo de modelización. Los cinco pasos que un alumno seguirá ante un problema, descritos en un párrafo anterior, se observan en el Ciclo de Blum & Borromeo (2009) (Figura 1). Podríamos decir que la modelización se integra en el ámbito más general de la resolución de problemas contextualizados en el mundo real al tratarse de un problema planteado en el resto del mundo (relacionado en el ciclo con el mundo de las matemáticas) y que suscita preguntas que deben ser respondidas, usando las competencias matemáticas como herramienta o útil que proporciona respuestas. De esa forma, las matemáticas -y la modelización matemática como caso particular- proporcionan respuestas a problemas planteados en un contexto auténtico, lo que permite que el problema sea "solucionado de forma auténtica mediante el recurso de las matemáticas." (OECD, 2006, p. 85). La solución auténtica del problema supone que el alumno ha obtenido la solución mediante el desarrollo adecuado de sus competencias matemáticas, algo solo posible desde el aprendizaje significativo del conocimiento matemático.

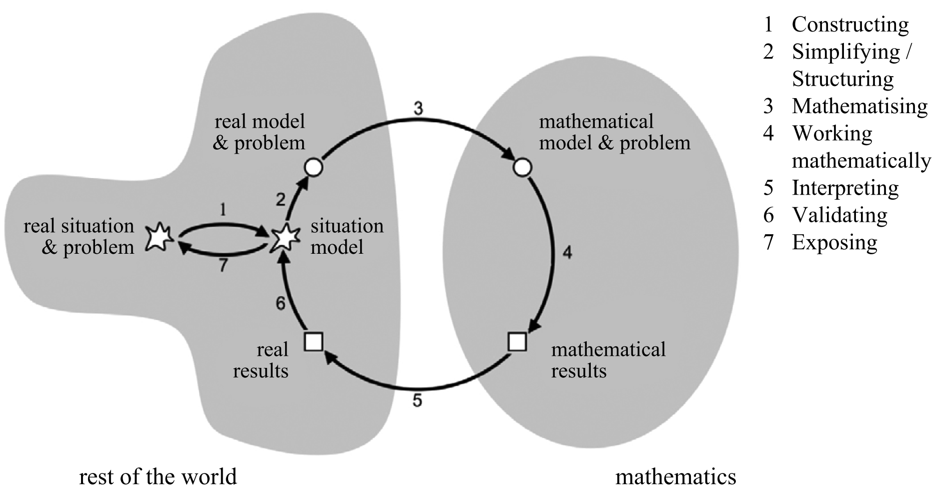


Figura 1. Ciclo de Blum y Borromeo (2009, p. 46)

Respecto a la enseñanza de las Matemáticas en España, la mención sobre la inclusión de actividades de modelización no aparece de forma expresa ni en el curriculum de Enseñanza Secundaria Obligatoria ni en el Bachillerato (Real Decreto 1631/2006, Real Decreto 1467/2007, Orden ESD/1729/2008) aunque aparecen menciones a la modelización en la descripción de las competencias matemáticas que los alumnos deben alcanzar, situando la modelización como una forma de "Abordar problemas de la vida real (…) de forma que el alumno combine "diferentes herramientas y estrategias (…) para enfrentarse a situaciones nuevas" (Orden ESD/1729/2008, p. 27606). En este marco, la modelización se plantea como un recurso, un útil que permite enfrentarse a una situación nueva o problema. El énfasis se sitúa, por tanto, en la modelización como herramienta que permite resolver un problema del mundo real, de forma que el alumno sea capaz de generar o *saber hacer* el modelo, que se convierte en el fin último y fundamental.

3. La actividad de modelización "Aceite y Agua"

El caso concreto de estudio gira alrededor de la problemática medioambiental generada a partir de un vertido contaminante en el mar. La tarea se plantea a los alumnos en los siguientes términos: Se ha producido un vertido de petróleo en el mar. ¿Cómo averiguar la cantidad de petróleo vertido? Se trata, por lo tanto, de un problema donde intervienen dos magnitudes, área y volumen, dependiente una de la otra, lo que lleva a una relación funcional entre ambas. Se toma como contexto el caso de un vertido medioambiental y se plantea la búsqueda de un modelo matemático que describa un proceso físico. Se pretende llevar a la práctica todas las fases que se ven implicadas en ciertos casos de modelización, donde las matemáticas juegan un papel útil. Los datos se tomarán de forma experimental con la finalidad de obtener una función que ajuste dichos datos.

3.1. *Metodología*

La actividad fue propuesta como una actividad voluntaria a alumnos de 1º de Bachillerato Científico-Tecnológico (1º Bachillerato Curso 2010-2011 y 1º Bachillerato Curso 2011-2012) y fuera del horario lectivo. En el año 2011 participaron 11 alumnos y en el año 2012 lo hicieron 12, de los cuales 8 realizaron la 3ª fase de la actividad. La experiencia fue grabada en audio y vídeo. Para referirnos a los alumnos en lo que sigue, denominamos a los alumnos participantes el año 2011 con la letra A seguida de un número y a los del año 2012 con la letra B seguida de un número. Así, los alumnos son nombrados como A1, A2, …, A11 y B1, B2, …, B12.

Como paso previo a la realización de la actividad, a los alumnos se les presentó una forma de obtener la expresión analítica de una función de ajuste a partir de una tabla de datos. Para hacerlo, se les explicó cómo usar el programa de Geometría Dinámica GeoGebra que permite la modificación de la gráfica de una función dependiente de parámetros mediante el uso de deslizadores.

La propuesta se desarrolló en cuatro fases aunque aquí sólo expondremos tres de ellas: la recogida de datos en el laboratorio, el volcado de datos y obtención de la función de ajuste en el ordenador y la realización de un cuestionario sobre la aplicación del modelo obtenido a un hipotético caso real. Para las dos primeras fases los alumnos fueron distribuidos en grupos de trabajo, en el año 2011 los alumnos formaron dos grupos, Grupo A (5 alumnos) y Grupo B (6 alumnos) y en el año 2012 tres grupos, Grupo C (5 alumnos), Grupo D (4 alumnos) y Grupo E (3 alumnos). A continuación describiremos las tres fases.

– *1ª Fase: Obtención de la tabla de datos.*

  Se les comunica a los alumnos que en esta fase van a estudiar cómo varía una mancha de aceite al añadir mayores cantidades de aceite a la mancha. Para ello deberán tomar el número de datos que estimen necesario utilizando el procedimiento que crean más conveniente.

  Se les indicó que trajesen de sus casas una tina de plástico y en el laboratorio se les suministró reglas, cintas métricas, un bote de aceite de oliva de uso doméstico, un bote con un poco de detergente líquido y jeringuillas de plástico (de 5 ml y 10 ml el 2011 y de 2.5 ml, 5 ml y 10 ml el año 2012). Llenaron la tina con agua, añadieron una pequeña cantidad de detergente líquido (para concentrar la mancha de aceite) y comenzaron a verter aceite con ayuda de las jeringuillas en cantidades variables pero siempre sobre una única mancha de aceite sobre el agua. La mancha adopta una forma circular, por lo que es posible medir fácilmente el diámetro que se obtiene para un determinado volumen de aceite. Así, la contextualización del problema en la realidad se realiza en sentido estricto: el aceite y el agua los observan y manipulan, los círculos sobre los que toman medidas son círculos que forma el aceite que ellos mismos vierten sobre el agua, las medidas de la tabla de datos son medidas obtenidas observando una marca sobre una regla, etc.

  En el proceso de estudio para conseguir generar el modelo supondremos que el comportamiento del aceite de uso alimentario es similar al petróleo, aceites o derivados. Por lo tanto, se le añadió una pequeña cantidad de detergente de uso doméstico para concentrar la mancha de producto y acotar el área contaminada de agua (barrera química). Se harán otras suposiciones menos exigentes que son comunes también en procesos de modelización: homogeneidad de la distribución de los contaminantes en el agua en el caso de un vertido, comportamiento similar de los contaminantes al aire libre y en agua salada que en el laboratorio y en agua dulce, etc.

Creemos que esta fase representa una de las grandes virtudes de la modelización propuesta ya que son los propios alumnos lo que generan los datos necesarios para realizarla. De esa forma, la modelización es *su* modelización en todos los sentidos y no una modelización parcial o incompleta al usar datos obtenidos por otro u otros de forma desconocida por los alumnos. Esta forma de trabajar se aleja de los problemas que los alumnos están acostumbrados a realizar, viéndose obligados a tomar decisiones y hacerse responsables de su actividad matemática.

– *2ª Fase: Volcado de datos y obtención de la función de ajuste*.

Inmediatamente después de que los alumnos diesen por terminada la primera fase, se trasladaron al aula de Informática del instituto. Se les indicó que debían representar los datos obtenidos en los ejes cartesianos y conseguir una función de ajuste para los puntos del plano representados. Cada grupo disponía de un ordenador y de una fotocopia que se les entregó y que contenía las gráficas de funciones fundamentales (afín, cuadrática, proporcionalidad inversa, raíz cuadrada, exponencial de base mayor y menor que 1, logarítmicas de base mayor y menor que 1, seno, coseno y tangente).

A continuación, los alumnos contestaron tres preguntas sobre la función obtenida (que toma la forma $f(x)=k\sqrt{x}$, $k \in R^{+}$). La primera sobre qué nombre debía recibir el número que acompaña a la raíz cuadrada, indicando en el enunciado que se trata de un número que es constante y variable al mismo tiempo. La segunda implica un cambio en la función: ¿Qué forma toma la función si cambiamos la variable ‘Diámetro’ por la variable ‘Radio’?. La tercera vuelve a representar un cambio: ¿Qué forma toma la función si cambiamos ‘Radio’ por ‘Área’?

– *3ª Fase: Aplicación del modelo obtenido a un hipotético caso real.*

En esta fase los alumnos tenían que contestar a un cuestionario de forma individual. Participaron 11 alumnos del curso 2010-2011 y 8 del curso 2011-2012. A los alumnos se les suministró una fotocopia en color y de tamaño DIN A3 de una parte de una carta náutica de la costa de Cambados a escala 1:30000 (Instituto Hidrográfico de la Marina, Carta 9250, 1963) (Figura 2) y un cuestionario que contenía una fotografía de la misma zona de la costa (Figura 3). En la fotocopia que contenía las preguntas se indicaba que la fotografía se correspondía con una imagen tomada vía satélite de un vertido en la costa (generada introduciendo la mancha de aceite en una imagen procedente de GoogleEarth). En la fotografía se distinguía claramente una mancha de color oscuro que se correspondía con el vertido. Se les indicó que ese día trajesen material de dibujo técnico (cartabón, escuadra, regla, compás) y una calculadora científica.

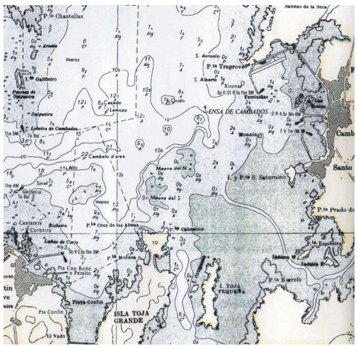


Figura 2. Detalle de carta náutica entregada a los alumnos

Figura 3. Hipotética imagen de vertido

3.2. *Desarrollo y análisis de la 1ª y 2ª Fase*

En estas dos fases la actividad o tarea se reduce a la obtención de un modelo sobre el comportamiento del aceite sobre agua. Así, la obtención del modelo, que tomará la forma de la expresión de una función que relaciona el volumen de aceite con el diámetro de la mancha de aceite sobre el agua, podría ser considerada el punto final u objetivo de la actividad. Si los alumnos *saben hacer* el modelo, éste consistirá en obtener la expresión analítica de la función, algo que se consigue en la segunda fase de la actividad. El resultado matemático permite, de forma directa, obtener el resultado real.

A continuación resumimos los aspectos más relevantes de estas dos fases de la modelización.

El tiempo que los alumnos dedicaron a obtener la tabla de datos no superó en ningún caso los 55 minutos, el año 2011 y los 36 minutos el año 2012, por lo que podemos calificar esta fase como de corta duración.

El ambiente de trabajo era relajado. No se observan pérdidas de tiempo significativas, todos los alumnos participan activamente, deciden de manera consensuada la distribución del trabajo y asumen que es importante realizar bien las mediciones.

El número de datos de los diferentes grupos varía considerablemente. El grupo A genera 23 datos, mientras otros se conforman con menos (16 el grupo B, 15 el grupo C, 13 el D y 9 el E). Durante la práctica, buscan regularidades en la tabla de datos que generan. Intentan comprobar que los datos siguen una ley de proporcionalidad directa. En la siguiente transcripción podemos observar ese proceso:

Alumno A3: Nueve con cuatro. Van de siete en siete centímetros, ¿verdad?
Alumno A6: No.
Alumno A3: ¿No?
Alumno A6: Ahora empezó […] Porque vamos de dos en dos. Si te fijas, la última medida de uno en uno de nueve a diez milímetros hay tres hay tres centímetros. […] Un milímetro sube tres centímetros.

Dos minutos después, vuelve a surgir la búsqueda de una relación de proporcionalidad directa:

Alumno A6: ¡Uah, chaval!, está yendo justo de tres en tres. […] No, no, pero justo, en serio.
Alumno A7: De nueve con cuatro a diez no van tres.
Alumno A6: Ehhh.
Alumno A7: Van seis.
Alumno A7: Porque de aquí a aquí hay dos milímetros de diferencia.

6 minutos antes de dar por concluida la toma de datos se produce un pequeño debate, en el que participan todos los alumnos del grupo A, alrededor de la falta de relación de proporcionalidad directa entre las variables, que el alumno A6 cree que debe deducirse de los datos que obtienen, y la postura de sus compañeros, que parecen asumir que no tiene por qué presentarse:

Alumno A6: ¡Mimá!, teneis que empezar a fijaros más, eh.
Alumno A3: ¿Por qué?
Alumno A6: Porque está variando un mucho esto. […] Hacedme caso, eh, mira.
Alumno A7: ¡Ay!, Alumno A6.
Alumno A3: Tranquilo Alumno A6.
(…)
Alumna A9: Es aceite, es impredecible.
(…)
Alumno A7: No sabes cómo se comporta la Naturaleza, Alumno A6.
Alumna A8: Sí, ¡que ese aceite va a ser muy natural!

La búsqueda de una relación entre variables que siga las características de la función afín se manifiesta en la hoja donde escriben los datos recopilados. Se observa que incluyen las diferencias entre datos consecutivos, en un intento de dar respuesta a cuánto aumenta el diámetro por mililitro de aceite añadido.

Así, la búsqueda del alumno A6 de la proporcionalidad entre variables y la inclusión de las diferencias entre datos consecutivos en la tabla de datos del grupo A, nos remite a la posible existencia de uno de los obstáculos epistemológicos ligados a la noción de función, el "obstáculo de la razón o proporción" (Ruiz Higueras, 1998). Al dar por terminada la fase de obtención de la función de ajuste, los alumnos debían indicar por escrito la razón o razones de cada grupo para decidirse por las funciones que usaron. El grupo C y el grupo D utilizan el crecimiento de la función buscada como justificación pero el grupo C parece ir más allá al referirse a que la proporcionalidad entre variables es diferente 'ml a ml' que de '5ml a 5ml'. Este hecho parece indicar que el obstáculo de la razón o proporción se halla en realidad más presente que lo que se podría deducir de las conversaciones que mantienen los alumnos. Siguiendo a Ruiz Higueras (1998), las concepciones del concepto de función con las que los alumnos se han familiarizado en su formación académica (identificación de ciertas regularidades en fenómenos sujetos al cambio: relación entre cantidades de magnitudes variables; razón o proporción; gráfica, en su visión sintética; curva analítico-geométrica; expresión analítica) aparecen, en principio, en las dos primeras fases de la actividad. Por lo tanto, nos hallaríamos ante un obstáculo epistemológico manifestado en la evolución histórica del concepto.

Al concluir la obtención de la tabla de valores o datos, los alumnos se trasladaron al aula de informática del Centro para volcar los datos en el ordenador y obtener la función de ajuste. Cada grupo usó un ordenador y, antes de que introdujesen los datos, se les recordó que disponían de dos archivos GeoGebra que contenían un conjunto de 20 puntos y 60 puntos del plano, todos ellos de la forma (x, x) como una forma de ahorrar tiempo al introducir los datos. También se les recordó cómo cambiar con rapidez los valores de las abscisas y ordenadas de los puntos (x, x) de los archivos. También se les explicó que podían usar la copia del documento, que mencionamos previamente y que contiene las gráficas de las familias de las funciones elementales. Se les indicó que el fin de esta fase era obtener la función de ajuste de los datos. La duración de todo el proceso no excedió los 15 minutos en ningún grupo. La mayor parte del tiempo la dedicaron al volcado de datos y ajuste de amplitud visible de los ejes. Se observa que utilizan las hojas que contienen las gráficas de las funciones elementales para decidir qué función es la apropiada e identifican inmediatamente que se trata de la raíz cuadrada. Esa situación es común a todos los grupos excepto el grupo B, que intenta ajustar en primer lugar los datos con una función del tipo $f(x) = k \cdot x^{\frac{p}{q}}$, decidiendo más tarde que la función es la raíz cuadrada.

En el grupo C, y una vez que ya obtuvieron la función de ajuste, se produce un debate muy corto a raíz de las dudas expresadas por el alumno B4 de que podría tratarse de una logarítmica:

Alumno B4: ¿Y si no es esa?
Alumno B6: Sí que es, ¡oh!
Alumno B4: ¿Y si es la logarítmica? Mira la logarítmica.
Alumna B1: ¿No ves que coincide casi perfecta? [Se trata de la alumna que introduce los datos en el ordenador y le señala la gráfica que han obtenido].
Alumno B6: ¿Cuál es la logarítmica? [El alumno B4 le enseña las copias con las gráficas de las funciones].
Alumna B1: Hombre, si quieres probamos, ¡eh!
Alumno B6: ¡Hala!, logarítmica sí, je, je. […] Pero la logarítmica empieza en los negativos.
Alumna B1: Hombre, si quieres probamos.
Alumno B6: Aquí no puede empezar en los negativos porque vamos de cero para arriba pero (…) tiene negativos.
Alumno B4: Dejamos esa, es la que más cuadra. Es la que más va a cuadrar, vamos.
Alumno B2: Venga, ya está.

La razón de que el alumno B4 proponga que quizá se trate de una logarítmica parece fundamentarse en que ambas funciones (raíz cuadrada y logarítmica) son funciones crecientes, cóncavas y de dominio limitado a los reales positivos, lo que redunda en una gráfica con ciertas semejanzas y cuyo dominio coincide con los valores posibles de aceite vertido que, evidentemente, deben ser mayores que 0. Así, en su decisión prima que el dominio de la función que van a usar coincida con el dominio del caso real. No parecen darse cuenta que las funciones que aparecen en las fotocopias entregadas pueden ser modificadas y, como consecuencia, tanto su gráfica como su dominio y recorrido se verán modificadas. La justificación del alumno B6 para desdeñar la opción de una logarítmica no deja de llamar la atención. Acude al recorrido de la función (la logarítmica empieza en los negativos) olvidándose del hecho de que las gráficas pueden ser desplazadas modificando su expresión. El resto de los alumnos no contemplan la posibilidad del uso de una logarítmica porque ya han encontrado una función que ajusta adecuadamente los datos, razón suficiente para no probar con otra función. Esa misma razón es la que convence finalmente al alumno que manifestó sus dudas.

En la siguiente tabla (Tabla I) presentamos los gráficos generados por los alumnos (Figura 4, Figura 5, Figura 6, Figura 7, Figura 8, Figura 9):

TABLA I

Número de datos y gráficas de cada grupo

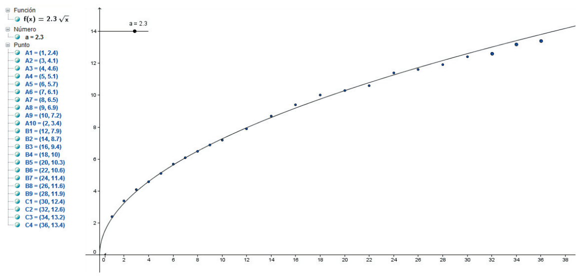
<table>
<tr><th></th><th>Número de datos</th><th>Función obtenida</th></tr>
<tr><td>


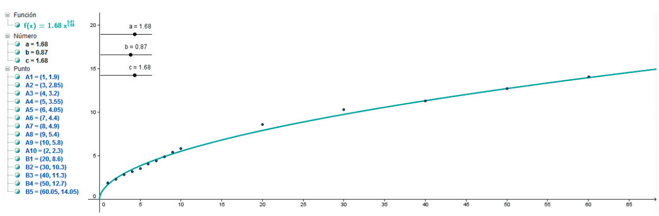
Figura 4. Grupo A
</td><td>23</td><td>$f(x)=2.3\cdot\sqrt{x}$</td></tr>
<tr><td>


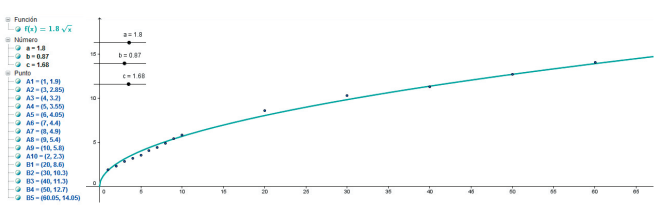
Figura 5. Grupo B (a)
</td><td>15</td><td>$f(x)=1.68\cdot x^{\frac{0.87}{1.68}}$</td></tr>
<tr><td>


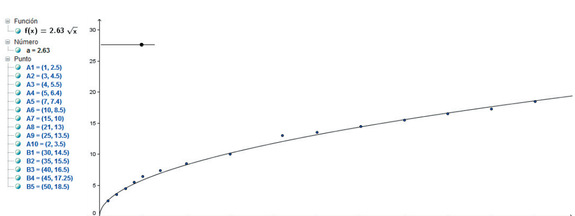
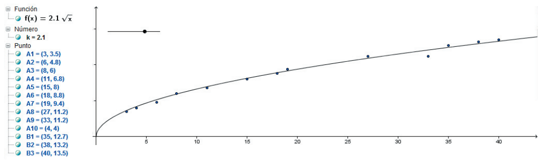
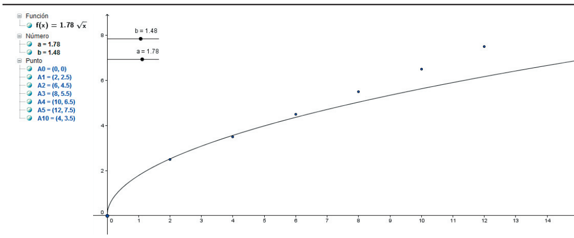
Figura 6. Grupo B (b)
</td><td>15</td><td>$f(x)=1.8\cdot\sqrt{x}$</td></tr>
<tr><td>


Figura 7. Grupo C
</td><td>15</td><td>$f(x)=2.63\cdot\sqrt{x}$</td></tr>
</table>



13 $f(x)=2.1\cdot\sqrt{x}$

Figura 8. Grupo D



7 $f(x)=1.78\cdot\sqrt{x}$

Figura 9. Grupo E

Como se puede observar en la Figura 9, el Grupo E no consigue un ajuste de los datos de los pares de puntos de su tabla de datos. Recordamos que en esta fase, la tarea de los alumnos debía ser obtener una función de ajuste de los datos de su tabla de valores. Además, incluyen dos deslizadores (y por tanto dos parámetros) aunque en la función que entregan solo se usa uno.

La razón de la rapidez con la que los alumnos identifican la función puede venir dada porque en la fotocopia que se les entregó a los alumnos con las gráficas de las familias de las funciones fundamentales, aparece escrita la raíz cuadrada en la forma $f(x)=k\cdot\sqrt{x}\,,\ k\in R$ y la representación gráfica de la función $f(x)=\sqrt{x}$, con lo que los alumnos quizá introdujeron un parámetro en la expresión de la función como forma de reproducción de lo que observaban en la fotocopia.

3.3. *Descripción y análisis de la 3ª Fase*

El buque Prestige se hundió cerca de la costa de Galicia en noviembre del año 2002, provocando una marea negra de grandes proporciones y una reacción social que aún es recordada en España. La cercanía en el tiempo del vertido del Prestige representaba para los alumnos una realidad próxima, tanto temporalmente como socialmente. Partiendo de esta situación, en la tercera fase se les entregó a los alumnos una fotocopia a color DIN A3 de una carta náutica de una zona de la ría de Vilagarcía (zona en la que se sitúa el Instituto en el que los alumnos cursaban sus estudios) (Figura 2) y otra fotocopia de una hipotética fotografía vía satélite de un vertido contaminante (Figura 3) junto con las siguientes preguntas, que los alumnos debían contestar por escrito e individualmente:

a) *Determina la escala de la fotografía.*

b) *Determina el área de superficie contaminada. Usa aquellos instrumentos y conocimientos que estimes necesarios o convenientes.*

c) *Aplica el modelo que obtuviste para determinar la cantidad de fuel del vertido.*

Estas preguntas se podrían englobar en una única cuestión más general: ¿cómo se mide la cantidad de fuel vertido en el agua si solo disponemos de una mancha contaminante visible? Sin embargo, juzgamos que era más conveniente dividir la cuestión inicial en las tres cuestiones planteadas y evitar de ese modo la dificultad que puede presentarse en los alumnos para elaborar la propuesta de resolución (Albarracín y Gorgorió, 2013); una pregunta demasiado abierta podía conducirlos a puntos muertos que obligasen al profesor a intervenir y suministrar claves de resolución. El objetivo fundamental de esta fase es que los alumnos apliquen el modelo obtenido en una situación hipotéticamente real o en un contexto auténtico, relevante socialmente.

A continuación se detalla el análisis para cada una de esas tres cuestiones.

a) *Determina la escala de la fotografía*

Los alumnos tenían que determinar la escala de una imagen (Figura 3) a partir de otra imagen de la zona pero de escala conocida (Figura 2). Las imágenes del vertido eran diferentes el curso 2010-2011 (escala 1:43300) y el curso 2011-2012 (escala1:58600). La razón de proporcionar imágenes diferentes los dos años era que la diferencia de escala entre la carta náutica (escala 1:30000) y la fotografía fuese mayor para que los alumnos se viesen en la necesidad de calcular la escala. Una diferencia de escala pequeña puede llevar a considerar un cálculo aproximado del área mediante la escala conocida.

En cuanto al conocimiento de los alumnos sobre el uso de escalas, se realiza una introducción en edad temprana (6º de Ed. Primaria, Real Decreto 1513/2006, p. 4301) y los cálculos con escalas y determinaciones de escalas aparecen de forma recurrente a lo largo de toda la Educación Secundaria, tanto en la asignatura de matemáticas como en otras asignaturas. Se trata, por tanto, de una pregunta en la que los alumnos deben usar conocimientos relacionados habitualmente con la geometría y sobradamente conocidos por los alumnos. En la Tabla II asumiremos que la determinación adecuada de la escala conlleva medir una longitud mayor de 4cm en la carta náutica para determinar la escala de la fotografía.

TABLA II

			%
Determinan la escala	Lo hacen adecuadamente	Medida mayor de 8 cm.	25
		Medida entre 4 y 8 cm.	15
	No lo hacen adecuadamente	Medida igual a 1 cm.	15
		Medida inferior a 1 cm.	25
No determinan la escala	Razones que aportan para no determinar la escala	A2: Respuesta en blanco A7: "por falta de conocimientos" A9: Las escalas son iguales: "(…) ya que miden lo mismo las distancia de un punto a otro"; "(…) no sé hacer escalas" A11: "No he hecho el trabajo porque no recuerdo los métodos a aplicar para averiguar escalas"	20
Total			100

La alumna A9 (v. Tabla II), por ejemplo, proporciona un cálculo que conlleva que las escalas son iguales pero ante la evidencia de que no lo son (simplemente observando ambas imágenes) opta por afirmar que no sabe hacer escalas. La mención expresa al *saber hacer* no nos parece casual y situamos su respuesta en un contexto de enseñanza en el que los alumnos deben *saber hacer* más que *saber*. No disponer del *saber* asociado al *saber hacer*, o del logos asociado a la praxis, lleva al abandono de la tarea. Es decir, si el alumno hubiese acudido a los conocimientos adquiridos sobre semejanzas y sobre el mapa (identificando la escala como una razón de semejanza) no hubiese mencionado que no sabe hacer escalas. La alumna A9 ha reducido el conocimiento sobre semejanzas y escalas a recordar cómo se hacen ese tipo de cálculos (praxis), relegando el logos al olvido por considerarlo un conocimiento secundario o prescindible. Así, la opción de intentar utilizar sus conocimientos adquiridos no es posible o no se contempla como posibilidad. De esa forma, no se produce ningún intento de resolver el problema acudiendo al bloque tecnológico-teórico [ϕ/θ] relativo a semejanzas y escalas, que podría suministrar el recurso tecnológico (hacer escalas) asociado a la parte práctica-técnica [T/τ] de la praxeología (Gascón, 2011). La alumna no puede acudir al *saber* asociado a las semejanzas y las escalas porque carece de ese *saber*, lo que le impide considerar esa opción.

Usar una medida de 1 cm (Tabla II, 15% de los alumnos) representa añadir una dificultad a la toma de medidas en las imágenes porque representa buscar dos puntos distantes exactamente 1 cm, algo que no será sencillo encontrar. De hecho, el alumno B6 fija dos puntos e indica una separación entre ambos de 1 cm, que en realidad es aproximadamente de 0.9 cm (Figura 10). Esa diferencia de 1 mm influiría notablemente en el cálculo posterior pero, el alumno prefiere forzar la medida para obtener 1 cm como separación entre los dos puntos (Figura 10).

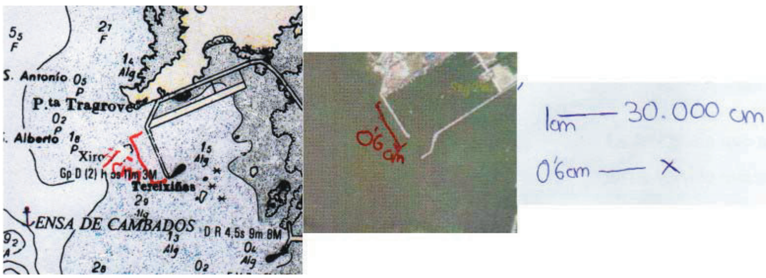


Figura 10. Cálculos realizados por el Alumno B6

El 45% de los alumnos utilizan un método adecuado para calcular la escala: 2 la determinan usando una única regla de tres (Figura 11) y 7 usan dos reglas de tres (Figura 12).

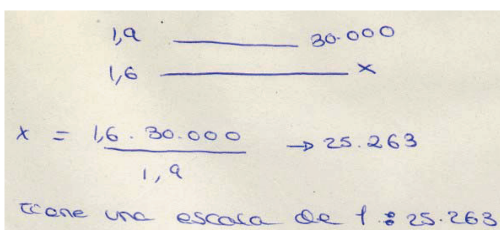


Figura 11. Cálculos Alumna A8

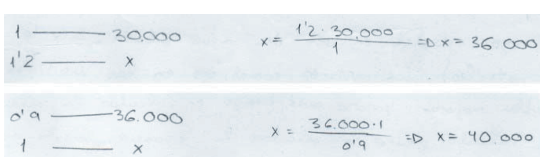


Figura 12. Cálculos Alumno B2

Ninguno de los alumnos hace referencia a la razón de semejanza al responder esa pregunta y la ausencia de referencias a la razón de semejanza en el cálculo del volumen del vertido real, que realizan posteriormente, nos lleva a pensar que no han tenido en cuenta que pudiesen considerar el problema como un problema de semejanza, con lo que se manifiesta lo dicho anteriormente en el caso del cálculo de la escala por la alumna A9. Identificar la fracción

$$\frac{\textit{Distancia de A a B en la carta náutica}}{\textit{Distancia de A a B en la fotografía}}$$

como una razón de semejanza entre dos imágenes les hubiese llevado, probablemente, a tomar la escala de la fotografía como una razón de semejanza y esto, quizá, les hubiese ayudado a utilizar la relación de volúmenes entre figuras semejantes

$$\left(\frac{VolumenFotograf}{VolumenReal} = (\textit{razón de semejanza})^3 \right)$$

para obtener el volumen de vertido real a partir del volumen del vertido obtenido a partir del área de vertido calculado en la fotografía. Como veremos, la totalidad de los alumnos tienen problemas para realizar ese cálculo.

Las reflexiones que los alumnos hacen les han llevado a realizar determinados cálculos que conducen a un resultado que aportan como escala. Creemos que el análisis de los procesos que un alumno desarrolla para dar respuesta a una pregunta proporciona una información valiosa que permite realizar una mejor valoración sobre su grado de adquisición o dominio de competencias matemáticas, consideradas éstas como equivalentes a la comprensión y asimilación del conocimiento matemático, que ver si el resultado final a una pregunta es el correcto.

b) Determina el área de superficie contaminada. Usa aquellos instrumentos y conocimientos que estimes necesarios o convenientes

El cálculo debería ser planteado, de forma general por los alumnos, como el cálculo del área de una figura irregular de la que no se dispone de una fórmula que proporcione su área y, por tanto, debe ser calculado trazando diagonales de la figura, generando triángulos y calculando el área de estos, contenidos conocidos desde la Ed. Primaria. En la siguiente tabla (Tabla III) se muestra el tipo de procedimiento que los alumnos han utilizado para aproximar el área de la superficie contaminada y también se detalla el tipo de figura que han utilizado.

TABLA III

Figura			*Frecuencia*	*%*
Polígono	Calculan el área	A1: Traza un hexágono y lo divide en 4 triángulos. Valor 13.74 cm^2 B1: Traza un trapezoide y lo divide en 2 triángulos. Valor 5.775 cm^2 (Figura 13)	2	10
	No calculan el área o lo hacen erróneamente	A4: Menciona un "trapecio" pero dibuja un trapezoide. No calcula área. A5: Menciona un trapezoide pero dice no recordar la "fórmula". A8, A10: Dibujan un rombo, un círculo y un trapecio. Calculan el área de un rombo. A12: Dibuja un trapecio y usa la fórmula del área de un rombo, confundiendo bases con diagonales.	5	25
Círculo		Dibujan una circunferencia con un compás sobre la fotografía y miden radio o diámetro de la misma	11	55
Ninguna		A2 y A11: no calculan el área aduciendo que como no han calculado la escala, el cálculo solicitado carece de sentido o utilidad.	2	10
Total			20	100

En la figura 13 se muestra la aproximación que hizo la alumna B1 a partir de un trapezoide.

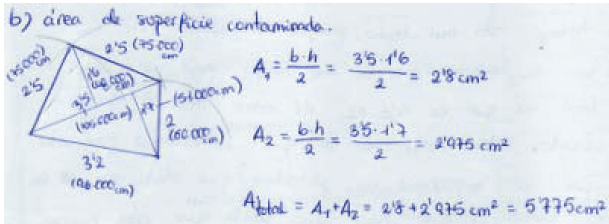


Figura 13. Cálculo del área. Alumna B1

Llama la atención que tres alumnos (15%) utilicen las funciones del modelo para calcular el área del vertido. Adjuntamos el cálculo realizado por el alumno B2, que había trazado un círculo sobre la fotografía, como ejemplo (Figura 14):

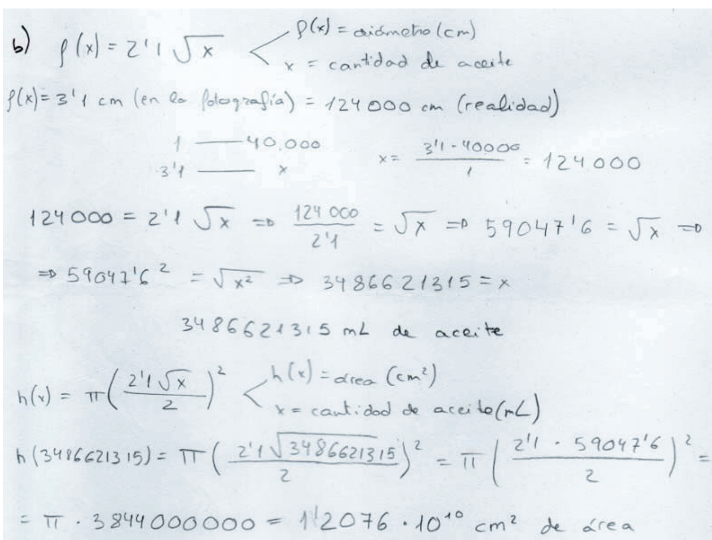


Figura 14. Cálculo Alumno B2

Se observa la inclusión de la función *h(x)*, obtenida en la fase no descrita en el presente artículo y que relaciona área del vertido con volumen del mismo.

La explicación a esa respuesta creemos encontrarla en la forma en que se plantean habitualmente los ejercicios y problemas de matemáticas en las aulas, que suministran los datos necesarios y suficientes para contestar las preguntas y, en muchas ocasiones, solo es posible contestar una pregunta si se dispone de los resultados aportados por preguntas previas. Dedicar tiempo y esfuerzos a obtener las funciones antes de plantear las preguntas del cuestionario puede haber llevado a pensar a los alumnos que la pregunta se planteaba para ser contestada usando las funciones. Lo mismo podría haber ocurrido con los alumnos que no calculan el área por no disponer de la escala (al no poder calcular la escala en la primera pregunta, consideran que no es posible determinar el área).

Resultan sorprendentes las dificultades de los alumnos para identificar las figuras geométricas fundamentales y el cálculo de sus áreas. En este trabajo se pone de manifiesto que la repetición insistente de conocimientos considerados imprescindibles o fundamentales (como es el caso del cálculo de áreas y volúmenes) no garantiza que los alumnos los vayan a adquirir adecuadamente ni que sean capaces de usarlos exitosamente.

En cuanto al tipo de figuras utilizadas para el cálculo de áreas, hemos observado que en el curso 2010-2011, el 100% de los alumnos intentan aproximar el área mediante polígonos, sin embargo, en el curso 2011-2012 todos lo aproximan mediante un círculo.

c) *Aplica el modelo que obtuviste para determinar la cantidad de fuel del vertido.*

Los alumnos tenían escritas en el encerado tres funciones obtenidas en las fases previas (Tabla IV). Las funciones g y h son funciones obtenidas por los alumnos en la fase no descrita en el presente artículo. La previsión era que los alumnos calculasen el área real del vertido usando el área de vertido calculada en la fotografía y la escala de la fotografía determinada previamente.

TABLA IV

Curso 2010-2011	Curso 2011-2012
$f(x)=2.3\cdot\sqrt{x}$, x volumen (ml), $f(x)=$ diámetro (cm)	$f(x)=2.1\cdot\sqrt{x}$, x volumen (ml), $f(x)=$ diámetro (cm)
$g(x)=\frac{2.3\cdot\sqrt{x}}{2}$, x volumen (ml), $g(x)=$ radio (cm)	$g(x)=\frac{2.1\cdot\sqrt{x}}{2}$, x volumen (ml), $g(x)=$ radio (cm)
$h(x)=\pi\cdot\left(\frac{2.3\cdot\sqrt{x}}{2}\right)^2$, x volumen (ml), $h(x)=$ área (cm^2)	$h(x)=\pi\cdot\left(\frac{2.3\cdot\sqrt{x}}{2}\right)^2$, x volumen (ml), $h(x)=$ área (cm^2)

El análisis de las respuestas muestra que la alumna B1 utiliza la escala para determinar las longitudes reales del polígono que ha usado para aproximar el área de vertido (trapezoide). Una vez hecho esto, realiza el mismo cálculo que ya hizo en el apartado anterior para determinar aproximadamente el área real de vertido. Con ese valor, que sustituye por $h(x)$, calcula el valor de x.

Por su parte, el alumno B2, usa la escala para determinar el diámetro real (ha usado un círculo como medio de aproximar el área de vertido) y utiliza la función f para calcular el volumen.

Excepto estos dos alumnos, todos los alumnos cometen errores o no calculan el volumen solicitado (90%). Aunque se observan dificultades comunes a varios alumnos, se podría decir que cada uno de los alumnos presenta particularidades que son objeto de análisis individualizado. La mayoría de los alumnos tienen dificultades con ejercicios sencillos de uso de escalas y de cálculo de áreas. Algunos alumnos utilizan mal las unidades de medida de magnitudes, atribuyendo unidades de medida de longitud a medidas de área o de volumen. Se observan deficiencias en el cambio de unidades de medida (paso de cm^2 a m^2 por ejemplo). Se presentan dificultades asociadas a la correcta identificación y uso de las variables funcionales. Algunos alumnos presentan deficiencias en el cálculo y manipulación de expresiones algebraicas sencillas. Se constata en algunos alumnos un uso inadecuado de la notación matemática y una presentación deficiente de su trabajo.

El hecho de que los alumnos no identifiquen la función h (que relaciona área con volumen) como la más apropiada para responder la cuestión planteada puede deberse a varias razones, no todas ellas relacionadas con la dificultad asociada a la pregunta. Pensamos que el haber escrito las tres funciones f, g y h en el encerado ha provocado desconcierto en los alumnos. Indicar qué función deben usar los alumnos limita el uso del modelo en contexto pues proporciona respuestas clave a preguntas que se generan en el uso del modelo en dicho contexto.

A modo de resumen del análisis de resultados, destacamos:

- Es evidente una diferencia notable en el número de datos recogidos en el laboratorio de cada grupo y, además, en todos los casos parecen insuficientes. La razón estriba en que previamente habían realizado prácticas de funciones de ajuste de puntos en el plano en casos en que el número de puntos necesario para un correcto ajuste es pequeño. De esa forma, las prácticas o experiencias previas se revelan como factores de influencia en la forma inmediata de actuar de los alumnos ante una situación nueva. Acostumbrados a la repetición de esquemas o algoritmos inmutables suministrados con anterioridad, llevan esa misma norma de actuación al caso de una modelización matemática.

- El hecho de suministrar, en las fotocopias entregadas a los alumnos, la familia de funciones "raíz cuadrada" como la vinculada a la expresión $f(x)=k\cdot\sqrt{x}$, $k\in R$ ha tenido influencia en el trabajo de los alumnos a la hora de introducir la forma de la función. Si se hubiese optado por incluir dicha función en la forma $f(x)=\sqrt{x}$ se les habría presentado una dificultad mayor en su trabajo de determinación de la función adecuada. Lo dicho para la expresión de la función se puede ampliar a otros aspectos de la modelización, tanto reduciendo el grado de dificultad (indicando el número de datos que deben obtener en el laboratorio, suministrando la escala de la fotografía, simplificando la figura de área contaminada, etc.) como aumentándola (añadiendo dificultades a la determinación de la escala como, por ejemplo, no suministrando la carta náutica y esperar que los alumnos soliciten información al profesor o la busquen de forma autónoma, proponiendo una figura geométrica más compleja, añadiendo preguntas de mayor dificultad, reduciendo las preguntas de la tercera fase a solo la tercera pregunta, etc.) lo que nos sitúa en un problema que nos parece crucial al hablar de modelización matemática en la enseñanza: el grado de dificultad aconsejable en una modelización, ligado en parte al planteamiento del mismo como un problema más o menos abierto.

- Los alumnos vinculan una función a su expresión analítica genuina. Se olvidan de que una función puede ser presentada como resultado de las operaciones de varias funciones sin que ello represente un cambio en el nombre asignado a la función. Conocer que el hecho de introducir los parámetros *a* y *b* modifica la gráfica y el dominio y recorrido de la función, resulta básico en el caso de intentar ajustar puntos del plano mediante funciones. Resulta evidente que los alumnos no consideran ese hecho en todas sus posibilidades, algo que resulta sorprendente si tenemos en cuenta la formación matemática que han recibido. Conocen y, en teoría, dominan conceptos, nociones y herramientas matemáticas de gran potencia y que les permiten realizar el estudio gráfico completo de una función (dominio de definición, recorrido, puntos de corte con los ejes, monotonía, extremos, curvatura y puntos de inflexión, cálculo de asíntotas) pero no se dan cuenta, por ejemplo, de que un logaritmo puede tener como dominio de definición los números positivos pero también los número mayores de -3, de forma que el dominio, el recorrido y la gráfica se ve modificada al modificar la expresión.

- El 20% de los alumnos no determinan la escala de la fotografía y el 40% lo hace de forma claramente deficiente. Esos datos muestran que la mayoría de los alumnos no son capaces de hacer un uso adecuado de sus conocimientos sobre escalas en el contexto de problemas sencillos. Hay que tener en cuenta que son alumnos de 1º de Bachillerato Científico-Tecnológico y que en el plazo de un año y unos pocos meses muchos de ellos se encontrarán enfrentándose a estudios de grados universitarios de carácter científico. La explicación a este hecho radica en que el modelo de enseñanza de las matemáticas se basa, fundamentalmente, en memorizar algoritmos, esquemas y técnicas heurísticas concretas. Si el alumno olvida el algoritmo o la técnica heurística, su conocimiento matemático desaparece. No disponer de *saber* asociado a *saber hacer* deriva en ese tipo de comportamiento.
- Usar un polígono como forma de aproximar el área de vertido, es utilizada solo por el 35% de los alumnos. De ellos, solo el 10% llega a calcular el área según un proceso adecuado. Esto nos lleva a que los problemas son planteados usualmente de forma secuencial: la primera cuestión proporciona la clave para responder la segunda cuestión, la segunda cuestión para responder la tercera, etc. Así, los problemas son, en realidad, guías de problemas.

Los alumnos no vinculan las cuestiones relacionadas con mapas con cuestiones relacionadas con la semejanza entre figuras. En las respuestas de los alumnos en ningún caso se menciona la semejanza, acudiendo a la proporcionalidad directa como forma de responder a las cuestiones. Esa circunstancia sirve de explicación a que el 90% de los alumnos no lleguen a determinar el volumen de vertido.

4. Conclusiones

Al hablar de modelización matemática en la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas es usual incluir los obstáculos que conlleva la implantación de la modelización. Uno de esos obstáculos es la duración temporal de la modelización (Blum & Niss, 1991, pp. 43-44) porque el profesor tiene miedo de no disponer del tiempo suficiente para llevar a cabo sus objetivos prioritarios y que no incluyen la modelización matemática. La duración de las tres fases de la modelización que presentamos en este artículo no excede la hora y media, lo cual es perfectamente asumible por un profesor en cuanto a la inversión de tiempo que precisa.

Resaltamos que el *Obstáculo de la razón o proporción* que se observa, y que Ruiz Higueras (1998) considera como epistemológico, no se haría visible sin la realización de un debate y el análisis de las conversaciones de los alumnos. Esa circunstancia lleva a la necesidad de una toma de decisiones por parte del profesor sobre, por ejemplo, la utilización del debate en el aula. Destacamos, además, que este obstáculo se manifiesta tanto en la primera como segunda fase y ambas son fases fácilmente reducibles a la obtención de un resultado (una tabla de datos y una función de ajuste), identificables con el uso de una técnica previamente aprendida o derivada de una técnica previamente aprendida y, por tanto, identificable con el *saber hacer* y la praxis.

Acudiendo al Ciclo de modelización (Figura 1), podríamos identificar la 1ª y 2ª fases como los pasos 1, 2, 3 y 4 que, desde el resto del mundo, traslada el problema a las matemáticas, matematiza la situación, proporciona un modelo matemático y un resultado matemático. La 3ª fase se inscribe en el paso 5, de modo que el modelo obtenido vuelve al resto del mundo para ser aplicado, proporcionando resultados reales. No se produce ni validación ni exposición, asumiendo el modelo alcanzado y los resultados que proporciona como adecuados.

Si hablamos de las competencias, la actividad propuesta puede ser caracterizada como un problema planteado desde una situación del mundo real y plenamente situado en un contexto auténtico. Desde las competencias, podemos identificar los objetivos con la obtención experimental de una tabla de datos, obtener un modelo matemático (función) a partir de la tabla de datos y aplicar el modelo a una situación problemática nueva y contextualizada en la que el modelo obtenido proporciona respuestas. Como muestra el análisis de resultados, las competencias de los alumnos, identificadas como *capacidad de*, tanto en lo que se refiere a conceptos y nociones básicos sobre funciones como en otras áreas no directamente relacionadas con las funciones, son claramente deficientes. Los alumnos no son capaces de aplicar sus conocimientos matemáticos en un contexto real, lo que los convierte en no competentes según los términos de definición de ser competente de PISA. Creemos importante resaltar que las deficiencias, que consideramos notables, no saldrían a relucir si la modelización planteada se hubiese limitado a la obtención del modelo, identificable con el *saber hacer* (Gascón, 2011). Es decir, si observamos únicamente las dos primeras fases, los alumnos son capaces de *saber hacer* una tabla de datos y una función de ajuste. Si suponemos que los alumnos han integrado en esos procesos el *saber* asociado (variables funcionales, distinción entre función matemática y función en contexto, parámetros presentes, dominio, recorrido, etc.) diremos que los alumnos son *competentes* generando el modelo.

Para finalizar, ilustraremos la complejidad de la introducción de la modelización en la enseñanza de las matemáticas a través de un ejemplo. Supongamos que un profesor fija como objetivo la obtención del modelo (tabla de datos con un número de datos suficiente, búsqueda una función que ajuste plenamente los datos) y su uso exitoso en un contexto real asociado. Esas capacidades pueden ser reducidas de tal modo que puedan ser identificables con el *saber hacer*: obtener datos experimentales se reduce al uso de instrumentos de medida, conseguir la función de ajuste se puede reducir al uso puramente técnico de un programa informático, etc. Imaginemos ahora que otro profesor estará más preocupado por que el alumno reflexione sobre los conceptos y nociones presentes en el modelo, por el *saber* asociado a ese mismo *saber hacer*. Por ejemplo, que el alumno identifique las variables presentes en la tabla de datos, distinga las variables físicas de las variables matemáticas, identifique los parámetros que aparecen en el problema, comprenda la influencia de cambio del valor del parámetro en la gráfica de la función, identifique el dominio y recorrido de las funciones, etc. Con esos objetivos, puede parecerle a este segundo profesor que suprimir el que los alumnos obtengan los datos o la obtención de la función de ajuste por sí mismos no representa un elemento importante, proporcionando él mismo los datos y obteniendo la función de ajuste en una sesión conjunta. De esa forma, el modelo será, para los alumnos, *su* modelo en menor grado y será percibido como otra actividad matemática más realizada, en algunos de los procesos fundamentales, por el profesor. Que el resultado final (la función obtenida) pueda ser calificado como excelente o no, será algo secundario para este profesor mientras que para el primer profesor es la calidad de ese resultado final lo importante. De todos modos, queremos destacar que, en ambos casos, se puede argumentar que se llevan a cabo los procesos de construcción, simplificación/estructuración, matematización, trabajo matemático e interpretación del ciclo de modelización (Figura 1) y los procesos de matematización que describe PISA.

La contradicción entre las dos posturas o enfoques mencionados es evidente y solo es explicable desde una pregunta que plantea la modelización: ¿qué es lo importante en una modelización? Si respondemos que lo importante es obtener el producto de la modelización obtendremos una conclusión, pero si optamos por responder que la modelización forma parte del conocimiento matemático en un sentido amplio, obtendremos otra. En el fondo, el problema que plantea la modelización en la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas es el mismo que cualquiera otra cuestión relacionada con la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas: ¿qué queremos que los alumnos aprendan? y por tanto, ¿qué queremos enseñar a los alumnos?

Es fundamental que el profesor sea consciente de que los objetivos que marca influyen en la forma en que plantea e implementa la modelización y, como consecuencia, en la respuesta del alumno. Eso convierte la modelización en una actividad más abierta y menos predecible (Blum & Niss, 1991; Blum & Borromeo, 2009). Obliga al profesor, por tanto, a la toma de decisiones sobre qué objetivo es el fundamental, lo que se encuentra directamente relacionado con la perspectiva bajo la que se plantea (Kaiser & Sriraman, 2006). Desde nuestro punto de vista, la praxis (generar la tabla de datos, etc.) debe ser complementada con el logos (identificación de variables, relación entre variables, etc.), de modo que un objetivo fundamental debe ser la búsqueda del equilibrio entre ambas.

Referencias bibliográficas

Albarracín, L. y Gorgorió, N. (2013). Problemas de estimación de grandes cantidades: modelización e influencia del contexto. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 16*(3), 289-315. doi: 10.12802/relime.13.1631

Barbosa, J. C. (2003). What is mathematical modelling? In S. J. Lamon, W. A. Parker, & K. Houston (Eds.), *Mathematical modelling: a Way of Life*: *ICTMA 11* (pp. 227-234). Chichester, Reino Unido : Horwood Publishing.

Blomhøj, M. (2004). Mathematical modelling - A theory for practice. In B. Clarke, D. Clarke, G. Emanuelsson, B. Johnansson, D. Lambdin, F. Lester, A. Walby, & K. Walby (Eds.), *International Perspectives on Learning and Teaching Mathematics* (pp. 145-159). Suecia: National Center for Mathematics Education.

Blum, W. & Borromeo, R. (2009). Mathematical Modelling: Can It Be Taught And Learnt? *Journal of Mathematical Modelling and Application*, *1*(1), 45-58

Blum, W. & Niss, M. (1991). Applied mathematical problem solving, modelling, applications, and links to other subjects - state, trends and issues mathematics instruction. *Educational studies in mathematics*, *22*(1), 37-68. doi: 10.1007/BF00302716

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 19*(2), 221-266.

Gascón, J. (2011). ¿Qué problema se plantea el enfoque por competencias? Un análisis desde la teoría antropológica de lo didáctico. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *31*(1), 9-50.

Kaiser, G. & Sriraman, B. (2006). A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education. *ZDM*, *38*(3), 302-310.

NCTM-National Council of Teachers of Mathematics (Ed.) (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, EEUU: NCTM. (Trad. al castellano (2003): N.C.T.M.: Principios y Estándares para la Educación Matemática. Sevilla, España: S.A.E.M. THALES)

OECD (2006). *PISA 2006 Marco de evaluación Conocimientos y habilidades en Ciencias, Matemáticas y Lectura.* OECD. (http://www.oecd.org/pisa/39732471.pdf)

Orden ESD/1729/2008 de 11 de Junio. BOE 18/06/08, por la que se regula la ordenación y se establece el currículo del bachillerato.

Real Decreto 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria. BOE del 5 de Enero de 2007.

Real Decreto 1467/2007, de 2 de noviembre. por el que se establece la estructura del bachillerato y se fijan sus enseñanzas mínimas. BOE del 6 de Noviembre de 2007.

Ruiz Higueras, L. (1998). *La noción de función: análisis epistemológico y didáctico*. Jaén, España: Universidad de Jaén.

Schmidt. B. (2010). Modeling in the classroom motives and obstacles from the teacher's perspective. In V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavergne, & F. Arzarello (Eds.), *Proceedings of the CERME 6* (pp. 2066-2076). Lyon.

Autores

J. Benito Búa Ares. I.E.S. Sánchez Cantón, España. bua@edu.xunta.es

Mª Teresa Fernández Blanco. Universidad de Santiago de Compostela, España. teref.blanco@usc.es

Mª Jesús Salinas Portugal. Universidad de Santiago de Compostela, España. mjesus.salinas@usc.es

Trinidad García, Lucy Betts, Paloma González-Castro,
Julio A. González-Pienda, Celestino Rodríguez

ON-LINE ASSESSMENT OF THE PROCESS INVOLVED IN MATHS PROBLEM-SOLVING IN FIFTH AND SIXTH GRADE STUDENTS: SELF-REGULATION AND ACHIEVEMENT

Evaluación on-line del proceso de resolución de problemas matemáticos en estudiantes de quinto y sexto curso: auto-regulación y logro

RESUMEN

El objetivo de este estudio ha sido poner a prueba un método de evaluación del proceso implicado en la resolución de problemas matemáticos, basado en la metodología de la Triple Tarea y en los principios del Aprendizaje Autorregulado. Este protocolo se administró a 510 estudiantes de quinto y sexto curso procedentes del Norte de España, los cuales realizaron dos tareas matemáticas de diferente dificultad. Los resultados indicaron la presencia de unas estrategias de planificación ineficaces, así como la ausencia de mecanismos de revisión. Sin embargo, el análisis de las diferencias entre los grupos con diferente rendimiento en las tareas reveló los sub-procesos implicados en la planificación, y especialmente el empleo de estrategias de representación de la información, como determinantes importantes en el éxito de los estudiantes, ejerciendo un efecto mayor conforme la dificultad de la tarea aumentó.

PALABRAS CLAVE:

- *Aprendizaje Auto-regulado*
- *Matemáticas*
- *Proceso*
- *Resolución de problemas*

ABSTRACT

The aim of this study was to test a method to assess the processes involved in mathematical problem solving, based on the Triple Task methodology and Self-Regulated Learning principles. This protocol was administered to 510 fifth and sixth grade students from Northern Spain, who carried out two mathematical tasks of varying difficulty. The results derived from the total sample indicated the presence of ineffective

KEY WORDS:

- *Self-Regulated Learning*
- *Mathematics*
- *Problem-solving*
- *Process*

Recepción: Octubre 10, 2013 / Aceptación: Marzo 3, 2015. DOI: 10.12802/relime.13.1922

planning strategies and a lack of revision mechanisms. However, comparisons between groups with different achievement in the tasks revealed the sub-processes involved in planning (especially the use of representation strategies) as important determining factors in students´ success rates, with these exerting a greater effect as task-difficulty increased.

RESUMO

O objetivo deste estudo foi testar um método de avaliação do proceso envolvido na resolução de problemas matemáticos, com base na metodologia da Tarefa Tripla e nos princípios da aprendizagem auto-regulada. Este protocolo foi administrado a 510 alunos de quinto e sexto ano do norte da Espanha, que fizeram duas tarefas de matemáticas com diferentes graus de dificuldade. Os resultados indicaram a presença de algumas estratégias de planeamento ineficazes e a falta de mecanismos de avaliação. No entanto, a análise das diferenças entre os grupos com um desempenho diferente na tarefa, revelou que os sub –processos envolvidos no planeamento, especialmente o uso de estratégias de representação da informação, como determinantes importantes para o sucesso dos alunos, exercendo um efeito maiorquando a dificuldade da tarefa aumento.

PALAVRAS CHAVE:

- *Aprendizagem auto-regulação*
- *Matemática*
- *Processo*
- *Resolução de problemas*

RÉSUMÉ

L´objectif de cette étude était de tester une méthode d´évaluation du processus impliqué dans la resolution de problèmes mathématiques, basée sur la méthodologie de la Triple Tâche et les príncipes de l´Apprentissage Autorégulé. Ce protocole a été administré à 510 élèves en sixième et cinquième année, du Nord de l´Espagne, quiont effectué deux tâches mathématiques de différente difficulté. Les résultats indiquent la présense de quelques stratégies de planification inefficaces et le manque de mécanismes de contrôle. Cependant, l´analyse des différences entre les groupes avec l´exécution des tâches différentes a révélé les sous-processus impliqués dans la planification, et en particulier l´utilisation de la représentation des informations stratégiques, comme des déterminants importants dans la réussite des élèves, en exerçant un effet plus grand que la difficulté de la tâche a augmenté.

MOTS CLÉS:

- *L´auto-apprentissage*
- *Le traitement*
- *Les mathématiques*
- *La résolution de problèmes*

1. Background

It is widely known that the development of problem-solving skills is an important issue in formal education. In fact, authors such as Lazakidou and Retalis (2010) linked it to Life-long Learning in the sense that *"engagement in problem-solving activities helps students to acquire useful attitudes such as thinking, flexibility, creativity, and productivity, which are very important to real life"* (p. 3). In the current educational context, mathematical problem solving takes a greater relevance; this activity, which starts in the first years of Elementary Education, may be the basis to develop basic problem-solving skills.

Mathematical problem solving is a complex cognitive activity that involves multiple processes. A student's achievement in these tasks relies on the integrated application of cognitive, metacognitive, and motivational components (Cleary & Chen, 2009; Kajamies, Vauras, & Kinnunen, 2010; Montague, Enders, & Dietz, 2011; Voyer, 2011). In fact, while it has been supported for many years that a well-organized and flexibly accessible knowledge about mathematical facts, symbols, algorithms, concepts and rules may be the core of problem-solving skills, current literature has established that strategy use based on Self-regulated Learning (SRL) is linked to mathematical capacities which are an important determining factor in solving mathematical problems (Gálvez, Cosmelli, Cubillos et al., 2011; Geary, 2004; Jarero, Aparicio y, Sosa, 2013; Lazakidou & Retalis, 2010; Montague, 2008; Pennequin, Sorel, Nanty, & Fontaine, 2010; Pereis, Dignath, & Schmitz, 2009; Schmitz & Perel, 2011; Verschaffel, Greer, & De Corte, 2000).

SRL refers to those proactively initiated thoughts, feelings and behaviors which are planned and cyclically adapted based on self-generated or performance feedback in order to attain personal goals (Zimmerman, 2000). SRL involves those aspects which facilitate the control and regulation of students' cognitive systems and learning processes, and comprises three sequential phases: forethought (i.e., processes that precede efforts to learn or perform), performance control (i.e., processes occurring during learning efforts), and self-reflection (i.e., processes occurring after learning or performance such as evaluate the effectiveness of one´s learning methods or results; Zimmerman, 2000; in Cleary & Chen, 2009). These processes, which are based on an interplay of personal and task characteristics and the strategies available in a learning situation, help students to monitor and check their thoughts and are particularly useful when solving novel or challenging problems (Lazakidou & Retalis, 2010; Pennequin et al., 2010; Rosenzweig, Krawec, & Montague, 2011; Throndsen, 2011; Zimmerman & Schunk, 2008). However, studies have shown that students tend to demonstrate poor metacognitive skills when they are engaged in mathematical problem-solving situations. Many students forge ahead without considering alternative decisions, jumping immediately into calculations, giving impulsive reponses, and using trial and error as strategies. Students often get stuck in irrelevant details of the task or fail to verify solution paths and evaluate answers, focusing on superficial measures of progress (Cleary & Chen, 2009; Kramarski & Gutman, 2006; Montague, 2008; Montague et al., 2011; Pennequin et al, 2010; Pereis et al., 2009; Veenman, 2005). In this sense, not only do students with learning disabilities show problems in these issues. In fact, typical students may also not realize the importance of regulating their thoughts and behavior, or they may simply not know how to self-regulate properly. Thus, many students often need support to regulate their learning processes (Azevedo & Cromley, 2004; Butler & Cartier 2005; Ifenthaler, 2012; Kramaski & Gutman, 2006).

In this context, one of the biggest challenges for researchers is to design measures that provide access to internal cognitive structures and functions involved in both, self-regulation and problem solving. Most studies have been based on applying standardized measures such as questionnaires or structured interviews; this kind of measures involves asking students about how they solve a problem or the extent to which they use different strategies. Additionally, students are also asked about different situations in which they would use (or not use) a specific strategy or what approximation would be the best in each case. Students' responses to the metacognitive questions are scored depending on the quality of the response and a total score is calculated. These kind of assessments, although widely applied (Greene & Azevedo, 2010; Shea & Bidjerano, 2010; Zimmerman & Schunk, 2008), may yield inconsistent or inaccurate information due to inaccurate memory or perhaps even response biases such as social desirability, and do not provide information about how learners transfer their knowledge to regulate their problem-solving activities. As many authors have pointed out, these tools are useful to assess a student's declarative and situational metacognitive knowledge, but do not provide any information about the mental processes underlying task performance and the student's achievement levels which together represent important issues in learning and instruction (Clearly & Chan, 2006; Veenman, 2011). In response to this, Veenman (2011) established the distinction between off-line and on-line methods in the assessment of strategy use and learning. Off-line methods refer to questionnaires and interviews which are administered either before or after task performance, while on-line methods concern measurements taken concurrent to task performance, such as Think-aloud or Triple Task procedures. These measures may be especially useful to provide data about student reasoning abilities during problem-solving activities.

In *Think-aloud* protocols (Rosenzweig et al., 2011) learners verbalize their thoughts and cognitive activities while engaged in task execution. The usefulness of these procedures lie in the fact that they provide access to students' short-term memory abilities, which reflects cognitive processing during task completion. This approach allows the researcher to obtain accurate information about metacognitive skills and strategies while students are asked to simply verbalize what they are thinking at each moment. After transcription and coding, undirected verbalizations are recognized as valid expressions of the students' cognitive and metacognitive processes. Studies in this area are limited, although some interesting data support the usefulness of the protocols in assessing metacognitive processes during mathematical problem-solving tasks (Lazakidou & Retalis, 2010; Ostad & Sorenson, 2007; Throndsen, 2011).

On the other hand, *Triple Task* procedures have been widely applied in the scientific study of reading comprehension and written composition, and more recently in note-taking activities (Fidalgo, Torrance, Robledo, y García, 2009; García, Rodríguez, Pacheco, & Diez, 2009; Piolat, Barbier, & Roussey, 2008; Piolat, Kellog, & Farioli, 2001; Olive et al., 2002; Piolat & Olive, 2000; Piolat, Olive, & Kellogg, 2005; Torrance & Galbraith, 2006).

The Triple Task method is rooted in the so-called *"Doble Task"* protocols. Although the present study focuses on the use of Triple Task procedures, a description of both methods is provided below:

The *Double Task* procedure provides information about the cognitive effort engaged in higher-order cognitive tasks, such as comprehension or text production. Participants are asked to perform concurrently a primary task and a secondary probe task. For example, while composing a text (the primary task), participants must react as fast as possible to tones (the secondary task by pressing a mouse button or by saying 'stop' to a microphone linked to a vocal key) that are periodically distributed in a random interval (generally between 15 and 45s). Reaction time (RT) in this dual-task situation is compared with a control condition when the probe is responded to as a single task. The degree of interference in RT (IRT) caused by the primary task provides a measure of the amount of cognitive effort designated to composition or another cognitive task. However, although widely used, this measure does not provide information about the process that underlies the cognitive task under consideration.

It is the *Triple Task* procedure which provides additional information about the temporal organization and the cognitive processes underlying a cognitive activity by adding a third task, consisting of asking students for an immediate directed introspection after each tone's detection. Students have to categorize their thoughts at the moment the tone is presented. Thus, in Triple Task studies students perform: a) the primary task under investigation, b) the secondary probe task, and c) a third task in which participants are asked to label the process that was interrupted by the probe. For this last task, participants are trained in direct retrospection in order to better identify and report the cognitive processes present at each moment. As a measure of the process, the Triple Task method can be differentiated from Think-aloud protocols in the following aspects: a) the Triple Task uses directed introspection as opposed to the undirected introspection involved in Think-aloud, b) a system of categories can be given in order to facilitate categorization and facilitate exploration in to sub-processes, c) response transcription and coding are unnecessary, and d) inter-rater agreement does not have to be calculated. To date however, this method has neither been applied to the analysis of the processes underlying mathematical problem-solving, nor from the point of view of investigating the metacognitive skills involved in these tasks. Additionally, as happens with Think-aloud protocols, most Triple Task studies have been conducted with small sample sizes, mainly due to their own methodology feautures, which make them less economic to implement.

In this context, we introduce our own process assessment tool, the *Triple Task Procedure in Mathematics–TTPM* (García y González-Pienda, 2012). It is based on the Triple Task technique and suitable for application in larger samples through a MOODLE platform. One of the novelties of this method is the introduction of a new system of categories to analyze student processes during problem solving. It was designed according to the PLEJE model of SRL (“Planificación-Ejecución-Evaluación” in Spanish: Rosário, Mourão, Núñez, González-Pienda, & Solano, 2008; Zimmerman, 2000), which establishes three main phases: Planning, Execution, and Revision; and Bransford and Stein´s (1993) IDEAL problem-solving model, which stablishes five stages to successfully solve a problem: Identifying potential problems, Defining and representing the problem, Exploring possible strategies, Acting on those strategies, and Looking back and evaluating the effects of those activities. A more detailed description of the assessment process and this tool, which was administered to 510 students from fifth and sixth grade belonging to 12 private and state schools in Asturias (Northern Spain), is provided in the method section. The main aim of this study was to analyze the usefulness of TTPM as a measure of the process during the performance of two mathematical problems of varying difficulty. Specifically, this study sought to answer the following questions: a) do students follow Self-Regulated Learning stages while trying to solve mathematical problems? b) are there differences in the process followed by students with different achievement in the tasks? and c) do these differences remain constant when the difficulty of the tasks varies?

2. Method

2.1. *Participants*

The study involved 510 students from fifth and sixth grade students from 12 private and state primary schools in northern Spain (Mean age: 11 years, SD:0.71). Students belonged to 32 different classrooms. Gender distribution was balanced. Specifically, 255(50%) were female. Of the total sample, 210 students (41.2%) attended fifth and 300 (58.8%) sixth grade. Gender and level (fifth or sixth grade) were taken into account as potential mediating variables in subsequent analyses.

Sample selectionwas made through convenience or accessibility procedures. Students volunteered for the study and presented informed consent from their parents.

2.2. *Measures*

Mathematical problems: Students completed two relatively complex mathematical word problems taken from the book *"Problem-solving and comprehension"* (Whimbey & Lochhead, 1999) published in Spanish. This book provides a systematic review of the characteristics that define a good problem solver, while proposing strategies and activities to develop these skills, mainly based on mathematical reasoning. Tasks differ in the amount of information to be processed, the number of associations presented and the number of parameters to calculate.

Process measures: Evidence of student metacognitive process was obtained by means of the TTPM (García y González-Pienda, 2012). It consists in the following: after a RT probe task, and while completing the mathematical problems, students are presented with an electronic tone at a randomized interval of 40-45 seconds. At this point students are asked to categorize their activities or thoughts. In order to help students, categorize these processes, students are provided with a category system (see Table I). They have to indicate by mouse-click which of nine the categories (reading, drawing or summarizing, recalling similar problems, thinking about a solution, mental calculation, writing, reviewing, correcting mistakes, or "other") best describes the processes in which they are involved when the tone is presented. The category system is based on Bransford and Stein's (1993) IDEAL problem-solving model and the PLEJE model of SRL (Rosário et al., 2008; Zimmerman, 2000), previously described in this study. The category called "other" was incorporated to gather all those thoughts or actions unrelated to the mathematical task (e.g., day-dreaming). Nevertheless, previous research indicates that such unrelated processes are generally very scarce (Olive et al., 2002). The eight proposed processes are also organized into three, higher-level categories corresponding to SRL phases: Planning, Execution and Revision. Table I shows the category system used for students to categorize their processes during the task, based on the correspondence between the stages and phases involved in both SRL and IDEAL models.

TABLE I
Category system. Based on the Self-Regulation Model (Rosário et al., 2008; Zimmerman, 2000) and the IDEAL Model (Bransford & Stein, 1993)

SRL Model	*IDEAL Model*	*Process categories (I am ...)*
Planning	Identification of the problem	Reading
	Definition and representation	Drawing or summarizing
		Recalling similar problems
	Exploration of possible strategies	Thinking about a solution
Execution	Action based on the strategy	Calculating
		Writing a response
Revision	Look at effects of solutions	Reviewing
		Correcting mistakes
"Other"		Doing something unrelated

2.3. *Procedure*

The study was conducted in accordance with The Helsinki Declaration of the World Medical Association (Williams, 2008), which reflects the ethical principles for research involving humans. Participants were tested colectivelly within a 45-minute time-frame. A maximum of 20 participants were tested at a time. The first phase consisted of training students to familiarize them with the system of categories and the assessment procedure. The hypothetical case of a boy who was the same age as them (Álex) and who tried to solve a mathematical problem was used for this purpose. After training, students performed a category recognition test consisting of 12 multiple-choice items with four alternatives. Students were asked to indicate the category that best expressed each proposed activity (e.g., for the statement *"Alex realised he made a mistake, so he is erasing",* alternatives were: Álex is thinking about a solution, writing, reviewing or correcting mistakes).

Once the system of categories was undertood, students were informed that they would occasionally hear a tone coming from the computer at varing intervals, and they were instructed to quickly react to every tone by clicking on the computer mouse with their dominant hand. This tone was presented in a randomized interval of 10-15 seconds. Then they were informed that this same sound signal would appear while they tried to solve the tasks. They were asked to choose the category that best represented what they were doing in each moment. The tone was presened in a randomized interval of 40-45 seconds. Concurrent to the tone, a pop-up appeared on the computer screen. It showed a box with the category system. Students were able to select a category with a mouse-click. Mathematical problems were provided on paper. Students could use that paper to write whatever they needed, with the condition that they had to write their answer on the paper when they finished the task. As data were collected from individual students simultanteoulsy, head-phones were provided in order that other students were not disturbed. Data collection was implemented through Moodle platform (https://moodle.org). A special module was created on the platform, that hosted the evaluation procedure and stored data. In order to acoomplish that, a multidisciplinary team, including psychologists, teachers, and a computer engineer (responsible for all technical issues) collaborated during the study. Students accessed this platform through an individual username and password in order to guarantee their anonymity. Once data were obtained and stored, they were automatically transferred to an Excel file for subsequent processing.

Finally, students who showed difficulties understanding the category system (less than 90% correct responses in categorization test) were excluded from the analyses. Process variables were based on frequency counts. Frequency of each sub-process or category was established by dividing the frequency of election of that category by the total number of elections done across categories. These frequency counts were then transformed into percentages by multiplying the quotient by 100. Finally, students´ achievement in the mathematical tasks was established in terms of success (1) or failure (0) according to the answers given on paper. Given the main aims of this study, centered in the process, RT´s as a meaure of effort were not taken into account for data analyses.

2.4. *Data analyses*

Ex-post-facto descriptive and comparative design was used in this study. After describing the profile of process followed by the total group in each task, Multivariate Analysis of Covariance (MANCOVA) analyses with process variables (8 categories and 3 higher-level categories) as dependent variables, and gender and level as covariates, were conducted in order to investigate differences between groups with different achievement. Tasks were analysed separately in order to determine the importance of task difficulty as a factor explaining these differences. Effects were significant at p < .05 unless otherwise stated. Data were analyzed with SPSS 18. The additional category named “Other” was not taken into account for further analyses.

3. Results

3.1. *Student problem-solving process*

In order to demonstrate if a student´s problem-solving process responds to SRL phases, Figure 1 shows the profile of the process followed by students in Tasks 1 and 2. This profile indicates similar processes for both tasks, characterized by a higher frequency of selected categories in planning and execution phases. The means (Table II) indicated a percentage of 49.46% in Task 1 and 45.53% in Task 2 of the students´ reports referring to planning categories, while those related to execution were 40.43% and 45.95%, respectively. With respect to the revision phase, mean percentages of categories reported within this phase were 10.15% in Task 1 and 7.57% in Task 2 across categories. It must be noted in this case the high means found in the planning phase (even above those found in the execution phase). This is because the planning phase consists of four sub-processes or categories, while the other phases comprise two.

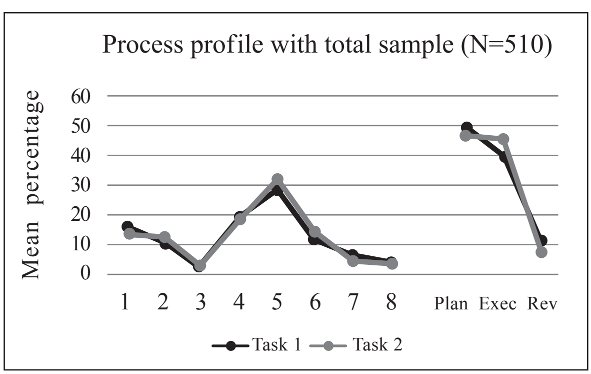


Figure 1. Process profile of the total sample. Tasks 1 and 2.1 = reading; 2 = Drawing or summarizing; 3 = recalling similar problems; 4 = thinking about solutions; 5 = mental calculation; 6 = writing; 7 = reviewing; 8 = Correcting mistakes; Plan = planning phase; Exec = execution phase; Rev = revision phase

In respect to the categories or sub-processes within each phase, in the planning phase “thinking about solutions” and “reading” were the most frequently reported categories, with mean percentages of 19.20% in Task 1 and 17.02% in Task 2 for the first category, and 15.98% and 13.57% respectively for the second category. “Recalling similar problems” was the least reported category or sub-process, although higher in the second task (2.97% in Task 1 and 6.67% in Task 2). “Drawing or summarizing” represented 11.29% of the total categories reported in Task 1 and 12.36% in Task 2, being an important sub-process within planning. With respect to execution phase, “mental calculation” was the category most frequently reported in this phase, with mean percentages of 28.37% in Task 1 and 31.83% in Task 2. “Writing” also represented an important percentage of the categories used, with a 12.09% frequency reported in Task 1, and 14.14% in Task 2. In relation to the revision phase, “reviewing” and “correcting mistakes” were two of the least frequently reported categories by students in both tasks (6.36% in Task 1 and 4.29% in Task 2 for “reviewing”; 3.79% and 3.29 respectively for “correcting mistakes”).

Finally, standard deviations in Table II showed a high variability among the processes shown by students in both tasks, mainly in the categories less reported (“recalling similar problems”, “reviewing” and “correcting mistakes”).

TABLE II

Means and Standard Deviations in process variables.
Total sample (N=510). Tasks 1 and 2.

	Task 1		*Task 2*	
Process variables	*M*	*SD*	*M*	*SD*
Reading	15.98	14.60	13.57	14.66
Drawing or summarizing	11.29	16.56	12.36	19.53
Recalling similar problems	2.97	6.67	2.46	6.53
Thinking about solutions	19.20	17.02	18.19	18.80
Mental calculation	28.37	22.67	31.82	25.10
Writing	12.06	12.07	14.14	14.27
Reviewing	6.36	9.25	4.29	7.73
Correcting mistakes	3.79	7.99	3.29	7.93
Planning phase	49.46	23.10	46.53	26.33
Execution phase	40.43	22.47	45.95	25.73
Revision phase	10.15	13.13	7.57	11.96

3.2. *Process differences between groups with different achievement (success/failure)*

Tables III and IV present the mean scores and standard deviations in process variables for groups with different achievement (Group 1 = success; Group 2 = failure) in Tasks 1 and 2, respectively. Group-compositions revealed the presence of a high proportion of students solving the mathematical problems unsuccessfully. Specifically, 356 students (69.80%) failed to solve the first task while 327 students (60.11%) gave an incorrect answer on the second task. As one of the aims of this study was to know whether there were differences between tasks with varying difficulty, separate analyses for each task were conducted.

For the first task, means in Table III indicated a trend to plan more, and to execute and review less, in the Group 1 (success). MANCOVA analyses showed the presence of statistically significant differences between the groups ($\lambda = .957$; $F_{(11,496)} = 2.012$; $p = .026$; $\eta p^2 = .043$). However, these differences were only found in "drawing or summarizing" ($F_{(1,506)} = 4.548$; $p = .033$; $\eta p^2 = .009$). As happened with planning, this sub-process was more frequently reported by students who successfully solved the task. Gender and grade level, which were included as covariates, did not generate any differences in the process ($p = .461$ and $p = .123$, respectively).

TABLE III
Means and Standard Deviations in process variables for each group. Task 1

	Group 1 (success) *N =154*		*Group 2 (failure)* *N = 356*	
Process variables	*M*	*SD*	*M*	*SD*
Reading	16.79	15.30	15.62	14.30
Drawing or summarizing	13.66	17.78	10.26	15.91
Recalling similar problems	3.37	7.44	2.80	6.31
Thinking about a solution	17.01	16.17	20.15	17.30
Mental calculation	26.62	22.18	29.12	22.86
Writing	12.76	11.26	11.76	12.40
Reviewing	5.88	8.31	6.56	9.63
Correcting mistakes	3.80	6.90	3.78	8.42
Planning phase	50.95	21.07	48.82	23.92
Execution phase	39.37	21.69	40.88	22.81
Revision phase	9.68	12.08	10.36	13.58

With respect to the second task, the means in Table IV showed a different pattern of results, with students who successfully solved the problem reporting using less sub-processes related to planning, and more related to the execution and revision phases. MANCOVA analyses indicated the presence of statistically significant differences between groups (λ = .951; $F_{(11,496)}$ = 2.303; p = .009; ηp^2 = .049). These differences were found in those categories or sub-processes within the planning phase: "reading" ($F_{(11,506)}$ = 5.499; p = .019; ηp^2 = .011), "drawing or summarizing" ($F_{(11,506)}$ = 4.604; p = .032; ηp^2 = .009), "recalling similar problems" ($F_{(11,506)}$ = 5.209; p = .023; ηp^2 = .010) and "thinking about solutions" ($F_{(11,506)}$ = 5.387; p = .021; ηp^2 = .011). Differences in the planning phase were close to statistical significance ($F_{(11,506)}$ = 3.825; p = .051; ηp^2 = .006). Means revealed that students who successfully solved the task (Group 1) reported reading, recalling similar problems, and thinking about solutions less frequently than the other group. As with the first task, successful students also reported using representation strategies (i.e., drawing or summarizing) more frequently than their peers. Gender and level did not generate differences in the process (p = .590 and p = .230, respectively).

TABLE IV
Means and Standard Deviations in process variables for each group. Task 2

	Group 1 (success) *N = 187*		*Group 2 (failure)* *N = 327*	
Process variables	*M*	*SD*	*M*	*SD*
Reading	11.58	11.10	14.68	16.22
Drawing or summarizing	15.03	19.83	10.86	19.23
Recalling similar problems	1.55	4.37	2.97	7.43
Thinking about a solution	15.46	15.54	19.72	20.26
Mental calculation	34.58	23.92	30.27	25.65
Writing	14.14	11.28	14.14	15.72
Reviewing	4.68	7.17	4.07	8.03
Correcting mistakes	3.18	7.37	3.35	8.23
Planning phase	43.54	23.61	48.21	27.63
Execution phase	48.67	23.42	44.43	26.86
Revision phase	7.86	11.36	7.41	12.30

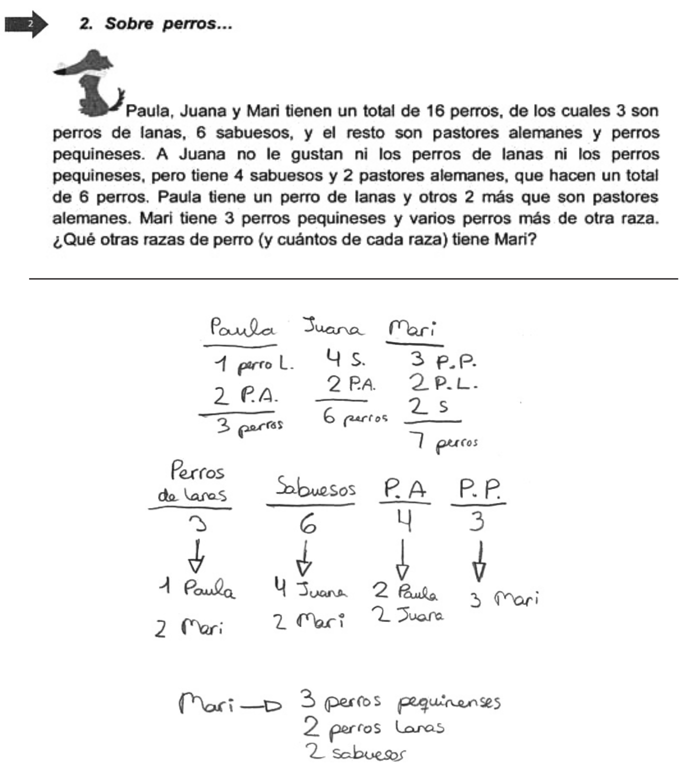
4. Discussion and conclusions

It has been argued that it is essential to identify economic, fast, reliable, and valid techniques to elicit and analyse cognitive processes involved in different cognitive tasks (Ifenthaler, 2008; Ifenthaler, Masduki, & Seel, 2011). In this context, the main aim of this study was to analyse the usefulness of a new assessment tool based on the Triple Task procedure and designed to assess the metacognitive and self-regulated processes shown by the 510 fifth and sixth grade students during the performance of two mathematical problems of varying difficulty. Specifically, this study tried to answer these questions:

Do students follow Self-Regulated Learning stages while they try to solve mathematical problems? Global results indicated the presence of important differences among processes followed by students, as indicated by the high standard deviations. This variability was even higher in the categories or sub-processes less frequently reported by students in general: recalling similar problems, reviewing and correcting mistakes. The pattern of results was similar in both tasks, and was characterized by a lack of evaluation strategies. However, sub-processes related to Planning and Execution phases were the most frequently reported, respectively. These result may seem to contradict some previous research pointing out that student commonly tend to be impulsive in problem-solving situations, spending little time making a plan to develop (Cleary & Chen, 2009; Kramarski & Gutman, 2006; Montague, 2008; Montague et al., 2011; Pennequin et al, 2010; Pereis et al., 2009).

However, despite the fact that these results could indicate that once students properly planned an activity, making mistakes became less likely and reviewing activities less necessary, students' achievements in both tasks revealed a high proportion of failure. This indicated that planning strategies were not effective enough. In fact, an analysis of the sub-processes involved in the planning phase revealed that thinking about solutions and reading were the most frequently reported sub-processes within planning, while the use of potentially more useful strategies such as information representation and organization were less frequent among students. This result could indicate a trend to use passive solving strategies or even comprehension difficulties.

Are there differences in the processes followed by students with different achievements in the tasks? Analyses revealed the existence of statistically significant differences between groups. These differences were located in the sub-process of drawing or summarizing in Problem 1, while significant differences were found in all the sub-process within the planning phase in Problem 2. The existence of more significant differences in this second problem could be related to its characteristics (i.e., more complex relationships to stablish, parameters to calculate, etc.). Thus, this task may result more difficult, suggesting a more important role of planning strategies when problem difficulty and demands increase. Regarding the pattern of differences, students who successfully solved the tasks tended to draw and summarize more, but they recalled similar problems, read and thought about solutions proportionally less than those who failed to solve the tasks. These results are consistent with the statement above about the effectiveness of planning strategies, and suggest the use of more active processes by students with high achievement. In this sense, the strategy that showed to be effective in both tasks was drawing or summarizing (i.e. using information representation and organization strategies). Making this kind of representations would correspond to the "translation" process, characterized as an essential part of solving mathematical problems by many authors (Abdullah, Zakaria, & Halim, 2012; Csíkos, Szitányi, & Keleme, 2012; Díez-Palomar, Menéndez, & Civil, 2011; Pantziara, Gagatsis, & Elia, 2009; Stylianou, 2011). An example of graphical representation, made by a participant in this study, is shown in Figure 2.


2. Sobre perros...

Paula, Juana y Mari tienen un total de 16 perros, de los cuales 3 son perros de lanas, 6 sabuesos, y el resto son pastores alemanes y perros pequineses. A Juana no le gustan ni los perros de lanas ni los perros pequineses, pero tiene 4 sabuesos y 2 pastores alemanes, que hacen un total de 6 perros. Paula tiene un perro de lanas y otros 2 más que son pastores alemanes. Mari tiene 3 perros pequineses y varios perros más de otra raza. ¿Qué otras razas de perro (y cuántos de cada raza) tiene Mari?

Paula	Juana	Mari
1 perro L.	4 S.	3 P.P.
2 P.A.	2 P.A.	2 P.L.
		2 S
3 perros	6 perros	7 perros

Perros de lanas	Sabuesos	P.A	P.P.
3	6	4	3
1 Paula	4 Juana	2 Paula	3 Mari
2 Mari	2 Mari	2 Juana	

Mari → 3 perros pequinenses
2 perros Lanas
2 sabuesos

Figure 2. Example of students' answers in the second task

The use of graphic representations supposses an important part of planning strategies. As Montague and others (2011, p. 263) argued, *"problem representation involves translating and transforming linguistic and numerical information into verbal, graphic, symbolic, and quantitative representations that show the relationships among the problem parts prior to generating appropriate mathematical equations or algorithms for problem solution"*. In fact, Abdullah and others (2012) showed in their study that when the teaching approaches encourage students to apply thinking strategies through using visual representation, students are able to gain a better conceptual understanding and eventually improve their mathematics achievement. They attributed this effect to a more active involvement of students in their learning process. However, representation is not only a matter of copying what one sees. As the example above shows, it involves a process of personal re-organization, inventing or adapting conventions of a representational system for the purpose at hand (Stylianou, 2011).

Are there differences between tasks with varying difficulty? Although differences in the main phases of planning, execution and review were not statistically significant, analyses revealed the existence of significant differences in the sub-process involved in planning, separately. In this way, differences in the metacognitive process showed by the groups with different achievement were stronger in Task 2, which implied more relationships to stablish and maybe more complex. This would initially suggest a more important role of planning strategies when task difficulty and demands increase.

In summary, the results found in this study would seem to contradict those studies that indicated that students do not plan, jumping immediately to calculations without considering alternatives to solve problems or giving impulsive responses (Cleary & Chen, 2009; Kajamies et al., 2010; Kramaski & Gutman, 2006). In fact, students in this study reported having planned. However, an in-depth analysis of the sub-process involved in planning revealed the presence of ineffective planning strategies implemented by the overall group, which was translated into a greater percentage of failure in both problems. In this sense, another important finding of this study is that students had serious difficulties to evaluate their progress. They also showed a tendency to use familiar procedures, such as performing calculations, as a method to solve the problems. Thus, students in this study did not self-regulate or implement effective metacognitions during problem solving. However, differences between groups with different achievement levels suggested that, despite the fact that students did not show a properly self-regulated process, a proportion of them were able to use more effective and active strategies while solving the problems, such as organizing or representing the information. This is in fact an important determinining factor in successful mathematical problem solving. Finally, the use of effective planning strategies seemed to be most important when the task difficulty and demands are greater.

These findings add evidence to the utility of process measures, specifically those based on directed and concurrent self-reporting, in the assessment of cognitive activities (in this case mathematical problem-solving tasks). The usefulness of the assessment tools presented in this studylies, however, in the systems of categories designed, which makes it possible to divide mathematical problem-solving tasks into sub-processes or isolated activities, and provides in-depth insights about a student's strengths or weaknesses, thereby helping to understand their success or failure from the point of view of SRL. This is not only important for instruction, but specially for student learning. In this sense, as Ifenthaler (2012) pointed out, the key link between knowledge about (and the regulation of) one's own problem-solving activities may lie in reflective thinking. Making students aware of their own learning processes may help them generate information about the efficiency of their problem-solving strategies and successfully implement that knowledge in the ongoing problem-solving process, thereby being able to control and regulate their cognition, effort and behavior.

It is necessary to acknowledge, however, the following limitations in the present study: first, as self-regulation is a cyclical process (Zimmerman, 2000), analyzing the recursion of the process followed by students may bring useful information about its temporal course and the metacognitive mechanisms involved. In this sense, identifying different patterns of performance may also help to reduce the high variability whithing-subjets found in this study; second, motivational and affective components, such as self-efficacy beliefs, task interest and perceived instrumentality, have been demonstrated to play an important role in mathematical performance and problem solving situations (Ahmed, Minnaert, Kuyper, & Van der Werf, 2012; Cueli, García y González-Castro, 2013; Dettmers et al.; Hoffman, 2010). The study conducted by Ahmed et al. (2012) revealed that a good students´ performance in addition and subtraction tasks was related not only to the student's use of advanced mathematics strategies and SRL competence, but also to the ability attribution for success, effort attribution for failure, and high perceived self-efficacy when using specific strategies; third, it would be interesting to extend the number of mathematical problems, also adding different levels of difficulty, which would provide more accurate information about the influence of task difficulty in problem-solving processes; additionally, in order to provide support to the usefulness of the tool applied in this study as a measure of self-regulatory processes involved in mathematical problem solving, analyzing its relationship with other standardized instruments such as questionnaires and interviews would be useful. Complementary use of both measures would provide a better understanding of self-regulatory mechanisms exhibited by the students, thus helping to design more adapted instructional strategies; finally, and given the characteristics of the sample (students belonged to different schools in a specific area in Northern Spain), extending the research to other areas would be advisable in order to better stablish the scope of the findings. This is, however, the first approach to the study of the usefulness of the Triple Task technique in the assessment of the process involved in solving mathematical problems. Therefore, the results from the present study actually open the way for future research. In this sense, it would be interesting, for example, to conduct multi-level modeling that would take in to account school level effects.

Acknowledgments

Grants awarded to the authors from a project of the Principality of Asturias (FC-15-GRUPIN14-053), and the Severo Ochoa Program-FICYT (BP: 11-067) supported this work. We thank Steve Loew for his kind assistance on the preparation of this manuscript.

References

Abdullah, N., Zakaria, E. & Halim, L. (2012). The Effect of a Thinking Strategy Approach through Visual Representation on Achievement and Conceptual Understanding in Solving Mathematical Word Problems. *Asian Social Science, 8*(16), 16-340. doi:10.5539/ass.v8n16p30

Ahmed, W., Minnaert, A., Kuyper, H. & Van der Werf, G. (2012). Reciprocal relationships between math self-concept and math anxiety. *Learning and individual differences, 22*(3)*,* 385-389. doi: 10.1016/j.lindif.2011.12.004

Azevedo R. & Cromley, J.G. (2004). Does training of self- regulated learning facilitate student's learning with hypermedia? *Journal of Educational Psychology, 96*(3), 523–535. doi: 10.1037/0022-0663.96.3.523

Bransford, J. D. & Stein, B. S. (1993). *The ideal problem solver: A guide for improving thinking, learning and creativity (2nd ed.)*. New York, United States: W. H. Freeman.

Butler D. L. & Cartier S. C. (2005). *Multiple complementary methods for understanding self-regulated learning as situated in context.* Accepted for presentation at the April 2005 Annual Meetings of the American Educational Research Association, Montreal, QC.

Cleary, T. J. & Chen, P. P. (2009). Self-regulation, motivation, and math achievement in middle school: Variations across grade level and math context. *Journal of School Psychology, 47*(5), 291–314. doi: 10.1016/j.jsp.2009.04.002

Csíkos, C., Szitányi, J. & Keleme, R. (2012). The effects of using drawings in developing young children's mathematical word problem solving: A design experiment with third-grade Hungarian students. *Educational Studies in Mathematics, 81*(1), 47–65. doi: 10.1007/s10649-011-9360-z

Cueli, M., García, T. & González-Castro, P. (2013). Autorregulación y rendimiento académico en Matemáticas. [Self-regulatio and academic achievement in Mathematics]. *Aula Abierta, 41*(1), 39-48.

Dettmers, S., Trautwein, U., Lüdtke, O., Goetz, T., Frenzel, A. & Pekrun, R. (2011). Students' emotions during homework in mathematics: Testing a theoretical model of antecedents and achievement outcomes. *Contemporary Educational Psychology, 36*(1), 25–35. doi: 10.1016/j.lindif.2011.04.006

Díez-Palomar, J., Menéndez, J. M. & Civil, M. (2011). Learning mathematics with adult learners: drawing from parents´ perspective. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 14*(1), 71-94.

Fidalgo, R., Torrance, M., Robledo, P. y García, J. N. (2009). Dos enfoques metacognitivos de intervención: auto-conocimiento del producto textual frente a auto-regulación del proceso de escritura. *Revista de Psicología INFAD, International Journal of Developmental and Educational Psychology, 1*(1), 303-312.

Gálvez, G., Cosmelli, D., Cubillos, L., Leger, A. M., Mena, A., Tanter, E.,... y Soto-Andrade, J. (2011). Estrategias cognitivas para el cálculo mental. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 14*(1), 9-40.

García, T. y González-Pienda, J. A. (2012). Evaluación del proceso de Aprendizaje Autorregulado en el área de las Matemáticas mediante pizarras digitales. En J. Dulac y C. Alconada (Coord.), *III Congreso Pizarra Digital. Publicación de comunicaciones* (pp.105-117). Madrid, España: Pluma y Arroba.

García, J. N., Rodríguez, C., Pacheco, D. & Diez, C. (2009). Influence of cognitive effort, sustained attention, working memory and ADHD symptoms in the process and product of written composition. An experimental study. *Estudios de Psicología, 30*(1), 31-50. doi: 10.1174/021093909787536326

Geary, D. C. (2004). Mathematics and learning disabilities. *Journal of Learning Disabilities, 37*(1), 4–15. doi: 10.1177/00222194040370010201

Greene, J. A. & Azevedo, R. (2010). The measurement of Learners' Self-Regulated Cognitive and Metacognitive Processes While Using Computer-Based Learning Environments. *Educational Psychologist, 45*(4), 203-209. doi: 10.1080/00461520.2010.515935

Hoffman, B. (2010). "I think I can, but I'm afraid to try": The role of self-efficacy beliefs and mathematics anxiety in mathematics problem solving efficiency. *Learning and Individual Differences, 20*(3), 276–283. doi: 10.1016/j.lindif.2010.02.001

Ifenthaler, D. (2008). Practical solutions for the diagnosis of progressing mental models. In D. Ifenthaler, P. Pirnay-Dummer & J. M. Spector (Eds.), *Understanding models for learning and instruction*. *Essays in honor of Norbert M. Seel* (pp. 43-61). New York, United States: Springer.

Ifenthaler, D., Masduki, I. & Seel, N. M. (2011). The mystery of cognitive structure and how we can detect it. Tracking the development of cognitive structures over time. *Instructional Science, 39*(1), 41-61. doi: 10.1007/s11251-009-9097-6

Ifenthaler, D. (2012). Determining the effectiveness of prompts for self-regulated learning in problem-solving scenarios. *Educational Technology & Society, 15*(1), 38–52.

Jarero, M., Aparicio, E. & Sosa, L. (2013). Pruebas escritas como estrategia de evaluación de aprendizajes matemáticos. Un estudio de caso a nivel superior. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 16*(2), 213-243. doi: 10.12802/relime.13.1623

Kajamies, A., Vauras, M. & Kinnunen, R. (2010). Instructing low-achievers in mathematical word problem solving. *Scandinavian Journal of Educational Research, 54*(4), 335–355. doi: 10.1080/00313831.2010.493341

Kramarski, B. & Gutman, M. (2006). How can self-regulated learning be supported in mathematical E-learning environments? *Journal of Computer Assisted Learning,* 22(1), 24–33. doi: 10.1111/j.1365-2729.2006.00157.x

Lazakidou, G. & Retalis, S. (2010). Using computer supported collaborative learning strategies for helping students acquire self-regulated problem-solving skills in mathematics. *Computers & Education 54*(1)*,* 3-13. doi: 10.1016/j.compedu.2009.02.020

Montague, M. (2008). Self-Regulation and Mathematics Instruction. *Learning Disabilities Research & Practice, 22*(1), 75–83. doi: 10.1111/j.1540-5826.2007.00232.x

Montague, M., Enders, G. & Dietz, S. (2011). Effects of cognitive strategy instruction on math problem solving of middle school students with learning disabilities. *Learning Disability Quarterly, 34*(4), 262-272. doi: 10.1177/0731948712463368

Olive, T., Kellogg, R. T. & Piolat, A. (2002). The Triple Task technique for studying the processus of writing: why and How? In G. Rijlaarsdam (Series Ed.), Studies in Writing & T. Olive, & C. M. Levy (Vol. Eds.), *Contemporary tools and techniques for studying writing* (pp. 31–59). Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Ostad, A. & Sorenson, P. M. (2007). Private speech and strategy- use patterns: Bidirectional comparisons of students with and without mathematical disabilities in a developmental perspective. *Journal of Learning Disabilities, 40*(1), 2–14.

Pantziara, M., Gagatsis, A. & Elia, I. (2009). Using diagrams as tools for the solution of non-routine mathematical problems. *Educational Studies in Mathematics, 72*(1), 39–60. doi: 10.1007/s10649-009-9181-5

Pennequin, V., Sorel, O., Nanty, I. & Fontaine, R. (2010). Metacognition and low achievement in mathematics: The effect of training in the use of metacognitive skills to solve mathematical word problems. *Thinking and Reasoning, 16*(3), 198-220. doi: 10.1080/13546783.2010.509052

Pereis, F., Dignath, C. & Schmitz, B. (2009). Is it possible to improve mathematical achievement by means of self-regulation strategies? Evaluation of an intervention in regular math clases. *European Journal of Psychology of Education, 24*(1), 17-29. doi: 10.1007/BF03173472

Piolat, A., Kellogg, R. T. & Farioli, F. (2001). The Triple Task technique for studying writing processes: on which task is attention focused? *Current Psychology Letters. Brain, Behavior and Cognition, 4,* 67–83.

Piolat, A. & Olive, T. (2000). Comment étudier le coût et le déroulement de la rédaction de textes? La méthode de la triple-tâche: Un bilan méthodologique. *L'Anneé Psychologique, 100*(3)*,* 465–502.

Piolat, A., Olive, T. & Kellogg, R.T. (2005). Cognitive effort during note taking. *Applied Cognititive Psychology, 19*(3)*,* 291–312. doi: 10.1002/acp.1086

Piolat, A., Barbier, M. L. & Roussey, J. Y. (2008). Fluency and cognitive effort during first and second-language note taking and writing by undergraduate students. *European Psychologist, 13*(2), 114–125. doi: 10.1027/1016-9040.13.2.114

Rosário, P., Mourão, R., Núñez, J. C., González-Pienda, J. A. & Solano, P. (2008). Storytelling as a promoter of Self-Regulated Learning (SRL) throughoutschooling. In A. Valle, J.C. Núñez, R.G. Cabanach, J.A. González-Pienda, & S. Rodríguez (Eds.), *Handbook of instructional resources and their applications in the classroom* (pp. 107-122). New York, United States: Nova Science.

Rosenzweig. C., Krawec, J. & Montague, M. (2011). Metacognitive strategy use of eighth-grade students with and without learning disabilities during mathematical problem solving: A Think-Aloud analysis. *Journal of Learning Disabilities, 44*(6), 508-520. doi: 10.1177/0022219410378445

Schmitz, B. & Perel, P. (2011). Self-monitoring of self-regulation during math homework behaviour using standardized diaries. *Metacognition and Learning, 6,* 255–273. doi: 10.1007/s11409-011-9076-6

Shea, P. & Bidjerano, T. (2010). Learning presence: Towards a theory of self-efficacy, self-regulation, and the development of a communities of inquiry in online and blended learning environments. *Computer & Education, 55*(4), 1721–1731. doi:10.1016/j.compedu.2010.07.017

Stylianou, D. A. (2011). An examination of middle school students' representation practices in mathematical problem solving through the lens of expert work: towards an organizing scheme. *Educational Stududies in Mathematics, 76*(3)*,* 265–280. doi: 10.1007/s10649-010-9273-2

Throndsen, I. (2011). Self-regulated learning of basic arithmetic skills: A longitudinal study. *British Journal of Educational Psychology, 81,* 558–578**.** doi: 10.1348/2044-8279.002008

Torrance, M. & Galbraith, D. (2006). The rocessing demands of writing. In MacArthur, C., Graham, S. & Fitzgerald, J. (Eds.), *Handbook of Writing Research* (pp. 67-80). New York, United States: The Guilford Press.

Veenman M. V. J. (2005). The assessment of metacogni-tive skills: what can be learned from multi-method designs? In B. Moschner & C. Artelt (Eds.), *Lernstrategien und Metakognition: Implikationen fur Forschung und Praxis* (pp. 75–97). Berlin, Germany: Waxmann.

Veenman, M. V. J. (2011). Learning to self-monitor and self-regulate. In R. Mayer & P. Alexander (Eds.), *Handbook of research on learning and instruction* (pp. 197-218). New York, United States: Routledge.

Verschaffel, L., Greer, B. & De Corte, E. (2000). *Making sense of word problems*. Lisse, Netherlands: Swets & Zeitlinger.

Voyer, D. (2011). Performance in mathematical problem solving as a function of comprehencion and aritmetic skills. *Journal of Science and Mathematics Education, 9*(5)*,* 1073-1092. doi: 10.1007/s10763-010-9239-y

Whimbey, A. & Lochhead, J. (1999). *Problem-solving and comprehension.* Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Williams, J. R. (2008). Revising the Declaration of Helsinki. *World Medical Journal, 54,* 120–125. Obtained from http://www.ncbi.nlm.nih.gov/pmc/articles/PMC2681053/

Zimmerman, B. J. (2000). Attaining self-regulation. A social cognitive perspective. In M. Boekaerts, P. R. Pintrich, & M. Zeidner (Eds.), *Handbook of self-regulation* (pp. 13–39). San Diego, United States: Academic Press.

Zimmerman, B. J. & Schunk, D. H. (2008). Motivation: An essential dimension of self-regulated learning. In D. H. Schunk & B. J. Zimmerman (Eds.), *Motivation and self-regulated learning. Theory, research, and applications* (pp. 1–30). New York, United States: Routledge.

Autores

Trinidad García. Universidad de Oviedo, España. garciatrinidad@uniovi.es

Lucy Betts. Nottingham Trent University, UK. lucy.betts@ntu.ac.uk

Paloma González-Castro. Universidad de Oviedo, España. mgcastro@uniovi.es

Julio Antonio González-Pienda. Universidad de Oviedo, España. julioag@uniovi.es

Celestino Rodríguez. Universidad de Oviedo, España. rodriguezcelestino@gmail.com

Célia Dias, Leonor Santos

PORTEFÓLIO REFLEXIVO DE MATEMÁTICA ENQUANTO INSTRUMENTO DE AUTORREGULAÇÃO DAS APRENDIZAGENS DE ALUNOS DO ENSINO SECUNDÁRIO

Reflective portfolio of mathematics as a tool for self-regulation of learning for high school students

RESUMEN

El presente estudio tuvo como objetivo analizar aspectos del aprendizaje de las matemáticas de los estudiantes de secundaria en situaciones mediadas por un dispositivo para la evaluación para el aprendizaje. En concreto, se estudiaron los procesos que tres estudiantes utilizaron cuando se desarrolló un portafolio de matemáticas. El trabajo se centra en la actividad del estudiante, y la mayoría de las decisiones fueron transferidas al estudiante. El análisis del contenido del texto escrito en el portafolio aporta explicaciones sobre aspectos cognitivos y metacognitivos del pensamiento matemático del alumno durante la construcción de dicho portafolio. El portafolio es una manera efectiva y práctica de ejercer una diferenciación pedagógica y ofrece, en un modo continuo y sistemático, el desarrollo de procesos metacognitivos que permitan el desarrollo de un aprendizaje autorregulado.

PALABRAS CLAVE:

- *Portafolio*
- *Evaluación para el aprendizaje*
- *Autorregulación*
- *Aprendizaje de las matemáticas*
- *Procesos metacognitivos*

ABSTRACT

This study aims to analyze various aspects of mathematical learning of high school students mediated by a device of assessment for learning. Specifically, we have studied the processes used by three students whilst developing a mathematics portfolio, during which the majority of decisions were taken by them. During the elaboration of the portfolio, cognitive and metacognitive aspects of mathematical thinking were identified. The portfolio is an effective and practical way to create a pedagogical differentiation and to provide, in an ongoing and systematic way, the development of metacognitive processes that enable the development of a self-regulated learning.

KEY WORDS:

- *Portfolio*
- *Assessment for learning*
- *Self-assessment*
- *Mathematics learning*
- *Metacognitive processes*

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (2016) *19* (2): 187-216.
Recepción: Abril 21, 2014 / Aceptación: Junio 21, 2015. DOI: 10.12802/relime.13.1923

RESUMO

O presente estudo teve por objetivo analisar aspetos da aprendizagem matemática de alunos do ensino secundário em situações mediadas por um dispositivo de avaliação reguladora da aprendizagem. Concretamente foram estudados os processos que três alunos usaram quando elaboraram um portefólio de matemática, onde a maioria das decisões foram por si tomadas. Na elaboração do portefólio, ao longo das sucessivas entradas e versões, foram explicitados aspetos cognitivos e metacognitivos do pensamento matemático. O portefólio constitui uma forma eficaz e prática de exercer uma diferenciação pedagógica e proporciona, de forma continuada e sistemática, o desenvolvimento de processos metacognitivos propícios ao desenvolvimento de uma aprendizagem autorregulada.

PALAVRAS CHAVE:

- *Portefólio*
- *Avaliação reguladora*
- *Autorregulação*
- *Aprendizagem matemática*
- *Processos metacognitivos*

RÉSUMÉ

L´étude présentée visait à analyser certains aspects de l'apprentissage des mathématiques dans le cycle secondaire en situations induites par un dispositif d´évaluation régulatrice des apprentissages. Plus précisément, nous avons étudié l´activité de trois étudiants au cours du processus de création d´un portfolio, dont ils ont pris la plupart des décisions. En rédigeant leur portfolio, ils ont explicité des aspects cognitifs et métacognitifs essentiels de leur pensée mathématique au cours des activités. Le portfolio est un mode efficace et pratique pour différentier les apprentissages pédagogiquement et d´une façon continue et systématique. Il stimule une activité métacognitive qui favorise l´autorégulation des apprentissages.

MOTS CLÉS:

- *Portefeuilles*
- *Évaluation pour l'apprentissage*
- *Autorégulation*
- *Apprentissage des mathématiques*
- *Processus métacognitifs*

1. Introdução

A autorregulação das aprendizagens é uma capacidade essencial para a promoção das aprendizagens e do desempenho académico (Zumbrunn, Tadlock, & Roberts, 2011). Mas o desenvolvimento desta capacidade não acontece por acaso ou de forma automática. Envolve o professor em interações de ensino específicas (De Corte, Mason, Depaepe, & Verschaffel, 2011; Zimmerman, 2000). É desta forma que a avaliação, aqui designada por “avaliação reguladora” das aprendizagens, passa a ter um elevado nível de complexidade, uma vez que se foca no processo de aprendizagem e não apenas nos produtos finais e cada aluno desempenha um papel ativo, reflexivo e responsável.

Contudo, a regulação das aprendizagens e a autorregulação, em particular, levantam ainda muitas questões relativas às situações de aprendizagem que potencializam a responsabilidade e a automonitorização dos alunos (Tardif, 2007). O portefólio tem vindo a ser apontado pela investigação como uma via que favorece uma aprendizagem autónoma e autorregulada, qualquer que seja a idade dos alunos, desde que sustentado por intervenções intencionais por parte do professor (e.g. Belgrad, 2013; Bondoso e Santos, 2009; Klenowski, 2002; Santos & Pinto, 2010). No entanto, pouco têm sido os estudos que evidenciam quais os processos cognitivos associados a estes processos de aprendizagem autorregulada desenvolvidos neste contexto. Acresce o facto de ainda ser escassa, em Portugal, a investigação no âmbito da avaliação reguladora em alunos do ensino secundário. Assim, o presente estudo tem por objetivo compreender em que medida o portefólio pode contribuir para a aprendizagem de alunos do 11.º ano na disciplina de Matemática A[1], nomeadamente para a aprendizagem autorregulada. A escolha da disciplina de Matemática justifica-se por ser uma disciplina fulcral no currículo escolar dos alunos, por razões de natureza social, cultural e política. Para tal, procurou-se responder à seguinte questão: que processos cognitivos associados a processos de aprendizagem autorregulada são postos em prática pelos alunos para melhorar as suas produções matemáticas no contexto do desenvolvimento de um portefólio?

2. Enquadramento teórico

A expressão *avaliação reguladora* encerra em si a mesma ideia da avaliação dita “formativa” – contribuir para a aprendizagem dos alunos. A diferença está em que, na avaliação reguladora, durante o processo de ensino e aprendizagem, tem-se em consideração o desenrolar das tarefas. Os alunos têm oportunidade de criar, pensar/refletir sobre o que criaram, refazer e assim sucessivamente até à apresentação do produto acabado. Ao mesmo tempo, o professor acompanha todo o processo evolutivo do aluno (Santos, 2010). Trata-se pois de uma prática

[1] Disciplina de Matemática para os alunos que prosseguem estudos na área das ciências.

avaliativa de natureza interativa, que deixa de estar cingida a momentos formais de avaliação (Pinto & Santos, 2006). É uma avaliação que acontece no quotidiano da sala de aula, "dia-a-dia", "minuto a minuto" (Wiliam, 2007; 2013). A avaliação passa então a ser entendida como um processo de comunicação (Pinto & Santos, 2006) integrada no ato de aprender, como uma forma de "acompanhamento do ensino e da aprendizagem" (Santos, 2008, p. 13).

O estudo, que assenta numa operacionalização da avaliação reguladora, assume que a aprendizagem se processa através de um processo de mediação (Vygotsky, 1987). Considera-se ainda estar presente o conceito de Zona de Desenvolvimento Proximal (ZDP), que é aqui entendido como um espaço simbólico de interação e comunicação, no qual podemos incluir diálogos propriamente ditos (e.g. aluno-professor) ou diálogos internos, uma vez que o mesmo discurso, que medeia a interação social, pode ser usado como o principal mediador da atividade cognitiva, num processo que se pretende que seja de crescente autorregulação.

A autorregulação da aprendizagem é um constructo multidimensional que, segundo Zimmerman (2000), engloba as componentes metacognitiva, motivacional e comportamental. Considera-se que um aluno é autorregulado, na medida em que ele for ativo no conjunto destas três dimensões. A metacognição pode ser entendida como o conhecimento que alguém tem sobre a sua própria cognição e também a monitorização desta (Flavell, 1979). É por esta razão que um dos processos metacognitivos mais importantes é o da automonitorização, que é aqui entendida como uma atenção deliberada aos aspetos externos (reações dos outros, condições do meio) e internos (pensamentos, sentimentos) que ocorrem durante a ação em curso (Silva, Duarte, Sá, & Simão, 2004).

Na dimensão motivacional, salienta-se que a motivação de um aluno para aprender é fortemente influenciada por um sistema de crenças (Hannula, 2006), como as crenças sobre as suas próprias competências ou sobre o valor que tem a aprendizagem. A dimensão comportamental considera, para além de se saber o que é para fazer e como fazer, a execução dos procedimentos adequados (Zimmerman, 2000).

Na disciplina de Matemática, o desenvolvimento da capacidade de autorregulação é feito através do ensino da resolução de problemas e do desenvolvimento do raciocínio matemático (Schoenfeld, 1992). Também há que ter em conta que todos os processos envolvidos no pensamento matemático, mesmo que pareçam simples, não são automáticos e só se tornam "rotineiros" para o aluno depois de lhes ter sido dada atenção específica e sistemática no sentido de uma sua tomada de consciência (Mason, Burton, & Stacey, 1982).

Os processos usados quando se pensa matematicamente apresentados na literatura são diversos e não há uma ordem “rígida” ou pré-estabelecida entre eles (Frobisher, 1994). No entanto, pode afirmar-se que há processos mais estritamente relacionados com a matemática, como a formulação de conjeturas (Pirie, 1987), e há outros que são independentes dos conteúdos matemáticos mas que se aplicam a estes quando se resolvem problemas em matemática, como sejam processos de comunicação (Frobisher, 1994) ou o processo de reflexão (Pirie, 1987).

Comunicação e reflexão são processos intimamente relacionados na aprendizagem matemática. Por um lado, através da comunicação, as ideias tornam-se objeto de reflexão, discussão e aperfeiçoamento (NCTM, 2000; Pugalee, 2004). A *Comunicação* é um dos temas transversais no ensino secundário em Portugal e uma das cinco normas de processo enfatizada pelo NCTM (2000). Por outro lado, a aprendizagem resulta da atividade realizada e da reflexão que sobre ela se efetua (Ponte, 2005). Todo o ato de refletir implica uma atitude ativa e persistente daquilo que se pratica e acredita, tendo subjacente aquilo que se pretende e as suas consequências (Dewey, 1997). Assim, a escrita é promotora da reflexão e da consciência sobre os processos matemáticos e da autorregulação (Kosko & Wilkins, 2010; Powell & Bairral, 2006). De facto, a escrita requer uma estruturação deliberada de uma teia de significados, um discurso interior, de modo que seja plenamente compreensível para quem escreve (Vygotsky, 1987). A reflexão contribui para que seja possível comunicar de forma adequada e compreensível para os outros. Os alunos que escrevem para explicar ou descrever estratégias ou conceitos experimentam uma melhoria na sua capacidade de resolver problemas, de trabalhar estrategicamente e de comunicar matematicamente (Santos & Semana, 2015), por outras palavras, melhoram a sua aprendizagem matemática.

É de fazer notar que tarefas complexas e abertas constituem um contexto de aprendizagem em aulas onde os alunos são incentivados a desenvolver a autorregulação (Tardif, 2007). Este é, por exemplo, o caso da utilização de portefólios em contexto escolar que representa uma forma adequada de desenvolvimento da comunicação e da reflexão. Com efeito, o estabelecimento de diálogos internos transpostos para a forma escrita e o *feedback* escrito, fornecido pelo professor, a cada versão das entradas do portefólio, no qual o aluno se apoia para melhorar numa nova versão, estimulam a reflexão, a reorganização e a clarificação de ideias (Pinto & Santos, 2006). Desta forma, a exploração do portefólio torna possível uma prática de avaliação reguladora que não existe sem a utilização deliberada, sistemática, didática e pedagógica de um sistema de *feedback* que apoie, regule e melhore os processos de aprendizagem, tornando o aluno mais ágil na utilização das suas competências metacognitivas (Klenowski, 2002).

O sentido que aqui é atribuído ao portefólio é o adotado por Santos (2010): "uma coleção de produções feitas pelo aluno, individualmente ou em grupo, na sala de aula ou fora dela, consciente e criteriosamente selecionadas, e justificadas através de reflexões que devem acompanhar cada produção" (p. 8), "de forma a poder proporcionar uma visão tão alargada e pormenorizada quanto possível das diferentes componentes do seu desenvolvimento (e.g., cognitivo, metacognitivo, afetivo, moral)" (Fernandes, Neves, Campos, Conceição, & Aliaz, 1994, pp. 2-3).

Independentemente das diferentes conceções, objetivos específicos e formatos por que se opte, os portefólios em educação têm certas dimensões ou focos em comum. Destaca-se em primeiro lugar, com efeito interativo, a reflexão e a comunicação, pelo que já foi referido. Em segundo, o envolvimento e a motivação, uma vez que, envolvendo o aluno no processo de aprendizagem, os processos sistemáticos de reflexão e de autoavaliação implicam-no fortemente nas tarefas de aprendizagem. É desta forma que se vai construindo o conhecimento e se promove a sua autonomia, que é a forma mais eficaz de motivação. Com efeito retroativo, a visibilidade, através da obtenção de uma imagem, tão nítida quanto possível, das aprendizagens que o aluno desenvolveu ao longo de um dado período de tempo, das suas experiências, dificuldades e progressos, pode ser usada para fornecer evidências e demonstrar a responsabilidade no cumprimento de normas e de medidas de referência. Por estas razões, o portefólio, visto de uma perspetiva de avaliação e de aprendizagem, é considerado uma das formas mais holísticas de avaliação (Fernandes, 2008; Klenowski, 2002; Santos, 2010).

3. Metodologia

3.1. *Opções metodológicas*

A opção por uma abordagem interpretativa deveu-se ao facto de se considerar que os objetos e os acontecimentos só por si não têm qualquer significado. Este é-lhes atribuído pelos indivíduos (Yin, 2002), não sendo geralmente diretamente observáveis nem facilmente percetíveis. Trata-se de aspetos implícitos, subentendidos na ação (Burns, 2000).

O *design* do estudo foi o estudo de caso e foram selecionados três alunos como casos de forma a garantir diversidade entre estes. Os critérios de seleção diferenciadores considerados foram o desempenho na disciplina e a relação com a Matemática (ver Tabela 1) por se considerar que são dois fatores que poderão influenciar formas diversas de trabalho com o portefólio dado este instrumento exigir autonomia e persistência por parte do aluno, favorecendo uma autorregulação da aprendizagem (Zimmerman, 2000). Os três alunos foram selecionados de entre os alunos de uma turma de Matemática A, do 11.º ano de escolaridade (alunos com 16 anos de idade), que tiveram a investigadora (1ª autora deste artigo) como professora titular no ano letivo a que se refere este estudo e no ano anterior. Os nomes usados para referenciar os alunos são fictícios de forma a garantir questões de ordem ética.

TABELA I
Critérios diferenciadores dos casos

	Dália	*Lara*	*Francisco*
Nível de desempenho na disciplina no ano letivo transato	Bom Classificações maioritariamente acima dos 16 valores.	Fraco Classificações maioritariamente inferiores a 10 valores.	Médio Classificações maioritariamente entre os 10 e 13 valores.
Relação com a disciplina	Gosta da disciplina porque se "decora pouca coisa".	Não gosta da disciplina e raramente estuda para ela.	Gosta da disciplina e considera que estuda para ela.

A recolha de dados foi feita através de recolha documental e entrevistas. Da recolha documental sobressaem não só todas as versões das entradas do portefólio, mas também a compilação de todos os *e-mails* trocados entre a professora e os alunos, de onde foram retirados os *feedbacks* fornecidos. As duas entrevistas semiestruturadas, realizadas a cada aluno caso, foram acompanhadas de guiões e decorreram ao fim da terceira e sexta (a última) entradas do portefólio. Com a primeira entrevista, procurou-se captar a forma como os alunos encaravam a Matemática, como se viam a si próprios como alunos de Matemática, como estudavam para esta disciplina, como lidavam com as dificuldades e erros, e quais as suas vivências na realização do portefólio. Com a segunda entrevista procurou-se saber os processos e recursos que utilizaram na elaboração do portefólio, a forma como estruturam e organizaram as suas ações e o balanço que faziam sobre o desenvolvimento deste instrumento.

No processo de análise de dados, procedeu-se primeiramente à sua redução, depois à apresentação e interpretação das conclusões (Bardin, 2011). Assim, após a escolha dos participantes, foram selecionados os aspetos mais relevantes das transcrições das entrevistas, dos conteúdos dos *e-mails* e das várias versões do portefólio. A apresentação foi elaborada a partir de um conjunto de categorias que se foram salientando ao longo da recolha dos dados. Finalmente, para além da descrição dos factos, procedeu-se à sua interpretação à luz dos conceitos teóricos estudados, num vaivém entre observação, reflexão e interpretação. Neste trabalho, cada caso foi analisado separadamente; depois confrontaram-se os três casos em que se procurou salientar os elementos de homogeneidade e de heterogeneidade de forma a ser possível elaborar uma síntese e a formulação de proposições interpretativas.

A análise dos dados seguiu a categorização de Pugalee (2004), que definiu quatro grupos de processos metacognitivos: de *orientação*, *organização*, *execução* e *verificação*. No primeiro grupo (orientação), o aluno faz uma avaliação da familiaridade, da dificuldade e da probabilidade de sucesso perante uma situação problemática, podendo ser observável através de comportamentos metacognitivos como a análise de informação, a leitura/releitura ou a construção de representações iniciais, comportamentos também referidos por Dias (2005). No segundo grupo (organização), dá-se lugar à identificação de metas, ao planeamento e à organização de dados, processos estes também salientados por Pirie (1987). Aos processos de execução, observáveis através de ações locais (como cálculos), monitorização do progresso e mudanças de decisão, estão associados os processos de reflexão (Pirie, 1987) e de automonitorização (Zimmerman, 2000). O grupo dos processos de verificação envolve uma avaliação das decisões e dos resultados que foram obtidos e uma perspetivação do que falta para atingir o objetivo ou o resultado esperado.

Também foi considerada a categorização de Dias (2005) que começa por dividir os processos em dois grandes grupos: os processos de *interpretação* e os de *desenvolvimento*. No primeiro grupo, dá-se relevo a processos como o de traduzir, interiorizar e ancorar. A propósito deste último processo, considera-se o estabelecimento de analogias, salientado por Holding (1991), e o processo de seleção de uma estratégia (Pirie, 1987). No grupo de processos de desenvolvimento, salientam-se os processos de ziguezaguear e de aprofundar; o primeiro observável pelos avanços e recuos dando-se lugar a um refazimento do trabalho; o segundo observável por um evoluir sucessivo com base na exploração do avanço conseguido numa fase anterior.

Dadas as especificidades do instrumento de avaliação em estudo, o processo de justificação (Holding, 1991; Mason et al., 1982; Pirie 1987; Pugalee, 2004) que deve acompanhar toda a realização do portefólio, foi também considerado. Naturalmente, a justificação acarreta consigo processos salientados por Frobisher

(1994) tais como o processo de comunicação (observável por ações tais como explicar, concordar, questionar) e o processo de registo (e.g. escrever, listar, traçar gráficos). Em síntese, os processos metacognitivos usados na análise de dados estão apresentados na Tabela ii:

TABELA II
Processos metacognitivos a considerar

<table>
<tr><td rowspan="11">Processo de comunicação</td><td colspan="3">Orientação</td><td rowspan="11">Processos de registo</td></tr>
<tr><td colspan="3">Organização</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Execução</td><td colspan="2">Reflexão</td></tr>
<tr><td colspan="2">Automonitorização</td></tr>
<tr><td colspan="3">Verificação</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Interpretação</td><td colspan="2">Tradução</td></tr>
<tr><td colspan="2">Interiorização</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Ancorar</td><td>Estabelecimento de analogias</td></tr>
<tr><td>Seleção de uma estratégia</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Desenvolvimento</td><td colspan="2">Ziguezaguear</td></tr>
<tr><td colspan="2">Aprofundar</td></tr>
</table>

3.2. *Características do portefólio pedido aos alunos*

Mais ou menos uma vez por mês, cada aluno escolhe uma tarefa na qual sente dificuldades na compreensão de conteúdos e/ou nos processos envolvidos. Os temas, definidos *a priori*, abrangem todas as unidades temáticas específicas do 11.º ano do programa em vigor e são facultados aos alunos no início do ano letivo. Depois de escolhida a tarefa, o aluno elabora a primeira versão da resolução, fazendo-a acompanhar da explicitação escrita do seu raciocínio e da justificação das suas decisões. Este trabalho é depois enviado por *e-mail* à professora que observa o que o aluno fez e pensou (uma vez que o seu raciocínio está descrito) e fornece *feedback* através de pistas, sugestões/observações, etc. O aluno recebe este *feedback* e, com base nele, elabora e envia a segunda versão. O processo itera-se, até o aluno chegar a uma versão final.

Para além deste desenvolvimento da tarefa em si, o aluno tem de fazer um balanço de cariz metacognitivo do trabalho desenvolvido, que pode ser, por opção do aluno, construído no fim ou ao longo da elaboração das versões. Ao conjunto da resolução "comentada", com o registo datado das versões, e desta reflexão/balanço, foi dado o nome de entrada.

Para cada entrada existe uma data até à qual o aluno deve entregar a primeira versão e a professora tem uma semana para dar o *feedback* escrito à primeira produção do aluno. Este volta a ter uma semana para elaborar a segunda versão. Para as versões seguintes não há uma calendarização estipulada *a priori*, sendo esta combinada com cada aluno, geralmente com prazos mais curtos.

Também foram utilizados um guia de interrogação metacognitiva e um documento onde constam os critérios de avaliação e respetivos descritores, para ajudar o aluno nas reflexões e na sua própria avaliação uma vez que, como refere Flavell (1979), não é fácil para o aluno fazê-lo. No fim de cada período, o aluno tem ainda de elaborar uma reflexão final, a incluir no fim do portefólio. Este instrumento de avaliação também é tido em conta na avaliação sumativa final, caso contrário corríamos o risco do portefólio não ser valorizado pelo aluno, dada a cultura de avaliação da escola portuguesa (Santiago, Donaldson, Looney, & Nusche, 2012). No entanto, frisa-se que o que é avaliado é a evolução que o aluno revelou ter.

4. Apresentação de resultados

4.1. *Dália*

As entradas da Dália foram escolhidas com base na identificação, pela própria aluna, de dificuldades: "primeiro, se eu tivesse dúvidas específicas nalgum exercício, era esse que eu escolhia. Se eu não soubesse ou não fizesse a mínima ideia, aí eu ia ver aquilo que eu encontrava" (2ª entrevista). Essas dificuldades tanto podiam residir na escolha de estratégias adequadas, na compreensão da relação entre variáveis de um mesmo problema, na interpretação de resultados obtidos no contexto da tarefa, como em dificuldades genéricas, caso da realização de demonstrações:

> Simplesmente não vi (e ainda não vejo) o que tenho de fazer para resolver este exercício, razão pela qual o escolhi (...) as dúvidas que tenho são mais na escolha do processo que devo seguir para realizar o exercício e não tanto na matéria em si.

Figura 1. 3ª versão da 5ª entrada

> Resolvi escolher uma demostração com razões trigonométricas, visto que foi, em toda a matéria do primeiro período, os exercícios que mais dificilmente consegui resolver.

Figura 2: 1ª versão da 1ª entrada

A identificação, por parte da aluna, desta diversidade de dificuldades aquando da escolha da tarefa para as entradas denota que o *processo de orientação* tem lugar logo na primeira abordagem das entradas. Além disso, em cada entrada, a Dália opta por reunir e registar toda a informação que considera pertinente no âmbito do tema da entrada, tanto ao nível dos conteúdos, como ao nível de alguns procedimentos de que dispõe, como é de seguida ilustrado:

> O exercício em si engloba vários pontos de matéria, de forma interligada: trigonometria, produto escalar e geometria, como tal requer a conjugação de todas e centra-se essencialmente na necessidade de empregar conceitos como:
>
> *Equação reduzida de uma recta* - $y = mx+b$. Para conseguir chegar a esta expressão é necessário um ponto pertencente a essa recta e um vector director da mesma (ou qualquier informação que nos dê o declive) (...).
>
> *Noção de produto escalar* - O produto escalar trata-se de uma operação que é realizada entre dois vectores, (...).
>
> *Equação de uma circunferência* - A equação de uma circunferência (conceito de 10º ano) é construída a partir (...).
>
> *Razões trigonométricas* - Para estes exercícios é igualmente necessário ter em consideração as três razões trigonométricas dadas por (...).

Figura 3. 1ª versão da 2ª entrada

Assim, é possível observar que foram usados *processos de orientação e organização*, uma vez que a aluna, familiarizando-se com o tema, analisa informação, socorre-se de algumas representações iniciais, organiza dados e estabelece algumas metas.

Na fase de execução, a aluna, num *processo de ancorar*, vai buscar conteúdos e procedimentos, explanados na primeira fase, que considera úteis na seleção e execução de uma estratégia. Recorre a este processo frequentemente, sem necessidade de apoio por parte da professora. Quando a estratégia não produz o efeito desejado, volta atrás e experimenta outra, denotando o recurso ao processo de automonitorização pois não necessita do aval ou da ajuda da professora no desenvolvimento da tarefa.

Só quando não tem mais ideias é que envia a primeira versão, deixando, no entanto, registadas as tentativas falhadas. De facto, de uma versão para a outra, a Dália é uma aluna que deixa sempre registado o avanço conseguido numa versão e, num *processo de aprofundar*, é que acrescenta a versão seguinte, tal como, por exemplo, se pode ver, na segunda versão da terceira entrada:

Para continuar a resolução desta entrada, resolvi pegar nas dúvidas que tinha colocado e daí continuar a restante resolução do exercício (...)

Dúvida 3:

Duvida colocada: A partir daqui não consigo continuar (referia-me à parte da determinação de T, em função de t). Pois apesar de saber que preciso de estabelecer a relação de T para 1, ou seja, do tempo total de enchimento (T) para uma piscina (1), não percebo como relacionar a expressão obtida na alínea anterior (que me dá a fracção cheia numa hora) com o já referido. Não encontro a relação a establecer!

Ajuda da professora: Se em 1h se enche determinada fracção da piscina; então em quanto tempo (T) se enche a piscina toda (1).

Aquilo que retirei do que me foi dito:

(...)

Numa hora a fracção de piscina cheia é X

Em T horas a fracção de piscina cheia é Y

1h _______ X

Th _______ Y

Sabendo que:

X é $\frac{2t+2}{t(t+2)}$ e Y é 1 (simboliza a totalidade da piscina cheia)

Logo:

1 _______ $\frac{2t+2}{t(t+2)}$ $\Leftrightarrow$

T _______ 1

$\Leftrightarrow T = \dfrac{1}{\frac{2t+2}{t(t+2)}} \Leftrightarrow T = \dfrac{t(t+2)}{2t+2}$

Voltando à ordem de trabalhos que tinha construído (...).

Figura 4. 2ª versão da 3ª entrada

Também em qualquer versão, a entrega é acompanhada de um ponto da situação que a aluna elabora num *processo de verificação*, denotando uma avaliação das decisões e dos resultados que tinha obtido e de uma perspetivação do que lhe falta para chegar à resposta:

A final até era fácil, faltou-me ter pensado mais um bocadinho!
Para a próxima não me esqueço de multiplicar pelo que "me dá jeito"!

Figura 5. E-mail enviado junto com a 2ª versão da 1ª entrada

Na última alínea do problema, eu sabia onde deveria chegar e por que passos, mas não sabia como realizar alguns deles, pois não estabeleci a ligação entre a parte geométrica (cálculo da distância) e a parte trigonométrica (fórmulas da trigonometria). Deste modo, aquilo que adquiri com esta entrada, centrou-se mais na forma como é possível interligar os conteúdos do que propriamente com os conteúdos em si, pois a resolução dos exercícios baseou-se em matérias que penso já ter compreendido.

Figura 6. Reflexão final da 2ª entrada

A aluna apresenta com regularidade *processos de interpretação*, como a tradução, a elaboração e rescrição por palavras próprias de conceitos e procedimentos, debruça-se sobre o significado de conceitos e resultados, recorrendo por vezes a representações ou a exemplos concretos:

Para se verificar se uma sucessão é limitada é necessário tentar reduzir ao máximo o termo geral da sucessão, e compreender entre que valores é que variam os termos da sucessão. Por exemplo, na sucessão definida por $u_n = \frac{n+3}{n+1}$, se dividirmos um polinómio pelo outro, obtém-se $u_n = 1 + \frac{2}{n+1}$. Para verificar se é limitada, temos de (...).

Figura 7. 1ª versão da 6ª entrada

A parte escrita a que o portefólio obrigou, permitiu apercebermo-nos de que conteúdos e/ou raciocínios ou a relação entre estes não estavam suficientemente compreendidos nem bem estruturados ou relacionados pela aluna pela forma como esta inicialmente os escreveu. Foi no refazer das suas produções que se verificou um *ziguezaguear* que lhe permitiu interiorizar todos os aspetos envolvidos em cada escolha. Foi notório o seu progresso e mudanças de decisão, observando-se uma evolução nos *processos de justificação e de registo*, que foram melhorando e tornando-se cada vez mais precisos e explícitos:

Sabia que o ponto B tinha como equação reduzida da recta, a equação construída na alínea anterior e estava contido simultaneamente na equação da circunferência,

(...)

$\cos x = \dfrac{[OR]}{hipotenusa}$ s $\Leftrightarrow \cos x = \dfrac{[OR]}{5} \Leftrightarrow [OR] = 5cos\ x$

Figura 8. 1ª versão da 2ª entrada

Um ponto não está contido numa equação.

(...)

$\cos x = \dfrac{[OR]}{hipotenusa} \Leftrightarrow \cos x = \dfrac{[OR]}{5} \Leftrightarrow [OR] = 5cos\ \alpha$ (em vez do símbolo de segmento, deves usar o símbolo de comprimento).

Figura 9. Feedback dado à 1ª versão da 2ª entrada

Sabia que o ponto B pertencia à recta AB cuja equação (geral ou reduzida) já tinha sido obtida na alínea anterior e estava contido simultaneamente na-circunferência,

(...)

$\cos x = \dfrac{\overline{OR}}{hipotenusa} \Leftrightarrow \cos x = \dfrac{\overline{OR}}{5} \Leftrightarrow \overline{OR} = 5cos\ x$

Figura 10. 2ª versão da 2ª entrada

Tanto pelas justificações, como pelas reflexões mais extensas e pormenorizadas que a aluna apresenta, associadas a mudanças "autónomas de decisão", podemos observar que a Dália é, já de si, uma aluna com um grau elevado de automonitorização, além da facilidade de comunicação escrita que, mesmo assim, foi alvo de aperfeiçoamento contínuo, de versão para versão.

4.2. *Lara*

A Lara, apesar de diversificar as suas fontes (manual adotado, manuais não adotados e exames externos) não se demora muito em *processos de orientação* pelo que as suas decisões na escolha das tarefas para as entradas não são definitivas:

Ainda não sei bem se é esse [exercício] que quero mas depois decido quando vir o que falhei...

Figura 11. E-mail enviado junto com a 2ª verão da 2ª entrada

Os *processos de organização* que desenvolve levam-na a uma multiplicidade de escolhas para a mesma entrada. Estas escolhas são feitas a partir da avaliação que faz quanto ao grau de dificuldade que o desenvolvimento do exercício escolhido lhe vai trazendo, e de sentir necessidade de diversificar os exercícios dentro de um mesmo tema:

Para esta entrada escolhi vários exercícios para testar a minha capacidade de resolver, de diferentes maneiras, exercícios da mesma matéria.

Figura 12. 2ª versão da 3ª entrada

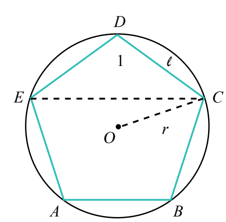
Ainda na fase inicial da escolha da tarefa para uma entrada, faz uma avaliação sobre o que mais lhe causa dificuldades (processo de orientação):

Escolhi os exercícios para esta entrada com base nas minhas maiores dificultades que são, maioritariamente, na trigonometria. Tendo em conta que não percebo bem a mecânica de resolver exercícios deste tipo achei por bem colocá-los aqui.

Figura 13. 4ª versão da 2ª entrada

No desenvolvimento da tarefa propriamente dita, a Lara revela uma tendência para a falta de *automonitorização*. Eis um exemplo de uma resolução errada, levada a cabo até ao fim, sem qualquer evidência de *processos de monitorização*, nem de *verificação* (Note-se que o ângulo formado pelos vetores $\overrightarrow{CE}$ e $\overrightarrow{CD}$ não tem uma amplitude de 18º, valor da amplitude do ângulo formado pelos vetores $\overrightarrow{CO}$ e $\overrightarrow{CE}$):

15.2 Escreva em função de *l*: $\overrightarrow{EC}.\overrightarrow{CD}$.



Resolução:

O ângulo entre $\overrightarrow{CD}$ e $\overrightarrow{CE}$ é $\dfrac{180-144}{2} = 18°$.

Sei que o co-seno será de 18 e que uma das normas ($\|\overrightarrow{CD}\|$) é l.

Em vez do vector *EC* vou considerar o vector $-CE$, de modo que o produto escalar será $-\overrightarrow{CE}.\overrightarrow{CD}$.

$$-\overrightarrow{CE}.\overrightarrow{CD} = \|\overrightarrow{CE}\|.\|\overrightarrow{CD}\|.\cos 18°$$
$$(=)\ -\overrightarrow{CE}.\overrightarrow{CD} = 2r.l.\cos 18$$

Figura 14. 2ª versão da 1ª entrada

Um aspeto que espelha a falta de hábito de *reflexão* sobre o trabalho que vai desenvolvendo prende-se com o facto de, em mais do que uma versão, a "reflexão sobre o trabalho desenvolvido" aparecer apenas na última versão. Assim, foi importante trabalhar com esta aluna processos relacionados com a automonitorização, através do *feedback* dado a cada versão das entradas, como se ilustra nos seguintes comentários escritos fornecidos à aluna:

Para descobrires o ângulo formado pelos vectores $\overrightarrow{CE}$ e $\overrightarrow{CD}$, pensa novamente neles. Olha para a figura.

Figura 15. Feedback dado à 2ª versão da 1ª entrada

Repara que a representação gráfica da função dada por $y = 3 - x$ é uma recta com declive negativo.

Figura 16. Feedback dado à 1ª versão da 3ª entrada

A tendência da Lara para não recorrer ao processo de automonitorização, traduzida pela aplicação de estratégias, aparentemente feita de forma pouco refletida, e de as levar a cabo até que produzam um resultado final, naturalmente errado, conduz a aluna ao refazimento total de alíneas ao invés de uma nova versão se apoiar em algo já conseguido na versão anterior (ou seja, não permite que se dê lugar aos processos de ziguezaguear e/ou de aprofundar). Tal só é observável, geralmente, em versões finais. Isto também faz com que tivesse atingido até cinco versões de uma mesma entrada e, consequentemente, que tivesse dado início a novas entradas ainda com as anteriores por concluir.

Outra das principais dificuldades que sobressaem do trabalho da Lara, ao longo da elaboração do portefólio, resulta de uma deficiente utilização dos *processos de interpretação*, nomeadamente de tradução de dados fornecidos pelo enunciado das tarefas ou pelo *feedback* dado pela professora. Houve situações em que a estratégia utilizada fora a correta, mas aplicada inadequadamente, proveniente possivelmente de uma insuficiente leitura e análise do enunciado. Se essa estratégia fosse devidamente aplicada, produziria as respostas esperadas. Por exemplo, se no exercício seguinte, a Lara tivesse optado por determinar a equação da reta que contém o segmento de reta a que pertence o ponto de abcissa 3 (em vez de considerar que a função era representada graficamente por um única reta), teria, pelo processo que usou, chegado à solução (embora não seja o processo mais rápido):

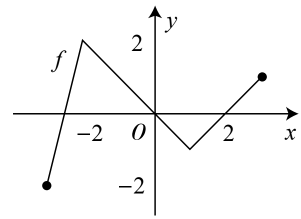
Seja *f* a função cujo gráfico está representado na figura ao lado.

Seja *g* a função, de domínio $\mathbb{R}$, defina por

$g(x) = -x + 3$

Qual é o valor de $(g \circ f)(3)$?

(A) -1 (B) 0 (C) 1 (D) 2



Resolução:

Para descobrir a função $f(x)$ temos de retirar do gráfico pelo menos 2 pontos.

x	$f(x)$
-2	2
1	-1
2	0

Agora temos de descobrir o declive para podermos saber a equação da função *f*, $y = mx + b$.

$$m = \frac{-1-2}{1-(-1)} = \frac{-3}{3} = -1$$

Logo, $y = -x + b$.

O b é 0, pois zero é a ordenada na origem.

Por isso, $f(x) = -x$

O valor pedido é de $(g^\circ f)(3)$.

$f(3) = -3$

$(g^\circ f)(3) = g\left(f(3)\right) = g(-3) = -3 + 3 = 0$

Logo seria a opção B mas eu sei que não é porque vi no GAVE que era a D mas não vejo onde está o meu erro.

Figura 17. 1ª versão da 4ª entrada

Assim, processos como os de *traduzir* e *ancorar* nem sempre foram bem-sucedidos porque foram inconvenientemente aplicados.

No seu trabalho, a Lara recorre, por iniciativa própria, a figuras que adapta à sua maneira, para apoiar e exemplificar as suas justificações escritas. Sempre que a Lara detém dificuldades numa parte da tarefa escolhida, opta por desenvolvê-la toda, o que se veio a revelar importante, tanto na completude, como na correção de aspetos, que de outra forma passariam impercetíveis, tanto para a aluna, como para a professora, e que se prendem com processos relacionados com a comunicação e o raciocínio matemáticos e a compreensão de conceitos. Porque o portefólio foi assim conceptualizado, também houve regularmente correção e/ou aperfeiçoamento dos processos de comunicação matemática.

4.3. *Francisco*

Na escolha das entradas, seguindo um *processo de orientação*, Francisco afere o grau de dificuldade das tarefas: "Não vou escolher uma coisa muito difícil porque senão dá muito trabalho" (1ª entrevista), muito embora tal não seja para si fácil de fazer, como nos explica: "tive imensas dúvidas, e elas ainda estão um pouco presentes" (2ª entrada, 1ª versão). Francisco só escolhe uma tarefa por entrada, no entanto chega a resolvê-la por processos diferentes.

Francisco sente necessidade de a professora corroborar/validar os seus raciocínios, para obter a certeza de que o significado destes é o mesmo para professor e aluno. Assim, quando o Francisco não se sente confortável com a estratégia escolhida, ou com os cálculos efetuados, pede tendencionalmente a validação da professora para continuar, já numa versão seguinte: "Stora, eu esta parte não sei como fazer. Penso que seja (...) Estou certo? Se não for o caso, dê-me uma luzinha para começar ☺" (*E-mai*l, 5ª entrada, 1ª versão). Desta forma, o Francisco procura na professora a *automonitorização* que era esperado ser por si desenvolvida.

Processos de verificação dos resultados obtidos têm de ser "lembrados" pois, tendencialmente fica pela constatação se o resultado obtido coincide com o que está nas soluções. Quando não coincide, o Francisco aguarda pelo *feedback* da professora para avançar com a resolução numa versão seguinte, ao invés de voltar atrás e autonomamente procurar e corrigir o erro. Por exemplo, na sua 4ª entrada, sabendo que a solução a que tinha chegado não estava correta, não teve a iniciativa de procurar refazer o seu trabalho ou, pelo menos justificar os passos que tinha dado até à obtenção do seu resultado. Se o tivesse feito poderia eventualmente ter detetado, na mesma versão, onde tinha errado, evitando um acréscimo desnecessário de versões. Assim, o aluno revela escassez de monitorização e portanto, também de reflexão.

O recurso ao registo escrito inerente à conceptualização do portefólio, conduziu por várias vezes o Francisco a estabelecer um diálogo interpessoal, e um envolvimento na aprendizagem denotada pelo uso de expressões de emotividade como os *smiles*. Foi também através deste diálogo interno, transposto por palavras, várias vezes assumindo-se que "Eu acho que explico como se fosse para mim" (2ª entrevista), e a rescrição de uma versão para a outra, das ideias matemáticas de forma mais rigorosa, que o aluno, num *processo de interiorização*, incorporou conteúdos e raciocínios:

Este método que agora vos vou passar a explicar, é bem mais simples que os outros dois também aqui explicados. Vamos então a ele.

Figura 18. 1ª versão da 1ª entrada

É através dos *processos de orientação e de ancoragem* que o Francisco estabelece estratégias e identifica conteúdos inerentes a estas. Por exemplo, na primeira entrada, o Francisco começa por identificar o principal conteúdo que cada um dos três processos de resolução da tarefa envolve:

1° Método de 10°ano, através da expressão da distância entre 2 pontos.
2° Método de 11°ano, só com vectores.
3° Métodos de 11°ano, só com declives.

Figura 19. 1ª versão da 1ª entrada

Dentro de uma linha de ação já estabelecida, divide explicitamente a estratégia por passos. Sente, por vezes, necessidade de os reordenar de forma a formarem um fio condutor em que uns surjam por necessidade de operacionalização dos outros, sendo pois possível observar o *processo de ziguezaguear*. Por exemplo, nos excertos que se seguem, que se referem ao terceiro método de resolução acima indicado, o Francisco calcula logo no início da resolução as coordenadas do ponto médio quando ainda não eram necessárias (fig. 20). Na versão seguinte, já coloca esse cálculo numa posição mais apropriada da resolução (fig. 21).

Este método que agora vos vou passar a explicar, é bem mais simples que os outros dois também aqui explicados. Vamos então a ele.

Sabemos que a equação reduzida da recta é $y = mx + b$. Outra maneira de obter a equação da mediatriz é através da equação reduzida da recta. Como?

Vamos por partes:

Temos que: $\overrightarrow{BC} = C - B = (0+3\ ;\ 7+1)\ (=)\ \overrightarrow{BC} = (3\ ;\ 8)$.

$$M\left(\frac{(-3+0)}{2}\ ;\ \frac{(-1+7)}{2}\right) = \left(\frac{-3}{2}\ ;\ \frac{6}{2}\right)$$

$$\left(\frac{-3}{2}\ ;\ 3\right) = \mathrm{M}$$

Podemos verificar através desta informação que o declive de $\overrightarrow{BC}$ é de $\frac{8}{3}$, porém não sabemos o declive da mediatriz.

$\left(\frac{-3}{2}\ ;\ 3\right) = \mathrm{M}$

(...)

Acontece que não temos o b. Como se calcula o b? Para calcular o b, temos de ir buscar um ponto qualquer pertencente à recta e substituir as suas coordenadas na fórmula. Este ponto é nem mais nem menos que o ponto médio, que como se pode verificar na figura acima, pertenece à mediatriz.

Figura 20. 1ª versão da 1ª entrada

O *processo de aprofundar* foi mais nítido nas 2ª e 4ª entradas. Na 2ª entrada prendeu-se com a reflexão no sentido de aprofundar as justificações para que fossem mais correlacionadas com o contexto da situação. A 4ª entrada foi desenvolvida mais no aprofundar de definições relacionadas com a função composta pois, por exemplo, na primeira versão da quarta entrada, em três situações diferentes escreveu $(fog)(x) \rightarrow f\left(g(x)\right)$ ao invés de assumir a igualdade: $(fog)(x) = f\left(g(x)\right)$.

Este método que agora vos vou passar a explicar, é bem mais simples que os outros dois também aqui explicados. Vamos então a ele.

Sabemos que a equação reduzida da recta é $y = mx+b$. Outra maneira de obter a equação da mediatriz é através da equação reduzida da recta. Como?

Vamos por partes:

Temos que: $\overrightarrow{BC} = C - B = (0+3\ ;\ 7+1)\ (=)\ \overrightarrow{BC} = (3\ ;\ 8)$.

Podemos verificar através desta informação que o declive de $\overrightarrow{BC}$ é de $\frac{8}{3}$, porém não sabemos o declive da mediatriz.

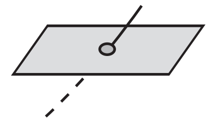
$$M\left(\frac{(-3+0)}{2}\ ;\ \frac{(-1+7)}{2}\right) = \left(\frac{-3}{2}\ ;\ \frac{6}{2}\right)$$

$$\left(\frac{-3}{2}\ ;\ 3\right) = \mathrm{M} \quad (...)$$

Figura 21. 2ª versão da 1ª entrada

O *processo de justificação* surge por vezes com base no seu pensamento intuitivo. Por exemplo, na 1ª versão da 2ª entrada, o Francisco afirma que a interseção de uma certa reta com um dado plano dá um ponto, dando como justificação um desenho feito por si próprio (fig. 22). Apesar desse pensamento ter sido útil para despoletar a resolução, foi transformado em justificação matemática na versão seguinte (fig. 23). No entanto, as justificações escritas por vezes não surgiram aquando do desenvolvimento da tarefa pois, por exemplo, na 4ª entrada, o Francisco pretende que a professora, em primeiro lugar, valide os cálculos: "queria que a stora visse se está aqui algum erro, para dar então começo à explicação dos passos" (4ª entrada, 1ª versão). Já na 5ª entrada, foi ao contrário: o Francisco em primeiro lugar avançou com ideias e só prosseguiu com os cálculos depois da validação pela professora dessas ideias. Assim, há alturas em que o Francisco necessita de apoio para conseguir interiorizar efetivamente os conceitos e processos inerentes ao desenvolvimento das entradas. Tal apoio foi dado através do aperfeiçoamento da parte escrita, associado ao questionamento do que havia produzido. De facto, foi constante o aperfeiçoamento e/ou correção da comunicação matemática, com particular ênfase ao nível da transmissão de ideias, tanto nas produções onde o Francisco não sentia dificuldade, como nas restantes:

A intersecção é um ponto (ao lado fez um esboço de um plano, com uma reta a intersetá-lo, onde assinala o ponto de interseção). Portanto estamos à procura das coordenadas desse ponto.
(2ª entrada, 1ª versão, 06/02/11)



A intersecção é um ponto porque o vector diretor da recta não é perpendicular com o vector normal do plano.

Portanto estamos à procura das coordenadas desse ponto.

(2ª entrada, 2ª versão, 12/02/11)

$$(x, y, z) = (1 + \lambda; 3; 2\lambda)$$

O *2o Passo*, é fazer agora um sistema de equações *(porquê? Qual é o conceito que está por trás ou que justifica o surgimento do sistema?)* com o objectivo de obter expressões para as coordenadas (x, y, z) do ponto.

$(x, y, z) = (1 + \lambda; 3; 2\lambda) = ...$

Figura 22. Feedback dado à 1ª versão da 2ª entrada

$$(x, y, z) = (1 + \lambda; 3; 2\lambda)$$

2° Passo: Pela igualdade de pontos: ("a 1ª coordenada de um é igual a 1ª coordenada do outro". "a 2ª...)

Figura 23. 2ª versão da 2ª entrada

Processos de registo, inerentes à conceptualização do portefólio, surgiram sob a forma de representações construídas pelo próprio, e naturalmente, pela anotação escrita das ideias subjacentes ao desenvolvimento da entrada.

5. Análise e comparação de resultados

As características do portefólio favoreceram o desenvolvimento de diversos processos metacognitivos pelos três alunos participantes, muito embora se possam encontrar diferenças entre eles. O facto de caber aos alunos a seleção das tarefas para as entradas, implicou-os em *processos de orientação*, familiarizando-os mais com o tema, analisando informações, planeando e estabelecendo algumas metas (Pugalee, 2004). A Dália foi a aluna que mais se demorou em processos de orientação pois, dentro do tema de cada entrada, escreveu toda a informação que considerou estar relacionada com esse tema, tanto ao nível dos conteúdos, como de alguns procedimentos. A Lara, apesar de diversificar as suas fontes, não se prendeu muito em processos de orientação pelo que as suas decisões na escolha das tarefas para as entradas não foram definitivas. Já Francisco escolheu sempre apenas uma tarefa por entrada, evidenciando processos de orientação, mas não tão pormenorizados como os da Dália.

No desenvolvimento de cada tarefa, no caso da Dália, os *processos de organização* (Pugalee, 2004; Pirie, 1987) começaram logo na fase de orientação, onde colocou sempre de forma esquemática ou por itens todos os recursos teóricos de que dispunha sobre o tema da entrada. Houve situações em que a Lara identificou alguns objetivos e, mesmo reconhecendo que não sabia como atingi-los, implementou sempre uma estratégia/resolução que se lembrava. No caso do Francisco, também foi explícita a existência de processos de organização como a identificação explícita das diferentes maneiras de resolver a mesma tarefa, ou, dentro de uma linha de ação já estabelecida, dividiu explicitamente a estratégia por passos.

A Dália, num *processo de ancorar* (Dias, 2005), foi buscar conteúdos e procedimentos explanados na sua abordagem preliminar, que considerou úteis na seleção e execução de uma estratégia (Pirie, 1987). Não dispondo desse recurso, o Francisco e a Lara, selecionaram estratégias a partir da sua intuição, do caderno diário, apontamentos e do manual. Ao refazer, de uma entrada para a outra, parte das produções escritas, foi possível observar um *ziguezaguear* em torno de ideias (Dias, 2005) que permitiu aos alunos interiorizar mais aspetos envolvidos em cada escolha. Na Lara foi especialmente notória as suas tentativas, umas vezes conseguidas, outras vezes não, de *processos de interiorização* (Dias, 2005), onde a aluna se apropriou do *feedback* dado pela professora para dar significado coerente às justificações que acompanhavam a resolução da tarefa. A Dália foi a que mais se debruçou sobre o significado de conceitos e resultados num processo de interiorização. Os processos de interiorização foram mais nítidos no Francisco aquando da rescrição, de uma versão para a outra, das ideias de forma mais rigorosa. De qualquer maneira, houve alturas em que o Francisco necessitou efetivamente de apoio para conseguir interiorizar com compreensão os conceitos e processos inerentes ao desenvolvimento das entradas.

Os *processos de interpretação* (Dias, 2005), que são usados para compreender uma situação e para clarificar ideias, foram usados pela Dália de forma bastante desenvolvida e muito pormenorizada. Com a Lara, houve situações em que, apesar da estratégia selecionada e utilizada ser a correta, foi aplicada a dados falsos provenientes de processos de interpretação insuficientes, associados à leitura e análise do enunciado. No caso do Francisco, o recurso aos processos de interpretação foram de alguma maneira "evitados" uma vez que o aluno, tendencialmente esperava por ajuda exterior, ao invés de voltar atrás e procurar interpretar ou compreender melhor o que lhe era dado e pedido.

Aos processos de interpretação estão associados a *processos de tradução* (Dias, 2005). No trabalho dos três alunos foi possível identificar processos de tradução uma vez que tanto os conteúdos como os procedimentos foram, de uma forma geral, escritos por palavras próprias, inclusivamente em diálogos internalizados (Oliveira, 1993). A Dália foi a que apresentou uma maior regularidade nos processos de tradução. Numa fase inicial, algumas das estratégias levadas a cabo pela Lara foram infrutíferas, devido essencialmente a uma insuficiência nos processos de interpretação e de tradução, associada à tendência que a Lara manifestou em se precipitar por um caminho sem automonitorização até que se produzisse um resultado final, naturalmente incorreto. Assim, foi observável em várias versões o refazimento total de alíneas ao invés de uma nova versão se apoiar em algo já conseguido na versão anterior, por um *processo de aprofundar* (Dias, 2005). Tal só foi observável na Lara, geralmente, em versões finais. No Francisco, este processo, foi mais visível quando o aluno procurou que as suas justificações estivessem mais correlacionadas com o contexto da situação, ou quando se debruçou mais atentamente sobre algumas definições.

A *automonitorização*, que é esperada que o aluno use no desenvolvimento da entrada, é o processo metacognitivo da autorregulação mais importante no desenvolvimento e controlo da atividade (Zimmerman, 2000). A sua ausência ou deficiente uso leva o aluno a dar respostas impulsivas, a gerir a sua atividade ao acaso ou a repetir processos estereotipados (Silva et al., 2004). Foi possível observar que a Lara e o Francisco não recorriam, de uma forma geral, por iniciativa própria, à automonitorização através do autoquestionamento, tendo sido incentivados através de *feedback*, ao longo da realização do portefólio. A diferença inicial entre a Lara e o Francisco, esteve em que a Lara, mesmo assim, avançava quase sempre numa resolução (e executava-a até produzir um resultado); o Francisco, antes de avançar, pedia várias vezes a validação de cálculos ou de uma ideia para só depois elaborar uma nova versão. Já a Dália evidenciou ter tendência para, de forma sistemática, fazer "pontos da situação" sobre a forma como a sua atividade se ia desenvolvendo – aspeto salientado por Schoenfeld (1992) como indicador de um aluno que sabe resolver problemas. Talvez por esta razão, a Dália seja uma aluna que, de uma forma geral, consegue obter bons resultados escolares em Matemática.

O processo de automonitorização está intrinsecamente relacionado com o *processo de reflexão* (Mason et al., 1982; Pirie, 1987; Zimmerman, 2000). Através do *feedback* escrito, os alunos foram incitados a refletir de forma mais consciente e metódica sobre as suas produções pessoais. Também foram valorizados aspetos intuitivos da matemática (Cuoco, 2003; Holding, 1991) uma vez que os alunos foram encorajados a aplicar a(s) estratégia(s) que tinham em mente, embora sempre de forma justificada. Tratou-se de um apoio à intuição fundamentada, ou seja, com enfâse no *porquê*, mais do que no *o quê*.

Num *processo de verificação* (Pugalee, 2004), a Dália, acompanhou a entrega de cada versão, por uma avaliação das suas decisões e resultados obtidos e de uma perspetivação do que lhe faltava para chegar à resposta. Assim, este processo, enquadrado na terceira fase da autorregulação (Zimmerman, 2000), não assentou só na constatação de discrepâncias entre o idealizado e o atingido, mas também na análise do que foi a sua própria ação. No caso do Francisco e da Lara, a verificação ficava-se tendencialmente, pela constatação se determinado resultado coincidia com o que estava nas soluções. Na Lara, a precipitação para uma resolução sem monitorização e a ausência de processos de verificação foram as principais causas de um acréscimo desnecessário do número de versões em várias entradas. Também Francisco, quando sabia que a solução a que tinha chegado não estava correta, não teve a iniciativa de procurar refazer o seu trabalho ou, pelo menos, justificar os passos que tinha dado até à obtenção do seu resultado. Se o tivesse feito poderia eventualmente ter detetado, ele próprio, e na mesma versão, onde tinha errado.

O *processo de justificação* (Holding, 1991; Mason et al.,1982; Pirie,1987; Pugalee, 2004) foi observado nos três casos por ser uma regra explícita de realização do portefólio. Trata-se de um processo que, segundo o NCTM (2000), ajuda o aluno a desenvolver a confiança nas suas próprias capacidades de raciocínio. No caso do Francisco, houve entradas que foram escolhidas acima de tudo com o objetivo de que, ao colocar por escrito as justificações da passagem de um passo para o outro, a professora corroborasse/validasse os seus raciocínios. As suas justificações escritas, por vezes, não surgiram aquando do desenvolvimento da tarefa pois o aluno, tendencialmente, aguardava primeiro a validação por parte da professora do que já havia feito. No caso da Dália e da Lara, foi possível observar uma evolução nos processos de justificação que se foram tornando cada vez mais precisos e explícitos. A diferença esteve em que na Lara foi necessário incentivar e apoiar o processo de justificação e na Dália isso não foi necessário.

Sempre que as dificuldades recaíram apenas numa parte da tarefa (por exemplo, numa alínea de um exercício), a Dália e a Lara decidiram desenvolver toda a tarefa. Tal opção foi sempre frutuosa no que respeita à correção e melhoramento dos *processos de comunicação* (Frobisher, 1994), na completude e na correção de ideias, e no seu relacionamento/interligação, que de outra forma passariam impercetíveis, tanto para as alunas, como para a professora.

Autores como Cuoco (2003), Pólya (1977), e Schoenfeld (1992) afirmam que o raciocínio matemático só se aprende através da explicitação objetiva e continuada dos *hábitos da mente*, aquando da resolução de problemas. Também Mason e outros (1982) e Frobisher (1994) afirmam que qualquer processo inerente à resolução de problemas, por mais simples que possa parecer, só é efetivamente aprendido e reutilizável pelo aluno sem ajuda externa, se for alvo de um treino explícito, regular e dirigido para uma tomada de consciência sobre a atividade desenvolvida. Ora, considera-se que todos os processos acima identificados foram trabalhados de forma explícita e continuada, num período suficientemente alargado no tempo.

O *feedback* escrito enquanto mediador da aprendizagem (Vygotsky, 1987), abrindo lugar ao estabelecimento de ZDP's, foi adaptado às necessidades individuais e particularidades de cada um dos alunos, como suporte da sua atividade cognitiva e metacognitiva, e no sentido de os guiar e permitir progressos em direção ao nível da aprendizagem autorregulada e da obtenção de aprendizagens com significado (Black & Wiliam, 2009; Fernandes, 2008; Santos, 2008). As diferentes formas de *feedback* foram dadas no sentido de: a) ajudar os alunos na realização/implementação dos processos, levando-os a refletir melhor sobre o significado de algumas expressões usadas pelos próprios; b) favorecer o surgimento de *mal entendimentos produtivos*, através dos próprios raciocínios do aluno ou dos resultados a que ele chegou, por exemplo, com o confronto e/ou interpretação desses resultados obtidos (apoio ao processo de interiorização ou de raciocínio); c) para os ajudar a encontrar estratégias adequadas (apoio à seleção de uma estratégia) ou de forma a dar continuidade a passos já conquistados; d) validar os resultados, parciais ou finais, obtidos pelo aluno, ou de raciocínios (apoio aos processos de orientação e de organização); e e) aperfeiçoar e corrigir a escrita, não só matemática, mas também da língua portuguesa, o que se revelou importante na restruturação do pensamento matemático e na compreensão dos problemas e dos respetivos resultados parciais ou finais (apoio aos processos de tradução, de interiorização, de raciocínio). Pode assim afirmar-se que, no geral, o feedback seguiu um processo dialógico (Nicol, 2010), isto é, levou o aluno a estabelecer um diálogo interno, adaptando e integrando o feedback.

O facto de esta experiência ter sido realizada essencialmente na forma escrita com possibilidade de voltar atrás, repensar na produção anterior para entregar uma nova versão, trouxe vantagens ao nível da estruturação ou da reestruturação das ideias e do desenvolvimento de hábitos de reflexão pessoal não só sobre aspetos cognitivos, mas também sobre a própria ação. Todos os três alunos, mesmo Lara e Francisco que revelaram processos desenvolvidos de forma por vezes superficial e no caso de Francisco que também evidenciou falta de autonomia, tiveram oportunidade de produzir últimas versões de qualidade. De facto, um aluno ao ter de passar as suas ideias para a forma escrita faz com que tenha de as clarificar, de as reorganizar ou estruturar (Pinto & Santos, 2006). Aos hábitos de reflexão estão naturalmente associadas as tomadas de consciência dos processos envolvidos no pensamento matemático, essenciais para que este não seja inopinado ou casual (Mason et al., 1982).

Estas opções pedagógicas implicaram uma crescente automonitorização, ou, pelo menos, criaram-se condições para que esta se desenvolvesse. Questões de cariz motivacional também tiveram lugar no desenvolvimento do portefólio. Foi necessário, nos três casos, recorrer a reforços positivos *(*reconhecimento, elogios e encorajamento), porque o portefólio implicava uma mudança de hábitos: uma forma de estudar regular; mais frequente. Como defende Silva et al. (2004), uma das grandes dificuldades do ensino é conseguir que os alunos se mantenham numa atividade depois de esta ter sido iniciada pelo que as dificuldades dos alunos também devem ser compreendidas em relação a um défice de ordem afetiva, o da motivação, com particular atenção em alunos com menor aproveitamento escolar, pois são estes que não têm um bom "conceito de si", que não confiam nas suas capacidades, que desistem depressa e ficam dependentes de uma condução exterior. Além disso, como apoio à aprendizagem, o portefólio constituiu uma forma eficaz de exercer uma diferenciação pedagógica (Santos, 2009).

Dadas as opções metodológicas seguidas, não nos é possível generalizar para outros alunos, não só pelo número reduzido de alunos estudados, mas também pelos critérios de seleção considerados. Por exemplo, este estudo não nos permite dizer quais os resultados obtidos caso o grupo de alunos tivesse o mesmo desempenho escolar a Matemática e o mesmo gosto por esta disciplina. O ter sido desenvolvido ao longo de um ano letivo, não nos permite falar da sustentabilidade das aprendizagens realizadas no contexto da realização do portefólio. Assim, aumentar o número de alunos participantes e diversificar as suas características, bem como desenvolver estudos longitudinais poderão ser linhas de investigação para futuro.

6. Considerações finais

O portefólio tem sido objeto de estudo ao longo das últimas décadas, sendo consensual nos dias de hoje que este instrumento é potenciador de uma aprendizagem autorregulada (Belgrad, 2013). No presente estudo, procurou-se compreender quais os processos cognitivos associados à aprendizagem matemática desenvolvida através deste instrumento. Os resultados apontados evidenciam que, desde a seleção da tarefa até à sua realização justificada, acompanhados pelo balanço de cariz metacognitivo do trabalho desenvolvido, é possível identificar processos metacognitivos que acompanham estas diversas atividades: processos de orientação, organização, interpretação, desenvolvimento, reflexão, autominotorização, e verificação. Independentemente do tipo de aluno, do seu desempenho habitual em Matemática e do gosto que dizem ter ou não sobre esta disciplina, foi possível encontrar esses processos, embora com diferentes níveis de desenvolvimento. Como seria espectável, a aluna com melhor desempenho a Matemática foi a que revelou mais rapidamente processos metacognitivos mais desenvolvidos, executando de forma mais conseguida as diferentes tarefas do portefólio. Contudo, os outros dois alunos selecionados desenvolveram esses processos e evidenciaram melhorias, umas vezes de forma menos autónoma, outras necessitando de maior número de versões e, consequentemente, prolongando o tempo da sua realização. Assim, fatores associados ao portefólio revelaram-se decisivos para o sucesso dos três alunos: os elementos constituintes do portefólio (nomeadamente a existência de um balanço reflexivo), a autonomia e responsabilidade que se atribui ao aluno (é a ele que cabe escolher as tarefas) (Fletcher & Shaw, 2012), o ser realizado na forma escrita, ser apoiado de forma continuada pela professora através de feedback e ser um trabalho sem limite de tempo (Nicol, 2010), admitindo diversas versões.

A literatura aponta-nos para diversos entendimentos de portefólio. Os resultados deste estudo evidenciam que o portefólio, enquanto instrumento de avaliação reguladora, focado nos processos, que dá a possibilidade de repensar/refazer, que não exige um limite de tempo para a execução da tarefa, e que está integrado na aprendizagem, é útil (porque não se limita a informar da situação pontual do aluno, mas também lhe dá indicações de como este pode conseguir melhorar/progredir); compreensivo e coerente com o trabalho do aluno (porque atende essencialmente à sua evolução como aprendente e não apenas ao produto final); proporciona uma maior visibilidade e reconhecimento do trabalho e esforço do aluno; e promove o seu aperfeiçoamento contínuo.

Em suma, o estudo que aqui se apresenta fornece evidências de que o portefólio assim conceptualizado e aplicado constituiu uma forma eficaz de exercer uma diferenciação pedagógica e proporciona, de forma continuada e sistemática, o desenvolvimento de processos metacognitivos propícios ao desenvolvimento de uma aprendizagem autorregulada. A sua divulgação pode dar pistas para professores de Matemática desenvolverem uma prática avaliativa com características semelhantes.

Referências

Bardin, L. (2011). *Análise de conteúdo*. Lisboa, Portugal: EDIÇÔES 70, Lda (trabalho original em francês, publicado em 1977).

Belgrad, S. (2013). Portfolios and E-Portfolios: Student reflection, self-assessment, and goal setting in the learning process. In J. McMillan (Ed.), *Sage handbook of research on classroom assessment* (pp. 331-346). California, USA: SAGE Publications, Inc.

Black, P. & Wiliam, D. (2009). Developing the theory of formative assessment. *Educational Assessment, Evaluation, and Accountability*, *21*(1), 5-31. doi: 10.1007/s11092-008-9068-5

Bondoso, T., e Santos, L. (2009). Portefólios... e outras descobertas. *Educação e Matemática, 101*, 3-9.

Burns, R. (2000). *Introduction to research methods*. London, UK: SAGE Publications.

Cuoco, A. (2003). Mathematical habits on mind. In H. Schoenfeld (Ed.), *Teaching mathematics through problem solving: grades 6-12* (pp. 27-37). Reston, VA: NCTM.

De Corte, E., Mason, L., Depaepe, F., & Verschaffel, L. (2011). Self-regulation of mathematical knowledge and skills. In B. J. Zimmerman, & D. H. Schunk (Eds.), *Handbook of self-regulation of learning and performance* (pp. 155-172). New York, USA: Routledge.

Dewey, J. (1997). *How we think*. New York, USA: Dower Publications, INC.

Dias, P. (2005). *Avaliação reguladora no Ensino secundário. Processos utilizados pelos alunos em investigações matemáticas* (Dissertação de mestrado, Universidade de Lisboa)

Fernandes, D. (Org.); Neves, A.; Campos, C.; Conceição, J., e Aliaz, V. (1994). Portofólios: para uma avaliação mais autêntica, mais participada e mais reflexiva. Em D. Fernandes (Coord.), *Pensar avaliação, melhorar aprendizagem*. Lisboa, Portugal: Instituto de Inovação Educacional

Fernandes, D. (2008). *Avaliação das aprendizagens: desafios às teorias, práticas e políticas*. Lisboa, Portugal: Texto Editores.

Flavell, J. (1979). Metacognition and cognitive monitoring. A new area of cognitive developmental inquiry. *American Psychologist*, *34*(10), 906-911. doi: 10.1037/0003-066X.34.10.906

Fletcher, A., & Shaw, G. (2012). How does student-directed assessment affect learning? Using assessment as a learning process. *International Journal of Multiple Research Approaches, 6*(3), 245–263.

Frobisher, L. (1994). Problems, investigations and an investigative approach. In Orton & G. Wain (Eds.), *Issues in Teaching Mathematics* (pp. 150-173). London, UK: Cassel.

Hannula, M. S. (2006). Motivation in Mathematics: Goals reflected in emotions. *Educational Studies in Mathematics, 63*(2), 165-178. doi: 10.1007/s10649-005-9019-8

Holding, J. (1991). *The investigations book*. Cambridge, UK: University Press.

Klenowski, V. (2002) *Developing portfolios for learning and assessment: Processes and principles*, London, UK: Routledge Falmer.

Kosko, K. & Wilkins, J. (2010). Mathematical communication and its relation to the frequency of manipulative use. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, *5*(2), 79-90.

Mason, J., Burton, L., & Stacey, K. (1982). *Thinking mathematically*. Harlow, UK: Prentice Hall.

NCTM (*2000*). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, USA: NCTM.

Nicol, D. (2010). From monologue to dialogue: improving written feedback processes in mass higher education. *Assessment & Evaluation in Higher Education, 35*(5), 501–517. doi:10.1080/02602931003786559

Oliveira, M. (1993). *Vygotsky. Aprendizado e desenvolvimento. Um processo sócio-histórico*. São Paulo, Brasil: Scipione.

Pinto, J. e Santos, L. (2006). *Modelos de avaliação das aprendizagens*. Lisboa, Portugal: Universidade Aberta.
Pirie, S. (1987). *Mathematical investigations in your classroom - a guide for teachers*. London, UK: MacMillan Education Ldt.
Pólya, G. (1977). *A arte de resolver problemas*. Rio de Janeiro, Brasil: Interciência.
Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. Em GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa, Portugal: Associação de Professores de Matemática.
Powell, A. e Bairral, M. (2006). *A escrita e o pensamento matemático. Interações e potencialidades*. Campinas, Brasil: Papirus.
Pugalee, D. (2004). A comparison of verbal and written descriptions of student's problem solving processes. *Educational Studies in Mathematics, 55*(1), 27-47. doi*: 10.1023/B: EDUC.0000017666.11367.c7*
Santiago, P.; Donaldson, G.; Looney, A., & Nusche, D. (2012). *OECD Reviews of evaluation and assessment in education: Portugal*. OECD. Obtenido de http://www.oecd.org/edu/evaluationpolicy
Santos, L. (2008). Dilemas e desafios da avaliação reguladora. Em L. Menezes; L. Santos; H. Gomes & C. Rodrigues (Eds.), *Avaliação em Matemática: Problemas e desafios* (pp. 11-35). Viseu, Portugal: Secção de Educação Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências de Educação.
Santos, L. (2009). Diferenciação pedagógica: Um desafio a enfrentar. *Noésis, 79*, 52-57.
Santos, L. (Org). (2010). *Avaliar para Aprender: Relatos de experiências de sala de aula do pré-escolar ao ensino secundário*. Porto, Portugal: Porto Editora & Instituto de Educação, Universidade de Lisboa.
Santos, L. & Pinto, J. (2010). The use of feedback in written reports and portfolio: an assessment for learning strategy. *Journal of the Korean Society of Mathematical Education. Series D: Research in Mathematical Education, 14*(3), 281-297.
Santos, L. & Semana, S. (2015). Developing mathematics written communication through expository writing supported by assessment strategies. *Educational Studies in Mathematics, 88*(1), 65-87. doi: 10.1007/s10649-014-9557-z
Schoenfeld, A. (1992). *Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense-making in mathematics.* In D. Grouws (Ed.), *Handbook for research on mathematics teaching and learning* (pp. 334-370). New York, USA: Macmillan Publishing Co, Inc.
Silva, A., Duarte, A., Sá, I. e Simão, A. (2004). *Aprendizagem auto-regulada pelo estudante: perspectivas psicológicas e educacionais.* Porto, Lisboa: Porto Editora.
Tardif, J. (2007). La régulation par l'intermédiaire des situations d'apprentissage contextualisantes: une aventure essentiellement "prescriptive". En L. Allal e L. Lopez (Org.), *Régulation des apprentissages en situation scolaire et en formation* (pp. 25-.43). Montréal, Canada: De Boeck.
Vygostky, L. (1987). *Thinking and speech*. New York, USA: Plenum.
Wiliam, D. (2007). Keeping learning on track. In F. Lester Jr. (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 1053-1098). Charlotte, USA: Information Age Publishing.
Wiliam, D. (2013). Assessment: The bridge between teaching and learning. *Voices from the Middle, 21*(2), 15-20.
Yin, R. (2002). *Case study research: Design and methods* (3rd ed.). California, USA: Sage Publications, Inc..
Zimmerman, B. J. (2000). Attaining self-regulation: a social cognitive perspective. In M. Boekaerts, P. Pintrich, & M. Zeidner (Eds.), *Hanbook of Self-Regulation* (pp. 13-39). New York, USA: Academic Press.

Zumbrunn, S., Tadlock, J., & Roberts, E. D. (2011). *Encouraging self-regulated learning in the classroom: A Review of the literature*. Metropolitan Educational Research Consortium, Virginia, USA: Commonwealth University.

Autores

Célia Dias. Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, Portugal. celiadias76@gmail.com

Leonor Santos. Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, Portugal. mlsantos@ie.ul.pt

Daise Lago Pereira Souto, Marcelo De Carvalho Borba

SERES HUMANOS-COM-INTERNET OU INTERNET-COM-SERES HUMANOS: UMA TROCA DE PAPÉIS?

Humans-with-internet or internet-with-humans: an exchange of function?

RESUMEN

El propósito de este artículo es analizar posibles influencias de internet en la producción de las Matemáticas a distancia, en línea y discutir las interrelaciones entre actores humanos y no humanos involucrados en esta producción. Para ello, contamos con el análisis de datos empíricos producidos en un curso de educación Matemática para profesores. La discusión se basa en un aspecto de la teoría de la actividad y el constructo seres-humanos-con-medios. Como herramienta de análisis utilizamos la noción de miniciclones de transformaciones expansivas. Los resultados indicaron que en el sistema de actividad constituido durante el hacer matemáticas en línea, internet jugó dos papeles: como artefacto y como comunidad. Esta doble actuación contribuyó a la transformación de los motivos de la actividad y también favoreció distintos movimientos. También encontramos que actores humanos y no humanos se interrelacionan de tal manera que ambos pueden desempeñar las mismas funciones en un sistema de actividad.

PALABRAS CLAVE:

- *Enseñanza de las matemáticas*
- *Teoría de la actividad*
- *Seres-humanos-con-medios de comunicación*
- *Educación a distancia en línea*
- *Transformaciones expansivas*

ABSTRACT

The aim of this article is to analyze possible influences of internet on mathematics online distance production and discuss the interrelationships between human and non-human actors involved in this production. To this end, we analyze of empirical data produced in a Mathematical education course for teachers. The discussion is based on an approach of the theory of activity and on construct humans-with-media. As analysis tool we use the notion of expansive transformation miniciclones. The results indicated that the activity constituted during the "doing" math online the internet played two roles: artifact and community. This double performance contributed

KEY WORDS:

- *Mathematics teaching*
- *Theory of activity*
- *Humans-with-media*
- *Distance education Online*
- *Expansive Transformations*

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (2016) *19* (2): 217 - 242.
Recepción: Julio 25, 2014 / Aceptación: Enero 25, 2016. DOI: 10.12802/relime.13.1924

to the transformation of the grounds of the activity and also leveraged distinct movements. Also we find that human and non-human actors interrelate in such a way that both can play the same roles in a system of activity.

RESUMO

O objetivo deste artigo é analisar possíveis influências da internet na produção matemática a distância *online* e discutir as inter-relações entre atores humanos e não humanos envolvidos nessa produção. Para tanto, nos baseamos no exame de dados empíricos produzidos em um curso de Educação Matemática para professores e fundamentamos em uma vertente da teoria da atividade e no construto seres-humanos-com-mídias. Como ferramenta de análise utilizamos a noção de miniciclones de transformações expansivas. Os resultados indicaram durante o fazer Matemática *online* a internet desempenhou dois papéis: artefato e comunidade. Esse duplo desempenho contribuiu para a transformação dos motivos da atividade e também alavancou movimentos distintos. Também verificamos que atores humanos e não humanos se inter-relacionam de tal forma que ambos podem desempenhar os mesmos papéis em um sistema de atividade.

PALAVRAS CHAVE:

- *Ensino de Matemática*
- *Teoria da Atividade*
- *Seres-humanos-com-mídias*
- *Educação a Distância* Online
- *Transformações Expansivas*

RÉSUMÉ

Le but de cet article est d'analyser les influences possibles d'internet sur la production d'Mathématiques en ligne à distance et discuter des liens entre les acteurs humains et non humains impliqués dans cette production. À cette fin, nous appuyons sur le examen de données empiriques produites dans un cours d'éducation mathématique pour les enseignants. La discussion repose sur un aspect de la théorie de l'activité et les construct êtres-humains-avec-médias. Comme outil d'analyse, nous utilisons la notion de transformation expansive miniciclones. Les résultats indiquent que l'activité a constitué durant le calcul en ligne internet a joué deux rôles : artefact et communautaire. Cette double performance a contribué à la transformation des motifs de l'activité et également mobilisé mouvements distincts. Aussi, nous constatons que humains et non-humains acteurs sont reliés entre eux de telle sorte que les deux peuvent jouer le même rôle dans un système d'activité.

MOTS CLÉS:

- *Enseignement mathématiques.*
- *Théorie de l'activité*
- *Les êtres humains-avec-médias*
- *Enseignement à distance en ligne*
- *Transformations expansives*

1. Introdução

Mesmo vivenciando as mudanças que as tecnologias digitais impõem em nossas vidas, estamos, ainda, arraigados à cultura de uma sala de aula que não permite ou resiste ao acesso à internet. Nela, o papel do professor é, em uma visão bem conservadora, considerado central no processo de produção de conhecimento (Borba, 2012). Na posição de alunos, a maioria das vezes, recorremos ao professor para sanarmos dúvidas ou para legitimarmos nossas conjecturas.

No entanto, a internet vem, sem pedir licença e em uma velocidade exponencial, ganhando espaço na Educação, em particular, na sala de aula. Com isso, ela desestabiliza algumas de nossas crenças, porque gera mudanças em regras socialmente convencionadas que dizem respeito aos papéis que cada ator "pode" ou "deve" desempenhar no processo de produção de conhecimento.

A cultura da sociedade atual protagoniza configurações e reconfigurações de diversas perspectivas teóricas, as quais sugerem que o ator humano não deve ser visto como o único, nem o principal responsável pelo conhecimento produzido, há uma ênfase na coletividade com a coparticipação de não humanos nesse processo.

Alguns estudos, no âmbito da Educação Matemática, desenvolvidos em salas de aulas virtuais discutem, entre outras questões, o papel de atores não humanos (mídias) no processo de produção matemática nesse contexto (e.g. Gracias, 2003; Borba e Villarreal, 2005; Santos, 2006; Zulatto, 2007; Malheiros, 2008; Rosa e Maltempi, 2010; Borba, Malheiros e Amaral, 2011; Villarreal e Borba, 2010). Os resultados desses estudos sugerem que as mídias também são necessárias no processo de produção de conhecimento Matemático.

No presente artigo almejamos olhar essas e outras possíveis inter-relações entre esses atores, por isso, no título desse artigo colocamos em destaque, não por acaso, uma interrogação. Nosso intuito é chamar a atenção para o objetivo deste artigo, qual seja: provocar reflexões sobre as contribuições das tecnologias digitais no processo de produção de conhecimento. Em particular queremos especificar o papel da internet.

Scagnoli (2005) argumenta que com a internet professores e alunos podem consultar livros, acessar rapidamente a dados, buscar informações, etc. Além disso, ela fornece um acesso fácil a seus pares, o que permite o desenvolvimento de trabalhos intelectuais - pensamento coletivo - de forma colaborativa (Baldwin, 1998; Harasim, 1990; McDonald, 2002). A esse respeito Scagnoli (2005, p.6), argumenta que "a internet se torna um espaço virtual de aprendizagem, onde o conhecimento é compartilhado". É com base nesta acepção que discutimos como a atriz internet pode se movimentar em um sistema de atividade que é constituído por coletivos pensantes e, assim, ilustrar a forma como ela pode desenvolver diferentes papéis verificando que implicações isso traz ao sistema de atividade.

Fundamentamos nossas análises na teoria da atividade (TA), em particular, na vertente que se baseia nas ideias de Engeström (1987), que propõe uma organização sistêmica a fim de alicerçar as discussões sobre compreensão da natureza coletiva da atividade humana. Pautamo-nos também no construto seres humanos-com-mídias (S-H-C-M) (Borba e Villarreal, 2005) que enfatiza o papel das mídias na produção de conhecimento, se apoiando em autores da própria TA, da etnomatemática e da filosofia da técnica.

Para a análise dos dados adotamos a proposta de miniciclones de transformações expansivas (Souto, 2013; Souto e Borba, 2013) que entrelaça as ideias da TA e do construto S-H-C-M. Essa ferramenta de análise auxilia na compreensão dos movimentos de diversos atores em um sistema de atividade que objetiva a produção de matemática *online*.

Tendo em vista o propósito acima exposto, sistematizamos este artigo da seguinte forma: iniciamos abordando as ideias de Engeström (1987) que tem desenvolvido de modo particular a teoria da atividade. A seguir destacamos as ideias de Borba (1999) e Borba e Villarreal (2005) que permeiam o construto seres-humanos-com-mídias. Na sequência abordamos as considerações sobre os aspectos metodológicos e pedagógicos, seguidos da análise de dados e de uma síntese de nossas ideias.

2. Teoria da atividade

A teoria da atividade tem como eixo central as transformações que ocorrem nas inter-relações que se estabelecem entre o ser humano e o ambiente no desenvolvimento de atividades. Ela se fundamenta nos princípios da escola Histórico-Cultural da psicologia soviética.

De acordo com Souto (2013), a gênese dessa teoria é obscurecida, principalmente, por problemas de tradução e o seu desenvolvimento é ramificado. No entanto, Vygotsky, Leontiev e Engeström são apontados como alguns dos principais teóricos que contribuíram e/ou contribuem para o seu desenvolvimento.

Neste artigo nos apoiamos nas ideias de Engeström (1987, 1999, 2001) que propõe uma organização sistêmica para explicar essa teoria (fig. 1).

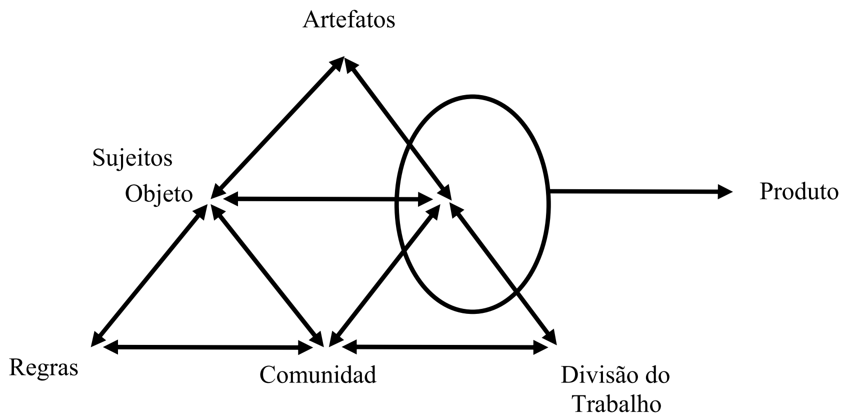


Figura 1: Representação do sistema de atividade humana

Com a representação triangular da figura 1 Engeström (1987) procura integrar sujeitos (todos que possuem *"agency",* ou seja, poder de ação), objeto ("matéria-prima" ou "espaço problema" para o qual a atividade é direcionada), artefatos (instrumentos e signos), regras (normas que regulam as relações no sistema), comunidade (todos que de algum modo medeiam a relação entre os sujeitos e o objeto da atividade) e divisão do trabalho (negociação de responsabilidades que é realizada com base nas regras). Ele considera que esses elementos juntos formam um todo unificado. Com essa estrutura, nomeada por ele de sistema de atividade, o autor coloca em destaque a natureza coletiva da atividade e, ao mesmo tempo, estende o conceito de mediação de Vygotsky para o contexto cultural.

Em síntese, Engeström explica que um sistema de atividade deve ser tomado como um processo contínuo de mudança e movimento decorrentes de crises e rupturas, que inter-relacionados numa formação criativa, composta de elementos, vozes e concepções múltiplas, provocam transformações e inovações que são entendidas do ponto de vista histórico (Souto, 2013).

Para auxiliar na compreensão de suas ideias sobre esse processo de mudança que está relacionado com os movimentos de um sistema de atividade Engeström (1999) propõe uma ferramenta analítica: o ciclo de aprendizagem expansiva que geralmente começa com a socialização e a formação dos aprendizes para se tornarem membros da atividade que se dá por meio de questionamentos, críticas ou negações à prática corrente.

Nesse início há, em geral, uma predominância do processo de reprodução da cultura, que se transforma de maneira discreta nas inovações individuais, onde é feita a análise da situação e das possíveis soluções. Com o avanço do ciclo, o desenho e a execução de uma nova representação para a atividade pode começar a dominar, ou seja, a construção de um novo modelo ou uma nova ideia que explique e ofereça uma solução para a situação-problema. Parte-se então para a experimentação deste modelo ou desta ideia, com o intuito de verificar suas potencialidades e limitações. Encontrado o melhor modelo, solução ou ideia, é hora de implementar por meio de aplicação prática.

Segue-se então a reflexão avaliativa sobre nova representação, a partir da qual a nova prática se consolida, ou seja, quando essa nova representação se estabiliza e torna-se dominante.

3. O construto seres-humanos-com-mídias

O construto seres-humanos-com-mídias toma como base a ideia de que o conhecimento é produzido por coletivos pensantes de atores humanos e não humanos, em que todos desempenham um papel central. De acordo com Borba e Villarreal (2005), também não existe uma escala de qualidade entre as mídias que possa classificá-las em melhores ou piores, mas sim, diferentes tipos que têm, ao longo da história, condicionado a produção de diferentes tipos de conhecimentos.

Os seres humanos, ao interagirem com as mídias, reorganizam o pensamento de acordo com múltiplas possibilidades e restrições que elas oferecem. A presença ou a ausência delas influencia o tipo de conhecimento produzido, e o uso ou o surgimento de uma determinada mídia não invalida ou extingue outra, embora a coloque, muitas vezes em uma posição distinta da que ocupava em momento anterior.

Essas ideias são baseadas nos estudos de Tikhomirov (1981) e de Lévy (1993). Em particular, Tikhomirov toma da teoria da atividade a ideia de mediação, que está implícita no conceito de reorganização, presente nos processos de interação do ser humano com o ambiente, e propõe a constituição de um sistema formado por ser-humano-computador. Lévy por sua vez, ao contemplar as dimensões técnicas e coletivas da cognição, conceitua a expressão ecologia cognitiva, e vivenciando as novas possibilidades da informática, sugere um sistema para além da proposta de Tikhomirov, que componha um coletivo pensante de homem-coisas. O trânsito desses conceitos para o âmbito da Educação Matemática, aliado a ideias originais, é feito por Borba (1999) com a proposta do construto seres-humanos-com-mídias. Entendemos que neste construto a ideia de mediação é estendida para uma de impregnação mútua, onde as mídias permeiam o humano da mesma forma que as tecnologias são compreendidas como sendo impregnadas por humanidade. A linha do externo-interno se dilui e se torna mais “fuzzy”. Conhecimento é pensado como sendo a produção de humanos, mas também de tecnologias historicamente constituídas.

Um conceito central desse construto é a noção de moldagem recíproca (Borba, 1993, 1999), segundo a qual, os *feedbacks* dados por uma determinada mídia influenciam no raciocínio de quem interage com elas, em outras palavras, a mídia molda o ser humano. Mas, os seres humanos também a moldam na medida em que a utilizam. Um exemplo pode ser observado na forma como os estudantes fazem uso de um determinado software, que muitas vezes é diferente da maneira como a equipe que o desenvolveu havia pensado. Por outro lado, a equipe que desenvolve um *software* procura elaborar um *design* levando em consideração a forma como os estudantes têm utilizado.

A noção de moldagem recíproca proposta por Borba (1999) tem forte ligação com a teoria da atividade, de acordo com a qual o ser humano ao longo da história tem inventado ferramentas e desenvolvido formas de adaptação para garantir sua sobrevivência. Este processo de criação e interação com o ambiente é dialético, pois, faz com que, ao mesmo tempo em que o ser humano transforma o ambiente, seja também transformado por ele. A diferença destacada no pensamento de Borba reside na ênfase do autor sobre os aspectos das interações dos seres humanos com as mídias como a informática, por exemplo. Em outras palavras, atores humanos recebem *feedbacks* de uma determinada mídia que condicionam (sem determinar) suas ações, mas ao mesmo tempo tais ações condicionam e moldam as possibilidades que a própria mídia oferece. Portanto, é possível afirmar que à luz do construto seres-humanos-com-mídias, as possibilidades e restrições (condições) que uma determinada mídia oferece, resultam em um processo de produção de conhecimento distinto de outro realizado com uma mídia diferente.

As ideias relacionadas ao construto seres-humanos-com-mídias nasceram e vêm sendo legitimadas no seio do Grupo de Pesquisa em Informática Outras Mídias e Educação Matemática – GPIMEM[1].

4. Aspectos metodológicos e pedagógicos

O objetivo, apresentado anteriormente, reflete nossa preocupação com o aprofundamento de compreensões e não na busca de uma representatividade numérica. Em vista disso, optamos por uma abordagem de pesquisa qualitativa,

[1] Para uma leitura mais aprofundada sobre os trabalhos do GPIMEM recomendamos Borba e Chiari (2013).

em que adotamos como principal procedimento a observação participante. Jaccoud e Mayer (2008) indicam que esse procedimento tem a vantagem de levar a uma compreensão mais profunda da realidade e, se mostra como um método que reduz a distância entre os discursos e as práticas concretas dos atores sociais.

Por outro lado, Lincoln & Guba (1985) destacam que a observação "participante" é usada para enfatizar que ela não é neutra, pois a interação entre observador e observado implica em influências mútuas que podem configurar "vieses" para a pesquisa. Uma forma de atenuá-los é o emprego de outros procedimentos e a adoção de distintas fontes de dados. Daí a realização de entrevistas e a opção em analisar os dados produzidos nos chats, fóruns e *e-mails.* O contexto de produção desses dados foi o curso de extensão universitária ofertado na modalidade a distância *online* com uma carga horária de 32 horas. Nele, vinte professores de matemática encontravam-se no ambiente virtual de aprendizagem Tidia-Ae[2] para participarem de discussões sobre textos de Educação Matemática e também para desenvolver soluções para problemas de geometria analítica, referentes ao estudo das cônicas. Neste último tipo de sessão, foco das análises deste artigo, os professores eram divididos em pequenos grupos para solucionar problemas que foram desenhados para coletivos de professores-com-GeoGebra[3]-internet-lápis-e-papel. Os dois autores deste artigo eram os professores *online* deste curso de formação continuada de professores.

Como ferramenta de análise dos dados utilizamos a proposta de miniciclones de transformações expansivas (Souto, 2013; Souto e Borba, 2013). Essa perspectiva de análise se baseia na teoria da atividade, em particular, no conceito de Ciclo de Aprendizagem Expansiva proposto por Engeström (1999) e na noção de moldagem recíproca (Borba, 1993, 1999), que é um conceito central dos seres-humanos-com-mídias. A ideia de miniciclone é associar os movimentos de um sistema de atividade ao fenômeno da natureza: ciclone.

Um ciclone é uma tempestade produzida por grandes massas de ar animadas de grande velocidade de rotação e que se deslocam a velocidades de translação crescentes. Quando propomos chegar próximo a essa definição nos referimos aos movimentos desse fenômeno, pois, além de rotar (movimentar-se em torno de si mesmo) e transladar (movimentar-se em torno de outros sistemas de atividade), não é possível, *a priori*, determinar ou prever com exatidão a direção que ele vai tomar. Além disso, consideramos apropriado relacionar a ideia de uma velocidade crescente ao processo de produção do conhecimento e suas transformações.

2 http://tidia-ae.rc.unesp.br

3 www.geogebra.org

Um miniciclone pode favorecer a compreensão do desenvolvimento de sistemas seres-humanos-com-mídias[4] que se constituem em ambientes virtuais de aprendizagem captando suas contradições internas e a ocorrência de transformações expansivas. As contradições internas não equivalem a problemas ou conflitos, são tensões estruturais historicamente acumuladas nos sistemas de atividade. Elas podem servir de fontes que renovam tentativas de mudar a atividade ou de energia para conflitos que seriam discordâncias, choques de opiniões ou falta de aceitação do outro. As transformações expansivas devem ser entendidas como movimentações em um sistema de atividade coletiva em que seres humanos com tecnologias buscam de forma crítica, um modo que não havia sido, em outras situações, pensado por eles para compreender e/ou reconstruir entendimentos sobre determinado problema ou conteúdo matemático (Souto, 2013).

Em geral, um miniciclone, começa a ganhar forma quando surgem dúvidas e questionamentos decorrentes de uma tensão, que pode ser ocasionada por uma necessidade de solucionar uma situação nunca antes prevista ou pelo desejo, mesmo que seja inconsciente, de quebrar padrões de produção matemática já consolidados.

Sua evolução ocorre com base nas reorganizações do pensamento, as quais são impulsionadas e entrelaçadas pelas respostas das mídias envolvidas no processo. Com o avanço do miniciclone a dinâmica do trabalho pode mudar, caminhos alternativos e novas tensões podem surgir. Pistas do objeto do sistema podem ser encontradas durante o processo de moldagem recíproca. Além disso, a realização de experimentações e simulações de conjecturas se intensificam, indicando que transformações expansivas podem estar em movimento, até que argumentos são elaborados para justificar a solução construída, o que pode indicar uma proximidade do final do miniciclone. Em outras palavras, o processo de desenvolvimento do miniciclone resulta em mudanças qualitativas na produção matemática dos participantes.

Com o intuito de buscar uma harmonia entre as dimensões metodológica, epistemológica e pedagógica estruturamos a proposta do curso de modo a privilegiar o trabalho coletivo, colaborativo e dialógico, o qual está condicionado às potencialidades do ambiente virtual de aprendizagem, de modo particular, ao grau de interação propiciado aos participantes. Com esse pensamento buscamos um modelo pedagógico baseado no que Silva (2003) chamou de "sala

4 Sistemas seres-humanos-com-mídias devem ser entendidos como sistemas de atividade em que o coletivo de seres-humanos-com-mídia seria não só a unidade básica de produção de conhecimento, mas também uma parte da atividade que se metamorfoseia de acordo com o movimento (Souto e Borba, 2013).

de aula interativa". Ele pode favorecer o aluno na elaboração de conjecturas e na busca por caminhos alternativos, ou seja, pode alterar, ampliar e modelar o fazer Matemática (Souto, 2013).

É oportuno considerar que, a nosso ver, as relações que se estabelecem entre os diversos atores ultrapassam os limites de trocas entre seres humanos, constituindo um coletivo de professores-alunos-internet-software-... Não por acaso esse modelo de cursos a distância foi sendo desenvolvido ao longo dos últimos 15 anos, quando o GPIMEM elaborava e aperfeiçoava a noção de seres-humanos-com-mídias.

No que se refere ao estudo das cônicas com o GeoGebra seguimos a orientação da abordagem experimental-com-tecnologias proposta por Borba e Villarreal (2005). Nela, o problema deve propiciar a formulação de conjecturas e a realização de procedimentos de tentativa e erro para que se possam construir argumentações, e com isso aceitar ou refutar hipóteses inicialmente formuladas.

Essa abordagem se harmoniza com a visão epistemológica do construto seres-humanos-com-mídias, pois o *feedback* dado pelas mídias durante uma experimentação pode gerar debates, discussões, questionamentos, ideias e diferentes possibilidades para solução de um dado problema pelos envolvidos com a solução do problema. Esta perspectiva é permeada pela perspectiva de trabalho coletivo, colaborativo e dialógico, uma vez que nesse construto humanos e mídias são vistos como uma unidade que produz conhecimento.

5. Vozes dos participantes do curso

A tentativa de ajustar o foco sobre a produção matemática *online* de modo que as possíveis influências da internet emergissem nos levou a analisar um recorte dos dados produzidos durante o curso. Especificamos os movimentos que ocorrerem durante o estudo das cônicas que foi divido em duas partes desenvolvidas por pequenos grupos. Para esta análise selecionamos o grupo constituído pelas professoras Thaís, Elza, Virginia e Bianca (esses são pseudônimos que utilizamos como forma de preservar a identidade delas).

Na primeira delas, os participantes recebiam orientações (passo-a-passo) para a construção das cônicas com o software GeoGebra que eram seguidas de questões abertas que exploravam o recurso arrastar do software. Como exemplo, apresentamos a seguir o passo-a-passo da construção da parábola e as respectivas questões.

1º) Crie uma reta *d*, depois crie um ponto F fora da reta d.
2º) Crie um ponto A na reta *d* e por esse ponto passe uma reta perpendicular *a*.
3º) Construa a mediatriz *m* entre os pontos F e A, e na intersecção da mediatriz *m* com a perpendicular *a* marque o ponto P.
4º) Com o botão direito do mouse clique no ponto P, e na janela que aparecer clique em Habilitar rastro.
5º) Selecione a ferramenta Mover, clique sobre o ponto A, segure e arraste. Observe o rastro do ponto P e responda:
   a) O que acontece quando você move o ponto A?
   b) O que podemos afirmar com relação aos pontos A, F, e P?
   c) No menu Exibir, habilite a janela algébrica. Mova novamente o ponto A e descreva o que ocorre nessa janela.

Na segunda parte desse estudo foram propostos problemas usualmente encontrados em livros didáticos. O processo de resolução de dois desses problemas, a nosso ver, favorece a análise das influências da internet na produção matemática a distância *online*. Desse modo, os apresentaremos no decorrer dessa seção.

Inicialmente a internet desempenhava o que é considerado pela teoria da atividade seu papel "natural", ou seja, a condição de artefato (fig. 1) mediando as relações dos sujeitos com o objeto. Essa afirmação também tem como base as discussões de Engeström (2002) sobre a aprendizagem escolar, em que ele reconhece no papel de artefatos o lápis e papel (ou mídias) e as condições dos próprios estudantes em desenvolver o estudo, ou seja, os artefatos são meios mediacionais e referem-se às máquinas, à escrita, à fala, aos gestos, aos números, aos recursos mnemotécnicos, etc. Além disso, a internet - entendida como ambiente virtual de aprendizagem (Scagnoli, 2005) - molda o raciocínio dos professores (Borba e Villarreal, 2005). Em outras palavras, há uma relação mediada por essa mídia em que distintas reorganizações do pensamento são propiciadas para que uma mesma ideia matemática possa ser expressa de diferentes formas.

À medida que o trabalho de cunho matemático se desenvolvia, novos movimentos no sistema ocorriam, sugerindo mudanças nesse papel, as quais podem ser verificadas no miniciclone de transformações expansivas que estava em desenvolvimento. No comentário abaixo Thais dá indicativos do início do miniciclone. Isso porque ela deixa explícito o desejo de busca pelo novo, pela construção de algo que, até então, era desconhecido por ela.

Thais: Olha Virginia... Também tenho que confessar que estou mexida com essas construções... Nunca tinha parado para estudar a parábola assim... Fiquei tentada a procurar teorias a respeito, mas decidi que não ia, para

> conseguir chegar às minhas próprias construções... "[Thais se refere à solução dos problemas usualmente encontrados em livros didáticos que naquele instante seu grupo estava tentando resolver com base nas construções geométricas que foram realizadas anteriormente com o GeoGebra]" (Chat - 03/05/2011).

Thais é docente do ensino superior e trabalha com esse tema há algum tempo. É importante observar essa experiência, pois em seu comentário é possível verificar que a forma como o tema foi abordado lhe possibilitou rever, reavaliar e reconstruir entendimentos a partir de suas próprias ideias. Nesse sentido, podemos dizer que há, neste instante, uma relativa desestabilização do sistema de atividade. Isso porque esses movimentos fazem parte do processo de reorganização do pensamento (Tikhomirov, 1981) e, considerando que Thais estava concordando com Virginia, é possível inferir que não se tratava de uma opinião isolada uma vez que ambas compartilhavam ideias em comum.

Em um dado momento do estudo Elza e Virginia discutem o seguinte problema que compunha a segunda parte do estudo: *"Dada a equação $y^2 = -8x$, trace o gráfico, determine as coordenadas do foco e a equação da diretriz*". Na sequência apresentamos o *feedback* do GeoGebra para este problema quando são inseridos os dados no campo de entrada, nosso intuito é favorecer a compreensão do leitor. Contudo, é importante notar que naquele momento os professores não tinham essa imagem do software, isso exigiu deles a realização de um exercício mental de visualização e ao mesmo tempo um esforço para transformar as ideias matemáticas na língua materna. Como pode ser observado no excerto apresentado a seguir.

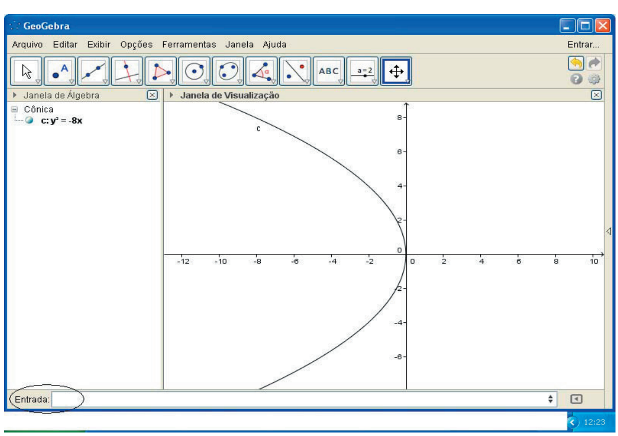


Figura 2. Solução fornecida pelo GeoGebra com o uso da ferramenta campo de entrada

O diálogo a seguir em que as professoras referem-se à questão acima representada na figura 2, exemplifica de forma mais refinada o desenvolvimento do miniciclone. Como destacado anteriormente, ele pode iniciar com dúvidas e questionamentos decorrentes de uma tensão ocasionada por uma necessidade de solucionar uma situação nunca antes prevista ou pelo desejo, mesmo que seja inconsciente, de quebrar padrões de produção matemática já consolidados. Sua evolução se dá com base nas reorganizações do pensamento provocadas pelas respostas da mídia envolvida nas ações dos aprendizes.

Elza: Fizeram a letra j? "[questão representada na fig.2]" Tive problemas...

Virginia: Pelo q me parece, o foco deve estar sobre o eixo x, à esquerda de y, ou seja, deve ser um x negativo. Com y=0. o que vocês acham meninas, será q o caminho é esse? Parece-me que o foco deve ser equidistante dos dois "braços" da parábola, e para que isso ocorra, precisa estar sobre o eixo x. E aí meninas, o q vocês acham? Não estou conseguindo avançar sozinha, se vocês tiverem alguma ideia, por favor, escrevam... E nesse caso, a diretriz deve ser paralela ao eixo y?

Elza: Paralela? Por quê?

Virginia: Não sei explicar... Pensando na atividade q fizemos anteriormente, movimentando o ponto A, quando P traçava a parábola... Lembra, pensando naquilo, me parece que é mais ou menos isso, precisamos buscar essa confirmação. "[Virginia está se referindo à construção geométrica realizada anteriormente com o GeoGebra. O ponto A é a intersecção da reta diretriz da parábola com a reta perpendicular à diretriz e o ponto P é a intersecção da reta mediatriz entre o foco da parábola e o ponto A, e a reta perpendicular à diretriz. Assim, ao mover o ponto A sobre a reta diretriz o ponto P desenha a parábola]". (Chat - 03/05/2011).

Como vimos, no debate síncrono, Elza solicita ajuda de suas colegas para solucionar a questão referente à parábola. Sua dificuldade era compreender a representação geométrica dos parâmetros da equação. Seria essa uma tensão na atividade desse grupo? A mobilização das professoras participantes do grupo pode ser indicativa de uma resposta positiva.

Virginia, na tentativa de contribuir, expõe algumas conjecturas que elaborou com base no estudo que o grupo havia realizado na etapa anterior, em que elas exploravam com o recurso arrastar do GeoGebra as relações entre as representações algébricas e geométricas. Essas conjecturas foram construídas de forma intuitiva, pois a própria Virginia reconhece que não tinha argumentos para aceitá-las ou refutá-las. O trabalho colaborativo começou a ser delineado, e além de Virginia, Thais também se mobiliza para buscar a construção de uma solução com o GeoGebra.

Thais: Concordo que o foco é um ponto do tipo (x,0). Então, fiz um parâmetro com esse valor; "[Essa ação de Thais se refere à inserção de um seletor no GeoGebra]".

Virginia: Prossiga Thais, por favor, estou agoniada...

Thais: Mas não tá dando Virginia... vou tentar descrever

Elza: O que não tá dando?

Thais: Meus testes... Espera ai gente... Minha ideia é deixar fixa a distancia de um ponto (x,0) a parábola do outro lado e tentar seguir os procedimentos que fizemos da perpendicular e da mediatriz. "[Esse comentário de Thais está relacionado à construção da parábola realizada pelo grupo]".

Virginia: Um ponto para formação da parábola é o foco que, por hora, estamos considerando que esteja sobre o eixo x (x,0). Para que a parábola exista, o outro, ponto deve estar sobre a diretriz e ambos devem ser equidistantes de qualquer ponto do traçado da parábola. Pois é, parei nisso... Me ajudem a organizar isso, os dados são esses, mas agora precisamos a partir disso, conseguir provar q a diretriz é paralela a y ou não.

Thais: Ele "[o foco da parábola]" esta sob o eixo x. Concordo Virginia... Por isso estou tentando deixar esse ponto fixo no eixo x e fixar a distancia dele para o outro lado, em busca da reta diretriz... Mas estou me perdendo nos procedimentos. Virginia... Ela "[diretriz da parábola]" é paralela ao eixo y

Virginia: É o que penso...

Elza: Ah gente, eu estou perdida!! (Chat - 03/05/2011)

O trabalho avança, as conjecturas de Virginia são "avalizadas" por Thais, enquanto Elza ainda não consegue acompanhar o raciocínio de suas colegas, mas mantêm-se interessada em compreender as relações e encontrar uma solução. A tentativa de Thaís era de explorar as possibilidades do *software*, fixando alguns elementos da parábola e utilizando o recurso arrastar em outros, fazendo assim, simulações até encontrar a resposta desejada (fig. 3).

A figura 3 ilustra o processo de construção da solução dinâmica com o GeoGebra que estava em discussão no excerto anterior.

Borba (2012) e Villarreal e Borba (2010) afirmam que diferentes tecnologias da inteligência têm, ao longo da história, condicionado a produção de diferentes tipos de conhecimento. Desse modo, entendemos que a simulação feita por Thaís com o GeoGebra seria difícil de ser realizada com outra tecnologia que não tivesse os mesmos recursos desse aplicativo, como por exemplo, a oralidade ou a escrita.

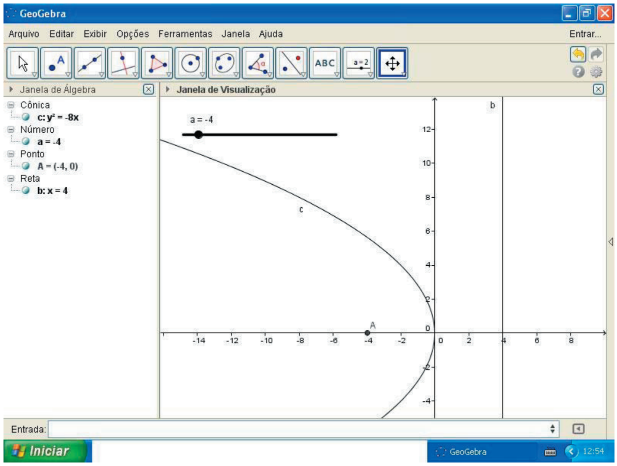


Figura 3. Construção parcial da solução elaborada pelos professores

Nas entrelinhas desses movimentos apresenta-se de modo parcial o processo de moldagem recíproca (Borba e Villarreal, 2005), porque as ações de Thais e de suas colegas eram moldadas pelos *feedbacks* do GeoGebra, a reorganização do pensamento se dava a cada nova simulação, que estava condicionada às possibilidades que o *software* oferecia. Mais tarde, Thaís explica em um *chat* os procedimentos que utilizou na proposta de construção, e depois de sintetizar suas ideias, as envia por *e-mail* destacando, mais uma vez, a importância do pensamento coletivo que foi reorganizado com base nas interações com o *software* e com suas colegas. A sugestão proposta no *e-mail* de Thais resulta na construção dinâmica representada na sequência (fig. 4).

Aula de ontem...
Fiquei pensando no que tínhamos feito ontem e acho que pode ser feito mais fácil.
*Observação: a parábola tangencia o eixo y na origem... isso nos garante que o foco F será um ponto do eixo x e a diretriz paralela ao eixo y.
Além disso, lembram-se das conclusões da Bianca que em um momento as retas eram paralelas... Então se o foco for F(a,0) a diretriz será y=-a, no plano cartesiano... Seguindo os passos anteriores que fizemos na atividade, conseguimos encontrar o desejado.

Sugestão de resolução:
Digite a parábola y^2=-8x
Digite a=-4
Crie o ponto A digitando A=(a,0)

Crie a reta diretriz digitando x=-a
Vá à janela de álgebra e clique na bolinha em branco do número a que criamos... (assim a gente vai poder ajustá-lo)
Crie um ponto P na reta x=-a (basta ir com a ferramenta ponto em qualquer ponto dessa reta).
Trace a reta perpendicular à x=-a em P
Trace a mediatriz entre A e P;
Use a ferramenta intersecção de dois objetos e encontre a intersecção das duas ultimas retas que construímos, gerando um ponto B.
Ao ajustar o seletor a no -2, movimente o ponto P.
O Ponto B passará exatamente na parábola que desejávamos...
Thais (e-mail - 04/05/2011)

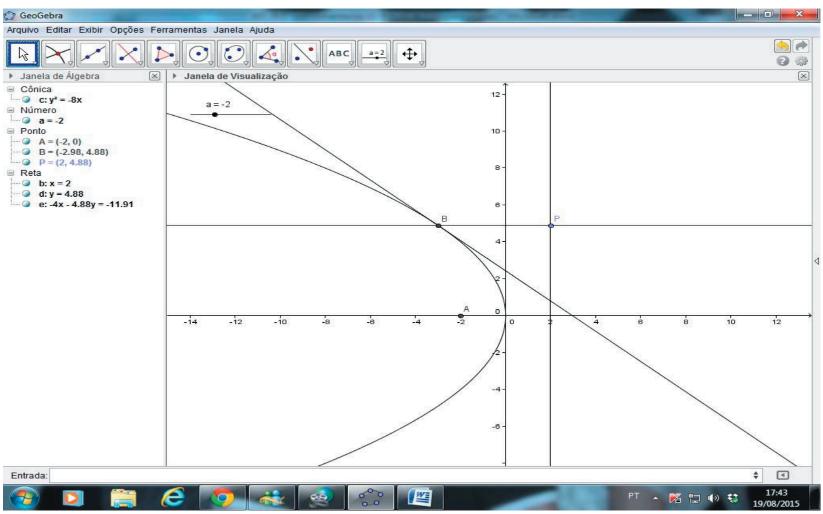


Figura 4. Solução para o problema da parábola

Em seu *e-mail* Thaís realça a importância das contribuições do grupo para o resultado final. Embora tenha redigido o passo-a-passo da construção, o fez baseada nas discussões realizadas nos *chats* anteriores, nas interações com o grupo e com o *software*.

O trabalho avança, o grupo segue discutindo, mas o grau de dificuldade parece aumentar, particularmente durante o estudo da hipérbole, em que é possível observar como o miniciclone toma uma nova direção. Embora a princípio os movimentos se assemelhem com os que ocorreram durante o estudo da parábola. Neste caso também houve primeiro, como no caso da parábola, uma construção da hipérbole como lugar geométrico, e uma segunda parte baseada em exercícios de livros. Para esta análise selecionamos alguns recortes de momentos em que o grupo realizava a segunda parte.

Thais: Sugestão... Meninas, precisamos descobrir o que tem a ver aqueles a e b "$\left[\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\right]$" nas construções... Certo? Podemos fazer isso usando o potencial do software. O GeoGebra é um simulador, então podemos brincar com ele. Modificamos os parâmetros e tentamos analisar quais alterações acontecem. Vamos lá!!! Meninas, acho que o caso mais fácil para investigarmos, é o exercício i. "[Determine o centro, os eixos e os focos da hipérbole $\frac{(x-2)^2}{9^2}-\frac{(y-2)^2}{7^2}=1$]".

Elza: Mais fácil?

Thais: Nele temos A(-7,2) B(11,2) F1(-9,6;2) F2(13,4;2). "[Esses pontos foram obtidos na resolução algébrica feita por Thais com lápis e papel e trata-se de um conhecimento que Thais já possuía]". Sim Elza, porque nele nos temos as duas coisas: os elementos geométricos e os algébricos. (Chat - 12/05/2011)

Na figura a seguir, a exemplo do que fizemos no estudo da parábola, apresentamos a representação do problema da hipérbole destacado por Thais no excerto anterior, que pode ser visualizada quando a ferramenta do campo de entrada do GeoGebra é usada.

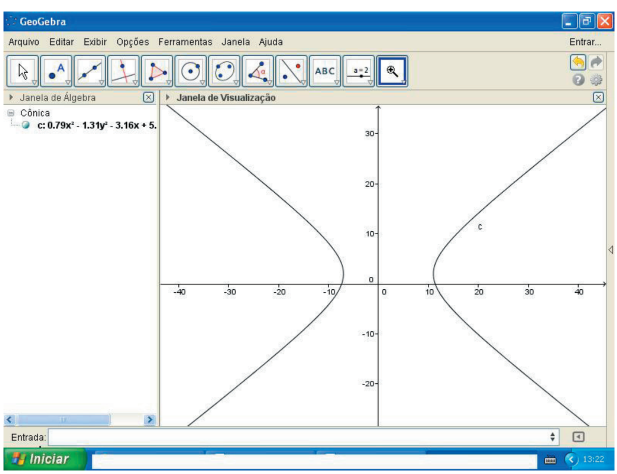


Figura 5. Solução com o uso da ferramenta campo de entrada

Thais insiste com suas companheiras para que juntas busquem compreensões acerca das relações existentes entre as representações algébricas e geométricas. Elza não considera uma tarefa fácil, mesmo assim, procura se empenhar.

Durante esse trabalho coletivo e colaborativo o processo de moldagem recíproca (Borba, 1993, 1999) pode ser verificado, particularmente, nos momentos em que conjecturas são levantadas, testadas e refutadas ou não. Além disso, em alguns casos os *feedbacks* do *software* originavam novas conjecturas que eram novamente testadas, e assim sucessivamente, até que uma justificativa do ponto de vista matemático fosse encontrada pelo grupo. Esses movimentos sinalizam que as reorganizações do pensamento (Tikhomirov, 1981) são constantes e que são condicionadas pelas contribuições das mídias no processo de busca por uma solução.

Durante esse processo de "*pensar com*" o GeoGebra, um *feedback* do recurso arrastar do *software* em um movimento de experimentar, pode ter influenciado o raciocínio de Thais que sugere que as assíntotas da hipérbole devam ser investigadas. Esse conceito precisa ser revisitado, relembrado, pois, ao que parece, nenhum dos professores tem clareza sobre ele. Nesse instante, surge a ideia de consultar as páginas da internet.

Thais: Vocês sabem o que é a assíntota da hipérbole? Como podemos encontrá-la aqui? Será que o b "$\left[\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\right]$" não esta relacionado com ela? Pois é... Por isso minha suspeita que devemos investigá-la.

Bianca: Com certeza está... Se é que entendi o que são as assíntotas... São duas né Thais?

Elza: Mas a questão é encontrá-las... Alguma sugestão?

Bianca: Vou buscar algo para nos ajudar na internet...

Thais: Vejam esse site... http://www.algosobre.com.br/matematica/geometria-analitica-hiperbole.html. [Entre esta e a próxima intervenção de Thais transcorreram 12 minutos]

Bianca: Olhem esse site: http://alfaconnection.net/pag_avsm/geo0504.htm

Thais: Gente... Agora ficou fácil... Ao traçarmos a assíntota, podemos traçar uma perpendicular em A à reta y=d "[Thais, com base no que pesquisou na internet - fórmulas e construções estáticas que permitiam determinar as assíntotas da hipérbole, o centro e os focos -, se refere à construção apresentada na figura 6, a qual estava sendo elaborada pelo grupo naquele momento]". ops... Tem um erro ai. Vou escrever tudo de uma vez e mando como encontrar os focos, usando as ferramentas do GeoGebra, e tendo a equação da hipérbole. Bianca, o primeiro passo era encontrar o algoritmo... Agora precisamos estudá-lo... a saga ainda não terminou. Usei o dado que tinha no site "..." Mas os porquês nós teremos que pensar... (Chat - 12/05/2011)

O excerto acima registra que o grau de dificuldade das questões e o tempo, que a cada instante ficava mais escasso, pode ter levado o grupo a abrir mão do desejo inicial de *"não buscar teorias a respeito"* para procurar ajuda na internet. Nesse caso, a internet estava desempenhando o papel de comunidade. Isso porque um dos papéis da comunidade é situar o sistema dentro do contexto sociocultural daqueles que compartilham o mesmo objeto (Engeström, 1999). Além disso, também é função da comunidade mediar as relações entre os sujeitos e o objeto da atividade. A esse respeito, observamos que naquele instante da atividade uma aproximação do objeto é "estudar as conexões entre conceitos matemáticos envolvidos na solução que estava em processo de construção", assim interpretamos que a internet mediou a relação dos sujeitos com o objeto.

É oportuno observar que a relação dos sujeitos com a comunidade, segundo a teoria da atividade, é mediada pelas regras. Neste sentido, verificamos que a internet no papel de comunidade trouxe para o sistema regras e convenções sociais que colocam a Matemática como um símbolo de certeza e que até então não faziam parte desse sistema. De modo específico tais convenções podem ser verificadas, por exemplo, nas formas de apresentação de conteúdo que só admitem duas possibilidades para a solução dos problemas: correta ou incorreta.

Por outro ângulo de análise, temos que considerar ainda a existência de uma relação entre comunidade e objeto que é mediada pela divisão ou organização do trabalho como preferimos nos referir. Neste caso, observamos que o acesso à internet mudou as formas de organização do trabalho, pois as interações por *chat* reduziram e o trabalho do grupo passou a ter um caráter mais "individualizado", em que os sujeitos, com base nas informações da internet, elaboravam e testavam suas conjecturas e só então, em um segundo momento, havia uma espécie de socialização e discussão das ideias de cada um. O comportamento de Thais, em particular, nos fornece esses indicativos.

Em nossa análise identificamos também transformações nos motivos da atividade, as quais estão estreitamente ligadas à relação entre comunidade e objeto. Isso porque de acordo com Kaptelinin (2005), "o objeto da atividade é determinado por todos os motivos efetivos" (p. 17). Sendo assim, observamos que inicialmente o motivo da atividade dos professores participantes era construir no ambiente *online* do curso uma solução para os problemas sobre cônicas com o GeoGebra. No entanto, quando a internet passou a desempenhar o papel de comunidade o motivo mudou e passou a ser apenas encontrar uma solução qualquer no menor espaço de tempo possível.

Ao verificar a internet desempenhando o papel de comunidade percebemos uma ampliação da multivocalidade do sistema, pois passou a englobar não apenas os indivíduos que fazem parte dele, como também as múltiplas vozes daqueles que são externos, mas que de algum modo se relacionam com ele. A construção de uma página na internet é impregnada dos diferentes valores, histórias, convenções, posicionamentos, enfim diferentes vivências de seus idealizadores e, na medida em que é fonte de consulta, transmite todos esses aspectos ao sistema. Esses aspectos influenciaram nos movimentos do miniciclone, pois apesar de o grupo ter utilizado o recurso arrastar durante o processo de construção, a solução final, nesse caso, é uma construção estática representada na figura 6 e cujo passo-a-passo da construção é apresentado na sequência.

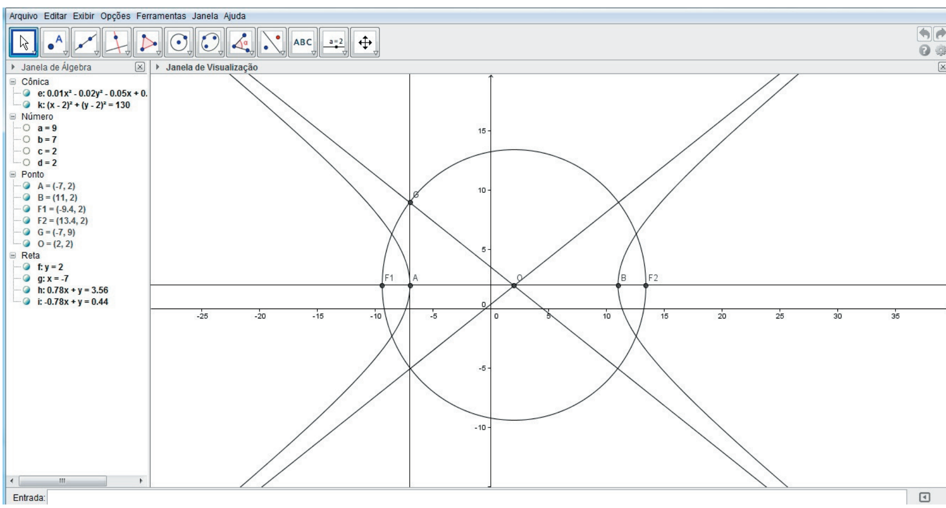


Figura 6. Solução final da Hipérbole

Conhecemos a equação $\frac{(x-c)^2}{a^2} - \frac{(y-d)^2}{b^2} = 1$. O ponto (c,d) indica o centro da nossa hipérbole.

Traçamos a reta y=d. Encontramos a intersecção da hipérbole com a reta y=d. Encontrando os pontos A e B, que distam *a* do centro (c,d). Em A, traçamos uma reta t perpendicular à y=d. Traçamos as assíntotas $y - d = -\frac{b}{a}(x-c)$ e $y - d = \frac{b}{a}(x-c)$.

A intersecção de uma assíntota e da reta t, chamamos de G. Há a formação de um triângulo retângulo AOG, cuja hipotenusa OG é a distância do centro ao foco. Então basta usar a ferramenta de construir uma circunferência conhecendo o raio com centro em O e raio distancia [OG] e temos os dois focos determinados. Thais (e-mail - 13/05/2011)

Esse resultado é fruto da influência da internet (informações contidas nas páginas que foram consultadas) na produção matemática *online*. Interpretamos que essa solução final pode ser entendida como uma relativa desaceleração no miniciclone. Isso porque o desejo de explorar o *software* e construir soluções dinâmicas foi abandonado. Outro fator que deve ser considerado é o tempo (estabelecido nas regras que, como mencionamos anteriormente, medeia a relação dos sujeitos com a comunidade), porque o desejo de concluir os problemas dentro do prazo pode ter prejudicado a continuidade do trabalho pautado na abordagem experimental com tecnologias.

Por fim, Thais enfatiza que é importante estudar, compreender, enfim, justificar a solução encontrada. Esse movimento indica que o miniciclone pode estar se aproximando de seu final, pois há uma busca por argumentações do ponto de vista matemático para a solução construída.

6. Discussão dos resultados

A seguir elaboramos um diagrama (fig. 7) para ilustrar em uma mesma imagem como se relacionam os movimentos que o sistema de atividade realizou - miniciclone e a moldagem recíproca – e ao mesmo tempo ilustramos os movimentos - diferentes papéis - da atriz internet no sistema da atividade.

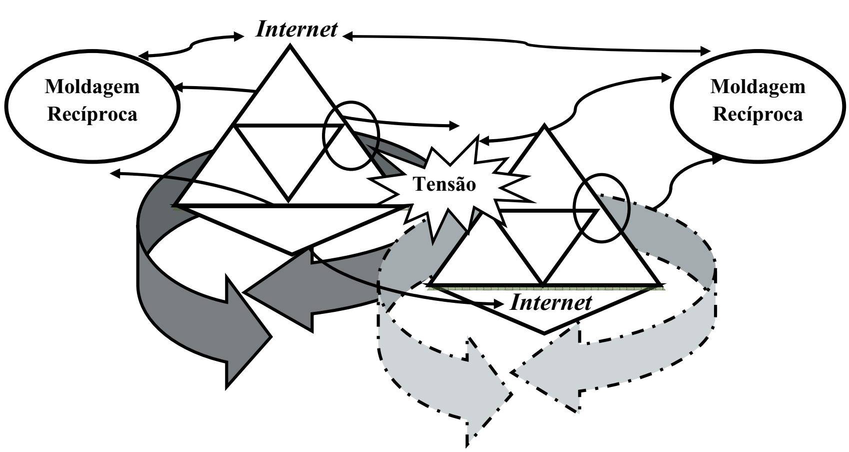


Figura 7. Diagrama dos movimentos da internet, do miniciclone e da moldagem recíproca.

Na figura 7 cada uma das representações triangulares corresponde a um determinado instante do desenvolvimento do sistema de atividade. Na primeira delas, a internet desempenha o papel de artefato. Essa representação triangular inicial corresponde ao início do miniciclone de transformações expansivas, que está representado pelas setas laterais que possuem a tonalidade cinza escura e contorno contínuo. Ele (o miniciclone) teve início com a tensão causada pela dificuldade dos professores em compreender a representação geométrica dos parâmetros da equação.

À direita e à esquerda da figura está o processo de moldagem recíproca que está ligado aos sistemas de atividade, ao miniciclone e às tensões. Com isso, queremos destacar que na evolução do processo de moldagem recíproca tensões surgem e, além de propiciarem o início do miniciclone, podem também contribuir para o desenvolvimento do sistema, ou seja, para o avanço do próprio miniciclone. Além disso, a presença da moldagem em dois lugares tem como propósito enfatizar que não há como prever com exatidão em que momento ela irá ocorrer e, com isso também se torna difícil de prever a direção que o miniciclone irá tomar.

A segunda representação triangular deve ser vista de forma relacionada com as setas laterais, pontilhadas preenchidas com uma tonalidade mais clara de cinza. Essa "multiplicação" do sistema indica o avanço do miniciclone. Nesse processo evolutivo observamos que o desenvolvimento do miniciclone foi influenciado pela própria atriz internet. Isso porque a possibilidade de acessar as informações da internet aliada à escassez de tempo para encontrar soluções aos problemas transformou os motivos do sistema de atividade.

No início do estudo o motivo da atividade dos professores participantes não visava um resultado como, por exemplo, um produto expresso numericamente, a necessidade que orientava o trabalho, ou seja, o motivo inicial era o desejo de construir em um ambiente *online* uma solução para os problemas com o *software.* Havia, portanto, uma inclinação em direção a transformações expansivas. No entanto, quando os professores optaram em utilizar a internet como mecanismo de busca para revisitar alguns conceitos matemáticos envolvidos na construção observamos que houve uma mudança no próprio motivo da atividade que, a nosso ver, passou a ser: encontrar uma solução qualquer no menor espaço de tempo possível. Com isso, observamos uma relativa "estagnação" ou um avanço mais "tímido" em relação à forma como o miniciclone estava anteriormente. Para enfatizar esse processo colocamos as setas que representam o miniciclone na forma pontilhada e as preenchemos em uma tonalidade mais clara que as setas iniciais, destacando esse comportamento no instante em que a internet passou a desempenhar o papel de comunidade.

De modo resumido, a internet desempenhava o papel de artefato e à medida que o processo parcial de moldagem recíproca se desenvolveu tensões surgiram e contribuíram para o desenvolvimento do sistema de atividade. Durante esse processo evolutivo a internet passou a desempenhar o papel de comunidade, sem deixar de ser artefato, com isso o motivo mudou e contribuiu para a formação de um novo sistema. Assim, ocorreu uma transformação expansiva, em que o artefato internet também se tornou comunidade.

7. Considerações finais

No estudo das cônicas os professores participantes produziam, inicialmente, soluções dinâmicas procurando explorar ao máximo as potencialidades do *software* e buscando compreensões sobre o conteúdo que estava em discussão, até que em um dado momento surge a ideia de "buscar" ajuda na internet. Após essa ação as construções passaram a ser estáticas, próximas às representações que estavam nas páginas consultadas por eles.

Entendemos que esses movimentos sugerem que a internet (a forma de apresentação do conteúdo consultado) transmitiu ao sistema algumas normas sociais historicamente construídas, as quais preconizam uma Matemática exata, abstrata, rígida e linear e, com isso, interferiu nos movimentos do miniciclone de transformações expansivas, o qual teve seu desenvolvimento retraído. Esse tipo de comportamento sugere que a internet moldou a forma de produzir matemática dos professores participantes.

Com base nessas considerações, compreendemos que o desenvolvimento de um sistema de atividade constituído em um ambiente de aprendizagem *online* é condicionado por fatores sociais e culturais - regras, normas, valores éticos e morais, etc.

De um ponto de vista teórico, queríamos apresentar a contribuição que as tecnologias digitais, em particular a internet, fornece para possíveis ampliações ou novas interpretações de perspectivas teóricas que assumem a participação de atores não humanos no processo de produção de conhecimento. Para tanto, fundamentamos as análises na teoria da atividade e em particular no construto teórico seres-humanos-com-mídias que "faz" uma releitura da própria TA com foco nas tecnologias digitais.

A análise dos dados sugere que a atriz internet varia de “vértice” no sistema de atividade proposto por Engeström. Cremos que no caso deste curso *online* a internet foi utilizada como artefato e na medida em que as interações ocorriam, em momentos síncronos ou assíncronos como, por exemplo, em *chats* ou na troca de *e-mails.* Por outro lado, nesses mesmos tipos de interações, mas em momentos e de formas distintos, verificamos que ela se desloca deste nó e se torna também comunidade, como defendido acima. Finalmente foi possível observar que ela também influenciou na mudança do motivo da atividade.

Consideramos oportuno reforçar a necessidade de se estimular o desenvolvimento de uma visão crítica em relação às informações reproduzidas na internet, inclusive as ideias matemáticas disponibilizadas *online*. Seria, sob o nosso ponto de vista, desejável que passássemos a questioná-las, a criticá-las e, porque não a (re) construí-las.

Retomando a interrogação que colocamos no título deste artigo interpretamos que não há troca de papéis e sim um compartilhamento dos mesmos. Sugerindo que há uma mudança de regras sobre os aspectos da produção matemática com os atores tecnológicos. Parece-nos, que a análise que realizamos dá novas cores à frase já dita e repetida: “... o professor já não tem o ‘*status*’ de ‘detentor’ do conhecimento...”. A internet não só já é atriz, como no caso apresentado ela já desempenha o papel de uma comunidade que altera motivos. Ela é artefato e comunidade, pelo menos. E nesse sentido, os triângulos rígidos usualmente apresentados em discussões teóricas ganham dinamicidade. Se esta dinamicidade é própria dos artefatos digitais, e em particular da internet, ao se incorporar a coletivos que produzem conhecimento, é uma discussão para outro artigo, que pode ser escrito contrastando-se esses dados com as reflexões de Araújo e Kawasaki (2013). Essas autoras debatem sobre a alegada “rigidez” dessa mesma representação triangular, mas com um interesse em particular: os movimentos dos sujeitos (atores humanos) da atividade.

Entretanto, entendemos que essa interação mais ampla do construto seres-humanos-com-mídias, com a Teoria da atividade de terceira geração, pode levar ao início de uma quarta geração, onde a antropomorfização das tecnologias, pode dar uma dinamicidade a modelos de como conhecemos em um ambiente social.

Isso nos remete às reflexões do construto seres-humanos-com-mídias em relação ao que significa ser humano. Visto que atores humanos e não humanos ao desempenharem os mesmos papéis se misturam, não há um limite que possa distinguir até onde vai, em determinado instante, o papel de um ou do outro.

Agradecimentos

Agradecemos a Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - CAPES pelo fomento à pesquisa que originou este artigo.

Referências

Araújo, J. L., e Kawasaky, T. (2013). Movimento e rigidez de certo triângulo: um enfoque Histórico-Cultural de pesquisas em Educação Matemática. Em C. R. Ferreira (Ed.), *Anais do Encontro Nacional de Educação Matemática: Retrospectivas e Perspectivas* (Vol 1, pp. 1-13). Curitiba, Brasil: Pontifícia Universidade Católica.

Baldwin, R. (1998). Technology's impact on faculty life and work. *New Directions for Teaching and Learning*, *77*(1), 7-21. doi: 10.1002/tl.7601.

Borba, M. C. (1993). *Students understanding of transformations of functions using multi-representational software.* (Tese de doutorado não publicada). Faculty of graduate school of Cornel University, Ithaca, New York, United States.

Borba, M. C. (1999). Tecnologias Informáticas na Educação Matemática e Reorganização do Pensamento. Em M. A. V. Bicudo (Ed.), *Pesquisa em Educação Matemática: Concepções e Perspectivas* (pp. 285 - 295). São Paulo, Brasil: Editora UNESP.

Borba, M. C. (2012). Humans-With-Media and continuing education for mathematics teachers in online environments. *ZDM Mathematics Education*, *44*(6), 1-14. doi: 10.1007/s11858-012-0436-8

Borba, M. C., e Villarreal, M. V. (2005). *Humans-With-Media and the Reorganization of Mathematical Thinking*: *information and communication technologies, modeling, experimentation and visualization*. New York, United States: Springer. doi: 10.1007/b105001

Borba, M. C., Malheiros, A. P. S., e Amaral, R. B. (2011). *Educação a distância online* (3ª ed.). Belo Horizonte, Brasil: Autêntica.

Borba, M. C. e Chiari, A. (2013). *Tecnologias Digitais e Educação Matemática.* São Paulo, Brasil: Livraria da Física.

Engeström, Y. (1987). *Learning by expanding: an activity-theoretical approach to developmental research*. [DX versão leitura]. Obtido de http://lchc.ucsd.edu/mca/Paper/Engestrom/expanding/toc.htm.

Engeström, Y. (1999). *Learning by expanding*: ten years after. [DX versão leitura]. Obtido de http://lchc.ucsd.edu/mca/Paper/Engestrom/expanding/toc.htm.

Engeström, Y. (2001). Expansive learning at work: toward an activity theoretical reconceptualization. *Journal of Education and Work*, *14*(1), 133-156. doi: 10.1080/13639080020028747

Engeström, Y. (2002). Non Scolae Sed Vitae Discimus: como superar a encapsulação da aprendizagem escolar. Em H. Daniels (Ed.) *Uma Introdução a Vygotsky* (pp. 175-197). São Paulo, Brasil: Edições Loyola.

Gracias, T. A. (2003). *A natureza da reorganização do pensamento em um curso a distância sobre Tendências em Educação Matemática* (Tese de doutorado não publicada). Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho. Rio Claro, Brasil.

Harasim, L. (1990). Online education: A new domain. In R. Mason & A. Kaye (Eds.), *Mindwave: Communications, computers and distance education* (pp. 50-62). Exeter, England: Pergamon Press.

Jaccoud, M., e Mayer, R. A. (2008). A observação direta e a pesquisa qualitativa. Em: J. Poupart, J-P. Deslauriers, A. P. Pires, A. Lapparriére, R. Mayer, e L-H. Groulx (Eds.), *A pesquisa qualitativa: enfoques epistemológicos e metodológicos* (pp. 254-294). Petrópolis, Brasil: Vozes.

Kaptelinin, V. (2005). The object of activity: Making sense of the sense-maker. *Mind, Culture, and activity. An International Journal*, *12*(1), 4-18.

Lévy, P. (1993). *As tecnologias da inteligência: o futuro do pensamento na era da informática*. Rio de Janeiro, Brasil: Editora 34.

Lincoln, Y. & Guba, E. (1985). *Naturalistic Inquiry.* Londres, England: Sage Publications.

Malheiros, A. P. S. (2008). *Educação Matemática Online: a elaboração de projetos de modelagem* (Tese de doutorado não publicada). Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho. Rio Claro, Brasil.

Mcdonald, J. (2002). Is "as good as face-to-face" as good as it ge*ts? Journal of Asynchronous Learning Network 25*(10), 10-23.

Rosa, M., e Maltempi, M. V. (2010). A Construção do conhecimento matemático sobre integral: o movimento hipertextual em um curso utilizando o RPG online. Em: A. P. Jahn e N. S. G. Allevato (Eds.), *Tecnologias e educação matemática: ensino, aprendizagem e formação de professores* (pp. 25 - 44). Recife, Brasil: SBEM.

Santos, S. C. (2006). *A produção matemática em um ambiente virtual de aprendizagem: o caso da geometria euclidiana espacial* (Tese de mestrado não publicada). Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Rio Claro, Brasil.

Scagnoli, N. (2005). Impact of online Education on Traditional Campus-based Education. *International Journal of Instructional Technology & Distance Learning*, *2*(10), 1-14.

Silva, M. (2003). *Educação Online.* São Paulo, Brasil: Loyola.

Souto, D. L. P. (2013). *Transformações Expansivas em um curso de Educação Matemática a Distância Online* (Tese de doutorado não publicada). Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Rio Claro, Brasil.

Souto, D. L. P., e Borba, M. C**.** (2013). Transformações expansivas em Sistemas de Atividade: o caso da produção matemática com a Internet. *Revista Perspectivas em Educação Matemática*, *6*(1), 14-57.

Tikhomirov, O. K. (1981). The psychological consequences of the computerization. In J. Werstch (Ed.), *The concept of activity in soviet psychology* (pp. 256 - *278). New York, United States: Sharp.*

Villarreal, M., e Borba, M.C. (2010). Collectives of humans-with-media in mathematics education: notebooks, blackboards, calculators, computers and ... notebooks throughout 100 years of ICMI. *ZDM Mathematics Educations*, *42*(1), 49-62. doi: 10.1007/s11858-009-0207-3.

Zulatto, R. B. A. (2007). *A natureza da Aprendizagem Matemática em um Ambiente online de Formação Continuada de Professores* (Tese de doutorado não publicada). Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Rio Claro, Brasil.

Autores

Daise Lago Pereira Souto. Universidade do Estado de Mato Grosso, Brasil, daiselago@gmail.com

Marcelo De Carvalho Borba. Universidade Estadual Paulista, Brasil, mborba@rc.unesp.br

La Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (*Relime*) es la publicación oficial de investigación del Comité Latinoamericano de Matemática Educativa (Clame AC). Se edita tres veces por año. Acepta artículos en español, portugués, inglés y francés. Está dirigida a investigadores en Matemática Educativa, a profesores de matemáticas y ciencias, y estudiantes de licenciatura y posgrado interesados en conocer los resultados recientes de las investigaciones y en profundizar en el conocimiento de un tema en particular.

Objetivos:

1. *Relime* pretende ser un foro abierto a las diversas escuelas del pensamiento (paradigmas, teorías, metodologías, métodos, enfoques) en nuestra disciplina, la Matemática Educativa, sin definir perspectivas únicas y con un profundo respeto a las tradiciones educativas y los contextos de los diversos sistemas educativos de nuestra región.
2. Dar a conocer resultados de investigación original en Matemática Educativa que se realizan en América Latina y el Caribe y en el resto del mundo.
3. Contribuir al proceso de profesionalización de la Matemática Educativa en nuestra región.
4. Fomentar una cultura de divulgación e investigación entre los distintos grupos de investigación en nuestra región.
5. Propiciar el debate y la reflexión profunda sobre problemas de investigación que fortalezca la disciplina en nuestra área geográfica.
6. Fortalecer la calidad de la investigación en Matemática Educativa y la vinculación entre comunidades nacionales e internacionales.

INSTRUCCIONES TÉCNICAS PARA AUTORES

LAS CONTRIBUCIONES

Toda contribución propuesta a Relime se somete a un estricto proceso de arbitraje. Las contribuciones deberán ser resultado de investigaciones teóricas o experimentales, estudios de caso, etnográficos, etc., en formato de artículo. Estas contribuciones deberán ser trabajos inéditos de investigación, no estar en arbitraje en otra revista ni tratarse de traducciones previamente publicadas en su lengua original.

Características de los manuscritos

Relime publica artículos en castellano, portugués, inglés y francés. Acepta ensayos teóricos originales así como propuestas que sean resultado de estudios experimentales, de casos, de observación, etnográficos, etc.

Los artículos deberán tener un máximo de nueve mil palabras, incluyendo referencias, figuras, cuadros y anexos. En caso de que su propuesta exceda esta extensión, el Comité de Redacción decide si considera la posibilidad de publicarlo siempre que tal propuesta no ocupe todo el espacio disponible en un número de la revista.

En el caso de reportes de estudios experimentales, de casos, de observación, etnográficos, etcétera, recomendamos que los escritos contengan:

1) Resumen del trabajo, deberá tener un máximo de 10 renglones escrito en español, portugués, inglés y francés y de 5 palabras clave en las cuatro lenguas. Resumen, título y palabras clave deben ser escritos en los cuatro idiomas.
2) Una exposición del problema de investigación (su pertinencia y relevancia en el tema que se aborda).
3) Indicaciones globales acerca de la estructura teórica del reporte.
4) Justificación de la metodología usada.
5) Desarrollo de algunos ejemplos y análisis de resultados.
6) Referencias bibliográficas.

Si se trata de ensayos teóricos y filosóficos, nuestra recomendación es la siguiente:

1) Iniciar con una exposición del problema de investigación (su pertinencia y relevancia en el tema que se aborda).
2) Revisión de la literatura que incluya trabajos importantes que sustenten la investigación, en el que se refleje una variedad de resultados actuales. Esta revisión debe incluir investigaciones internacionales pertinentes y no limitarse a estudios de un solo país.
3) Ofrecer indicaciones sobre la estructura teórica o filosófica en la cual se desarrolla el tema del artículo.
4) Exposición detallada de la posición del autor dentro del tema o los temas de exposición. Esto debe reflejarse a través del desarrollo de ideas, más que de una lista de reflexiones.

5) Implicaciones o consecuencias de la investigación en el área.
6) Referencias bibliográficas.

Proceso de evaluación en Relime

Los artículos propuestos a Relime serán leídos por dos miembros del Comité de Redacción, y si el contenido atiende a la originalidad y satisface los criterios anteriores, así como a la claridad de la presentación e interés para la comunidad de matemática educativa, serán evaluados en forma "ciega" por dos investigadores reconocidos y con experiencia dentro del área. En el proceso de evaluación se garantizará el anonimato de autores y evaluadores.

El resultado del dictamen puede ser:

A. Sugerencia de publicar el artículo sin modificaciones.
B. Sugerencia de publicar el artículo bajo reserva de hacer ligeras modificaciones.
C. Sugerencia de reestructurar el artículo atendiendo a los comentarios, lo que precisaría una nueva revisión.
D. Sugerencia de rechazo del artículo.

Formato de las contribuciones

Todas las contribuciones deberán estar escritas en procesador de texto Word 6.0 o superior, tipo de letra Times New Roman, tamaño 11 y utilizar un espacio anterior y posterior de 4 pt, lo que significa que no se requiere dar espacio entre un párrafo y otro. Los cuatro márgenes de la página deberán ser de 2.5 cm. Para las expresiones matemáticas debe usarse el editor de ecuaciones.

Encabezados principales

El estilo de letra para los encabezados principales es tipo VERSALES en formato minúsculas, utilizando un espacio anterior de 36pt y el posterior de 12pt, lo que significa que no se requiere dar espacio entre un encabezado y los párrafos subsecuentes. Enumerar las secciones de los encabezados principales (usando 1, 2, 3, etc.) y utilizar el estilo de alineación centrada.

Subtítulos

El estilo de letra para los subtítulos del artículo es tipo Times New Roman, tamaño 11 y cursiva. La primera letra debe escribirse con mayúsculas. Utilizar un espacio anterior de 24 pt y el posterior de 10 pt, lo que significa que no se requiere dar espacio entre un subtítulo y los párrafos subsecuentes. Los subtítulos deberán enumerarse 1.1., 1.2, 1.3, etc., según corresponda en estilo tipo Normal. Los subtítulos posteriores a un encabezado principal deben tener un espacio anterior y posterior de 6 pts.

Estilo para las tablas

Las tablas deben tener una alineación centrada. El estilo de letra del texto en el interior de la tabla debe ser tipo Times New Roman, Normal, tamaño 10 y con un espacio anterior y posterior de 2 pto. Enumerar las tablas, usando tipo de letra VERSALES tamaño 10, en formato minúscula: TABLA I, TABLA II, TABLA III, etc., utilizando un espacio anterior de 6 pto y posterior de 0 pto. El número de la tabla debe escribirse en la parte superior y su título debajo, utilizando un estilo de alineación centrada y tipo de letra normal tamaño 10.

Estilo para las figuras e imágenes

Las figuras e imágenes deben tener una alineación centrada. El estilo de letra debe ser tipo Times New Roman, tamaño 10 y tipo Cursiva y Normal. Escribir el número de la figura o imagen en formato tipo cursiva y el título en formato tipo normal. Utilizar un espacio anterior de 2 pt y el posterior de 4 pt. Las imágenes y figuras deberán adjuntarse en un archivo independiente al manuscrito en formato de alta resolución.

Transcripciones

Para las transcripciones usar el estilo de letra normal, tipo Times New Roman tamaño 10. Utilizar un interlineado sencillo.

Usar estilos de transcripción como los siguientes:

Estudiante: Para graficar utilicé uno de los métodos que vimos en clase. Me pareció que era el más simple para resolverlo
Profesor: ¿Por qué consideras que ese método es más simple?

Si las líneas de la transcripción requieren ser numerados, entonces usar el estilo de transcripción enumerada como sigue:

[122] Entrevistador: En la primera actividad se te propuso determinar la función velocidad ¿Podrías explicar cómo la hallaste?
[123] Alumno: Hum... pues...

En el caso de que no se requiera hacer referencia a los números, se sugiere usar el primer estilo de transcripción (indicada párrafos arriba).

Reconocimientos

Los reconocimientos a personas, fondos, asociaciones, etc. deberán colocarse en una sección separada antes de las referencias bibliográficas. Los nombres de organizaciones financieras deberán escribirse completos.

Bibliografía, referencias y notas

Solicitamos emplear el estilo de la APA (Publication Manual of the American Psychological Association, 6th ed., 2009) para las citas de pie, notas, referencias textuales y bibliografía. (Pueden apoyarse en el siguiente link: http://www.apastyle.org/learn/tutorials/basics-tutorial.aspx; o bien, consultar el Manual).

La bibliografía deberá escribirse en forma de lista sin enumerar y en orden cronológico. El estilo de letra debe ser Times New Roman 9. Para escribir una referencia debe usarse alineación justificada para el primer renglón. A partir del segundo renglón deberán establecer una sangría especial de 0.63 cm.

Las notas deberán escribirse al final de cada página del documento. El estilo de letra que deberá usarse es Times New Roman 9 en formato normal.

Información complementaria

1) No se devolverán los artículos originales.
2) El editor se reserva el derecho de hacer algunas modificaciones necesarias para mantener el estilo de la publicación.
3) Los textos pueden ser publicados en otro órgano editorial previo permiso expreso, por escrito, y haciendo referencia explícita de la fuente.
4) Los autores recibirán gratuitamente dos ejemplares del número en que se haya publicado su artículo.
5) No se realizarán pagos a los autores por los artículos que se publiquen en *RELIME*. Para mayores informes, puede visitar la página web: http://www.clame.org.mx/relime.htm o bien el correo electrónico:

relime@clame.org.mx

SUSCRIPCIÓN A RELIME

Costo del volumen 19 (tres números)

Suscripción Institucional:
Volumen US$ 120
Cada número US$ 50

Suscripción Individual:
Volumen US$ 50
Cada número US$ 20

Suscripción Miembros Clame:
Volumen US$ 20
Cada número US$ 10

Estos costos NO aplican a *números especiales*,
NO incluyen gastos de envío, NI comisión bancaria por transferencias
o depósitos de cheques emitidos fuera de México

Las suscripciones deberán solicitarse al correo electrónico
suscripcion@relime.org

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa

Volumen 19, Número 2

Diseño y Web: Emilio Serna Hernández
Servicios Editoriales Recrea
(Miembro CANIEM - 3663)
sernandem@yahoo.com.mx

Se imprimió en los talleres de
Editorial Progreso S.A. de C.V.
Sabino # 275
Col. Santa María la Ribera
Delegación Cuauhtémoc
06400 México, D. F.

Julio de 2016
Tiraje: 1000 ejemplares más sobrantes