EDITORIAL

ARTÍCULOS

RELIME 19-1

01901

9 771665 243002

1665-2436

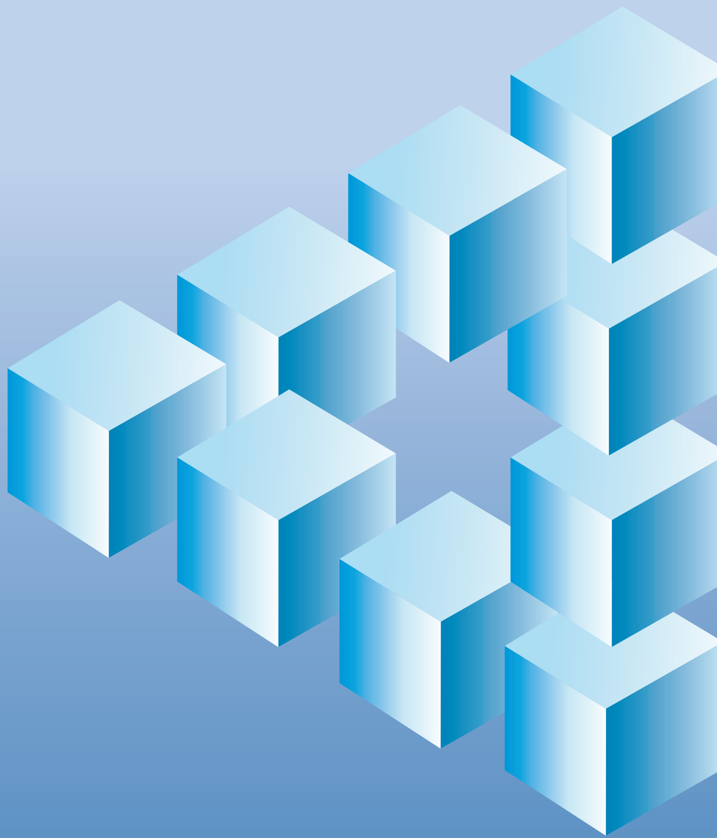
Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa

Vol. 19, Núm. 1, marzo 2016

Vol. 19, Núm. 1, 2016

Revista Latinoamericana
de Investigación en
Matemática Educativa

RELIME



Clame Comité Latinoamericano de Matemática Educativa

Publicación oficial de investigación del Comité Latinoamericano de Matemática Educativa

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa

Portada: «Opus 1» de Oscar Reutersvärd en 1934. Reproducida con permiso de los herederos del artista.

Publicación oficial de investigación del Comité Latinoamericano de Matemática Educativa, Clame A.C. Consejo Directivo: *Presidente:* Claudia M. Lara Galo – Guatemala; *Secretaria:* Cecilia R. Crespo Crespo – Argentina; *Tesorera:* Elizabeth Mariscal Vallarta – México; *Vocal Norteamérica:* Marcela Ferrari – México; *Vocal Caribe:* Ángela M. Martín – República Dominicana; *Vocal Centroamérica:* Edison De Faria – Costa Rica*; Vocal Sudamérica:* Patricia Lestón – Argentina.

Publicación cuatrimestral. Se publica en los meses de marzo, julio y noviembre. Vol. 19, Núm. 1, marzo, 2016. Tiraje 1000 ejemplares. Suscripciones: suscripcion@relime.org. Contribuciones e información: relime@clame.org.mx, http://www.clame.org.mx.

Relime es una revista indizada en:
ISI Web of Knowledge, SSCI – Social Sciences Citation Index y Journal Citation Reports • ERIH – European Reference Index for the Humanities • Conacyt – Índice de Revistas Mexicanas de Investigación Científica y Tecnológica • Scopus – Elsevier Database • ZDM – Zentralblatt für Didaktik der Mathematik • IBZ – International Bibliography of Periodical Literature in the Humanities and Social Sciences • Clase – Citas Latinoamericanas en Ciencias Sociales y Humanidades • Iresie – Índice de Revistas de Educación Superior e Investigación Educativa • Latindex – Sistema Regional de Información en Línea para Revistas Científicas de América Latina, el Caribe, España y Portugal • Redalyc – Red de Revistas Científicas de América Latina y el Caribe, España y Portugal • EBSCO – Information Services • Dialnet • Scielo-México – Scientific Electronic Library Online • Thomson Gale – Gale Iberoamérica.

2016 Impreso en México

Volumen 19 – Número 1 – 2016

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa

Clame Comité Latinoamericano de Matemática Educativa

Publicación oficial del Comité Latinoamericano de Matemática Educativa

ISSN 1665 – 2436.

Edición Colegio Mexicano de Matemática Educativa A.C. – México,
RFC CMM 040505 IC7.
Impreso en México

2016

Volumen 19 Número 1 Marzo de 2016

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa

EDITORIAL

ARTÍCULOS

REVISTA LATINOAMERICANA DE INVESTIGACIÓN EN MATEMÁTICA EDUCATIVA, Vol. 19, No. 1, marzo 2016, es una publicación cuatrimestral editada por el Colegio Mexicano de Matemática Educativa, A. C., a través del Comité Latinoamericano de Matemática Educativa, calle Av. Instituto Politécnico Nacional, 2508, Col. San Pedro Zacatenco, Delegación Gustavo A. Madero, C.P. 07360, Tel. (55) 57473819, www.clame.org.mx/relime.htm, relime@clame.org.mx. Editor responsable: Ricardo Cantoral. Reservas de Derechos al Uso Exclusivo No. 04-2013-042513070000-102, ISSN: 1665-2436, ambos otorgados por el Instituto Nacional del Derecho de Autor. Impresa por Editorial Progreso, S. A. de C. V., Sabino No. 275, Col. Sta. María la Ribera, C.P. 06400, Delegación Cuauhtémoc, México, D. F., este número se terminó de imprimir en marzo de 2016, con un tiraje de 1,000 ejemplares más sobrantes.

"Relime se publica con el apoyo de Conacyt, Cinvestav y Clame"

EDITORIAL

CONSORCIO MEXICANO DE REVISTAS DE INVESTIGACIÓN EDUCATIVA

CONSORTIUM OF MEXICAN REVIEWS OF EDUCATIONAL RESEARCH

Alejandro Márquez
Perfiles Educativos, IISUE,
Universidad Nacional Autónoma de México

Imanol Ordorika
Revista de la Educación Superior, Asociación Nacional de Universidades
e Instituciones de Educación Superior

Ángel Díaz Barriga
Revista Iberoamericana de Educación Superior, Universia /
IISUE, Universidad Nacional Autónoma de México

Ricardo Cantoral
Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (RELIME),
Comité Latinoamericano de Matemática Educativa, A.C.

Wietse de Vries
Revista Mexicana de Investigación Educativa,
Consejo Mexicano de Investigación Educativa

Estimados lectores:

En vez del editorial tradicional donde se revisa el contenido, esta vez publicamos el texto de una iniciativa importante en que está involucrada la REMIE.

El 29 de octubre de 2015, a iniciativa de la revista *Perfiles Educativos*, los directores y editores de cinco revistas dedicadas a la investigación educativa nos reunimos con la finalidad de compartir problemáticas y retos que nos resultan comunes, así como de mantener un estrecho vínculo con la comunidad académica de referencia (los investigadores educativos). Bajo la expectativa de que al compartir nuestros esfuerzos, conocimientos y estrategias podríamos contribuir

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (2016) *19* (1): 5 - 13.
DOI: 10.12802/relime.13.1910

no sólo al fortalecimiento de nuestras revistas, sino también al de la comunidad académica de la que formamos parte, así como al desarrollo y consolidación de la investigación educativa en nuestro país, tomamos la iniciativa de formar un Consorcio Mexicano de Revistas de Investigación Educativa. Este consorcio está formado por: *Perfiles Educativos (PE),* la *Revista de la Educación Superior (RESU)*, la *Revista Iberoamericana de Educación Superior (RIES),* la *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (RELIME),* y la *Revista Mexicana de Investigación Educativa (REMIE).*

Antecedentes

Esta iniciativa tiene dos antecedentes: el primero de ellos tiene que ver con la creación del GRIE (Grupo de Revistas de Investigación Educativa) en 2006, cuando cuatro revistas de investigación educativa decidieron establecer lazos de colaboración para apoyar su participación en el Índice de Revistas Mexicanas de Investigación Científica y Tecnológica (IRMICyT) del Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACyT). En ese momento tres de ellas ya se encontraban incorporadas al índice (*Perfiles Educativos*, *Revista Mexicana de Investigación Educativa* y *Revista de Educación Superior*), mientras que la *Revista Electrónica de Investigación Educativa* lograría incorporarse al año siguiente. Ésta fue la primera revista electrónica aceptada en el índice del CONACyT. En un contexto donde los parámetros de las ciencias básicas y de la salud dictaban la norma para validar la calidad del trabajo académico, y se extendían a las revistas de investigación, el GRIE mostró las ventajas de la cooperación y el apoyo para defender los puntos de vista y las particularidades de las revistas de investigación en ciencias sociales y humanidades (donde se ubican las revistas de investigación educativa) ante las evaluaciones que les realizaba el CONACyT.

A pesar de los logros, sin embargo, esta iniciativa se fue diluyendo con el paso del tiempo y el grupo dejó de operar.

El segundo antecedente está relacionado con el inicio de actividades del Seminario Permanente de Editores de la UNAM en el ciclo 2014-2015, cuando algunos participantes, entre ellos varios directores y editores de las revistas de investigación educativa, restablecimos contacto y volvió a surgir la idea de que sólo mediante la colaboración podríamos enfrentar de mejor manera los problemas y retos que nos siguen afectando. El siguiente paso fue trabajar sobre una agenda común que nos permitiera identificar los principales problemas y retos que tenemos como colectivo, y establecer estrategias para superarlos. A continuación se exponen los puntos de acuerdo que logramos al respecto en la reunión del 29 de octubre.

Nuestros problemas y retos

Los problemas identificados pueden agruparse en cinco aspectos: a) los que afectan la difusión de las revistas; b) los vinculados a los procesos de evaluación que realizamos para ingresar o mantenernos en el IRMICyT del CONACyT, o en otros índices y bases de datos de prestigio internacional; c) los relativos a la gestión ante el incremento inusitado del número de artículos que recibimos y que buscan ser publicados en nuestras revistas; d) los que se relacionan con la baja incidencia que tenemos en los procesos de formación de nuestra comunidad de referencia, es decir, los investigadores educativos; y e) los que tienen que ver con los recursos financieros que requerimos para mantener y actualizar nuestros procesos editoriales, dado que nos encontramos en un proceso de transición hacia los formatos electrónicos y digitales de gestión editorial. Esto último es urgente, dada la necesidad de participar en las bases de datos e índices bibliográficos más prestigiosos internacionalmente, lo cual incluye al índice del CONACyT.

Visibilidad, acceso y difusión

Tomando en cuenta los hábitos de lectura existentes tanto en México como a nivel mundial, es claro que las revistas de investigación están lejos de ser *best sellers*; de hecho, los niveles de especialización de algunas de las revistas se traducen en públicos muy reducidos. Aunque no se puede negar que las revistas de investigación están cumpliendo ampliamente con la función social que tradicionalmente desempeñan —como mecanismos de validación y difusión de los nuevos conocimientos científicos— también es importante ampliar su difusión hacia el mayor público posible.

En este sentido, uno de nuestros retos es incrementar y mejorar la visibilidad, el acceso y la difusión de las revistas mexicanas de investigación educativa tanto a nivel nacional como internacional; esto, sin embargo, no es tarea fácil: en el contexto global en que vivimos aumenta día a día la cantidad de información, así como la competencia entre los diversos medios existentes por captar el mayor volumen de lectores y usuarios posibles.

A pesar de que la Internet, los nuevos gestores editoriales (como el OJS) y las políticas de acceso abierto (*open access*), entre otras tecnologías de la información y comunicación (TIC), se han constituido en herramientas que favorecen la difusión de las revistas de investigación a través de medios electrónicos, la situación que guardan nuestras revistas al respecto difiere de otras debido a que el uso eficiente y eficaz de estos medios implica procesos de aprendizaje y recursos con los cuales no todas las revistas cuentan. Es por ello que uno de los grandes retos que como directores y editores de revistas de investigación educativa tenemos que afrontar estriba en compartir nuestros conocimientos, experiencias y recursos para dar un uso óptimo a estos medios, ya sea mejorando nuestras páginas web o incursionando en los nuevos formatos electrónicos y digitales.

Evaluación e inclusión en bases de datos e índices bibliométricos

La publicación constituye el producto final de la actividad científica; es la principal vía para exponer los resultados del trabajo de investigación, además de que es a partir de aquélla que se valora, en última instancia, la pertinencia y veracidad de los nuevos hallazgos. Aun cuando el papel que tradicionalmente han desempeñado las revistas de investigación es la difusión del conocimiento, desde hace algunas décadas se ha venido utilizando una acepción del término "calidad" para referirse a las revistas científicas —u otros productos de investigación— que participan en ciertas bases de datos; es el caso del Web of Science (WoS) y el Scopus, que a la fecha son las más prestigiadas. La importancia de las bases de datos ha sido tal, que han aparecido nuevas que concentran la producción científica a nivel nacional o regional, e incluso, por áreas de la ciencia.

Estas bases de datos usualmente aportan una amplia gama de indicadores, sustentados en los patrones de citación de los artículos y los libros científicos; dichos indicadores, a su vez, se asocian con la noción de calidad, lo cual permite el establecimiento de listas que ordenan las publicaciones científicas de acuerdo con los puntajes obtenidos a partir de esos criterios de valoración. Y ello ocurre a pesar de las abundantes evidencias que se han generado sobre los sesgos que se presentan al utilizar estas bases de datos e índices como referentes de la calidad científica. Sesgos que, como se ha mostrado, están relacionados con las diversas áreas científicas, el idioma y la especialización de las publicaciones, el tamaño de los grupos científicos por disciplina o tema, etc.

El problema de las revistas mexicanas de investigación educativa es que están siendo evaluadas con base en estos parámetros a pesar de que no siempre están en las mejores condiciones para afrontar estos procesos, que se caracterizan por ser fuertemente selectivos. Incluso el IRMICyT del CONACyT, haciendo eco de las tendencias internacionales, urge a que nuestras revistas sean incluidas en las bases de datos más prestigiosas, no obstante que los propios procesos de evaluación y designación de apoyos que fija el Consejo distan de servir a las revistas mexicanas para lograr este propósito, ya que mantienen una visión documentalista que descansa en el llenado de formatos cuya utilidad no va más allá del propio proceso de evaluación, pero que, en contraste, implica una dura carga para los equipos que gestionan y producen las revistas.

Si bien asumimos que la participación en las bases de datos y en los índices bibliométricos internacionales más prestigiosos no necesariamente es útil como un referente de la calidad de las revistas de investigación —tanto por los sesgos que presentan, como por la falta de claridad en la selección de los productos que integran a sus bases de datos— está claro que se han constituido en un importante mecanismo para incrementar la visibilidad y difusión de las revistas científicas. Al respecto, el reto que nos planteamos estriba en apoyarnos y unir esfuerzos para enfrentar de manera conjunta los procesos de evaluación y así poder ingresar y mantenernos en estos espacios sin renunciar a los objetivos y principios que sostiene cada una de las revistas.

La gestión de las revistas ante el incremento de artículos recibidos

El principio de "publicar o perecer" que predomina desde hace tiempo en el ámbito académico a nivel mundial, en cierta forma es resultado de las políticas de evaluación del trabajo académico que se han puesto en marcha desde los gobiernos centrales e institucionales; además, la vinculación de los resultados de estas evaluaciones a la distribución de recursos económicos extraordinarios para los académicos ha traído consigo un aumento de la necesidad de estos por publicar.

No obstante, estas políticas orientadas a incentivar la producción científica resultan incompletas, pues se han basado simplemente en la publicación dejando de lado el proceso de producción de la actividad científica en su conjunto; así las cosas, todos los académicos quieren escribir y publicar, pero pocos quieren hacerse cargo de las labores que resultan necesarias para lograr productos editoriales de calidad. De esta forma, tal parece que las actuales políticas han creado una disyuntiva entre los académicos: dedicar su tiempo a escribir y publicar; o bien, a gestionar y revisar el trabajo académico de los demás. Hasta la fecha, la segunda actividad ha sido desplazada, debido a que no se contemplan incentivos suficientes para realizarla.

El aumento de la presión para publicar se ha traducido, para las revistas de investigación, en diversos problemas, entre ellos, el aumento en el número de artículos recibidos y, consecuentemente, de la carga de trabajo respecto de todos los procesos relacionados con la gestión y la producción editorial.

Por otra parte, debido a la falta de alicientes para el trabajo de dictaminación, cada vez resulta más frecuente que los académicos a los que se les solicita contribuir de esta manera no acepten, aduciendo falta de tiempo y exceso de trabajo. Ante el aumento de artículos que recibimos este fenómeno constituye un grave problema: tenemos más autores y más artículos, pero contamos con menos académicos dispuestos a participar como revisores.

Otro problema que enfrentamos como resultado del incremento de artículos es el punto de saturación con respecto a los trabajos aprobados para su publicación, de manera que los autores tienen que esperar cada vez más tiempo (de uno a dos años) entre la aceptación de un artículo y su publicación. Esta situación ha llevado, a los responsables de la gestión de las revistas, a una disyuntiva: cerrar la recepción de artículos por tiempo indefinido, o incrementar el rigor en los procesos de selección para disminuir el número de artículos aprobados y que estos logren publicarse en periodos que no afecten su actualidad y vigencia. Los dos caminos, sin embargo, afectarían a los académicos y al desarrollo de la investigación educativa en nuestro país.

En razón de lo anterior, nos enfocamos a buscar estrategias que no sólo no afecten a la comunidad de referencia de cada una de las revistas, sino que la fortalezcan; así como en procurar acciones orientadas a brindar el justo reconocimiento a los directores y editores de revistas científicas y a los dictaminadores, puesto que su participación es fundamental para el proceso de producción científica en nuestro país. Asimismo, requerimos establecer canales de apoyo y comunicación entre las revistas de investigación educativa para que, de manera conjunta, podamos lidiar de mejor manera con la gestión de nuestras revistas ante el incremento de la producción de artículos para su publicación.

El fortalecimiento de nuestra comunidad de referencia

Otro problema que se nos plantea es el rechazo de algunos artículos por déficits en cuanto a su estructura, su escritura y estilo, o en la claridad en la presentación de los resultados, entre otros. Esta situación afecta principalmente a los investigadores en ciernes (alumnos de posgrado) o noveles (con poca experiencia). Lo lamentable es que según la opinión de los dictaminadores, varios de estos trabajos presentan ideas y propuestas interesantes, pero debido al exceso de artículos que recibimos, estos trabajos suelen ser rechazados porque no es posible realizar un acompañamiento que permita a los autores mejorarlo hasta el punto que quede en condiciones de ser publicado. Esto es, las revistas no están en posibilidades de realizar la labor formativa que realizaban antes, y que contribuía a fortalecer la comunidad de investigadores educativos. Nuestro reto actualmente es establecer mecanismos que nos permitan retomar la labor formativa y de vinculación entre investigadores nobeles y expertos.

El financiamiento de las revistas de investigación educativa

Se podría pensar que las revistas de investigación educativa subsisten gracias a los recursos provenientes de la venta y de las suscripciones de las propias revistas; sin embargo, los recursos que se obtienen por esa vía aportan sólo una pequeña parte del total que se requiere para su operación y el resto se capta, generalmente, a través del subsidio que reciben las instituciones u organismos en los que dichas publicaciones se producen.

Además, no resulta extraño que ante la popularidad de los formatos electrónicos y digitales, así como por la generalización de las políticas de acceso abierto, la venta y suscripción ha dejado de ser una opción para resolver nuestros problemas financieros. Siendo así, la dotación de recursos para la publicación de revistas científicas podría llegar a considerarse como una carga presupuestal para nuestras instituciones.

El reto que enfrentamos, por lo tanto, es conseguir los recursos financieros para operar y sostener los nuevos formatos electrónicos y digitales, ya que éstos son indispensables para mantener y ampliar la visibilidad de nuestras revistas.

Objetivos, propuestas de acción y acuerdos del consorcio

Teniendo presente nuestros problemas y retos, las cinco revistas que formamos parte de este consorcio, *Perfiles Educativos (PE), Revista de la Educación Superior (RESU), Revista Iberoamericana de Educación Superior (RIES), Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (RELIME)* y *Revista Mexicana de Investigación Educativa (REMIE),* establecimos el objetivo general de nuestro consorcio, las propuestas de acción para cubrirlo y nuestros acuerdos para llevar adelante nuestro cometido.

Objetivo general

Trabajar de manera conjunta para lograr un mejor posicionamiento de nuestras revistas a nivel internacional y para enfrentar los retos que actualmente se presentan a las publicaciones científicas.

Propuestas de acción

Nuestras propuestas de acción se establecen en tres niveles:

- En relación con el financiamiento:
    - Elaboración de un proyecto orientado a aumentar la visibilidad de las revistas para solicitar apoyo financiero al CONACyT u otras organizaciones o agencias interesadas en el desarrollo de la investigación educativa en México.
- En relación con el desarrollo del consorcio y la visibilidad del mismo:
    - Crear y poner en marcha un sitio web del consorcio con vínculos hacia nuestras respectivas revistas, así como con los logos, índices de las revistas y motores de búsqueda compartidos.
    - Brindarnos apoyo logístico para mejorar las páginas web y los formatos electrónicos y digitales de nuestras respectivas revistas.
    - Poner a disposición de los miembros del consorcio los apoyos institucionales que recibamos, por ejemplo, la capacitación en el manejo de gestores editoriales (OJS).
- Acciones para aumentar la visibilidad de nuestras revistas y el fortalecimiento de nuestra comunidad de referencia:
    - Publicar anualmente un número conjunto, avalado por el Consorcio, donde se reúnan los mejores trabajos publicados por nuestras revistas en el periodo considerado. Los criterios para seleccionar los artículos de cada revista será responsabilidad de las mismas, en acuerdo con sus respectivos cuerpos colegiados.
    - Con el fin de incidir en la formación de nuestra comunidad de referencia, y de fortalecer el vínculo entre los investigadores en ciernes y expertos, se propone la creación de una revista electrónica para estudiantes de posgrado. Con respecto a la creación y operación de esta revista se considera lo siguiente:

- que sea una revista para estudiantes de posgrado no implica bajar los estándares de calidad de los artículos que serán publicados y que estarán presentes en cada una de nuestras revistas;
- que sea una revista para estudiantes significa que los artículos que propongan ideas originales e importantes en los temas que aborden (de acuerdo al criterio del cuerpo de dictaminadores) no serán descartados por presentar deficiencias en su presentación, sino que se espera establecer un vínculo y un compromiso de acompañamiento entre el autor y los dictaminadores hasta que el artículo esté en condiciones de ser publicado;

◦ Para incidir en los procesos de formación y establecer vínculos con nuestra comunidad de referencia, proponemos las siguientes acciones:

- Realización de talleres para investigadores en formación y noveles sobre escritura académica.

◦ Otras acciones para fortalecer la visibilidad y comunicación entre nuestras revistas:

- Establecer mecanismos de difusión conjunta.
- Establecer mecanismos que nos permitan compartir contenidos y editoriales.
- Proponer el intercambio de los miembros de nuestros respectivos comités editoriales con la finalidad de estar al tanto de las acciones de las otras revistas.
- Elaborar y compartir las bases de datos de nuestras carteras de dictaminadores.
- Estimular la lectura y citación, por parte de la comunidad académica de referencia, entre y para nuestras revistas.

El Consorcio Mexicano de Revistas de Investigación Educativa comenzará su operación a la firma del acta de la reunión celebrada el 29 de octubre de 2015, en las instalaciones del Instituto de Investigaciones sobre la Universidad y la Educación.

Pedro Arteaga, Carmen Batanero, José Miguel Contreras, Gustavo Cañadas

EVALUACIÓN DE ERRORES EN LA CONSTRUCCIÓN DE GRÁFICOS ESTADÍSTICOS ELEMENTALES POR FUTUROS PROFESORES

Assesing pre-service school teachers' errors in building elementary statistical graphs

RESUMEN

En este trabajo analizamos los gráficos producidos por 207 futuros profesores, de educación primaria, al resolver una tarea abierta en la cual tuvieron que comparar tres pares de distribuciones. Los gráficos fueron clasificados teniendo en cuenta si son o no correctos y, en caso de ser incorrectos, en función de los errores cometidos. El análisis permitió explicar algunos de los errores en términos de conflictos semióticos. Los resultados muestran que estos conflictos están relacionados con los convenios de construcción, la selección de gráficos, el sentido numérico y errores conceptuales. También se analiza la influencia del uso de ordenadores sobre los errores producidos.

PALABRAS CLAVE:

- *Gráficos estadísticos elementales*
- *Errores de construcción*
- *Formación de profesores*

ABSTRACT

In this paper we analyze the graphs produced by 207 pre-service primary school teachers when solving an open-ended task in which they should compare three pairs of distributions. The graphs produced are classified according whether they are correct or not, and according to the kind of error in case of an incorrect graph. The analysis allows us to explain some of these errors in terms of semiotic conflicts. Results suggest the semiotic conflicts are related to knowledge of conventions in building the graphs, selecting the graphs, number sense and conceptual misunderstanding. The influence of using computers on the errors produced is also analyzed.

KEY WORDS:

- *Elementary statistical graphs*
- *Errors in building graphs*
- *Teachers´ training*

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (2016) *19* (1): 15 - 40.
Recepción: Septiembre 18, 2013 / Aceptación: Abril 2, 2015. DOI: 10.12802/relime.13.1911

RESUMO

Neste estudo foram analisados os gráficos produzidos por 207 potenciais professores do ensino fundamental para resolver uma tarefa aberta, em que eles tiveram que comparar três pares de variáveis estatísticas. Os gráficos foram classificados de acordo com se eles são ou não correta e se está errado, os erros. A análise semiótica permitiu explicar alguns erros em termos de conflitos semióticos. Os resultados mostram conflitos semióticos relacionados com contratos de construção, seleção de gráficos, sentido do número e erros conceituais. Além disso, analisamos a influência da utilização de computadores em erros produzidos.

PALAVRAS CHAVE:

- *Gráficos estatísticos elementares*
- *Formação de professores*
- *Erros de construção*

RÉSUMÉ

Dans cet article, nous analysons les graphiques produits par 207 futurs enseignants des écoles élémentaires pour résoudre une tâche ouverte dans laquelle ils devaient comparer trois paires de variables statistiques. Les graphiques ont été classés en fonction de si elles sont correctes ou non et si ile est erronée compte tenu des erreurs. L'analyse sémiotique a permis expliquer les erreurs en termes de conflits sémiotiques. Les résultats montrent conflits sémiotiques liés aux contrats de construction, le choix des graphiques, sens des nombres et des erreurs conceptuelles. Nous analysons également l'influence de l'utilisation de l'ordinateur sur les erreurs produites.

MOTS CLÉS:

- *Graphiques statistiques élémentaires*
- *Formation des enseignants*
- *Erreurs de construction*

1. Introducción

Los gráficos estadísticos son parte de la cultura estadística necesaria en la sociedad actual. Además, son un instrumento esencial en el análisis estadístico, pues permiten obtener información no visible en los datos, mediante su representación sintetizada. Ello siempre que se elija un gráfico adecuado y no se introduzcan errores en su construcción, pues dichos errores pueden llevar a conclusiones incorrectas en el análisis estadístico posterior.

En España su estudio se inicia en el primer ciclo de la Educación Primaria (Ministerio de Educación y Ciencias, MEC, 2006; Ministerio de Educación, Cultura y Deportes, MECD, 2014), lo que requiere la adecuada formación de los profesores de este nivel educativo. El análisis de los errores que cometen los futuros profesores en la construcción de gráficos estadísticos es importante para proponer acciones formativas dirigidas a los mismos. Arteaga y Batanero (2010) clasificaron los errores cometidos por una muestra de 207 futuros profesores españoles, en los gráficos que construyeron al comparar dos variables como parte de una tarea abierta.

El objetivo del presente trabajo es completar el anterior en varios puntos: a) Primeramente, se clasifican los errores en los gráficos construidos por los mismos futuros profesores durante la misma sesión para comparar otros dos pares de variables, que no fueron analizados en el estudio de Arteaga y Batanero (2010); b) Seguidamente, se utiliza la idea de conflicto semiótico (Godino, Batanero & Font, 2007) para proporcionar una explicación a una parte de estos errores; c) Finalmente, se estudia la independencia entre el uso o no del ordenador en la construcción de los gráficos y la distribución de gráficos correctos, parcialmente correctos e incorrectos.

A continuación presentamos los fundamentos, método, resultados y discusión, finalizando con algunas implicaciones para la formación de profesores.

2. Marco teórico y antecedentes

2.1. *Marco teórico*

Dentro del enfoque onto-semiótico, Godino y Batanero (1998) señalan que en las prácticas matemáticas intervienen objetos ostensivos (símbolos, palabras, elementos gráficos) y no ostensivos (que evocamos al hacer matemáticas). Los símbolos (significantes) remiten a entidades conceptuales (significados) y sirven para facilitar la enseñanza, pero a veces causan dificultades en los estudiantes. Godino y otros (2007) toman de Eco (1977) la noción de "función semiótica" como "correspondencia", que pone en juego tres componentes:

- Un plano de expresión (objeto inicial o signo);
- Un plano de contenido (objeto final o significado del signo, esto es, lo representado);
- Un criterio o regla de correspondencia (código interpretativo que relaciona los planos de expresión y contenido).

Cualquier posible objeto matemático (concepto, propiedad, argumento, procedimiento, etc.) puede jugar el papel tanto de expresión como de contenido, en una función semiótica, y esta complejidad puede explicar algunas dificultades y errores de los estudiantes. Godino y otros (2007) denominan *conflicto semiótico* a las interpretaciones de expresiones matemáticas por parte de los estudiantes que no concuerdan con las pretendidas por el profesor. Estos conflictos semióticos no son debidos a falta de conocimiento, sino a no haber relacionado adecuadamente los dos términos de una función semiótica. Por tanto, los conflictos semióticos explicarían algunos errores de los estudiantes. De acuerdo a Rojas (2010), esta noción indica que el aprendizaje es una actividad de carácter fuertemente semiótico que debe afrontar, entre otras tensiones, la existente entre lo institucional y lo personal.

2.2. *Competencia en la realización de gráficos estadísticos*

Varias investigaciones evalúan la construcción de gráficos estadísticos por parte de los estudiantes. Para comprenderlas, es preciso recordar que, en la construcción de gráficos, además de los convenios de construcción, es necesario conocer los elementos estructurales, que según Friel, Curcio y Bright (2001) son los siguientes: (a) *El título y las etiquetas*, que aportan información sobre el contenido contextual del gráfico y las variables representadas; (b) *El marco del gráfico*, que incluye los ejes, las escalas y las marcas de referencia en cada eje, y que proporciona información sobre las unidades de medida de las magnitudes representadas; (c) *Los especificadores* o elementos usados para representar los datos, por ejemplo, los rectángulos en los histogramas.

El primer paso es la elección de un gráfico adecuado, aunque algunos estudiantes, según Li y Shen (1992) utilizan gráficos inadecuados al tipo de variable o problema; por ejemplo, diagramas de barras para representar datos bivariantes. Los autores encuentran también los siguientes problemas en las escalas de los gráficos construidos: (a) Elegir una escala inadecuada (por ejemplo no se cubre todo el campo de variación de la variable representada); (b) Omitir las escalas en alguno de los ejes; (c) No especificar el origen de coordenadas y (d) No proporcionar suficientes divisiones en las escalas.

Wu (2004) encuentra los siguientes errores en la construcción de gráficos: (a) errores en las escalas, (b) errores en títulos o etiquetas (c) problemas de proporcionalidad en un pictograma, (e) confusión entre gráficos parecidos, pero de naturaleza distinta (por ejemplo, entre histograma y gráfico de barras), y (f) confusión entre frecuencia y valor de la variable.

El ordenador en ocasiones contribuye a empeorar los resultados. Ben-Zvi y Friedlander (1997) describen el *uso acrítico* del software, cuando los estudiantes construyen gráficos rutinariamente, aceptando las opciones por defecto del software, aunque no sean adecuadas.

2.3. *Investigaciones sobre comprensión gráfica en futuros profesores*

Son pocas las investigaciones centradas en la comprensión gráfica de los profesores, la mayoría de las cuáles son resumidas en González, Espinel y Ainley (2011). Bruno y Espinel (2005) analizan la construcción de gráficos, a partir de una lista de datos, que llevan a cabo futuros profesores. Los errores cometidos incluyen intervalos mal representados, omisión de intervalos de frecuencia nula, o uso de rectángulos no adosados en variables continuas. Aunado a ello, en el polígono de frecuencias no unen las marcas de clase, omiten el intervalo de frecuencia nula o confunden la frecuencia y el valor de la variable. Espinel (2007) evalúa la interpretación de gráficos en futuros profesores, comparando los resultados con los de estudiantes universitarios americanos con un mismo cuestionario, convenientemente traducido. Encontró mayor dificultad en los futuros profesores, sobre todo al predecir la forma de un gráfico a partir de la descripción verbal de variables conocidas o al leer los histogramas.

Monteiro y Ainley (2006, 2007) estudian la competencia de futuros profesores en la lectura de gráficos tomados de la prensa diaria, encontrando que muchos no tenían conocimientos matemáticos suficientes para llevar a cabo dicha lectura. Indican que la dificultad es debida a que la interpretación de gráficos moviliza conocimientos y sentimientos que inciden en su comprensión.

Batanero, Arteaga y Ruíz (2010) evalúan los gráficos producidos por 93 futuros profesores de educación primaria, al trabajar con un proyecto abierto de análisis de datos. Los autores definen los siguientes niveles de complejidad en los gráficos producidos: En el nivel 1 el futuro profesor representa únicamente sus propios datos, sin tener en cuenta el conjunto de datos de la clase; en el nivel 2 se representan todos los datos, en el orden en que fueron recogidos, sin llegar a formar la distribución; en el nivel 3, forma la distribución de frecuencias para cada par de variables a comparar, representado las mismas en distintos gráficos; finalmente en el nivel 4, el estudiante realiza gráficas multivariantes, representando en un mismo gráfico pares de distribuciones a comparar. Dos tercios de los participantes en el estudio realizan gráficos de niveles 3 y 4, donde llegan a formar la distribución de frecuencias de las distintas variables que tuvieron que analizar. También se analizaron los niveles de lectura, según la clasificación de Curcio (1987) y Friel y otros (2001), indicando que pocos de estos profesores alcanzaron el nivel más alto de “lectura más allá de los datos”, donde se requiere realizar inferencias sobre datos no incluidos en el gráfico.

3. Metodología del estudio

3.1. *Muestra e instrumento de recogida de datos*

Participaron en el estudio 207 futuros profesores de Educación Primaria de la Universidad de Granada; en total 6 grupos de estudiantes (aproximadamente 35 por grupo). Los participantes habían estudiado estadística y gráficos estadísticos durante la educación secundaria y en la Universidad en el año académico previo, como parte de la asignatura de Matemáticas y su Didáctica.

Los datos se tomaron como parte de una práctica de la asignatura Currículo de Matemáticas en Educación Primaria. Dicha asignatura, eminentemente práctica, abarca cuatro bloques temáticos: *Números y operaciones*, *Medida y magnitudes*, *Geometría* y, *Estadística y Probabilidad.* En la citada práctica, los participantes tuvieron que trabajar con un proyecto abierto de análisis de datos, llamado *Comprueba tus intuiciones sobre el azar* (descrito con detalle en Godino, Batanero, Roa y Wilhelmi, 2008). Los futuros profesores tuvieron que recoger los datos a través de un experimento aleatorio, analizar sus datos y concluir sobre las intuiciones del conjunto de la clase sobre los fenómenos aleatorios. La secuencia de actividades fue la siguiente:

1. *Presentación del problema y del experimento:* Los futuros profesores llevaron a cabo un experimento aleatorio para decidir si tenían o no buenas intuiciones sobre el azar. El experimento constaba de dos partes. En la primera (secuencia simulada) cada participante tuvo que inventar una secuencia de 20 lanzamientos de una moneda, sin realmente lanzarla, de tal modo que otra persona pudiera pensar que se trataba de una secuencia aleatoria. En la segunda parte (secuencia real) los participantes anotaron los resultados de lanzar 20 veces una moneda.

2. *Recogida de datos.* Cada futuro profesor realizó las dos partes del experimento y registró sus resultados. Seguidamente, se inició una discusión dirigida por el formador de profesores, sobre cómo comparar las secuencias simuladas y reales de todo el grupo. Algunos futuros profesores sugiriendo recoger datos del número de caras y del número de rachas, y comparar sus distribuciones en las secuencias real y simulada. El formador de profesores sugirió comparar también la longitud de la racha más larga. Cada futuro profesor proporcionó los resultados de estas variables en su experimento y todos estos resultados fueron anotados en una hoja de registro (Ver ejemplo de los datos recogidos por 10 de los participantes en la Tabla I).

3. *Instrucciones para el análisis de datos.* Al final de la sesión se dio a cada participante una copia de la hoja de registro con los datos obtenidos por el conjunto de la clase para los tres pares de variables a estudiar. Puesto que los estudiantes estaban divididos en 6 grupos, los datos de cada grupo contenían entre 30 y 40 filas. Los futuros profesores tuvieron una semana para realizar un informe escrito, en éste tenían que comparar los tres pares de variables estadísticas para obtener información que les permitiese concluir sobre las intuiciones del conjunto de su grupo de clase. Tuvieron libertad para usar los análisis de datos que creyesen convenientes, así como de realizar o no de gráficos estadísticos. Los informes debían contener el análisis estadístico llevado a cabo por cada participante, así como las conclusiones finales a las que habría llegado.

Puesto que nos interesamos por la capacidad de los futuros profesores a la hora de representar datos estadísticos, tendremos en cuenta sólo aquellos participantes que realizan gráficos en la elaboración de sus informes.

TABLA I
Ejemplo de los datos recogidos en el experimento (10 participantes)

Participante	*Secuencia simulada*			*Secuencia real*		
	Número de caras	Número de rachas	Longitud de la racha más larga	Número de caras	Número de rachas	Longitud de la racha más larga
1	10	14	4	11	9	4
2	12	9	4	11	16	2
3	11	12	4	11	16	2
4	10	9	4	8	9	4
5	11	11	3	7	11	4
6	9	13	3	8	10	5
7	10	12	3	9	9	4
8	11	14	3	11	4	7
9	9	13	3	10	12	3
10	10	8	5	9	9	5

3.2. *Método de análisis*

Recogidos los informes elaborados por los futuros profesores, se hizo un análisis cualitativo de los gráficos realizados para cada uno de los tres pares de variables que se debían comparar, clasificándolos en tres categorías: básicamente correctos, parcialmente correctos e incorrectos. Cada una de estas categorías fue a su vez subdividida en otras, mediante un proceso inductivo, teniendo en cuenta la actividad matemática realizada por el estudiante y los errores cometidos.

En cada categoría se eligió un ejemplo representativo, y se llevó a cabo un análisis semiótico detallado de dicho ejemplo, siguiendo el método empleado por Mayén, Díaz y Batanero (2009). Para ello, se analizaron las funciones semióticas (Godino, 2002) requeridas durante la elaboración del gráfico, identificando los objetos matemáticos que el estudiante debe aplicar (lenguaje matemático, procedimientos, conceptos y propiedades utilizados).

La comparación de la cadena de funciones semióticas previstas en el proceso correcto de construcción del gráfico con la realmente llevada a cabo por el futuro profesor en cada solución errónea, permite identificar los conflictos semióticos, es decir los significados que no concuerdan con los considerados correctos desde el punto de vista institucional (Godino y otros, 2007). Los resultados obtenidos se describen a continuación.

4. Resultados y discusión

4.1. *Errores en la construcción de los gráficos*

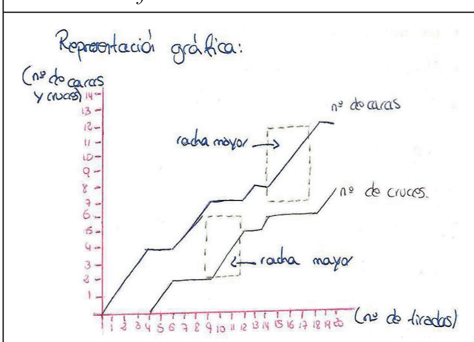
A pesar de que no se pidió explícitamente la realización de gráficos, al resolver la actividad propuesta, 181 (87.4% de los participantes) utilizaron gráficos para comparar el número de caras en las secuencias real y simulada, 146 (70.5%) para el número de rachas y 129 (62.3%) para la longitud de la racha más larga. La alta proporción de alumnos que construye un gráfico sin habérsele requerido explícitamente indica la necesidad que sienten de construir un gráfico para encontrar alguna información no presente en los datos brutos que le permita resolver el problema. La proporción de gráficos es mayor en el número de caras que en las otras dos variables al ser esta variable la más familiar para los futuros profesores.

A continuación se describen las diferentes categorías en que se ha clasificado los gráficos producidos por los futuros profesores, según presencia o no de errores en su construcción y en caso de haber errores, según el tipo de error.

C1. *Gráficos básicamente correctos.* Muchos participantes realizaron gráficos correctos, lo que supone ser capaz de elegir un gráfico adecuado al tipo de problema y a las variables representadas, tener en cuenta los convenios de construcción y elementos estructurales (Friel y otros, 2001), construir adecuadamente las escalas y representar los datos correctamente, incluyendo rótulos y etiquetas claras y precisas.

Algunos de estos gráficos son originales, en el sentido de no ser incluidos en la enseñanza recibida. Por ejemplo, en la Figura 1a el participante inventa un gráfico no estándar para presentar los resultados de su experimento, donde representa, por un lado, el número acumulado de caras y, por otro, el de cruces, lo que permite visualizar la longitud de la racha más larga de cada uno de los dos resultados. Hemos considerado correctos estos gráficos, pues Watson (2006) sugiere permitir a los alumnos crear gráficos originales, siempre que no contengan incorrecciones. Otros gráficos contienen líneas innecesarias o usan líneas curvas en vez de rectas (ver figura 1b), pero no añaden dificultad a la lectura del gráfico, por lo que se ha considerado básicamente correcto.

a. *Gráfico correcto no estándar*



b. *Gráfico con líneas curvadas*

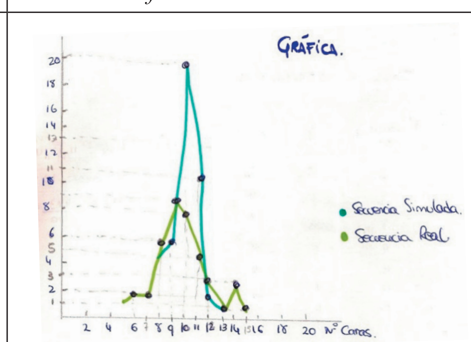


Figura 1. Ejemplos de gráficos básicamente correctos

A continuación se presentan las categorías encontradas para los gráficos parcialmente correctos (que únicamente tienen errores en las escalas o rótulos) e incorrectos. Para la primera categoría realizamos un análisis semiótico completo, que permite detectar la existencia de conflictos semióticos (Godino, 2002). En el resto de categorías, por razones de extensión comentamos brevemente los conflictos encontrados sin incluir el análisis completo realizado.

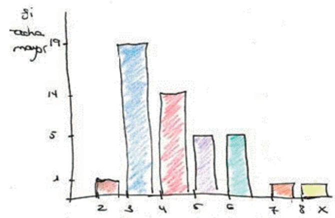
C2. Gráfico parcialmente correcto (con errores de escala). Los rótulos de los ejes y las etiquetas de las escalas son parte importante del gráfico, ya que proporcionan información contextual de las variables representadas y unidades de medida utilizadas (Curcio, 1987). Watson (2006) indica tener precaución con las escalas, pues la información que se quiere transmitir con el *gráfico* puede ser manipulada a través de ellas. Sin embargo, algunos futuros profesores comenten los siguientes errores:

C2.1. Escalas no proporcionales. Cuando construyen escalas no proporcionales a las magnitudes representadas, las distancias que deberían ser iguales entre pares distintos de puntos, no lo son. En la Figura 2 mostramos un ejemplo y su análisis semiótico, donde se desglosan los objetos puestos en juego en su realización, tanto de manera implícita como explícita. No se tiene en cuenta la situación-problema, ya que para todos los estudiantes fue la misma (realización del proyecto estadístico) y tampoco los argumentos, pues nos centramos sólo en los errores de construcción del gráfico y no los de lectura.

Para realizar el gráfico mostrado en la Figura 2, el futuro profesor tendrá que utilizar los conceptos de experimento aleatorio (lanzar la moneda) y variable aleatoria (las variables bajo estudio) así como las variables estadísticas correspondientes a los datos recogidos, formando las distribuciones de estas variables para representarlas. Al construir los ejes necesita las ideas de representación cartesiana, números naturales y su orden. Tendrá que determinar el máximo y mínimo de la distribución (rango), así como de las frecuencias para elegir una escala, marcando en ella los valores numéricos necesarios. Puesto que elige un diagrama de barras, ha de establecer una correspondencia (función semiótica) entre cada valor de la variable y la barra, así como entre la altura de cada barra y la frecuencia del valor que representa. Usa lenguaje gráfico verbal y numérico, así como colores para diferenciar las categorías. Lleva a cabo diferentes procedimientos: clasificación de datos, cálculo de frecuencias, representación de escalas en los ejes y representación de frecuencias mediante la altura de distintas barras. Todos estos elementos los usa correctamente, pero observamos dos c*onflictos semióticos*: por un lado, la escala utilizada en el eje *Y* para representar las frecuencias no es proporcional, ya que, por ejemplo, la distancia, en el eje vertical, entre 2 y 5 es la misma que entre 5 y 14 y no sigue los convenios de representación de números naturales en la recta numérica. Luego falla al poner en correspondencia la proporcionalidad numérica y geométrica. Un segundo *conflicto semiótico* es que el estudiante no centra las barras del diagrama en los valores numéricos, es decir, el conflicto se produce al no interpretar correctamente el convenio de construcción de dicho gráfico.

Objetos matemáticos usados implícitamente y conflictos semióticos

Lenguaje



- Gráfico: puntos, líneas, marcas, rectángulos.
- Verbal: etiqueta “x” para el eje X, sin aclarar que se trata de la variable longitud de la racha más larga. En el eje Y la etiqueta “f_i racha más larga” da información de lo que se está representando en el gráfico. Falta título.
- Numérico: etiquetas en las escalas que representan los números naturales ordenados. (eje X y eje Y).
- Utiliza distintos colores para diferenciar las distintas barras del gráfico.

Conceptos y proposiciones

- Experimento aleatorio: lanzar 20 veces una moneda.
- Variables aleatorias: longitud de la racha más larga al lanzar 20 veces una moneda equilibrada y longitud de la racha más larga en la secuencia inventada.
- Variables estadísticas: muestra de tamaño *m* de los resultados de la longitud de la racha más larga al lanzar 20 veces una moneda equilibrada y longitud de la racha más larga en la secuencia inventada.
- Distribución de frecuencias; máximo, mínimo y rango.
- Representación cartesiana.
- Números naturales y orden de los naturales.
- Figuras geométricas: rectas, rectángulos; perpendicularidad, paralelismo
- Escala, proporcionalidad.
- Correspondencia entre cada valor de la variable y un rectángulo o barra, y entre la altura de cada una de las barras y la frecuencia del valor al que representa la barra.

Procedimientos

- Clasificación de datos, cálculo de frecuencias, representación de escalas en los ejes.
- Representación de los ejes: en el eje X representación de los valores de la variable (longitud de la racha más larga) y en el eje Y representación de las frecuencias asociadas a cada valor de la variable en una de las dos secuencias; real o simulada.
- Representación de frecuencias mediante la altura de distintas barras.
- *Conflicto:* representación de los números naturales en la recta real. Escala no proporcional, distancia entre el 6 y el 7 es mayor que por ejemplo la distancia entre el 7 y el 8.
- *Conflicto*: en este caso el estudiante no centra las barras en los valores enteros.

Figura 2. Ejemplo de análisis semiótico de un gráfico en la categoría 2.1 (escalas no proporcionales)

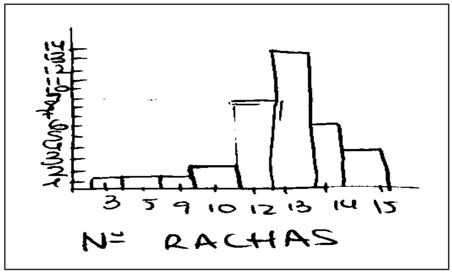


Figura 3. Ejemplo de gráfico con valores faltantes en el eje X

C2.2. Valores numéricos faltantes en la recta real. Bruno y Espinel (2005) describieron algunas representaciones erróneas de los números naturales en la recta real, elaboradas por futuros profesores. Entre ellas destacamos la omisión de los valores de la variable que tienen frecuencia nula (Figura 3). Este error supone un fallo del sentido numérico de los futuros profesores, pues la representación adecuada de números naturales en la recta real es un componente del mismo. El futuro profesor ha aprendido que en el diagrama de barras ha de incluir una barra con altura proporcional a la frecuencia de cada valor de la variable. Implícitamente el formador de profesores quiso dar a entender que "cada valor de la variable" incluye todos los valores del rango, incluyendo los de frecuencia nula. Pero el futuro profesor sólo representa los valores de la variable que han aparecido en el experimento. Es decir, hay un conflicto semiótico de interpretación de la expresión "cada valor de la variable".

C2.3. Rótulos confusos, valores erróneos en las escalas o falta escala. Las *palabras* que aparecen en el título del gráfico, los rótulos de los ejes y las etiquetas de las escalas son parte esencial del gráfico (Curcio, 1987), pues proporcionan las claves necesarias para comprenderlo. A pesar de ello, y como muestran Bruno y Espinel (2005), muchos futuros profesores tienen dificultades en incluir un rótulo correcto y significativo. En nuestro trabajo son muchos los que incluyen títulos o etiquetas imprecisos, aunque pocos realizan gráficos con títulos o etiquetas totalmente incorrectas o ausentes.

C2.4. Barras no centradas. Las variables estadísticas que tuvieron que estudiar los futuros profesores para realizar el proyecto fueron discretas con valores enteros. A pesar de ello, muchos de ellos construyeron histogramas, que suelen usarse para representar variables continuas y, cuando es necesario, para agrupar los valores de la variable en intervalos. Muchos de estos histogramas son realmente gráficos de barras en los que éstas están unidas unas a otras, como si se tratase de una variable continua. Tanto en los histogramas como en los gráficos de barras algunos participantes no centran las barras o rectángulos en las marcas de clase, aunque las variables en estudio toman solamente valores enteros (Figura 2). Este error fue detectado en futuros profesores por Bruno y Espinel (2005) y Espinel (2007).

C2.5. Representación incorrecta de intervalos de valores en el eje X. Algunos participantes que representan histogramas, al representar los intervalos, tratan intervalos con extremo común como si fuesen intervalos disjuntos. Este error, descrito por Bruno y Espinel (2005), se presenta sobre todo entre los que han utilizado la hoja Excel para realizar sus gráficos. En el ejemplo mostrado en la Figura 4a, subyace una confusión entre histograma y diagrama de barras, y entre los tipos de datos en que pueden aplicarse en uno y en otro. Hay también falta de comprensión del significado de un intervalo de valores en la recta numérica y del propósito del área en un histograma, que es proporcional a la frecuencia de los valores representados. Además, hay confusión entre el significado de los valores extremos de un intervalo en la recta numérica y de la marca de clase del intervalo. El error de este futuro profesor puede haber sido provocado por un uso acrítico del software (Ben-Zvi & Friedlander, 1997), al usar directamente las opciones por defecto de Excel sin cuestionarlas.

a. *Intervalos incorrectamente representados*	b. *Gráficos con escala muy amplia*

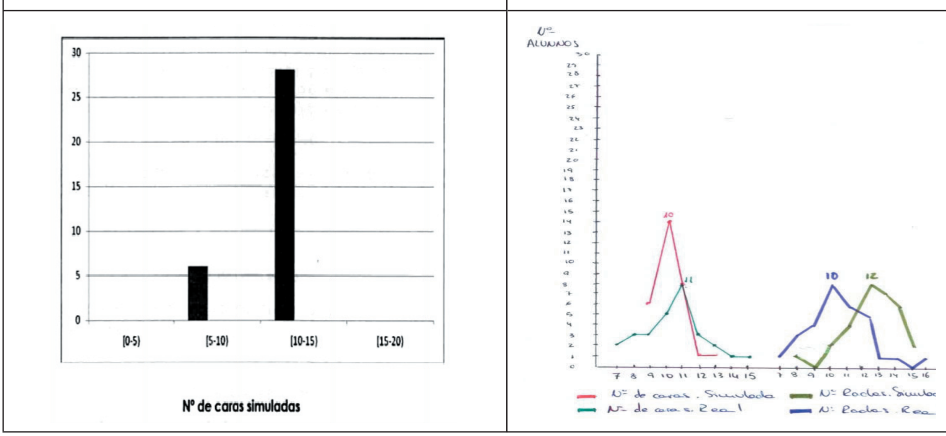


Figura 4. Ejemplos de gráficos con errores de escala

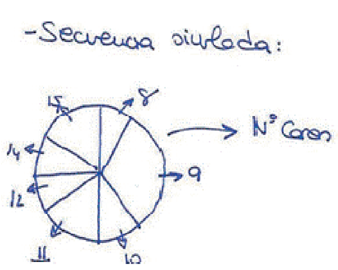
C2.6. Escala inapropiada. Li y Shen (1992) encontraron algunos estudiantes que construían una escala que no cubría el campo de variación de la variable representada o con una subdivisión excesiva. En nuestro estudio hemos encontrado estos errores, así como el de utilizar escalas demasiado amplias para el objetivo pretendido (Figura 4b). En el ejemplo mostrado, el gráfico, además, presenta simultáneamente la distribución de número de caras y el número de rachas que no son directamente comparables. Watson (2006) indica la importancia de ser cuidadosos en la construcción de las escalas y Wainer (1997) muestra ejemplos tomados de la prensa en los que una escala inadecuada puede llegar a esconder relaciones importantes entre los datos.

C3. Gráfico incorrecto. Se trata de gráficos claramente inadecuados para el problema planteado. Hemos encontrado las siguientes subcategorías:

C3.1. Altura de la barra, área del rectángulo, o del sector circular, no proporcional a la frecuencia. Supone un conflicto de interpretación de los convenios de construcción de los distintos gráficos. Un ejemplo se muestra en la Figura 5a, donde es difícil leer la frecuencia asociada a cada valor de la variable debido a que los sectores del gráfico no tienen amplitud proporcional a las frecuencias y no se incluyen los valores de dichas frecuencias en el gráfico. El futuro profesor debiera haber dividido la amplitud total del círculo (360º) entre el número de alumnos de la clase, representando, posteriormente, la frecuencia de cada valor de la variable mediante un sector circular con amplitud proporcional a dicha frecuencia. El sujeto falla al aplicar esta proporcionalidad, mostrando un conflicto consistente en no establecer una correspondencia entre la proporcionalidad aritmética, que se presenta en la distribución de datos, y la proporcionalidad geométrica que debe aparecer en el gráfico.

C3.2. Intercambia frecuencia y valor de la variable en los ejes. Al formar la distribución se establece una función donde a cada valor de la variable se asigna la frecuencia con que aparece. Algunos participantes tienen un conflicto al confundir las variables independiente (por ejemplo, número de caras) y dependiente (frecuencias absolutas) en la distribución de frecuencias y construyen la distribución asignando a cada frecuencia diferente obtenida, el valor de la variable que tuvo dicha frecuencia (Figura 5b). Este conflicto, detectado por Ruiz (2006) en un estudio de comprensión de la variable aleatoria, tiene como consecuencia que la función matemática representada no es unívoca (por tanto no es una función en el sentido estricto del término), pues varios valores de la variable podrían tener la misma frecuencia. Como se observa en el ejemplo, donde a la frecuencia 2, por ejemplo, le corresponden los valores 6 y 8, porque cada uno tiene frecuencia 2 en el experimento.

a. *Gráfico con áreas no proporcionales a la frecuencia*



b. *Gráfico de barras con ejes cambiados*

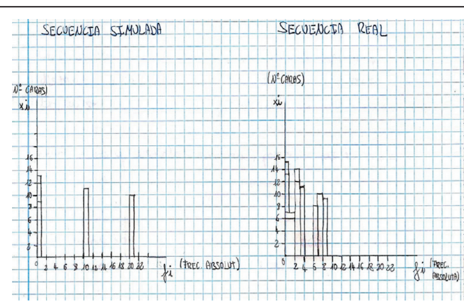


Figura 5. Ejemplos de gráficos incorrectos

C3.3. Representa cada valor de la variable junto con su frecuencia. Algunos participantes construyen gráficos de barras adosados, representando cada valor de la variable junto con su frecuencia, como si fuesen dos variables diferentes. Generalmente estos gráficos se han construido con Excel, donde el futuro profesor hace una elección incorrecta de los datos a representar, tratando los valores de la variable (que debieran ser etiquetas en Excel) en la misma forma que las frecuencias (ver Figura 6a). Se muestra un conocimiento escaso de las opciones del software por parte del futuro profesor y se hace un *uso acrítico* del mismo (Ben-Zvi & Friedlander, 1997). Subyace también un conflicto al confundir los conceptos de valor y frecuencia. En los antecedentes de investigación no se encontró el error descrito en esta subcategoría.

C3.4. Representan el valor de la variable multiplicado por su frecuencia. Algunos participantes han introducido en Excel la distribución de datos calculando posteriormente una columna auxiliar con el producto de cada valor de la variable por su frecuencia, para hallar la media, como suma de esta columna, dividida por el número de datos. Posteriormente, al realizar el gráfico, lo mismo que en el caso anterior, hacen una elección incorrecta de los datos a representar y, en lugar de representar únicamente las frecuencias de la variable, representan en un diagrama de barras adosado, tanto las frecuencias como su producto por el valor de la variable. Estos futuros profesores muestran igualmente un uso acrítico del software y una confusión de los conceptos de variable, frecuencia y distribución. En los antecedentes de investigación no se encontró el error descrito en esta subcategoría.

C3.5. Gráfico no apropiado al problema planteado. Algunos futuros profesores eligen gráficos no adecuados para el problema a resolver, o para el tipo de variable. Por ejemplo, en la Figura 6b se representan caso a caso, en un gráfico de barras adosado, dos variables (racha más larga en la secuencia real y simulada), con lo que el gran número de barras impide visualizar la tendencia de los datos y, por tanto, comparar las dos distribuciones. Este participante ha representado los datos uno a uno, sin intentar formar la distribución, mostrando una comprensión incompleta de la misma.

C3.6. Variables no relacionadas en el mismo gráfico. Se representan en el mismo gráfico variables cuya comparación no tiene sentido (error citado por Li y Shen, 1992). Por ejemplo, en la Figura 7a el alumno representa la media, mediana y moda para las tres variables en un diagrama de barras apilado, mostrando una confusión respecto al propósito de dicho diagrama, que es representar valores de una misma variable. Esto pudiera deberse a otro conflicto entre los conceptos de valor de la variable y promedio.

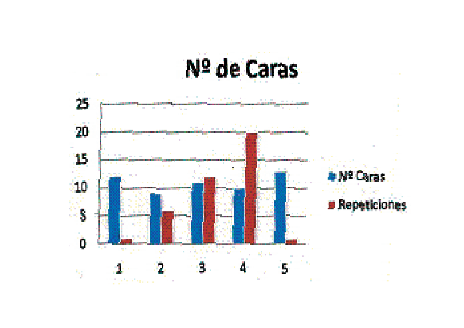
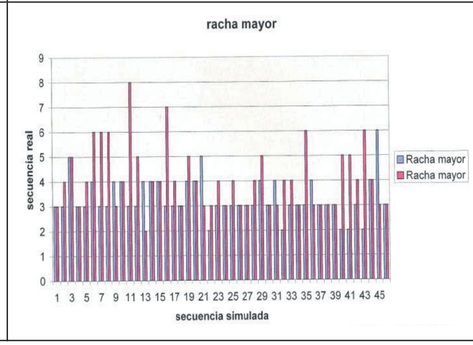
a. *Gráfico de barras con valores y frecuencias*	b. *Gráfico no apropiado al problema*
	

Figura 6. Ejemplos de gráficos incorrectos

C3.7. Representación de distintos promedios y estadísticos de dispersión en un mismo gráfico, que, como el caso anterior, no tiene sentido comparar. En la Figura 7b se muestra el gráfico realizado por un participante, en el cual, para cada variable en estudio, compara promedios con el rango, lo cual es una comparación sin sentido. Hay por tanto un conflicto que consiste en confundir los conceptos de promedio y dispersión, que no se ha reportado, ni estudiado, en la literatura especializada. Este gráfico, además, muestra problemas en relación con el título y los rótulos de los ejes, que hacen más difícil la interpretación de dicha representación.

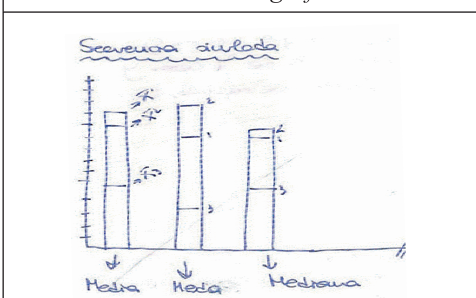
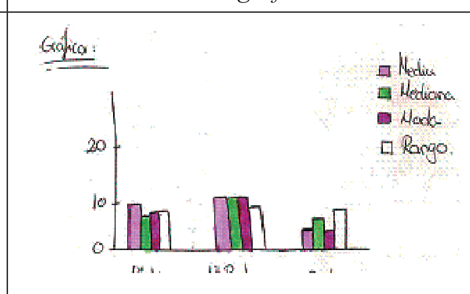
a. *Variables no relacionadas en el mismo gráfico*	b. *Promedios y medidas de dispersión en un gráfico*
	

Figura 7. Ejemplos de gráficos incorrectos

C3.8. Otros errores. Incluimos acá los gráficos claramente inadecuados que contienen errores pertenecientes a varias de las categorías de error descritas anteriormente. También los errores en cálculo; por ejemplo, al calcular las frecuencias relativas a partir de los datos o al calcular la media o la mediana.

TABLA II

Frecuencias (y porcentaje) de gráficos, según corrección y variables representadas

		Número de caras		Número de rachas		Racha más larga	
		Frec.	%	Frec.	%	Frec.	%
Básicamente correctos	1.1. Correctos	78	43.1	57	39.0	53	41.1
	1.2. Correctos, no estándar	3	1.7	3	2.1	3	2.4
	1.3. Correctos, líneas innecesarias	4	2.2	4	2.7		2.4
Errores en escalas	2.1. Escalas no proporcionales	0	0	2	1.4	3	2.4
	2.2. Representación errónea de números en la recta	4	2.2	10	6.8	5	3.8
	2.3. Rótulos o valores de escala confusos	6	3.3	4	2.7	4	3.1
	2.4. Barras no centradas	8	4.4	6	4.1	7	5.4
	2.5. Representación errónea de intervalos	4	2.2	3	2.1	3	2.4
	2.6. Escala inapropiada	13	7.2	8	5.4	8	6.3
Gráfico Incorrecto	3.1. Elemento no proporcional a la frecuencia	3	1.7	4	2.7	1	0.7
	3.2. Intercambia valores y frecuencias	2	1.1	1	0.7	1	0.7
	3.3. Representa valores y frecuencias	3	1.7	2	1.4	2	1.4
	3.4. Representa producto de valor por frecuencia	2	1.1	2	1.4	2	1.4
	3.5. Gráfico no adecuado	7	3.8	3	2.1	1	0.7
	3.6. Variables no relacionadas en el mismo gráfico	14	7.7	14	9.6	13	10.1
	3.7. Estadísticos no comparables en el mismo gráfico	2	1.1	2	1.4	2	1.4
	3.8. Varios errores	28	15.5	21	14.4	18	14
Total		181	100	146	100	129	100

En la Tabla II se muestran los resultados obtenidos del análisis de las producciones de los estudiantes. Algo menos del 50% de los futuros profesores construyen gráficos básicamente correctos en la comparación de las distintas variables puestas en juego en el proyecto: 47% de los que construyen gráficos para el número de caras los construyen correctamente, 43.8% para el número de rachas y 45.7% para la racha más larga.

Hubo alrededor de un 20% de gráficos con errores en escalas (escala no proporcional, representación errónea de números en la recta, etc.), ya encontrados en (Bruno y Espinel, 2005), lo que indica que los errores no son un problema local, sino están extendidos entre los futuros profesores de educación primaria. Otros errores (los clasificados como gráficos incorrectos) considerados más graves, como el intercambio de frecuencias y valores, indican que no se comprende el concepto de distribución; o como el de la inclusión de variables no relacionadas en los gráficos, que muestra un desconocimiento del propósito de los gráficos. Destacan los que representan variables no relacionadas en un mismo gráfico (7.7 al 10.1% dependiendo de la variable) y aquellos que cometen varios errores (aproximadamente un 15% de los que realizan gráficos).

Sumados los gráficos incorrectos y parcialmente incorrectos, más de la mitad de los futuros profesores realizan gráficos con algún tipo de error. Es preocupante la proporción de futuros profesores que cometen errores graves en gráficos que tendrán que enseñar a sus estudiantes.

Para analizar la hipótesis de independencia entre la corrección del gráfico y la variable comparada, se compararon el número total de gráficos correctos, parcialmente correctos e incorrectos, en cada una de ellas, mediante el contraste Chi-cuadrado de independencia. Se comprobaron previamente los supuestos de aplicación del contraste (ninguna frecuencia observada fue menor que 5) y se obtuvo un valor Chi=1.03, con 6 grados de libertad, y valor p=0.98, que indica que no se puede rechazar la hipótesis de independencia. Interpretamos este resultado como indicación de que el grado de corrección del gráfico no depende de la variable representada, sino que serán debidos a falta de la competencia necesaria en la construcción de gráficos por parte de los futuros profesores.

4.2. *Conflictos semióticos que explican algunos de los errores observados*

El análisis realizado de los objetos matemáticos y funciones semióticas puestos en juego en la construcción de cada gráfico, nos permite analizar la actividad del futuro profesor y sus conflictos semióticos, es decir, las interpretaciones de objetos o expresiones matemáticas que no están de acuerdo con las pretendidas por el formador de profesores o el investigador. Dicho análisis se realizó para cada categoría de error, aunque en este trabajo sólo se ha mostrado el correspondiente a la categoría 2.1, por razones de limitación de espacio. Estos conflictos se pueden clasificar en la forma siguiente:

1. *Conflictos relacionados con las convenciones de construcción de los gráficos.* Se trata de futuros profesores que hacen una interpretación incorrecta de los convenios o procedimientos de construcción de gráficos. En esta categoría hemos encontrado el siguiente:

   – *Interpretación errónea de la regla consistente en representar todos los valores de los datos,* entendiendo que hay que incluir en el eje *X* sólo los valores de la variable cuya frecuencia es no nula. Esto lleva a omitir los valores de frecuencia nula en los gráficos de barras, polígonos de frecuencia e histogramas; dicha omisión también fue descrita por Bruno y Espinel (2005).

2. *Conflictos relacionados con la interpretación de la finalidad de cada gráfico.* Aunque, generalmente un gráfico estadístico puede usarse para diversos fines, también existen convenciones, por lo que algunos gráficos son inadecuados en ciertas situaciones. En general, la adecuación del gráfico dependerá del tipo de variable representada y el número de valores que toma. Algunos errores, causados por estos conflictos, que llevan al alumno a elegir un gráfico inadecuado son los siguientes:

   – *Representar variables no comparables en el mismo gráfico*, error encontrado por Li y Shen (1992). El conflicto subyacente es interpretar incorrectamente el propósito de comparar dos distribuciones en el mismo gráfico.
   – *Representar estadísticos no comparables en el mismo gráfico.* Subyace, también en este caso, una confusión entre los diferentes tipos de resúmenes estadísticos, por ejemplo, entre medidas de tendencia central y dispersión, así como su propósito y el objetivo de comparar varios estadísticos entre sí. No hemos encontrado este error descrito en la literatura previa.

3. *Conflictos relacionados con la representación de números en la recta real.* Estos conflictos están relacionados con el sentido numérico y todos ellos han sido detectados por Bruno y Espinel (2005) y Espinel (2007), en futuros profesores de educación primaria:

- *Conflicto al poner en correspondencia la proporcionalidad aritmética y la geométrica.* Lleva a producir escalas no proporcionales, representando diferencias numéricas iguales mediante distancias diferentes.
- *Traducción incorrecta de la secuencia numérica a su representación sobre la recta real.* Un ejemplo es cuando se omite valores numéricos, al representar los números naturales en la recta real o cuando se representan valores numéricos no ordenados.

4. *Conflictos relacionados con la interpretación de conceptos.* Cuando los estudiantes confunden conceptos entre sí o los asocian a propiedades inexistentes:

- *Confusión entre variable continua y discreta.* Como consecuencia, no se centran las barras del histograma en la marca de clase. Otro error producido por este conflicto es la elección de un histograma para representar variables discretas con pocos valores, no apreciándose la diferencia entre histograma y diagrama de barras. Hay confusión sobre las convenciones de agrupación de variables estadísticas, que no tiene sentido si la variable tiene un número limitado de valores. Aunque este error fue descrito por Wu (2004), en estudiantes, y por Bruno y Espinel (2005), en futuros profesores, los autores no describen el conflicto que produce el error.
- *Interpretación incorrecta de un intervalo numérico.* El estudiante no sabe atribuir valor al intervalo que lo contiene, no diferencia entre intervalos abiertos o cerrados, no diferencia entre intervalos y categoría (que es un valor unitario), o representa como disjuntos intervalos que no lo son. Todos estos errores fueron descritos por Bruno y Espinel (2005) y los relacionan con el sentido numérico. Nosotros lo atribuimos a un conflicto de interpretación del concepto de intervalo.
- *Confusión entre valor de la variable y frecuencia,* detectado previamente por Wu (2004). No se discriminan estos conceptos, por lo que a veces se representa la frecuencia junto con la variable o se calcula la media de las frecuencias.
- *Confusión de la variable dependiente e independiente en la distribución de frecuencias.* Este conflicto ya fue detectado por Ruiz (2006) en un estudio de comprensión de la variable aleatoria, pero no había sido descrito para el caso de la variable estadística.

- *Asocia la idea de distribución a un conjunto de variables y no a una sola variable.* Algunos estudiantes mezclan valores o estadísticos de varias variables en un solo gráfico, no comprendiendo que cada distribución está asociada a una sola variable. No se ha descrito este conflicto en la investigación previa. Una consecuencia inmediata, tampoco descrita anteriormente, es que algunos estudiantes asocian la idea de rango a un conjunto de distribuciones y no a una sola distribución. En consecuencia, al elegir sus escalas usan el mínimo de una de las variables y el máximo de otra.

Por otro lado, también se observaron errores que no hemos podido explicar utilizando la idea de conflicto semiótico. Por ejemplo, desde nuestro punto de vista no habría conflicto semiótico subyacente en añadir líneas innecesarias al gráfico que, aunque dificultan la lectura, no suponen confusión en la interpretación de objetos matemáticos. Estas líneas innecesarias no se deben a una interpretación incorrecta por parte de los estudiantes sino a que quienes las añaden creen que puede facilitarles la construcción de los gráficos.

Tampoco son debidos a conflictos semióticos los errores de cálculo; por ejemplo, cuando confunden el resultado de la división al calcular las frecuencias relativas a partir de las absolutas. Los errores consistentes en elegir escalas demasiado amplias o que no cubren el recorrido de la variable (error encontrado por Wu, 2004) y la subdivisión incorrecta de la escala, encontrada también por Li y Shen (1992), se explicarían por *falta de comprensión del papel de las escalas en el gráfico.*

Para finalizar indicamos que la tecnología en ocasiones aumenta los conflictos pues los estudiantes tienen poco dominio de ella, como veremos en el siguiente punto. Ello es debido a que también la tecnología tiene convenciones de interpretación (por ejemplo, de los iconos o las funciones) que el futuro profesor desconoce o confunde.

4.3. *Uso de ordenadores e influencia en los errores*

En los currículos españoles para la Educación Primaria (MEC, 2006; MECD, 2014) se incluye como contenido el uso de Excel en el último ciclo (11-12 años), dentro de un plan global de incorporar la tecnología en todas las materias escolares. Por otro lado, son cada vez más numerosos los centros de educación primaria en que se dota a alumnos y profesores de ordenador personal, o que tienen instalaciones de ordenadores.

Los participantes en nuestro estudio pudieron elegir entre realizar el trabajo a mano o usando los ordenadores. Sólo una cuarta parte de la muestra y menos de la tercera parte de los que realizan gráficos utilizan el ordenador. Deducimos que el manejo de la hoja Excel es todavía poco familiar a estos futuros profesores, a pesar de haber sido utilizada en la asignatura de Matemáticas y su Didáctica, en primer año algunas prácticas de uso de la hoja Excel, precisamente en el tema de estadística.

El problema al usar herramientas como la hoja Excel en el análisis estadístico es que, aparte de los contenidos de estadística necesarios para una determinada tarea, es necesario aprender las opciones del software utilizado. Esto ofrece una dificultad añadida a la tarea propuesta a los estudiantes, por lo que muchos alumnos se limitan a aceptar la salida que proporciona el software sin usar las posibilidades de cambiar escala, tipo de gráfico, etc., como indica Ben-Zvi (2002). Esto ha ocurrido en nuestro estudio, donde, aunque son minoría los estudiantes que usaron ordenador (generalmente la hoja Excel), en general, estos tuvieron mayor número de errores que los que realizaron gráficos de papel y lápiz. En la Tabla III presentamos las frecuencias de uso del ordenador y los porcentajes respecto al total de participantes que analizan cada variable.

TABLA III
Frecuencias y porcentaje de estudiantes, según corrección de los gráficos y el uso o no de ordenador

	Número de caras				*Número de rachas*				*Racha más larga*				*Total de gráficos*			
	Usa Ordenador		No usa		Usa Ordenador		No usa		Usa Ordenador		No usa		Usa Ordenador		No usa	
	Frec.	%	Frec.	%	Frec.	%	Frec.	%	Frec.	%	Frec.	%	Frec.	%	Frec.	%
Correctos	18	36.0	67	51.1	16	40.0	48	45.3	17	42.5	42	47.2	51	39.2	157	48.2
Parcialmente correctos	7	14.0	28	21.4	4	10.0	29	27.4	6	15.0	24	27.0	17	13.1	81	24.8
Incorrectos	25	50.0	36	27.5	20	50.0	29	27.4	17	42.5	23	25.8	62	47.7	88	27
Total	50		131		40		106		40		89		130		326	

En total 50 futuros profesores utilizan el ordenador para realizar los gráficos del número de caras (27.6% de los que representan esta variable), 40 para el número de rachas (27.4% de los que las grafican) y 40 para la *longitud de la racha más larga* (31% de los que representan esta variable). En consecuencia, no hay una variación muy grande en el porcentaje de los que usan el ordenador para las tres variables. Observamos que la proporción de gráficos correctos es siempre mayor si no se usa el ordenador y hay menores errores en escalas (gráficos parcialmente correctos), porque el software construye automáticamente las escalas. Sin embargo, hay muchos más gráficos incorrectos (errores importantes) al usar el ordenador. Globalmente, mientras que el 48.2 % de gráficos realizado a mano fueron correctos este porcentaje cae al 39.2% en el caso de usar ordenador, subiendo el porcentaje de gráficos incorrectos del 27% al 47.7%. Este resultado es un motivo de preocupación, puesto que, como se ha dicho, las autoridades educativas tratan de favorecer el uso de ordenadores en la enseñanza.

Para analizar la hipótesis de independencia entre la distribución de gráficos correctos, parcialmente correctos e incorrectos en alumnos que usan o no el ordenador se aplicó el contraste Chi cuadrado, utilizando las dos últimas columnas de frecuencias absolutas de la Tabla III. Se comprobaron los requisitos de aplicación (ninguna frecuencia absoluta es menor que 5) y el resultado del contraste fue estadísticamente significativo (Chi=19.72; p=0,0001 con 2 grados de libertad); por tanto se rechaza la hipótesis de independencia entre estas dos variables.

5. Conclusiones

Los resultados del estudio confirman los de Bruno y Espinel (2005), Espinel (2007) y Monteiro y Ainley (2006, 2007), que resaltan problemas en la comprensión gráfica de los futuros profesores de Educación Primaria. La proporción de gráficos correctamente construidos por los participantes en el estudio no alcanza el 50% y no depende de la variable analizada por los futuros profesores. Alrededor de un 20% de los gráficos presenta errores en las escalas, muchos de los cuáles se deben a problemas en la comprensión de la representación de números en la recta real o con la proporcionalidad. Un 30% de gráficos presentan errores de mayor importancia, lo que indica que los participantes no conocen el propósito o el tipo de variables adecuados a los diferentes gráficos, ni el propósito de la comparación de dos distribuciones.

Asimismo, los resultados confirman la clasificación de errores realizadas por Arteaga y Batanero (2010), para una parte de estos gráficos, y han permitido rechazar la hipótesis de independencia de la distribución de errores en los futuros profesores que usan el ordenador (mayor proporción de errores) y los que no lo usan. Adicionalmente se ha realizado un análisis semiótico cualitativo que permite identificar y clasificar una serie de conflictos semióticos en los gráficos producidos por los futuros profesores. Todos estos resultados son originales, respecto al trabajo de Arteaga y Batanero (2010).

Los resultados indican un pobre conocimiento de los gráficos estadísticos elementales incluidos en la orientaciones curriculares para la Educación Primaria (por ejemplo, MECD, 2014). Por tanto, queremos resaltar la importancia de que los formadores de profesores tomen conciencia de la necesidad de formar estadísticamente a los futuros profesores y, en particular, mejorar su competencia en la producción de los gráficos estadísticos, que tendrán que enseñar a sus futuros alumnos. Dicha enseñanza debe atender a los conocimientos matemáticos, proponiendo a los futuros profesores actividades de construcción y lectura de todos los gráficos estadísticos elementales incluidos en las orientaciones curriculares y libros de texto: gráficos de barras, de líneas y sectores, gráficos de puntos y pictogramas. En las situaciones que se proponga a los profesores se deben tener en cuenta los diversos niveles de lectura de gráficos propuestos por Curcio (1987) y los niveles de complejidad del gráfico propuestos por Batanero y otros (2010).

La clasificación de errores presentada y su explicación, en términos de conflictos semióticos, pueden servir a los formadores de profesores, para tener en cuenta las dificultades que pueden encontrar los futuros profesores en la realización de gráficos y, por lo tanto, para diseñar actividades que ayuden a superarlas. De este modo se atendería a la componente didáctica de su formación. Además, para mejorar su conocimiento de la enseñanza activa de los gráficos, podrían ser útiles las recomendaciones de González, Espinel y Ainley (2011) y basarse en la realización de proyectos similares al descrito en este estudio, puesto que las nuevas directrices curriculares para la educación primaria en España recomiendan el trabajo con proyectos en la enseñanza de la estadística.

Agradecimientos

Proyecto EDU2013-41141-P (MEC) y grupo FQM126 (Junta de Andalucía).

Referencias bibliográficas

Arteaga, P. & Batanero, C. (2010). Evaluación de errores de futuros profesores en la construcción de gráficos estadísticos. En M.M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo y T.A. Sierra (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 211-221). Lleida, España: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.

Batanero, C., Arteaga, P. y Ruiz, B. (2010). Análisis de la complejidad semiótica de los gráficos producidos por futuros profesores de educación primaria en una tarea de comparación de dos variables estadísticas. *Enseñanza de las Ciencias, 28*(1), 141-154.

Ben-Zvi, D. (2002). Seventh grade students' sense making of data and data representations. In B. Phillips (Ed.), *Proceedings of the Sixth International Conference on Teaching Statistics*. Cape Town: International Statistical Institute and International Association for Statistical Education. Obtenido de http://iase-web.org/Conference_Proceedings.php?p=ICOTS_6_2002.

Ben-Zvi, D. & Friedlander, A. (1997). Statistical thinking in a technological environment. En J. Garfield, & G. Burrill (Eds.), *Research on the role of technology in teaching and learning statistics* (pp. 54-64). Voorburgo, International Statistical Institute.

Bruno, A. & Espinel, M. C. (2005). Recta numérica, escalas y gráficas estadísticas: un estudio con estudiantes para profesores. *Formación del Profesorado e Investigación en Educación Matemáticas, 7,* 57-85.

Curcio, F. R. (1987). *Developing graph comprehension*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Eco, U. (1977). *Tratado de semiótica general*. Barcelona, España: Lumen.

Espinel, C. (2007). Construcción y razonamiento de gráficos estadísticos en la formación de profesores. En M. Camacho, P. Flores y P. Bolea (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XI* (pp. 99-119). La Laguna, España: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.

Friel, S., Curcio, F., & Bright, G. (2001). Making sense of graphs: critical factors influencing comprehension and instructional implications. *Journal for Research in Mathematics Education, 32*(2), 124-158. doi: 10.2307/749671

Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathematiques*, *22*(2/3), 237-284.

Godino, J. D., & Batanero, C. (1998). Clarifying the meaning of mathematical objects as a priority area of research in Mathematics Education. In A. Sierpinska, & J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics education a research domain: A search for identity* (pp. 177-195). Dordrecht, Holanda: Kluwer.

Godino, J. D., Batanero, C., & Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, *39*(1-2), 127-135.

Godino, J. D., Batanero, C., Roa, R., & Wilhelmi, M. R. (2008). Assessing and developing pedagogical content and statistical knowledge of primary school teachers through project work. In C. Batanero, G. Burrill, C. Reading, & A. Rossman (Eds.), *Proceedings of the Joint ICMI /IASE StudyTeaching Statistics in School Mathematics. Challenges for Teaching and Teacher Education*. Monterrey, Mexico: International Commission on Mathematical Instruction and International Association for Statistical Education. Obtenido de http://iase-web.org/Conference_Proceedings.php?p=Joint_ICMI-IASE_Study_2008.

González, M. T., Espinel, M. C. & Ainley, J. (2011). Teachers' graphical competence. In C. Batanero, G. Burrill, & C. Reading (Eds.), *Teaching statistics in school mathematics-Challenges for teaching and teacher education. A Joint ICMI/IASE Study* (pp. 187-197). New York, Estados Unidos: Springer.

Li, D. Y. & Shen, S. M. (1992). Students'weaknesses in statistical projects. *Teaching Statistics 14* (1), 2-8.

Mayén, S., Díaz, C. & Batanero, C. (2009). Conflictos semióticos de estudiantes con el concepto de mediana. *Statistics Education Reseach Journal, 8*(2), 74-93.

MEC (2006). Real Decreto 1513/2006 de 7 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación primaria.

MECD (2014). Real Decreto 126/2014, de 28 de febrero, por el que se establece el currículo básico de la Educación Primaria.

Monteiro, C. & Ainley, J. (2006). *Student teachers interpreting media graphs*. In A. Rossman, & B. Chance (Eds.), *Proceedings of the Seventh International Conference on Teaching Statistics*. Salvador, Brazil: International Statistical Institute and International Association for Statistical Education. Obtenido de http://iase-web.org/Conference_Proceedings.php?p=ICOTS_7_2006.

Monteiro, C. & Ainley, J. (2007). Investigating the interpretation of media graphs among student teachers. *International Electronic Journal of Mathematics Education, 2*(3), 187-207.

Rojas, P. (2010). Conflictos semióticos en un contexto algebraico: Un análisis de las producciones de los estudiantes. *Revista digital Matemática, Educación e Internet, 11*(1), 1-9.

Ruiz, B. (2006). *Un acercamiento cognitivo y epistemológico a la didáctica del concepto de variable aleatoria* (Tesis de Maestría no publicada). Instituto Politécnico Nacional - Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada, Ciudad de México, México.

Wainer, H. (1997) *Visual revelations: graphical tales of fate and deception from Napoleon Bonaparte to Ross Perot.* New York, Estados Unidos: Copernicus.

Watson, J. M. (2006). *Statistical literacy at school: Growth and goals*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Wu, Y. (2004, Julio). *Singapore secondary school students´understanding of statistical graphs*. Trabajo presentado en el 10th International Congress on Mathematics Education. Copenhagen, Dinamarca. Obtenido de: http://iase-web.org/documents/papers/icme10/Yingkang.pdf

Autores

Pedro Arteaga. Universidad de Granada, España, parteaga@ugr.es

Carmen Batanero. Universidad de Granada, España, batanero@ugr.es

José Miguel Contreras. Universidad de Granada, España, jmcontreras@ugr.es

Gustavo R. Cañadas. Universidad de Granada, España, grcanadas@ugr.es

Maria José Carvalho, Adelaide Freitas

NÍVEL DE CONHECIMENTO EM PROBABILIDADE CONDICIONADA E INDEPENDÊNCIA: UM CASO DE ESTUDO NO ENSINO SECUNDÁRIO PORTUGUÊS

Knowledge level in conditional probability and independence of events: a study case in the portuguese high school

RESUMEN

Partiendo de dos situaciones problemas que refieren a la probabilidad condicional, la independencia y eventos mutuamente excluyentes, se cuantifica, en paralelo, el grado de desempeño y el grado de rigor científico de una respuesta usando dos medidas ordinales en la escala de Likert. Un análisis descriptivo de las medidas, en 43 estudiantes del año terminal del liceo, determinó el grado de conocimiento de los alumnos en los referidos conceptos y apuntó que no siempre una respuesta correcta está descrita con rigor. Del análisis interpretativo de las respuestas se concluye que persisten, en la enseñanza en Portugal, conflictos en la interpretación y en el cálculo de la probabilidad condicionada y en los conceptos de independencia y de eventos mutuamente excluyentes. El estudio recomienda más prácticas involucrando la formulación matemática de problemas de probabilidad condicional y más énfasis en el carácter probabilístico que está asociado al concepto de independencia.

PALABRAS CLAVE:

- *Concepto de probabilidad condicional*
- *Concepto de eventos independientes*
- *Concepto de eventos mutuamente excluyentes*
- *Grado de desempeño*
- *Grado de rigor científico*

ABSTRACT

Taking two problem-situations involving conditional probability, independence and incompatibility, we suggest the measurements of the performance and the scientific rigor of a response using, in parallel, two ordinal Likert scale measures. Based on the responses given by 43 students in 12th grade (age 17), a descriptive analysis of these measurements was executed in order to evaluate the levels of knowledge of the students in those concepts. The results showed that not always a correct written response comes with rigor. Besides, an interpretative analysis of the same responses confirmed the existence of conflicts in the teaching of those concepts in Portugal. The conflicts are

KEY WORDS:

- *Concept of conditional probability*
- *Concept of independent events*
- *Concept of mutually exclusive events*
- *Degree of performance*
- *Degree of scientific rigor*

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (2016) *19* (1): 41- 69.
Recepción: Febrero 3, 2014 / Aceptación: Junio 15, 2015. DOI: 10.12802/relime.13.1912

concerning with the interpretation and the calculation of conditional probabilities and the notions of independence and incompatibility. The present study recommends more practice on the mathematical formulation of statements involving conditional probability and more emphasis on the probabilistic feature of the notion of independence.

RESUMO

Partindo de duas situações-problema envolvendo probabilidades condicionadas, independência e incompatibilidade, sugere-se quantificar, em paralelo, o grau de desempenho e o grau de rigor de uma resposta usando duas medidas ordinais, ambas em escala de Likert. Uma análise descritiva dessas medidas, num grupo de 43 alunos do 12.º ano, permitiu estabelecer o nível de conhecimento desses alunos naqueles conceitos e constatar que nem sempre uma resposta correta é acompanhada de rigor na sua elaboração. Uma análise interpretativa das mesmas respostas permitiu ainda constatar que, no ensino português, persistem conflitos na interpretação e cálculo da probabilidade condicionada e conflitos nas noções de independência e incompatibilidade. O estudo recomenda mais prática na formulação matemática de enunciados envolvendo probabilidade condicionada e mais ênfase no caracter probabilístico da noção de independência.

PALAVRAS CHAVE:

- *Conceito de probabilidade condicionada*
- *Conceito de acontecimentos independentes*
- *Conceito de acontecimentos incompatíveis*
- *Grau de desempenho*
- *Grau de rigor*

RÉSUMÉ

Partant de deux situations-problème impliquant des probabilités conditionnelles, indépendance et incompatibilité, on suggère de quantifier, en parallèle, le degré de performance et le degré de rigueur d'une réponse utilisant deux mesures ordinales, toutes deux sur l'échelle de Likert. Une analyse descriptive de ces mesures dans un groupe de 43 élèves de Terminal a permis d'établir le niveau de connaissance des élèves, en relation à ces concepts, et de constater qu'une réponse correcte n'est pas toujours accompagnée de rigueur dans son élaboration. Une analyse interprétative de ces réponses a encore permis de voir que, dans l'enseignement portugais, les conflits persistent dans l'interprétation et le calcul des probabilités conditionnelles ainsi que dans les notions d'indépendance et d'incompatibilité. L'étude recommande plus de pratique dans la formulation mathématique des énoncés de probabilités conditionnelles et de mettre davantage l'accent sur le caractère probabiliste associé à la notion d'indépendance.

MOTS CLÉS:

- *Concept de probabilité conditionnelle*
- *Concept d'évènements indépendants*
- *Concept d'évènements incompatibles*
- *Degré de performance*
- *Degré de rigueur*

1. Introdução

Estudos realizados na área da Educação Matemática revelam a existência de raciocínios enviesados, erros de compreensão e aplicações intuitivas erradas nos conceitos de probabilidade, probabilidade condicionada e independência de acontecimentos (D'Amelio, 2009; Díaz, Batanero & Contreras, 2010; Díaz y de la Fuente, 2006; Fernandes, Nascimento, Cunha e Contreras, 2011; Kataoka, Trevethan & Borim da Silva, 2010; Lonjedo-Vicent, Huerta-Palau & Carles-Fariña, 2012; Sánchez, 1996; Sobreiro, 2011; entre outros). Muitas das falhas podem ser explicadas em termos semióticos (Batanero, 2005). E, embora tais falhas possam estar enraizadas pois, como Fischbein e Schnarch (1997) alerta, equívocos envolvendo raciocínio probabilístico podem permanecer com a idade do aluno, é essencial a identificação dos tipos de conflitos existentes para as superar (ex., Díaz et al., 2010).

A realização de atividades matemática envolvendo o cálculo de probabilidades representa um instrumento importante no processo de aprendizagem para promover o desenvolvimento do pensamento probabilístico (Way, 2003; Kataoka et al., 2008), proporcionar diversos tipos de conexões entre conceitos da Teoria da Probabilidade e, consequentemente, agilizar a capacidade de raciocinar e de compreender, em particular, os conceitos de probabilidade condicionada e de acontecimentos independentes. No modelo ontosemiótico do conhecimento e do Ensino da Matemática, desenvolvido por Godino e seus colaboradores nas duas últimas décadas (Godino y Batanero, 1994; Godino, 2002; Godino, Batanero & Font, 2007; Godino, Font y Wilhelmi, 2008; Godino, 2012; entre outros) visando analisar, conjuntamente, o pensamento matemático, os manifestos que o acompanham e os fatores que condicionam o seu desenvolvimento, é destacada a necessidade de uma análise detalhada da atividade matemática considerando seis tipos de entidades primárias: a linguagem (termos, expressões, notações, gráficos,…) nos seus diversos registos (escrito, oral, gestual,…); a situação-problema (aplicações extra matemáticas, exercícios, …); os conceitos-definições (abordados através de definições ou descrições); as proposições (enunciados sobre conceitos); os procedimentos (algoritmos, operações, técnicas de cálculo,…); e os argumentos (enunciados utilizados para validar ou explicar as proposições e procedimentos, de natureza dedutiva ou outra) (Neto, 2009). Na abordagem ontosemiótica, a compreensão de qualquer conceito matemático está associado à competência do saber fazer, no sentido que cada sujeito compreende determinado objeto matemático quando o usa de maneira capaz em diferentes práticas (Godino et al., 2007). A presente investigação baseou-se nas ideias teóricas do modelo ontosemiótico como marco de referência, sendo a probabilidade condicionada e a noção de acontecimentos independentes os objectos matemáticos de interesse no modelo e de análise na perspectiva de prática matemática.

Face a situações-problema, a aplicação de diferentes processos de resolução propicia a revelação de diferentes vertentes de um mesmo conceito (Díaz y de la Fuente, 2006) e, consequentemente, de novas estratégias para fazer juízos válidos (Cunha, 2010). Do ponto de vista matemático, probabilidade condicionada e independência são definições que dependem de expressões algébricas simples, de fácil cálculo. Torna-se então fundamental conhecer as estratégias que os alunos elaboram na resolução de situações-problema (D'Amore, 2006) e as dificuldades que revelam na aplicação de definições e no estabelecimento de ligações entre elas, face a um enunciado. Recentemente, Díaz et al. (2010) sintetizou vários dos conflitos semióticos referenciados na literatura especializada dando exemplos de enunciados de problemas que poderão ajudar, alunos e professores, à tomada de consciência de raciocínios enviesados associados àqueles dois conceitos. Resumidamente, relativamente à probabilidade condicionada, podem mencionar-se:

– convicção que é mais provável a conjunção de dois acontecimentos do que cada um dos acontecimentos em separado (Tversky & Kahneman, 1983), conhecido por *falácia da conjunção*;
– dificuldade em distinguir os dois sentidos da probabilidade condicionada, $P(A|B)$ e $P(B|A)$, conhecida por *falácia da condicional transposta* (Falk,1986);
– dificuldade em compreender que se tome um acontecimento condicionante que ocorre depois do acontecimento condicionado, conhecida por *falácia do eixo temporal* (Falk,1979; Falk, 1986);
– confusão entre probabilidade condicionada, $P(A|B)$, e probabilidade conjunta, $P(A \cap B)$, (Watson & Moritz, 2002) devida, entre outros, à não clareza da linguagem corrente utilizada no enunciado dos problemas, levantando dificuldades na sua interpretação (Falk, 1986). Por exemplo, a utilização da vírgula "," num texto verbal para descrever uma conjunção ("e") (Sobreiro, 2011);
– dificuldade em identificar o espaço amostral reduzido no cálculo de probabilidades de acontecimentos definidos por experiências compostas dadas por uma sequência temporal de experiências simples sucessivas, conhecida por *situação sincrónica* (Falk, 1986);
– cálculo do denominador na fórmula de Bayes (Díaz & Batanero, 2009).

Relativamente a conflitos semióticos associados à noção de independência de acontecimentos, podem mencionar-se os seguintes:

– confusão intuitiva entre as palavras "independência" e "incompatibilidade" (Cordani & Wechsler, 2006);
– dificuldade em atender o significado somente probabilístico da noção de independência (D'Amelio, 2009);

- associação da noção de independência apenas a acontecimentos independentes no tempo (Karaota et al., 2010).

Este artigo apresenta uma análise interpretativa de um estudo de caso (Ponte, 1994) centrada na compreensão dos conceitos de probabilidade condicionada, acontecimentos independentes e acontecimentos incompatíveis por alunos do 12º ano de escolaridade do ensino português. Uma análise interpretativa de dados na metodologia de um estudo de caso visa uma investigação pormenorizada de todos os dados recolhidos com vista a organizá-los e classificá-los em categorias, de modo a explorar e a explicar o fenómeno em estudo (Tesch, 1990). Neste estudo, os participantes são os alunos e os dados são os documentos escritos produzidos pelos alunos, em contexto escolar, juntos dos seus docentes titulares de turma e em momento avaliativo.

Numa primeira instância, esta investigação, inserida no paradigma descritivo, procurou quantificar os processos desenvolvidos pelos alunos na resolução de questões, exploratórias e investigativas, e em situação de avaliação escrita. Definiram-se duas escalas ordinais para medir a qualidade de cada resposta. Tomando essas medidas, avaliou-se o nível de conhecimento que os alunos demonstraram nos conceitos de probabilidade condicionada e de independência de acontecimentos e nas suas interligações com outros conceitos. Analisou-se a conexão entre o nível de desempenho e o nível de rigor, sendo este último baseado na qualidade dos procedimentos e argumentos descritos e a linguagem usada. Estudou-se ainda a importância da capacidade de interpretar e de traduzir, em termos matemáticos, o enunciado de um problema no desenvolvimento da aprendizagem dos conceitos.

Numa segunda instância, a partir de uma análise interpretativa dos conteúdos das respostas expressas pelos alunos, procurou-se tipificar as fontes de conflitos semióticos detetados nas respostas dadas pelos alunos.

2. Contextualização no ensino português

Em Portugal, o tema *Probabilidades e Combinatória* consta do currículo atual do 12.º ano de escolaridade. Entre os tópicos inseridos nesse tema estão probabilidade condicionada e acontecimentos independentes. Nestes conceitos, os alunos "apresentam muitas dúvidas e dificuldades, apesar da grande importância que lhes é atribuída nos Exames Nacionais e nos Testes Intermédios, uma vez que são temas constantes em todas essas provas de avaliação externa, da responsabilidade do Ministério da Educação" (Cunha, 2010, p. 28).

Watson (1995) sugere que o estudo da probabilidade condicionada deve ser introduzido desde cedo, no Ensino Básico, e trabalhado de forma intuitiva, tal como é recomendado para o ensino da Matemática em Portugal, pelo Ministério da Educação, no documento *Programa de Matemática do Ensino Básico* (Ponte et al., 2001).

Nos manuais escolares de Matemática para o Ensino Secundário, o conceito de probabilidade condicionada é abordado, em geral, seguindo uma definição formal mais ou menos extensível em termos de complementaridade de informação. No caso da independência de acontecimentos, o conceito é menos trabalhado, sendo que a generalidade dos manuais não realça a importância do sentido probabilístico desse conceito.

3. Abordagem metodológica

A investigação em causa insere-se numa perspetiva qualitativa, com uma abordagem interpretativa (Tesch, 1990) das respostas dadas por alunos em ambiente natural, a sala de aula, com vista a obter uma descrição e explicação de padrões cognitivos subjacentes à cada resposta dada. Baseia-se num estudo de caso, com a seleção de uma amostra intencional, com vista a captar características, tão pormenorizadas quanto possível, da ocorrência de dificuldades por parte dos participantes (Ponte, 1994). Uma análise dos documentos produzidos pelos alunos contribui para detetar diferentes processos de resolução usados, reconhecer tipos de erros, observar estratégias e avaliar o nível de conhecimento na matéria.

Colaboraram neste estudo um total de 43 alunos pertencentes a duas turmas do Ensino Regular do Curso de Ciências e Tecnologias do 12.º ano (a frente designadas por turma A e turma C) e a uma turma do Ensino Profissional do 12.º ano (a frente designa por turma B) de duas escolas secundárias diferentes do distrito do Porto (a frente designadas por E1 e E2). Para a implementação do estudo realizaram-se reuniões individuais prévias com cada um dos docentes titulares das turmas A, B e C. Foi obtida uma caracterização das suas turmas, discutido o tipo de linguagem a ser utilizada no enunciado dos problemas a propor, o tempo e o período adequado à realização da prova escrita, e a forma de recolha das respostas elaboradas pelos alunos. Foi ainda abordado o desempenho expectável de cada turma, bem como a ênfase dada nas aulas aos tópicos probabilidade condicionada e acontecimentos independentes. Foi referido que a linguagem, procedimentos e argumentos considerados no processo de ensino daqueles conceitos está conforme o previsto no documento *Programa de Matemática do Ensino Básico*, Ponte e outros (2001).

Da turma A, constituída por 24 alunos, participaram nesta investigação 20 (os restantes não deram autorização para divulgar os seus resultados). Estes eram 9 do sexo feminino e 11 do sexo masculino, todos dentro da escolaridade obrigatória e com média de idade igual a 16,5 anos. Nenhum aluno desta turma usufruiu de apoio educativo no ano anterior. Todos os alunos revelaram gostar da escola. A docente de Matemática da turma A é efetiva na escola E1, com larga experiência na lecionação do 12.º ano, tendo acompanhado os seus alunos desde o Ensino Básico (7.º ano), pelo que conhece muito bem o trabalho individual destes. A turma B é constituída por 14 alunos, 6 do sexo feminino e 8 do sexo masculino. Todos os alunos estão dentro da escolaridade obrigatória à exceção de um aluno. A média de idades é de 16,8 anos. A turma C é constituída por 9 alunos, todos do sexo masculino. Apenas 5 alunos estão dentro da escolaridade obrigatória. A média de idades é de 17,6 anos. As docentes de Matemática das turmas B e C são efetivas na Escola E2 e com uma larga experiência de lecionação do 12.º ano. Estas docentes também têm acompanhado há muito tempo os seus alunos, não tendo sido referido na entrevista desde quando o fazem.

A turma A pode ser considerada como uma turma de "elite", com alunos maioritariamente com interesse em prosseguir estudos a nível universitário, e distinta da turma C, com alguns alunos não interessados em seguir estudos a nível superior (politécnico ou universitário), e da turma B, com alunos que, não colocando de lado a prossecução de estudos superiores, optaram por um ensino secundário menos académico.

Foi elaborado o enunciado de dois problemas (designados a frente por P1 e P2), a implementar numa prova de avaliação, para os alunos das turmas A, B e C. Os problemas foram inspirados nos manuais escolares adotados nas escolas E1 e E2. Para a construção final do enunciado de P1 e P2 (em Apêndices 1 e 2) foram tidas em conta as ferramentas conceptuais do enfoque ontosemiótico, propostas por Godino et al. (2007) como sejam a linguagem, os conceitos, as propriedades, os procedimentos, as conjeturas e os argumentos ligados aos conceitos base de probabilidade condicionada e de independência, tendo como suporte uma análise sistemática de possíveis resoluções às situação-problemas propostas. Leitores interessados em detalhes dos objetos e relações primárias que intervêm na solução de cada uma das situação-problemas podem consultar Carvalho (2013).

Os professores de Matemática das turmas A, B e C analisaram os problemas e, após ligeiras adaptações, declararam que o enunciado, na sua versão final (ver Apêndices 1 e 2), estava adequado em termos de conteúdo programático, linguagem usada e nível de dificuldade. Porém, a docente da turma B solicitou a substituição da designação do acontecimento P por B no problema P2, já que os alunos estavam menos familiarizados com a letra P para designar um acontecimento. Esta alteração foi apenas considerada para a turma B.

Previamente foi ainda solicitado a um estudante do 12.º ano, que não pertencia a nenhuma das escolas envolvidas, que realizasse a prova em regime experimental. Este estudante afirmou tratar-se de uma prova acessível e com linguagem clara e objetiva.

Ambos os problemas, P1 e P2, abordam os conceitos de probabilidade condicionada e de acontecimentos independentes, usando a linguagem verbal e simbólica. Em P1 há 7 alíneas e em P2 há 5 alíneas, de acordo com a distribuição sumária descrita na Tabela 1. A noção de independência é abordada sequencialmente e relacionada com a noção de incompatibilidade, para diferentes situações conforme é indicado na Tabela 2. Em P1, os dados do enunciado encontram-se previamente estruturados numa linguagem mais próxima da linguagem simbólica, sendo estes fornecidos na forma de uma tabela de dupla entrada. Em P2, os dados são descritos em linguagem apenas verbal.

TABELA I
Distribuição das 12 questões da prova (constituída pelos problemas P1 e P2) por conteúdo primário e linguagem usada no enunciado.

Conteúdo primário	*Linguagem verbal*	*Linguagem simbólica*
Lei da Probabilidade Total	1.1	----
Probabilidade da intersecção	1.4.a)	2.1. i)
Probabilidade da reunião	1.4.a)	----
Probabilidade condicionada	1.2, 1.3, 2.4	2.1.ii)
Independência	1.4.a), 1.4.b), 1.4.d), 2.3	----
Incompatibilidade	1.4.c), 1.4.d), 2.2	----

TABELA II
Distribuição das questões de independência e de incompatibilidade tendo em conta a validade, ou não, da independência e da incompatibilidade. Na 1.4.d) é pedido para relacionar os dois conceitos.

Conteúdo primário	*Condição válida*	*Condição não válida*	*Relacionar*
Independência	1.4.a)	1.4.b), 2.3	1.4. d)
Incompatibilidade	1.4 c)	2.2	1.4. d)

Os dados para análise corresponderam às respostas escritas dos 43 alunos das turmas A, B e C, em momento avaliativo, às 12 questões da prova. A recolha dos dados foi realizada em dezembro de 2012, data em que os alunos concluíram o estudo do tema *Probabilidades e Combinatória*. O acesso à prova elaborada por cada aluno, autorizado pelos professores de Matemática das turmas A, B e C, foi antes destas terem sido cotadas pelos respetivos professores. A identificação do aluno foi eliminada e atribuído um numeral a cada prova. As cópias das provas foram guardadas em suporte digital, para posterior análise. Por questões legais e éticas, foi previamente solicitada autorização para a realização da experiência, a recolha dos dados e a publicitação dos resultados às direções das escolas participantes e aos encarregados de educação dos alunos envolvidos no estudo.

Numa primeira parte, a investigação teve um carácter essencialmente qualitativo com a análise das respostas recolhidas, de modo a caracterizar, em termos descritivos, o seu conteúdo. Para uma descrição de cada resposta, procedeu-se de seguida, a uma análise de conteúdo e de interpretação de raciocínios subjacente à resposta, tendo por base comparativa a resposta correta expectável. Essa análise comparativa permitiu a categorização de cada resposta e, consequentemente, o agrupamento de respostas por classes de respostas similares em termos de qualidade.

Díaz e Batanero (2009) propuseram estabelecer uma correspondência entre a qualidade das respostas dos alunos e um numeral entre 0 a 2 do seguinte modo: não resposta ou resposta errada é representada por 0; resposta parcialmente correta é representada por 1; solução correta é representada por 2. No presente estudo propõe-se estender aquela categorização e dividir a apreciação da qualidade das respostas segundo duas perspetivas qualitativas ordinais distintas: o grau de desempenho da resposta (GD) e grau de rigor (GR). O desempenho diz respeito à capacidade da resposta conter a solução e referência dos pontos chaves para chegar ao resultado pretendido na pergunta. O rigor diz respeito à capacidade argumentativa e à linguagem apresentada na resposta escrita.

Para incorporar a ausência de resposta e dar maior detalhe à qualidade da resposta dada, caso exista, o parâmetro GD foi distribuído segundo a seguinte escala ordinal: ausência de resposta é representada pelo numeral 0; resposta totalmente errada é representada por 1; resposta parcialmente errada é representada por 2; resposta com início de uma estratégia que é abandonada ou concluída de forma errada é representada por 3; resposta parcialmente certa ou certa mas com passos omissos é representada por 4; por fim, resposta totalmente certa com indicação dos passos chaves correto é representada pelo numeral 5.

No que concerne ao grau de rigor (GR), foi escolhida uma escala de Likert, variando de 0 a 3 e parâmetros de uniformização de critérios descritos na Tabela 3. Para cada resposta, o valor atribuído para GR corresponde àquele que cumpre o maior conjunto de indicadores. A opção de um número par de correspondências alternativas obriga a atribuir uma opção definitivamente positiva ou negativa, já que não é possível optar por uma atitude neutra por esta não existir.

A necessidade de proceder a extensões das três categorias propostas em Díaz e Batanero (2009) para as escalas definidas pelo GD e GR está intimamente relacionada com a natureza diversa das turmas A, B e C (Ensino Regular e Ensino Profissional) consideradas neste estudo. Efectivamente, do conhecimento empírico da primeira autora, é previsível a existência de tendência dos alunos do Ensino Profissional não explicitarem / argumentarem o seu raciocínio nas respostas. Com esta divisão proposta de GD e GR, prevê-se que traços diferenciadores, ao nível do desempenho e do rigor, poderão ser detetadas.

TABELA III
Critérios de classificação das classes possíveis do grau de rigor (GR) de uma resposta.

GR	*Critérios de qualificação*
0 (ausência de rigor)	Resposta sem evidenciar a origem dos dados; Justificação sem correção científica e sem coerência; Ausência de qualquer referência aos acontecimentos tratados; Existência de muitos erros grosseiros de cálculo; Aplicação de conceitos erradamente.
1 (pouco rigor)	Resposta onde evidência a origem de alguns dos dados; Justificação com pouca correção científica e com alguma coerência; Acontecimentos tratados de forma pouco explícita; Existência de erros de leitura de dados que condicionam a resolução, mas sem erros grosseiros de cálculo; Conceitos aplicados com algum conflito entre estes, mas aplica as fórmulas de forma correta, sem as explicitar.
2 (algum rigor)	Resposta onde evidência a origem de todos os dados; Justificação com alguma correção científica e com alguma coerência; Acontecimentos tratados de forma explícita; Arredondamentos de cálculo que condicionam a resposta; Conceitos aplicados com pouca clareza, mas sem conflito entre eles. Embora as justificações escritas sejam pouco claras, aplica as fórmulas de forma correta, podendo ou não explicitá-las.
3 (com rigor)	Resposta onde evidência a origem de todos os dados; Justificação com correção científica e com muita coerência; Acontecimentos tratados de forma explícita e bem estruturados; Sem erros em cálculos intermédios nem de leitura de dados; Conceitos aplicados com clareza e correção na sua utilização, sem qualquer conflito entre eles, acompanhados de justificação correta, com utilização e aplicação de fórmulas com exatidão, explicitação e correção.

4. Análise das respostas dadas

Em termos de procedimento, observa-se que cerca de 50% dos alunos traduzem, em termos explícitos e antes de responder às questões, os dados do enunciado de um problema em linguagem simbólica, quer com recurso a um diagrama de árvore, tabela de dupla entrada ou outro esquema. Esta tendência de não estruturar ou formular, em termos matemáticos, a linguagem textual de um enunciado, é particularmente notória na turma B. Esta característica é relevante já que pode reflectir a incapacidade de interpretar e obter corretamente os dados do enunciado.

Em termos de justificações, os argumentos redigidos foram de natureza dedutiva baseados em síntese de cálculos realizados e propriedades dos conceitos. Várias vezes o rigor demonstrado nos cálculos nem sempre foi coerente com a explanação escrita e, outras vezes, foi traduzido não rigorosamente por palavras o que representavam os cálculos realizados. Em particular, os alunos do Ensino Profissional (turma B) apresentaram maior dificuldade em expressar um raciocínio argumentativo coeso e coerente com os resultados obtidos.

4.1. *Nível de desempenho e Nível de rigor*

Analisadas as respostas e raciocínios apresentados pelos 43 alunos a cada uma das perguntas dos problemas P1 e P2, avaliou-se a qualidade de cada resposta em termos do grau de desempenho (GD) e do grau de rigor (GR). Considerando as 3 turmas em conjunto, 70% dos alunos envolvidos (todos os alunos da turma A, 1 na turma B e 9 na turma C) obtiveram desempenho positivo com soma dos GD, das 12 alíneas contidas nos dois problemas, igual ou superior a metade do valor máximo possível (60). No que concerne ao rigor das respostas corretas, constata-se que uma resposta certa não é geralmente acompanhada de uma linguagem e argumentação de nível elevado. A percentagem de alunos com soma dos GR, das 12 alíneas respondidas corretamente, igual ou superior a metade do valor máximo possível (36), baixa para 42% (14 da turma A, 0 na turma B e 4 na turma C).

Na Figura 1 encontram-se a distribuição dos valores correspondentes aos atributos (ordinais) das escalas GD e GR obtidos. Da Figura 1 conclui-se que as 3 turmas apresentam comportamentos diferentes em termos de desempenho e rigor nas respostas dadas pelos alunos. Tomando os valores medianos do GD, para cada uma das questões e por turma, observa-se que a turma A apresenta o melhor grau de desempenho, na maioria das questões, e a turma B os piores. Relativamente ao GR, em termos medianos, a turma A apresenta respostas com maior nível de rigor e a turma B os mais baixos. Estes resultados vão de acordo com o sentir dos docentes, no terreno, ao afirmarem que os alunos do Ensino Profissional não apresentam os melhores resultados. Mas tal não significa a não existência de casos pontuais.

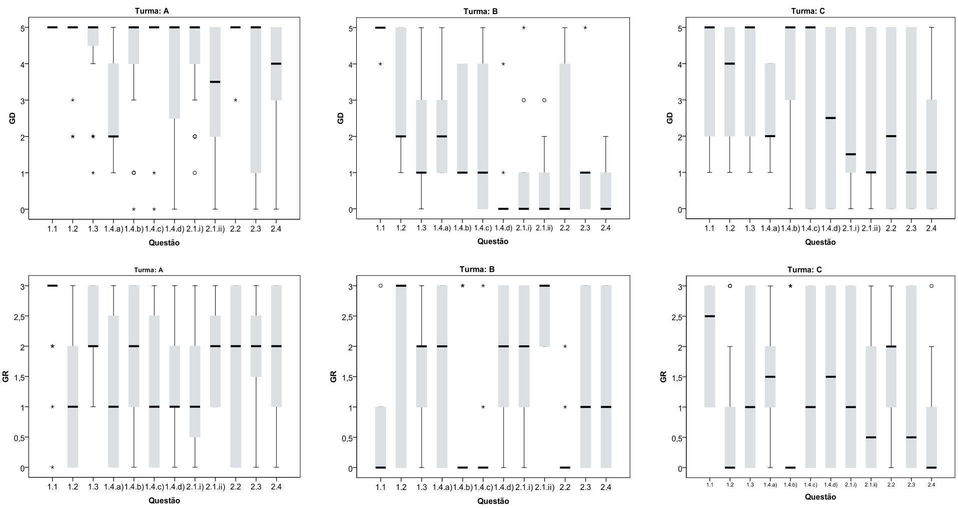


Figura 1: Caixas de bigodes dos valores obtidos para o GD (em cima) e para o GR (em baixo), para cada uma das 12 questões da prova, por turma. Todos os gráficos, à exceção do gráfico do GD para a turma C, apresentam observações atípicas (* severas e º moderadas).

Os valores atípicos assinalados na Figura 1, em maior quantidade no conjunto dos valores de GD, mostram a existência de alunos da turma B com níveis de desempenho superiores ao padrão da turma (definido, na Figura 1, pela *caixa* com os *bigodes*) em oposição à existência de alunos da turma A com níveis de desempenho abaixo do padrão distribucional da turma A. Analisando os valores mais centrais (amplitudes interquartis, Figura 1), observam-se, em geral, maiores amplitudes das caixas de bigodes para o GD na turma C comparativamente com a turma A (menos evidente no GR). Tal evidencia maior heterogeneidade de desempenho nas respostas dadas pelos alunos da turma C. Este facto leva a especular se esta constatação estará relacionada com a menor e maior diversidade de interesse académico futuro conhecido dos alunos das turmas A e C, respectivamente.

Centrando a atenção na linguagem, constata-se que nas resoluções apresentadas, os alunos privilegiaram o uso da linguagem verbal para representar os acontecimentos e a linguagem simbólica para identificar do tipo de probabilidade pedida ou averiguar da independência e incompatibilidade de acontecimentos. Enfatizando ainda a diferença na linguagem dos enunciados dos dois problemas, linguagem simbólica (P1) versus linguagem verbal (P2), refira-se que cerca de metade dos alunos envolvidos traduzem em linguagem simbólica os dados do enunciado do problema P2 antes de resolvê-la.

Confrontado o número de questões não respondidas entre os problemas P1 e P2 (Figura 2), observa-se tendência para se registar pior comportamento (i.e., não apresentar qualquer resposta) em questões do problema P2, em particular, nas turmas B e C, e menor tendência em deixar questões em branco por parte dos alunos da turma A.

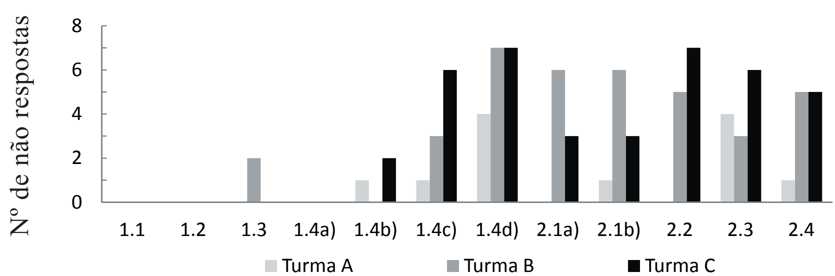


Figura 2. Frequência absoluta de não respostas a cada uma das 12 questões e para as turmas A, B e C.

Comparando as medianas dos valores observados para o GD e o GR entre as questões do problema P1 e P2 (Figura 1), observa-se valores medianos do GD máximos para as turmas do Ensino Regular (turmas A e C) e mais elevados para as respostas ao problema P1. Calculando a mediana dos valores de GD das respostas às questões do problema P1 e do P2 (Tabela 4), constata-se desempenho mediano melhor nas respostas dadas ao problema P1 do que ao problema P2, nas turmas B e C. Igual desempenho mediano nos problemas P1 e P2 foi observado na turma A. Estes factos sugerem que a turma A demonstra menor dificuldade em formular matematicamente o enunciado do problema P2, contrariamente às outras duas turmas. Avaliando globalmente o nível de desempenho dos alunos das três turmas em conjunto (Tabela 4, última linha), claramente no problema P2 o GD mediano é menor: pelo menos metade dos alunos apresentam em P2 um GD não superior a 2, em oposição ao problema P1 onde o nível máximo 5 é atingido em pelo menos 50% dos 43 alunos. Relativamente ao GR (Figura1, em baixo, e Tabela 4), constata-se uma distribuição do nível de rigor mediano similar em ambos os problemas nas turmas A e B. Contudo, é a turma A que apresenta maior grau de rigor, em termos medianos, o que significa uma melhor qualidade de argumentação e de linguagem na resposta correta dadas pelos alunos daquela turma nos dois problemas. Globalmente (Tabela 4, última linha), é em P2 onde se observa menor rigor mediano com pelo menos metade dos alunos a responder com um GR não superior a 1. Esta sumarização de comportamento denuncia que a utilização da linguagem verbal no enunciado dos dados de um problema pode influenciar negativamente a prestação global e, por inerência, a qualidade de respostas de alunos menos bem preparados. O facto da turma A demonstrar similar desempenho nos problemas P1 e P2 está em concordância com a indicação dada pela docente titular da turma A de estar ser uma turma com alunos, em geral, bastante empenhados.

TABELA IV
Valores medianos de GD / GR das respostas dadas nos problemas P1 e P2, por turma e no conjunto das 3 turmas. Por exemplo, 2 / 0 na tabela significa que, relativamente às respostas observadas às questões do problema P1 na turma B, pelo menos 50% delas apresentam GD inferior ou igual a 2 e pelo menos 50% (não necessariamente as mesmas) apresentam GR igual a 0.

Turma	*P1: Questões* 1.1 - 1.4 *d)*	*P2: Questões* 2.1 - 2.4
A	5 / 2	5 / 2
B	2 / 0	0 / 0
C	5 / 2	1 / 1
A, B e C, em conjunto	5 / 2	2 / 1

Para avaliar o nível de conhecimento nos conceitos de probabilidade condicionada e de independência (e incompatibilidade), calcularam-se os valores medianos do GD e do GR das respostas ao grupo das questões mais subjacentes ao conceito de probabilidade condicionada, questões 1.1, 1.2., 1.3, 2.1 e 2.4, e ao grupo das questões mais subjacentes ao conceito de independência e incompatibilidade, questões 1.4, 2.2 e 2.3 (Tabela 5). Relativamente ao GD, as 3 turmas apresentam, em termos medianos, a mesma qualidade de desempenho, nas respostas para as questões sobre probabilidade condicionada e para as questões sobre acontecimentos independentes e incompatíveis. Relativamente ao GR avaliado nas respostas corretas, nota-se, quer nas turmas A e C quer nas três turmas em conjunto e em termos medianos, um menor rigor nas respostas dadas às questões propostas sobre acontecimentos independentes e incompatíveis. Tal facto pode indiciar um menor à vontade dos alunos em explicar os resultados que envolvem daqueles dois conceitos.

TABELA V

Valores medianos de GD/GR das respostas dadas no grupo de questões envolvendo a noção de probabilidade condicionada e no grupo de questões envolvendo a noção de acontecimentos independentes por turma e no conjunto das 3 turmas.
Por exemplo, 3/1 na tabela significa que, relativamente às respostas dadas na turma C às questões sobre independência e incompatibilidade, pelo menos 50% delas apresentam GD inferior ou igual a 3 e pelo menos 50% (não necessariamente as mesmas) apresentam GR inferior ou igual a 1.

Turma	*Noção de probabilidade condicionada* *Questões:* 1.1, 1.2, 1.3, 2.1, 2.4	*Noção de indep. e incomp.* *Questões:*1.4, 2.2, 2.3
A	5 / 3	5 / 2
B	1 / 0	1 / 0
C	3 / 3	3 / 1
A, B e C, em conjunto	4,5 / 1,5	5 / 1

Para averiguar o nível de associação entre as pontuações correspondentes aos atributos (ordinais) das escalas GD e GR obtidos em cada questão, considerou-se o coeficiente de correlação de Spearman (valores sumariados na Figura 3). A escolha deste coeficiente justifica-se por GD e GR serem medidas ordinais. O nível de correlação observado para cada questão é superior a 0,5, sendo o nível médio de correlação para o grupo de questões envolvendo probabilidade condicional e o grupo de questões envolvendo acontecimentos independentes igual a 0,77, para ambos os grupos. Tal significa que uma melhor qualidade de desempenho de uma resposta de ambos os tópicos, em média, vem acompanhada de um maior nível de rigor.

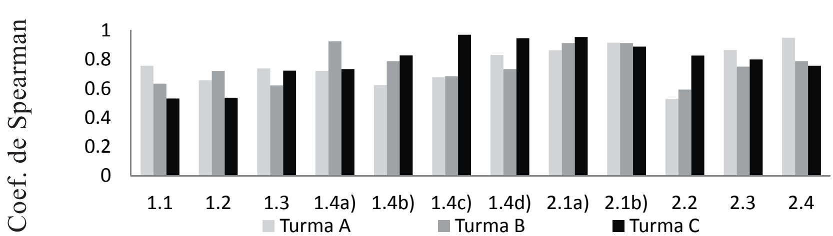


Figura 3. Valores do coeficiente de correlação de Spearman para cada questão e por turma.

4.2. *Tipos de conflitos*

Por observação de todas as resoluções com 0<GD<5 e 0<GR<3 entre os 43 alunos, conseguiu-se tipificar as fontes principais de erros que emergem das respostas incorretas em 3 grandes classes:

C1 – conflitos na interpretação e cálculo da probabilidade condicionada;

C2 – Propriedades incorrectas associadas à noção de independência;

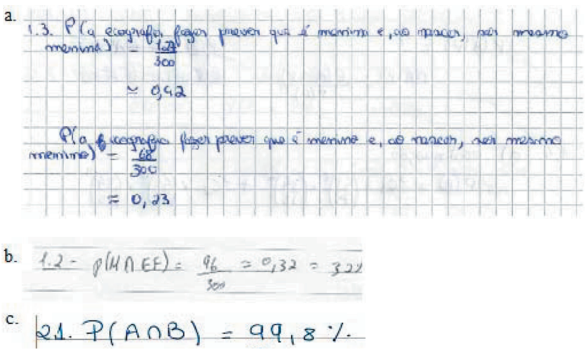
C3 – Propriedades incorrectas associadas à noção de incompatibilidade.

De seguida apresenta-se uma análise mais detalhada dos conflitos semióticos observados em cada classe.

4.2.1. *Conflitos na interpretação e cálculo da probabilidade condicionada*

Os conflitos inseridos na classe C1 correspondem a confusões de interpretação, num texto verbal, entre probabilidade condicionada e probabilidade conjunta e a dificuldades em delinear os passos essenciais corretos para o cálculo do denominador na fórmula da probabilidade condicionada (i. e., aplicar correctamente a lei da probabilidade total). Das respostas observadas evidencia-se ser a classe C1 a que origina mais respostas não corretas: 65% dos alunos apresentam pelo menos uma resposta com interpretação não correta dos dados do enunciado; 53% revela conflito no processo de cálculo de probabilidades condicionadas. O conflito atribuído à interpretação torna-se particularmente prejudicial pois origina a propagação de mais dificuldades como seja a incapacidade de estruturar, corretamente, em linguagem simbólica ou por tabela, os dados descritos em linguagem natural conduzindo assim a uma formulação matemática errada do enunciado.

Na Figura 4 são ilustrados alguns casos observados de conflitos de interpretação da probabilidade condicionada inseridos na classe C1. A Figura 4.a. contém um excerto da resposta do aluno 19 da turma A, à questão 1.3, que interpreta erradamente os textos "*Probabilidade de ser confirmado, no nascimento, que o bebé da Sra. Ana é do sexo feminino*" e "*Probabilidade de ser confirmado, no nascimento, que o bebé da Sra. Berta é do sexo masculino*" para uma probabilidade conjunta. As Figuras 4.b. e 4.c. mostram as respostas erradas do aluno 8 da turma B, à questão 1.2, e do aluno 1 da turma C, à questão 2.1, respetivamente, ao terem traduzido para probabilidade da intersecção um texto com enunciado tipicamente de probabilidade condicionada, no primeiro caso, da forma "*probabilidade de…[A]… se …[B]*" e, no segundo caso, da forma "*probabilidade de…[A]… sabendo que …[B]*". Em ambos os textos está claramente explícito ser *[B]* o acontecimento condicionante. Estes casos denunciam a inoperância do aluno de, face a um enunciado, averiguar se existe algum fenómeno ou acontecimento que restrinja o espaço amostral. Esta incapacidade sugere alguma imaturidade científica resultante da falta de informação ou de treino sobre enunciados tipicamente associados a probabilidades condicionadas, como os mencionados acima.



«P(a ecografia fazer prever que é menino e, ao nascer, ser mesmo menino) = 127/300 ≈ 0,42

P(a ecografia fazer prever que é menino e, ao nascer, ser mesmo menino) = 68/300 ≈ 0,23»

«P(M∩EF) = 96/300 = 0,32=3,2%»

«P(A∩B) = 99,8%»

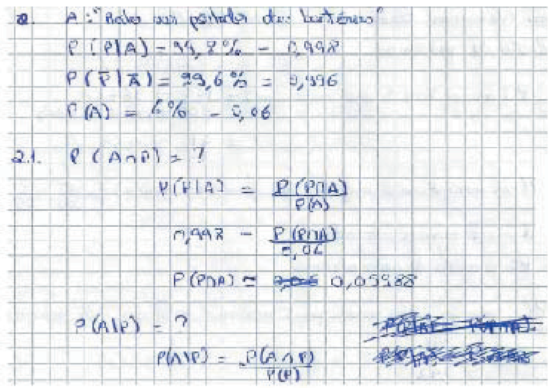
Figura 4. Respostas evidenciando a interpretação errada por probabilidade conjunta de textos relativos a probabilidades condicionadas.

Na Figura 5 estão transpostos alguns casos observados de conflitos de cálculo da probabilidade condicionada inseridos na classe C1. A Figura 5.a. ilustra uma resposta sem erros, do aluno 19 da turma A à questão 2.1, mas inacabada por falta do cálculo da probabilidade do acontecimento condicionante na fórmula da probabilidade condicionada. A Figura 5.b. mostra a estratégia da resposta do aluno 5 da turma C, na questão 2.1, de impor erradamente a independência de dois acontecimentos para obter um valor para o denominador na fórmula da probabilidade condicionada.

4.2.2. *Propriedades incorrectas associadas à noção de independência*

Dentro da classe C2 incluem-se essencialmente dois tipos de conflitos, ambos derivados do estabelecimento de conexões erróneas, um com a noção de incompatibilidade e outro com a designação de acontecimentos incompatíveis. Enquanto o primeiro, mais grave, é fruto do aluno ainda não ter compreendido a noção probabilística associada ao conceito de independência confundindo-a com a noção de incompatibilidade, o segundo tipo realça a existência de similaridade nos termos incompatibilidade e independência, conduzindo à troca das designações em situação de stress, natural em momentos avaliativos. Para ambos os tipos registaram-se cerca de 30% dos alunos com pelo menos uma resposta nessas condições. Na Figura 6 apresentam-se dois exemplos do primeiro tipo, com as respostas dadas pelo aluno 11, da turma C, e aluno 10, da turma A, à questão 1.4.b. Na Figura 7 apresentam-se dois exemplos do segundo tipo de erro com as respostas do aluno 17, da turma A, à questão 2.3 e do aluno 15, da turma A, à questão 1.4.b.

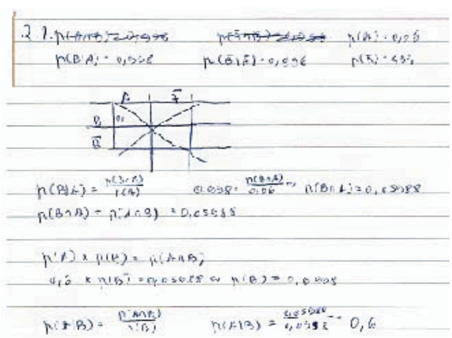
a.



« 2. A: "Rato ser portador de bactérias"
$P(P|A) = 99{,}8\% = 0{,}998$
$P(P^c|A^c) = 99{,}6\% = 0{,}996$
$P(A) = 6\% = 0{,}06$

2.1. $P(A \cap P) = ?$
$P(P|A) = P(A \cap P) / P(A)$
$0{,}998 = P(A \cap P) / 0{,}06$
$P(A \cap P) \approx 0{,}05988$
$P(A|P) = ?$
$P(A|P) = P(A \cap P) / P(P)$ »

b.



« $P(A) = 0{,}06$
$P(B|A) = 0998 = 0{,}998$ $P(B^c|A^c) = 0{,}996$
$P(A^c) = 0{,}94$

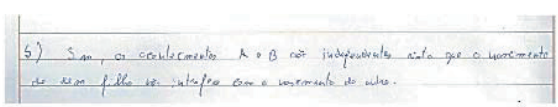
$P(B|A) = P(B \cap A) / P(A)$
$0{,}998 = P(B \cap A) / 0{,}06 \Leftrightarrow P(B \cap A) = 0{,}05988$
$P(B \cap A) = P(A \cap B) = 0{,}05988$

$P(A) \times P(B) = P(A \cap B)$
$0{,}06 \times P(B) = 0{,}5988 \Leftrightarrow P(B) = 0{,}998$
[*erro de cálculos*]

$P(A|B) = P(A \cap B) / P(B)$
$P(A|B) = 0{,}05988 / 0{,}0998 = 0{,}6$ »

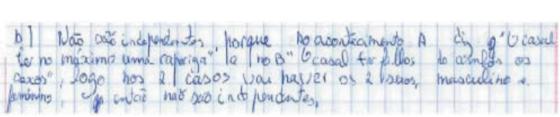
Figura 5. Respostas evidenciando incapacidade em determinar corretamente o denominador na fórmula da probabilidade condicionada.

a.



« Sim, os acontecimentos A e B são independentes visto que o nascimento de um filho não interfere com o nascimento de outro. »

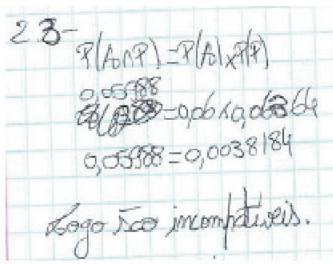
b.



« Não são independentes, porque no acontecimen-to A diz "O casal ter no máximo uma rapariga" e no B "O casal ter filhos de ambos os sexos", logo nos 2 casos vai haver os 2 sexos, masculino e feminino, então não são independentes. »

Figura 6. Respostas erradas evidenciando confusão entre a noção de independência e incompatibilidade.

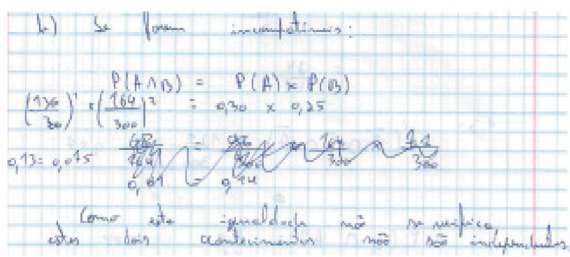
a.



« 2.3. $P(A \cap P) = P(A) \times P(P)$

$0{,}05988 = 0{,}06 \times 0{,}06364$
$0{,}05988 = 0{,}0038184$
Logo são incompatíveis »

b.



« b) Se forem incompatíveis:

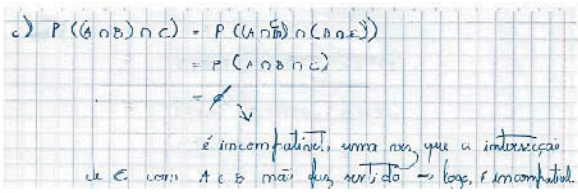
$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

$(136/300)^2 \times (164/300)^2 = 0{,}30 \times 0{,}25$
Como esta igualdade não se verifica, estes dois acontecimentos não são independentes »

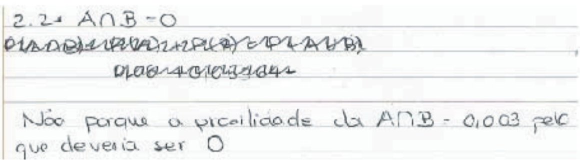
Figura 7. Respostas erradas evidenciando trocas nas designações entre acontecimentos independentes e acontecimentos incompatíveis.

4.2.3. *Propriedades incorrectas associadas à noção de incompatibilidade*

As resoluções das questões envolvendo o conceito de incompatibilidade (alíneas 1.4.c e 2.2) revelam que, em geral, os alunos compreendem o conceito de acontecimentos incompatíveis e justificam a incompatibilidade recorrendo, não à definição, mas somente à condição necessária da probabilidade da intersecção de acontecimentos incompatíveis ser nula. A verificação, apenas, desta condição necessária não é garantia dos acontecimentos serem incompatíveis. Já a sua não verificação é garantia dos acontecimentos não serem incompatíveis. Este jogo de raciocínio lógico envolvendo a condição necessária, mas não suficiente, de incompatibilidade leva à existência de conflitos na noção de incompatibilidade que definem a classe C3. Contabilizaram-se cerca de 20% dos alunos com pelo menos uma resposta com este tipo de conflito. Na Figura 8 estão dois exemplos de respostas observadas com argumentos errados inseridos na classe C3. A Figura 8.a. ilustra a resposta do aluno 1, da turma A, à questão 1.4.c., que recorre ao cálculo da probabilidade da intersecção para concluir a incompatibilidade. A Figura 8.b. revela a resposta do aluno 14, da turma C, à questão 2.2, onde confunde o numeral zero com o conjunto vazio (acontecimento impossível).

a. 

« $P((A\cap B)\cap C) = P((A\cap B)\cap(B\cap C)$
$= P((A\cap B)\cap C) = \varnothing$
e incompatível uma vez que a intersecção de C com A e B não faz sentido. logo e incompatível »

b. 

« 2.2. $A\cap B) = 0$
Não porque a probabilidade da $A\cap B$ = 0,003 pelo que deveria ser 0 »

Figura 8. Respostas dadas com conflitos na noção de incompatibilidade.

5. Conclusões

A realização de uma situação-problema motiva a abordagem de conceitos, propriedades e procedimentos, quer o aluno tenha já trabalhado nessa temática ou não, propiciando um amadurecimento científico dos conceitos e propriedades. O domínio cognitivo dos conceitos e propriedades é aperfeiçoado nos procedimentos aplicados facilitando a fundamentação e a argumentação. Por seu turno, os argumentos a usar numa resposta determinam o procedimento a adoptar. Esta espiral de crescimento cognitivo expectável entre domínio, procedimento e argumentação, incentiva a realização de atividades matemática baseadas em situações-problema.

Na presente investigação são analisadas em paralelo duas escalas ordinais, GD e GR, a respostas dadas a duas situações problemas, P1 e P2, para avaliar o nível de conhecimento sobre tópicos concretos da Teoria da Probabilidade leccionado actualmente no 12º ano de escolaridade em Portugal. Ambas as situações-problema propostas, P1 e P2, envolviam os tópicos de probabilidade condicionada, acontecimentos independentes e acontecimentos incompatíveis. Contudo, em P1 os dados encontravam-se esquematizados numa tabela de dupla entrada, enquanto em P2 os dados estavam descritos na forma de texto, o que exigia a sua formulação matemática por parte do aluno.

Para um grupo investigado de 43 alunos do 12.º ano, verifica-se que o nível de conhecimento em probabilidade condicionada e independência de acontecimentos, medido em termos de GD e GR está intrinsecamente associado à *qualidade* (alta, média ou baixa) de estudo do estudante. As respostas com melhor qualidade foram de alunos da turma A (turma de "elite") e as piores foram de alunos da turma B (do Ensino Profissional). Na realidade, é na turma com os melhores alunos que se encontram respostas com melhor desempenho e, simultaneamente, mais rigorosas. Estes resultados levam a crer que o nível de conhecimento nos conceitos de probabilidade condicionada e de acontecimentos independentes está dependente da motivação e facilidade de aprendizagem do aluno, entendendo-se que, como atualmente se crê, os alunos do Ensino Profissional estão menos motivados para continuação de estudos a nível superior e apresentam mais dificuldade para o estudo.

Em termos medianos, constata-se que o nível de conhecimento entre os dois conceitos não difere quando avaliado em função da capacidade do aluno de obter o resultado certo (GD) para questões envolvendo probabilidade condicionada e acontecimentos independentes. Porém, as respostas são mais rigorosas (i.e., GR maior) quando aborda a probabilidade condicionada. Assim, os resultados obtidos levam a conjeturar que existe um menor à vontade por parte do aluno no conceito de acontecimentos independentes e incompatibilidade.

Da análise dos graus de desempenho e de rigor por tipo de problema (com e sem esquematização dos dados do enunciado), é evidente que a facilidade de interpretação do problema condiciona a qualidade da resposta. Os alunos com maior nível de conhecimento (turma A) não demonstraram dificuldade de interpretação do problema sendo capazes de formular matematicamente um enunciado, contrariamente aos outros alunos.

Relacionando o grau de desempenho e o grau de rigor de uma resposta, constatou-se que nem sempre uma resposta correta é acompanhada pelo rigor na sua elaboração; porém, uma resposta com maior qualidade de desempenho, em média, vem acompanhada de maior rigor em termos de procedimento, argumento e/ou linguagem usada. Tal característica é comum para questões sobre probabilidade condicionada e sobre independência.

A análise do grupo das respostas dadas pelos 43 alunos sugere a existência de 3 classes, C1 (conflitos na interpretação e cálculo da probabilidade condicionada), C2 (conflitos na noção de independência) e C3 (conflitos na noção de incompatibilidade), como fonte primária de conflitos semióticos em situações-problema envolvendo os conceitos de probabilidade condicionada e independência de acontecimentos. A existência destas classes de conflitos revela a necessidade de se aprofundar tais conceitos em contexto escolar. Em resumo, as recomendações emergentes do estudo apontam para uma maior prática na formulação matemática de enunciados envolvendo probabilidade condicionada e um maior ênfase no caracter probabilístico associado à noção de independência em oposição à noção de incompatibilidade. Concretamente, o presente caso de estudo mostra a necessidade de se exercitar na tradução de problemas com linguagem verbal para linguagem simbólica, em particular, de textos tipicamente sobre probabilidade condicionada como sejam, por exemplo, "*probabilidade de… [A]… se …[B]*", "*probabilidade de…[A]… sabendo que …[B]*" e "*probabilidade de em [B] ocorrer [A]*". O objectivo é instruir os estudantes a captarem, num enunciado, se existe fenómeno que restrinja o espaço amostral e assim identificar o acontecimento condicionante. Mais ainda, esta investigação salienta a necessidade de se reforçar que o cálculo ou referência às probabilidades são fundamentais para justificar a independência de acontecimentos, podendo ser usados para justificar a não incompatibilidade mas não para justificar a incompatibilidade.

6. Considerações finais

Este trabalho, que resulta da investigação realizada para a dissertação de Carvalho (2013), confirma resultados de outros estudos e fornece novos elementos para a investigação do Ensino da Matemática. O caracter inovador prende-se com a proposta de usar, em paralelo, duas medidas ordinais, em escala de Likert, GD e GR, para quantificar a qualidade de uma resposta em termos do seu desempenho e rigor.

Nas temáticas probabilidade condicionada e independência, os tipos de conflitos semióticos listados nas classes C1, C2 e C3 encontram-se bem documentados, com maior ou menos ênfase, em literatura especializada. Contudo, o presente caso de estudo permitiu confirmar que em Portugal esses tipos de conflitos persistem, demonstrando a necessidade de se criarem acções de formação que visem consciencializar atempadamente o professor da existência daqueles conflitos.

Agradecimentos

Trabalho parcialmente subsidiado por fundos portugueses através do CIDMA (Centro de Investigação e Desenvolvimento em Matemática e Aplicações) da Universidade de Aveiro e FCT (Fundação para a Ciência e a Tecnologia), dentro do projecto UID/MAT/04106/2013.

Referências bibliográficas

Batanero, C. (2005). Significados de la probabilidad en la educación secundaria. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *8*(3), 247-263.

Carvalho, M. J. (2013). *Ensino e aprendizagem de probabilidade condicionada e independência* (Dissertação de Mestrado não publicada). Universidade de Aveiro, Aveiro, Portugal. Recuperada de http://hdl.handle.net/10773/12044.

Cordani, L. K. & Wechsler, S. (2006). Teaching independence and exchangeability. In A. Rossman & B. Chance (Eds.), *Proceedings of the 7th International Conference on Teaching Statistics*. Salvador, Brasil: International Association for Statistics Education.

Cunha, M. C. (2010). *A influência do ensino nos raciocínios de alunos do 12.º ano de escolaridade em probabilidade* (Dissertação de Mestrado não publicada). Universidade do Minho, Braga, Portugal. Recuperada de: http://hdl.handle.net/1822/10945.

D'Amelio, A. (2009). Undergraduate student difficulties with independent and mutually exclusive events concepts. *The Montana Mathematics Enthusiast*, *6*(1-2), 47-56.

D'Amore, B. (2006). Objetos, significados, representaciones semióticas y sentido. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 9(Número Especial), 177-196.

Díaz, C. & Batanero, C. (2009). University students' knowledge and biases in conditional probability reasoning. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, *4*(3), 131-162.

Díaz, C., Batanero, C., & Contreras, J. M. (2010). Teaching independence and conditional probability. *Boletín de Estadística e Investigación Operativa*., *26*(2), 149-162.

Díaz, C. y de la Fuente, I. (2006). Enseñanza del teorema de Bayes con apoyo tecnológico. En P. Flores y J. Lupiáñez (Eds.), *Investigación en el aula de matemáticas*. *Estadística y Azar*. Granada, España: Sociedad de Educación Matemática Thales.

Falk, R. (1979). Revision of probability and the time axis. *Proceedings of the 3rd International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 64-66). Warwick, UK: Organizing Committee.

Falk, R. (1986). Conditional probabilities: Insights and difficulties. In R. Davidson & J. Swift (Eds.), *Proceedings of the 2nd International Conference on Teaching Statistics* (pp. 292-297). British Columbia, Canada: University of Victoria.

Fernandes, J. A., Nascimento, M. M., Cunha, M. C. e Contreras, J. M. (Junho, 2011). *Desenvolvimento do conceito de probabilidade condicionada em alunos do 12.º ano através do ensino*. Comunicação apresentada na 13ª Conferência Interamericana de Educação Matemática. Recife, Brasil: CIAEM. Recuperada de: http://hdl.handle.net/1822/12924.

Fischbein, E. & Schnarch, D. (1997). The evolution with age of probabilistic, intuitively based misconceptions. *Journal for Research in Mathematics Education*, *28*(1), 96–105. doi: 10.2307/749665

Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathematiques*, 22 (2-3), 237-284.

Godino, J. D. (2012). Origen y aportaciones de la perspectiva ontosemiótica de investigación en Didáctica de la Matemática. En A. Estepa, A. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García y L. Ordóñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática* XVI (pp. 49-68). Jaén, Espanha: SEIEM.

Godino, J. D. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *14*(3), 325-355.

Godino, J. D., Batanero, C., & Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, 39 (1-2), 127-135. doi: 10.1007/s11858-006-0004-1

Godino, J. D., Font, V. y Wilhelmi, M. R. (2008). Análisis didáctico de procesos de estudio matemático basado en el enfoque ontosemiótico. *Publicaciones*, 38, 25-48.
Kataoka, V., Trevethan, H. e Borim da Silva, C. (2010). Independence of events: an analysis of knowledge level in different groups of students. In C. Reading (Ed.), *Proceedings of the 8th International Conference on Teaching Statistics*. Ljubljana, Eslovénia.
Kataoka, V. Y., Souza, A. A., Oliveira, A. C. S., Fernandes, F. M. O., Paranaíba, P. F., & Oliveira, M. S. (July, 2008). *Probability Teaching in Brazilian Basic Education: Evaluation and Intervention.* Paper presented at the 11th International Congress on Mathematical Education, Monterrey, México: ICME. Recuperada de: http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/summary?doi=10.1.1.214.9221
Lonjedo-Vicent, M. A., Huerta-Palau, M. P. e Carles-Fariña, M. (2012) Conditional probability problems in textbooks an example from Spain. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *15*(3), 319-337.
Neto, M. T. B. (2009). *O desenvolvimento do raciocínio dedutivo ao nível do Ensino Secundário: Recurso a geometrias planas* (Dissertação de Doutoramento não publicada). Universidade de Aveiro, Aveiro, Portugal.
Ponte, J. P., Serrazina, L., Guimarães, H.M., Breda, A. Guimarães, F., Sousa, H., … e Oliveira, P. A. (2001). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa, Portugal: Ministério da Educação.
Ponte, J. P. (1994). O estudo de caso na investigação em educação matemática. *Quadrante*, *3*(1), 3-18.
Sánchez, E. (1996). Dificultades en la comprensión del concepto de eventos independientes. En F. Hitt (Ed.), *Investigaciones en Educación Matemática* (pp. 389-404). D.F., México: Grupo Editorial Iberoamericano.
Sobreiro, D. (2011). *Probabilidade condicionada: um estudo com alunos do ensino secundário* (Dissertação de Mestrado não publicada). Universidade de Aveiro, Aveiro, Portugal.
Tesch, R. (1990). *Qualitative research: Analysis Types and Software Tools*. New York, USA: Falmer.
Tversky, A. & Kahneman, D. (1983). Extensional versus intuitive reasoning: The conjunction fallacy in probability judgment. *Psycological Review*, *90*(4), 293-315.
Watson, J. (1995). Conditional probability: Its place in the mathematics curriculum. *Mathematics Teacher*, *88*(1), 12-17.
Watson, J. M. & Moritz, J. B. (2002). School students' reasoning about conjunction and conditional events. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *33*(1), 59-84. doi: 10.1080/00207390110087615.
Way, J. (February, 2003). *The development of young children's notions of probability*. Paper presented at the European Research in Mathematics Education III,Bellaria, Itália: CERME3. Recuperada de: http://www.dm.unipi.it/~didattica/CERME3/proceedings/Groups/TG5/TG5_way_cerme3.pdf

Autoras

Maria José Carvalho. Agrupamento de Escolas António Sérgio, Vila Nova de Gaia, Portugal. maria.rodrigues.carvalho@gmail.com

Adelaide Freitas. Departamento de Matemática & CIDMA, Universidade de Aveiro, Portugal. adelaide@ua.pt

Apêndice I

Situação-problema P1: enunciado e resolução

1. Um certo estudo numa maternidade revelou, acerca do sexo de 300 bebés nascidos naquela maternidade e das correspondentes previsões de sexo a partir da ecografia na 13ª semana de gestação, os seguintes resultados:

		Sexo verdadeiro (ao nascer)	
		Feminino	Masculino
Sexo previsto na ecografia	Feminino	127	96
	Masculino	9	68

Com base nestes resultados, e usando 3 casas decimais nos arredondamentos, responda às seguintes questões.

1.1 Calcule a probabilidade de um bebé, ao nascer, ser do sexo masculino

Resolução: Considere os seguintes acontecimentos:

M: *"Ser menino"*
R: *"previsto ser menino"* M^C *"Ser menina"*
R^C: *"previsto ser menina"*

Com estas designações, a tabela dada e completa ficaria:

		Ser		*Total*
		M^C	M	
Previsto ser	R^C	127	96	223
	R	9	68	77
Total		136	164	300

Probabilidade pedida: $P(M) = 164/300 = 0,547$

1.2 Determine a probabilidade de ser menino se a ecografia faz prever ser uma menina.

Resolução: Probabilidade pedida: $P(M|R^C) = P(M \cap R^C)/P(R^C) = 96/223 = 0,430$

1.3 A Sra. Ana e a Sra. Berta estão a ser seguidas naquela maternidade. Ambas realizaram uma ecografia na 13ª gestação. À Sra. Ana a ecografia previu uma menina e à Sra. Berta um menino. Em que caso é mais provável ser confirmado, no nascimento, a previsão do sexo indicada pela ecografia? Numa pequena composição fundamente a sua resposta.

Tópicos a referenciar:

- Probabilidade de ser confirmado, no nascimento, que o bebé da Sra. Ana é do sexo feminino.
- Probabilidade de ser confirmado, no nascimento, que o bebé da Sra. Berta é do sexo masculino.

Tópicos da Resolução: Na composição deve estar o cálculo das probabilidades condicionadas em causa, $P(M^C|R^C)$ *e* $P(M|R)$, e indicado qual das duas probabilidades tem maior valor.

Sra Ana : $P(M^C|R^C) = 1 - P(M|R^C) = 1 - 0{,}430 = 0{,}570$

Sra Berta: $P(M|R) = P(M \cap R)/P(R) = 68/77 = 0{,}883$

Para a Sra Berta é mais provável ser confirmado, no nascimento, o sexo masculino do bebé previsto na ecografia da 13ª semana de gestação.

1.4 Um casal com três filhos, todos nascidos naquela maternidade, é selecionado ao acaso. Considere que o sexo de uma criança é independente do sexo dos irmãos e que a probabilidade de qualquer filho do casal ser do sexo masculino é igual à probabilidade calculada na alínea 1.1.

Considere os acontecimentos:

A: *"O casal ter no máximo uma rapariga"*
B: *"O casal ter filhos de ambos os sexos"*
C: *"O casal só ter rapazes"*

a) Calcule a probabilidade de cada um dos acontecimentos.

Resolução: Do enunciado, resulta:

P("Um filho do casal ser do sexo masculino") = P(M) = 0,547

Dado um casal com 3 filhos, o espaço de resultados possíveis é:

$\Omega = \{MMM, MMM^C, MM^CM, MM^CM^C, M^CMM, M^CMM^C, M^CM^CM, M^CM^CM^C\}$

Uma vez que $P(M) = 0{,}547$ *e, consequentemente,* $P(M^C) = 0{,}453$*, os acontecimentos* M *e* M^C *não são equiprovaveis. Logo, os 8 acontecimentos elementares em* Ω *não são equiprováveis. As probabilidades pedidas, porque existe independência do sexo entre irmão, são então calculadas do seguinte modo:*

$* \ P(A) = P(MMM \cup MMM^C \cup MM^CM \cup M^CMM) =$

$= P(MMM) + P(MMM^C) + P(MM^CM) + P(M^CMM) =$

$= P(M)P(M)P(M) + P(M)P(M)P(M^C) + P(M)P(M^C)P(M) + P(M^C)P(M)P(M) =$

$= 0{,}547^3 + 3 \times 0{,}547^2 \times 0{,}453 = 0{,}570$

$* \ P(B) = P(MMM^C \cup MM^CM \cup M^CMM \cup MM^CM^C \cup M^CMM^C \cup M^CM^CM) =$

$= 1 - (P(MMM) + P(M^CM^CM^C)) = 1 - (P(M)P(M)P(M) + P(M^C)P(M^C)P(M^C) =$

$= 1 - (0{,}54^3 + 0{,}45^3) = 0{,}743$

$* \ P(C) = P(MMM) = 0{,}547^3 = 0{,}164$

b) Os acontecimentos A e B são independentes? Justifique.

Resolução:

$P(A \cap B) = P(MMM^C \cup MM^CM \cup M^CMM) = P(MMM^C) + P(MM^CM) + P(M^CMM) =$

$= 3 \times (0{,}547^2 \times 0{,}453) = 0{,}407$

$P(A)P(B) = 0{,}570 \times 0{,}743 = 0{,}424$

Como, $P(A \cap B) \neq P(A)P(B)$, *A e B não são independentes.*

c) Mostre que os acontecimentos $A \cap B$ e C são incompatíveis.

Resolução: Uma vez que $(A \cap B) \cap C = \{MMM^C, MM^CM, M^CMM\} \cap \{MMM\} = \{\ \}$, então os acontecimentos $A \cap B$ e C são incompátiveis

Outra resolução: (A∩B) e C são incompatíveis, uma vez que é impossível um casal de 3 filhos ter filhos de ambos os sexos, com apenas uma menina, e simultaneamente serem todos rapazes.

d) Tendo em conta as alíneas anteriores, justifique que os acontecimentos $A \cap B$ e C não podem ser independentes e apresente uma situação (com outras condições de enunciado) em que o poderiam ser.

Resolução: Como $A \cap B$ e C são incompatíveis então, $P((A \cap B) \cap C) = 0$.

Mas, $P(A \cap B)P(C) = 0{,}407 \times 0{,}164 \neq P(A \cap B \cap C)$. *Logo,* $A \cap B$ *e C não são independentes.*

Uma situação hipotética em que poderiam ser independentes era admitir que um dos acontecimentos, A∩B ou C, tivesse probabilidade nula de ocorrência. Por exemplo, admitir que só se consideram casais com 3 filhos tendo pelo menos 1 menina. Assim, P(C) = 0.

APÊNDICE II
Situação-problema P1: enunciado e resolução

2. A leptospirose é também conhecida como doença de Weil. Esta doença é causada por duas espécies de bactérias. Numa população de ratos, a probabilidade de encontrar um rato portador destas bactérias é 6%. Um novo teste de diagnóstico da doença foi proposto. Para avaliar a qualidade deste novo teste, foram efetuados vários testes àquela população de ratos, no sentido de detetar a existência destas bactérias. Do estudo efetuado resultaram as seguintes conclusões:

– A probabilidade de um rato ter teste positivo (P), sabendo que é portador das bactérias, é 99,8%;
– A probabilidade de um rato ter um teste negativo, sabendo que não é portador destas bactérias, é de 99,6%

Seja A o acontecimento "Rato ser portador das bactérias".

2.1 Calcule o valor das seguintes probabilidades:

i) $P(A\cap P)$

ii) $P(A|P)$

Resolução: Do enunciado dado, resulta:

$P(A) = 0{,}06$

$P(P|A) = 0{,}998$

$P(P^C|A^C) = 0{,}996$

onde P^C e A^C representam o acontecimento complementar de P e A, respetivamente.

Probabilidades pedidas:

i) $P(A\cap P) = P(A)\ P(P|A) = 0{,}06 \times 0{,}998 = 0{,}05988$

ii) $P(A|P) = P(A\cap P) / P(P) = 0{,}05988 / 0{,}06364 = 0{,}940918$

uma vez que

$$P(P) = P(A\cap P \cup A^C\cap P) = P(A\cap P) + P(A^C\cap P) = 0{,}05988 + P(A^C)\ P(P|A^C) =$$
$$= 0{,}05988 + (1 - 0{,}06)(1 - 0{,}996) = 0{,}06364$$

2.2 Os acontecimentos A e P são incompatíveis? Justifique convenientemente a sua resposta.

Resolução: Não, porque $P(A \cap P) \neq 0$. Consequentemente, $A \cap P$ nunca pode ser o acontecimento impossível *(i.e., o acontecimento { })*

2.3 Os acontecimentos A e P são independentes? Justifique convenientemente a sua resposta.

Resolução: Não, porque a probabilidade de ocorrência do acontecimento A toma valores diferentes consoante se conheça a ocorrência de P ou não:

$P(A) = 0{,}06$ e $P(A|P) = 0{,}940918$

Outra resolução: Não, porque $P(A)P(P) = 0{,}06 \times 0{,}06364 = 0{,}003818$, que é diferente de $P(A \cap P) = 0{,}05988$.

2.4 Escolhendo ao acaso um rato dessa população, qual é a probabilidade de ele ser portador das bactérias, sabendo que o teste efetuado deu negativo?

Resolução: Probabilidade pedida:

$P(A|P^C) = P(A \cap P^C) / P(P^C) = 0{,}00012/0{,}93636 = 0{,}000128$

pois

$P(A \cap P^C) = P(A)P(P^C|A) = P(A)(1 - P(P|A)) = 0{,}06 \times (1 - 0{,}998) = 0{,}00012$
$P(P^C) = 1 - P(P) = 1 - 0{,}06364 = 0{,}93636.$

Marcel Pochulu, Vicenç Font, Mabel Rodríguez

DESARROLLO DE LA COMPETENCIA EN ANÁLISIS DIDÁCTICO DE FORMADORES DE FUTUROS PROFESORES DE MATEMÁTICA A TRAVÉS DEL DISEÑO DE TAREAS

Development of the competence in didactic analysis of training of future mathematics teachers through task design

RESUMEN

El objetivo de la investigación es explicar cómo el proceso de construcción de una secuencia de tareas profesionales, realizadas por formadores de futuros profesores de Matemáticas, influye en el desarrollo de su competencia en análisis didáctico. Dicho desarrollo se constata, entre otros indicadores, en cuanto los formadores de futuros profesores incorporan y usan adecuadamente herramientas para la descripción, explicación, valoración y mejora de procesos de enseñanza, dirigidos a la formación matemática de futuros profesores de secundaria. Una de las evidencias más significativa de este desarrollo es que las secuencias de tareas que los participantes diseñaron e implementaron eran coherentes con las orientaciones curriculares y significativamente diferentes a las que implementaban antes de realizar el curso.

PALABRAS CLAVE:

- *Diseño de tareas*
- *Análisis didáctico*
- *Competencias profesionales*
- *Formación de profesores*

ABSTRACT

The aim of this research is to explain how the process of task sequence design made by teacher trainers of future Mathematics teachers influences the development of their competence in didactic analysis. This is achieved, among other indicators, when teacher trainers adequately incorporate and use tools for description, explanation, evaluation and improvement of teaching processes, aimed to future mathematics teachers training. One of the most significant evidence of this development is that the designed and implemented sequences were consistent with the curriculum guidelines and were significantly different from those implemented before attending the course.

KEY WORDS:

- *Task design*
- *Didactic analysis*
- *Professional competences*
- *Teacher training*

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (2016) *19* (1): 71-98.
Recepción: Septiembre 28, 2013 / Aceptación: Junio 15, 2015. DOI: 10.12802/relime.13.1913

RESUMO

O objetivo da investigação é explicar como o processo de construção de uma sequência de tarefas profissionais, realizadas por formadores de futuros professores de Matemática, influencia no desenvolvimento de sua competência de análise didática. Constata-se esse desenvolvimento, entre outros indicadores, enquanto os formadores de futuros professores incorporam e usam adequadamente ferramentas para a descrição, explicação, avaliação e melhora de processos de ensino, dirigidos à formação matemática de futuros professores de secundária. Uma das provas mais significativa desse desenvolvimento é que as sequências de tarefas que os participantes foram concebidas e implementadas de acordo com as diretrizes curriculares e significativamente diferente daquele implementado antes do curso.

PALAVRAS CHAVE:

- *Desenho de tarefas*
- *Análise didática*
- *Competências profissionais*
- *Formação de professores*

RÉSUMÉ

L'objectif de la recherche est d'exprimer comment le procédé de construction d'une séquence des tâches professionnelles réalisées par des formateurs de futurs professeurs de mathématique influence dans le développement de leur compétence de l'analyse didactique. Ce développement est vérifié, entre autres indicateurs, dès que les formateurs de futurs professeurs incorporent et utilisent correctement des outils pour la description, explication, évaluation et amélioration des procédés d'enseignement, dirigés à la formation mathématique de futurs professeurs d'école secondaire. Une des preuves les plus importantes de cette évolution est que les séquences de tâches que les participants ont été conçus et mis en œuvre en accord avec les lignes directrices du programme et significativement différent de celui mis en place avant le cours.

MOTS CLÉS:

- *Dessin des tâches*
- *Analyse didactique*
- *Compétences professionnelles*
- *Formation de professeurs*

1. Introducción

La investigación sobre el conocimiento y el desarrollo de las competencias profesionales del profesorado de matemáticas adquirió recientemente relevancia en el ámbito internacional (Silverman & Thompson, 2008; Even & Ball, 2009). La creación del espacio europeo de educación superior ha convertido la noción de competencia profesional en una noción clave en la formación universitaria y en particular en la formación inicial de futuros profesores. Un proyecto relevante relacionado con la creación de dicho espacio ha sido el proyecto Tuning (González & Wagenaar, 2003) −proyecto que se inició en Europa y después se extendió a América Latina− el cual clasifica las competencias de la enseñanza universitaria en genéricas (compartidas por cualquier enseñanza universitaria) y específicas (propias de cada ámbito disciplinario). En la formación universitaria las competencias son académicas, pero dado que la idea de fondo del modelo curricular por competencias es que aquello que se enseña en la universidad sea útil en la vida profesional, implica que las competencias académicas son el reflejo universitario de las competencias profesionales de la persona que ejerce la profesión para la cual los estudios universitarios preparan a los estudiantes (o bien están inspiradas en ellas). En lo que sigue, utilizaremos el término competencia para referirnos tanto a las competencias académicas de la formación inicial de los futuros profesores, como a las profesionales del profesor en servicio.

Para el caso de la formación inicial de los profesores de secundaria, la clasificación de las competencias en genéricas y específicas ha sido usada en las propuestas curriculares de diversos países y también en las propuestas de competencias profesionales realizadas por algunos investigadores. En Font y otros (2012) se propone una lista de competencias genéricas y específicas. Según estos autores, la competencia en análisis didáctico −entendida como: diseñar, aplicar y valorar secuencias de aprendizaje, mediante técnicas de análisis didáctico y criterios de calidad, para establecer ciclos de planificación, implementación, valoración y plantear propuestas de mejora− es una de las competencias específicas clave que deben desarrollar los futuros profesores de matemáticas de secundaria.

Según Weinert (2001), los enfoques por competencias pueden clasificarse en tres grandes grupos: a) Enfoque Cognitivo, b) Enfoque Motivacional y c) Enfoque Integral o de Acción Competente. La formulación de la competencia en análisis didáctico propuesta en Font y otros (2012) se realiza desde la perspectiva de la acción competente. Se entiende por competencias al conjunto de conocimientos y disposiciones que promueven un desempeño profesional eficaz, en contextos de formación docente referidos a los saberes matemáticos. Dicho en términos aristotélicos, las competencias aluden a una potencialidad que se actualiza en el desempeño de acciones eficaces (competentes).

La competencia en análisis didáctico de los futuros profesores de secundaria debe ser desarrollada y evaluada por los formadores de profesores, los cuales a su vez también deben tenerla desarrollada. En este artículo describimos la investigación que realizamos sobre el desarrollo de la competencia en análisis didáctico, en un proceso de formación dirigido a formadores de futuros profesores de matemáticas de secundaria, auspiciado por la administración educativa argentina. La pregunta que se quiere responder es la siguiente: ¿qué criterios se deben utilizar para diseñar una secuencia de tareas, en la formación de formadores de profesores, que permitan evaluar y desarrollar la competencia en análisis didáctico y qué cambios se deben realizar en su rediseño para mejorar su desarrollo?

Dado que las competencias se evalúan y se desarrollan a partir de la resolución de tareas, el diseño de tareas se convierte en la otra cara de la moneda del desarrollo y evaluación de competencias. En este artículo, para contestar a la pregunta anterior, se han diseñado e implementado tareas en la formación de formadores de profesores de Matemáticas, en las que estos han tenido que diseñar y rediseñar secuencias de tareas para sus alumnos, utilizando los criterios de idoneidad didáctica propuestos por el Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción matemática (EOS) (Godino, Batanero & Font, 2007). Dichos criterios sirven tanto para guiar la construcción de la secuencia de tareas como para valorar la idoneidad de su implementación, lo cual permite tener elementos para un rediseño de la secuencia de tareas que permita una futura implementación de más calidad.

2. Competencia en análisis didáctico y diseño de tareas

La formación de profesores de Matemáticas constituye un campo de investigación relevante. En particular, en la última década aumentó el interés por investigar el conocimiento y las competencias que necesitan los profesores de Matemáticas para conseguir una enseñanza eficaz (Burger & Starbird, 2005; Wilson, Cooney & Stinson, 2005; Hill et al., 2008). Diversos investigadores se han interesado por determinar las competencias que deben tener los profesores de secundaria de Matemáticas y han propuesto listas de competencias, clasificadas en genéricas y específicas, en las que se hallan, entre otras, competencias relacionadas con la reflexión sobre la práctica (Poblete y Díaz, 2003; Font, 2011; Font et al., 2012). Schoenfeld y Kilpatrick (2008) proponen otro modelo del desempeño experto en enseñanza de las Matemáticas que considera siete dimensiones, referidas a conocimientos y competencias profesionales del profesor de Matemáticas, siendo una de ellas la reflexión sobre la propia práctica (pensar cómo se desarrolló una situación en clase y qué se podría hacer para mejorarla).

Otros investigadores consideran que una de las competencias clave es la de "mirar con sentido", la cual permite al profesor de Matemáticas ver las situaciones de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas de una manera profesional que lo diferencia de la manera de mirar de alguien que no es profesor de Matemáticas (Mason, 2002; Fernández, Llinares, & Valls, 2012). Dicha competencia también está relacionada con la reflexión sobre la práctica que deben desarrollar los profesores para realizar procesos de instrucción de calidad.

Font (2011), Font y otros (2012) y Giménez, Font y Vanegas (2013) consideran que una de las competencias clave, que deben desarrollar los futuros profesores de Matemáticas de secundaria, es la competencia en el análisis didáctico de procesos de instrucción, debido a su relevancia en la descripción, explicación, valoración y mejoramiento de los procesos instructivos. Asimismo, los autores plantean que los constructos teóricos del modelo de análisis didáctico propuesto por el Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción matemática (EOS) (Godino et al., 2007) pueden ser herramientas teóricas útiles para el desarrollo de esta competencia. En dicho enfoque se proponen cinco niveles para el análisis didáctico de procesos de instrucción (Font, Planas y Godino, 2010; Pochulu y Font, 2011; Contreras, García y Font, 2012), cada uno de ellos con sus respectivas herramientas: a) Análisis de las prácticas matemáticas realizadas en el proceso de instrucción; b) Análisis de objetos y procesos matemáticos activados en dichas prácticas; c) Análisis de las interacciones realizadas en el proceso de instrucción; d) Identificación del sistema de normas y metanormas que regulan el proceso de instrucción; e) Utilización de criterios de idoneidad didáctica para la valoración del proceso de instrucción con el fin de mejorarlo.

El desarrollo y evaluación de la competencia en análisis didáctico tal como la formulan Font y colaboradores (Font, 2011; Font et al., 2012; Giménez et al., 2013), implica analizar las prácticas profesionales de los profesores, o bien formadores de futuros profesores de secundaria en nuestro caso, para resolver las tareas profesionales propuestas, y el conocimiento matemático-didáctico activado en ellas, para encontrar indicadores que justifiquen la asignación de niveles de desarrollo a dicha competencia. En este esquema el diseño de tareas tiene un papel relevante.

Recientemente aumentó el interés en el área de la Educación Matemática sobre el diseño de tareas al considerarlo un aspecto clave para conseguir una enseñanza de calidad (por ejemplo, Mason & Johnston-Wilder, 2004; Tzur, Sullivan, & Zaslavsky, 2008; Zaslavsky & Sullivan, 2011). Este interés se manifestó, entre otros aspectos, en la creación del *Topic Study Group*, *Research and development in task design and analysis*, en *The International Congress* *on Mathematics Education* del 2008*,* y en la celebración del *International Commision on Mathematical Instruction Study,* específico sobre el tema en el año 2013, siendo uno de sus focos el diseño de tareas en la formación de profesores.

Las tareas son las situaciones que el profesor propone (problema, investigación, ejercicio, etc.), a los alumnos. Éstas son el punto de partida de la actividad del alumno, la cual, a su vez, produce como resultado su aprendizaje. La investigación sobre el diseño de tareas se interesó por diferentes aspectos. Por ejemplo, Swan (2007) estudió la naturaleza y tipología de tareas; Stein, Smith, Henningsen y Silver (2000), las características que debe cumplir una tarea para ser estimulante o retadora para el alumno; Charalambus (2010), el papel que tiene el profesor en la implementación de la tarea a fin de lograr un proceso cognitivo relevante en los alumnos; Giménez y otros (2013), el diseño de tareas en la formación de futuros profesores de Matemáticas de secundaria.

3. Objetivo y metodología de la investigación

Font (2011), y Giménez y otros (2013), proponen caracterizar la competencia en análisis didáctico de la siguiente manera: *diseñar, aplicar y valorar secuencias de aprendizaje, mediante técnicas de análisis didáctico y criterios de calidad, para establecer ciclos de planificación, implementación, valoración y plantear propuestas de mejora*. Estos autores, además, consideran: 1) que se pueden encontrar criterios e indicios del desarrollo de esta competencia (Font, 2011), y 2) que algunos de los constructos propuestos en el modelo de análisis didáctico que propone el EOS son útiles para el desarrollo de dicha competencia, sobre todo, el constructo criterios de idoneidad didáctica. En esta investigación asumimos esta caracterización de la competencia en análisis didáctico y tomamos como hipótesis de partida las dos consideraciones anteriores.

Nuestro objetivo es investigar cómo el proceso de construcción de una secuencia de tareas profesionales realizadas por los asistentes influye en el desarrollo de su competencia en análisis didáctico, en el contexto de diseño, implementación y rediseño de un curso de formación, dirigido a formadores de futuros profesores de Matemáticas de secundaria, organizado por la administración educativa de Argentina (que llamaremos ciclo formativo FFPMS). Dicho desarrollo se constata, entre otros indicadores, en cuanto los formadores de futuros profesores incorporan y usan adecuadamente herramientas teóricas (en particular, tipología de objetos matemáticos, tipología de procesos y criterios de idoneidad didáctica), para la descripción, explicación, valoración y mejora de procesos de enseñanza, dirigidos a la formación matemática de futuros profesores de secundaria (ciclo formativo que representaremos con las letras FPMS a partir de ahora). Para conseguirlo, utilizamos una metodología de investigación que tiene elementos de la investigación basada en el diseño (Cobb, Confrey, diSessa, Lehrer, & Schauble, 2003; Cobb & Gravemeijer, 2008). En particular, de acuerdo con esta metodología, (1) la experiencia se ha realizado en contextos naturales (de clase y/o cursos de formación), (2) buscando que el diseño, la implementación y la investigación fuesen interdependientes, y (3) se han considerado las siguientes fases: 1) Preparación del experimento; 2) Experimentación para apoyar el aprendizaje; 3) Análisis retrospectivos de los datos generados durante la realización del experimento (Cobb & Gravemeijer, 2008). Se trata de una metodología de investigación de diseño fundamentada en el empleo de herramientas del EOS. Por un lado, el diseño del ciclo formativo sirvió como un contexto para la investigación. Por el otro, los continuos análisis realizados junto a una mirada retrospectiva proporcionaron información para rediseñar y mejorar el ciclo formativo.

Los sujetos participantes fueron formadores de futuros profesores asistentes a un curso de formación continua, implementado durante periodos del año 2011 y de 2012, por el Instituto Nacional de Formación Docente (INFD) de Argentina.

El ciclo formativo FFPMS comprendió seis fases que se explican con detalles en el apartado 4.2: (a) *Seminario virtual*, cuyo propósito fue dar herramientas y acompañamiento para que en grupo los formadores diseñen y fundamenten una secuencia didáctica para el FPMS; (b) *Encuentro presencial inicial*, registrado en vídeo, donde los grupos asistentes presentaron los diseños de tareas del ciclo FPMS y su fundamentación, y al mismo tiempo, se realizaron rediseños y ajustes de las tareas en virtud de los análisis didácticos realizados con la colaboración de los otros grupos (e incluso, de los profesores del curso); (c) *Implementación de la secuencia de tareas (ciclo FPMS),* de la que se registraron dos clases consecutivas en vídeo (a elección de los propios grupos), por personal técnico del INFD, para ser utilizadas en análisis posteriores con todos los participantes de la capacitación (grupos de asistentes, profesores del curso y personal técnico especializado del INFD); (d) *Selección de algunos episodios de las clases registradas en vídeo.* Los profesores a cargo del curso, juntamente con personal técnico del INFD, seleccionaron los episodios con dos condiciones: i) que su duración fuese aproximadamente de cinco minutos, y ii) que a su criterio se pudieran observar, como mínimo, aspectos relevantes relacionados con las matemáticas implementadas, la gestión de la clase y el uso de recursos. (e) *Análisis didáctico* *presencial de los episodios de clases.* En este caso, los análisis fueron realizados por cada grupo de profesores que había implementado el ciclo formativo FPMS, a quienes se les sumó un representante de otro grupo que no pertenecía a la misma institución educativa La coordinación de este análisis estuvo a cargo de uno de los profesores responsables de la capacitación y de un técnico del INFD; y por último (f) *Encuentro presencial final,* registrado en vídeo, donde se analizaron seis episodios conjuntamente por todos los grupos. El criterio de selección se sustentó en la buena calidad didáctica, o bien, que se permitieran discutir puntos a mejorar. En esta sesión los participantes también realizaron sugerencias para tener en cuenta en futuras capacitaciones.

El diseño del FFPMS fue flexible y permitió realizar ajustes acordados en reuniones entre los profesores que estuvieron a cargo de la capacitación y técnicos del INFD, quienes iban evaluando la marcha de cada una de las fases.

La plataforma virtual, que sirvió de soporte para el seminario, permitió a cada equipo tener un espacio para interactuar entre ellos, con otros grupos y con los profesores. En particular, hubo foros de discusión sobre las tareas propuestas y chat de intercambios para aclarar dudas.

Los datos para la investigación que se presenta fueron obtenidos de: a) registros de la plataforma virtual –en particular, los borradores y el trabajo final del ciclo formativo FPMS de cada grupo–; b) registros audiovisuales de la implementación de las dos clases de la secuencia de tareas; y c) registros audiovisuales de las reflexiones y análisis que realizaron los asistentes durante los encuentros presenciales.

4. Criterios de diseño de tareas para el desarrollo de la competencia en análisis didáctico

Para atender a la pregunta sobre los criterios que deben ser considerados para el diseño de secuencias de tareas, el primer paso fue solicitar a los asistentes la confección de una secuencia de tareas pensada para ser implementada con sus alumnos (futuros profesores), de acuerdo con determinados criterios. El segundo paso, fue diseñar, implementar y rediseñar, también de acuerdo con ciertos criterios, un ciclo formativo para los formadores de futuros profesores, cuyo foco fuese la confección por parte de los asistentes de una secuencia de tareas pensada para sus alumnos. Los criterios para estas dos secuencias de tareas fueron tomados de ciclos formativos similares, ya experimentados con otros tipos de poblaciones (futuros profesores y profesores en servicio), que habían sido considerados como efectivos por los equipos de investigación que los habían implementado (ver apartado 4.1). De este modo, el ciclo formativo diseñado e implementado con formadores de profesores (FFPMS) surgió del rediseño de estas experiencias previas (ver apartado 4.2).

4.1. *Criterios sobre diseño de tareas tomados a partir de las experiencias previas*

Los criterios que presentamos aquí, y que se utilizaron tanto en el diseño del ciclo FFPMS como en la secuencia de tareas que diseñaron los asistentes al curso, surgen como resultado de distintas experiencias formativas destinadas a desarrollar la competencia en análisis didáctico en profesores tanto en formación como formados. Esas experiencias − en las que los autores, y miembros de sus equipos de investigación, estuvieron involucrados− tuvieron lugar en la Universidad de Barcelona (UB), Universidad Nacional de Villa María (UNVM) y Universidad Nacional de General Sarmiento (UNGS), la primera de España y las restantes de Argentina. En cada una de esas experiencias se pusieron de manifiesto aciertos y algunos inconvenientes que obstaculizaron, al menos parcialmente, el desarrollo de la competencia en análisis didáctico.

En Font (2011) y Giménez y otros (2013) pueden observarse detalles de las experiencias formativas que tuvieron lugar en la UB con futuros profesores (ciclos FPMS). De ellas se tomaron:

- Proponer *tareas profesionales*: tareas propuestas cuyo objetivo es realizar análisis didácticos con base en sus conocimientos, creencias, experiencias previas, o bien, utilizando herramientas teóricas que van emergiendo en el curso de formación en el que participan (Giménez et al., 2013).
- Atender al desarrollo de la *competencia en análisis didáctico de procesos de instrucción* − propuesta en Font (2011) y Font y otros (2012) − mediante sus indicadores de desempeño, agrupados en tres niveles de desarrollo de la competencia (N1, N2 y N3). Como consecuencia de la reflexión sobre la implementación de los tres ciclos formativos antecedentes a la presente investigación, se adaptaron los indicadores: se cambiaron en la última fila las casillas de la primera y segunda columna. Los indicadores se presentan en la tabla siguiente:

TABLA I

Niveles de desarrollo de la competencia en análisis didáctico adaptados de Font (2011)

Diseñar, aplicar y valorar secuencias de aprendizaje, mediante técnicas de análisis didáctico y criterios de calidad, para establecer ciclos de planificación, implementación, valoración y plantear propuestas de mejora		
N1: Muestra conocimiento del currículum de Matemáticas como elementos fundamentales para comprender su práctica pedagógica.	N2: Integra teorías, metodologías y currículum, en la planificación de los procesos de enseñanza y reconoce las implicancias en su práctica considerando los contextos institucionales.	N3: Implementa la planificación de los procesos de enseñanza en sus prácticas y emite juicios argumentados y reflexivos acerca de las teorías, metodologías y el currículum.
N1: Aplica herramientas para describir las prácticas, objetos y procesos matemáticos presentes en un proceso de enseñanza aprendizaje y, muy en especial, en su propia práctica.	N2: Conoce y aplica herramientas socioculturales para conocer la interacción y las normas que condicionan un proceso de enseñanza aprendizaje y, muy en especial, en su propia práctica.	N3: Explica los fenómenos didácticos observados en los procesos de enseñanza aprendizaje y, muy en especial, en su propia práctica.
N1: Utiliza criterios de calidad para valorar procesos ya realizados de enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas.	N2**:** Conoce criterios de calidad y los tiene presentes en la planificación de una secuencia didáctica de las Matemáticas.	N3: Aplica criterios de calidad para valorar su propia práctica y realizar innovaciones con el objetivo de mejorarla.

- Incentivar el uso de herramientas teóricas provenientes del EOS, en particular la noción de configuración epistémica y cognitiva de objetos primarios (Godino et al., 2007), por parte de los asistentes para caracterizar las matemáticas implicadas en la secuencia de tareas.
- El uso de los criterios de idoneidad didáctica propuestos por el EOS para el diseño y rediseño de tareas por parte de los asistentes al curso:

1. Idoneidad epistémica, para valorar si las Matemáticas que se enseñan son unas "buenas matemáticas". 2. Idoneidad cognitiva, para valorar, antes de iniciar el proceso de instrucción, si lo que se quiere enseñar está a una distancia razonable de lo que saben los alumnos y, después del proceso, si los aprendizajes logrados se acercan a los que se pretendían enseñar. 3. Idoneidad interaccional, para valorar si la interacción ha resuelto dudas y dificultades de los alumnos. 4. Idoneidad mediacional, para valorar la adecuación de recursos materiales y temporales utilizados

en el proceso de instrucción. 5. Idoneidad emocional, para valorar la implicación (interés, motivación) de los alumnos en el proceso de instrucción. 6. Idoneidad ecológica, para valorar la adecuación del proceso de instrucción al proyecto educativo del centro, las directrices curriculares, las condiciones del entorno social y profesional, etc. (Font et al., 2010, p. 101)

Tal como argumentan Giménez y otros (2013), para valorar el proceso de instrucción realizado y hacer propuestas de mejora, los criterios de idoneidad didáctica propuestos por el EOS resultan útiles. Dichos criterios permiten realizar la valoración de las acciones realizadas en los procesos de instrucción. Los criterios de idoneidad son reglas de corrección útiles en dos momentos de los procesos de estudio matemáticos. *A priori*, los criterios de idoneidad son principios que orientan "cómo se deben hacer las cosas". *A posteriori*, los criterios sirven para valorar el proceso de estudio efectivamente implementado. Para ello, se necesitan indicadores de cada idoneidad. Siguen en la tabla 2, a título de ejemplo, solo dos indicadores de cada una.

TABLA II
Criterios de idoneidad e indicadores

Criterio de idoneidad	*Indicadores*
Epistémica	Asegurar que se considere una muestra representativa y articulada de problemas de diversos tipos (en particular, contextualizados y con diferentes niveles de dificultad); tipología de tareas variadas que generen procesos matemáticos relevantes como son la argumentación y la modelización.
Cognitiva	Asegurar que los alumnos tienen los conocimientos previos necesarios para el estudio del tema; incluir actividades de ampliación y de refuerzo.
Interaccional	Reconocer y resolver los conflictos de significado de los alumnos (por ejemplo, interpretando correctamente los silencios de los alumnos, sus expresiones faciales, sus preguntas); contemplar momentos en los que los estudiantes asumen la responsabilidad del estudio (exploración, formulación y validación).
Mediacional	Usar materiales manipulativos e informáticos; invertir el tiempo en los contenidos más importantes o nucleares del tema.
Emocional	Seleccionar tareas de interés para los alumnos; promover la autoestima evitando el rechazo, fobia o miedo a las Matemáticas.
Ecológica	Asegurar que los contenidos enseñados se corresponden con las directrices curriculares; relacionar los contenidos que se enseñan con otros contenidos matemáticos y de otras disciplinas.

La adopción de estos criterios conlleva el diseño de tareas para introducir a los asistentes al curso estas herramientas teóricas y otras tareas donde las tengan que utilizar.

Otra experiencia que tomó elementos de la anterior se puso en práctica en la UNVM, en este caso con estudiantes del Profesorado en Matemáticas. En ella se utilizaron los dos criterios comentados anteriormente (uso de la noción de configuración, epistémica y cognitiva, de objetos primarios y de los criterios de idoneidad didáctica con sus indicadores). Se observó que los estudiantes podían hacer un buen análisis de la calidad matemática del proceso de instrucción realizado por "otro profesor" utilizando los criterios de idoneidad didáctica (en particular el epistémico), pero no así cuando se trataba del suyo. Se considera que las explicaciones que justifican este hecho se fundan en que los alumnos presentan dificultades para describir y valorar la actividad matemática cuando ésta es rica en procesos y objetos matemáticos, entre otras razones porque, en algunos casos, ellos mismos no realizan de un modo sistemático este tipo de actividad matemática.

A raíz del trabajo de investigación desarrollado en las tres universidades (UB, UNGS y UNVM), se considera pertinente para la formación de profesores:

- Antes de realizar el diseño de tareas, se promueve la resolución (y su descripción) de problemas de modelización matemática con uso de software, y de problemas que permitan una diversidad de estrategias de resolución.

El hecho de que los futuros profesores hubieran realizado la actividad de resolución, y que en su narración aparecieran definiciones, procedimientos, diferentes estrategias, representaciones y argumentos permitió que pudiesen observar con más facilidad la activación de los componentes de una configuración de objetos primarios en la realización de una tarea matemática (nivel 1 de la tabla 1).

Este criterio permite que los asistentes realicen una actividad matemática rica, la narren y observen en la narración la aparición de los diferentes componentes de la configuración de objetos primarios y sus inter-relaciones.

- Proponer tareas de análisis de tareas de autoría ajena y libros de texto previo a tareas de diseño propio.
- Mantener el análisis didáctico utilizando las herramientas del EOS.

Cabe aclarar aquí que este último criterio se sostiene por dos motivos. Primero porque su utilización permitió un buen desempeño de los alumnos en los análisis de tareas de otros profesores y, segundo, el uso de la herramienta configuración epistémica/cognitiva resulta útil para analizar y evidenciar la trama de relaciones que caracteriza la comprensión matemática, según las nuevas orientaciones curriculares publicadas desde el Instituto Nacional de Formación Docente (INFD) de Argentina. El *Proyecto de mejora para la formación inicial de profesores para el nivel secundario. Área: Matemática* (INFD, 2010), introduce recomendaciones para que el futuro profesor alcance distintos grados de comprensión de la disciplina y cómo darse cuenta de ello. En particular, sobre los aspectos cognitivos referidos a la enseñanza de las Matemáticas, dice:

> Comprender un objeto matemático significa haber transitado por diversas experiencias que le permitan al estudiante producir, organizar y reorganizar la red de relaciones que se deben establecer en la resolución de una situación problemática (intra y extra-matemática) que "obliga" al funcionamiento del objeto, los procedimientos o técnicas que se despliegan para resolverla, las definiciones, propiedades, argumentos que validan las acciones realizadas, todas ellas soportadas y reguladas por el lenguaje simbólico, propio de la Matemática, y la lengua natural. (INFD, 2010, p. 122)

Estos dos últimos criterios conllevan el diseño de tareas de análisis y descripción de la actividad matemática para ser contestadas por los asistentes al curso.

Por otra parte, se notó que, si bien introducían algún elemento de gestión de la clase, no habían "vivido" (aunque fuese hipotéticamente), la gestión que permitía implementar la secuencia de tareas diseñadas. Por esta razón, para aumentar el nivel de las idoneidades cognitiva, emocional, interaccional y mediacional, planteamos un segundo rediseño que facilitase la reflexión sobre la interacción necesaria para la implementación de su secuencia didáctica. Para ello, establecimos los siguientes criterios a modo de condiciones que debían tener en cuenta al diseñar, seleccionar o adaptar las tareas:

- Anticipar los errores y dificultades que tendrían los alumnos al enfrentarse a la tarea que se les presentaba.
- Describir cómo gestionarían la clase ante las dificultades o errores que anticipaban de sus alumnos. Esta descripción se materializaría como un diálogo hipotético entre profesor y alumno.

Estos dos criterios estaban pensados sobre todo para las tareas que debían de diseñar los asistentes para sus alumnos, y para tal fin se dieron pautas que se describen seguidamente.

En otra experiencia llevada a cabo en la UNGS con formación de profesores se advirtieron dificultades en los enunciados de las tareas siendo éstas muchas veces formuladas de un modo descriptivo, demasiado cerradas o sugiriendo cómo resolverlas. Las consignas deberían facilitar, entre otros aspectos, que las tareas promuevan procesos matemáticos relevantes y variados, como el de argumentación y el de modelización, que son indicadores de calidad matemática. Para ello se propusieron los siguientes criterios para la formulación de consignas de las tareas:

- Que la tarea no sea cerrada, es decir, que admita más de un camino posible de resolución. De esta manera, la misma puede generar diferentes tipos de actividad matemática en los alumnos y también, comparar las diferentes estrategias de resolución en una puesta en común, que permita establecer conexiones entre ellas (un indicador de riqueza matemática contemplado en el currículo).
- Que la tarea no brinde sugerencias de caminos posibles o resultados a aplicar.
- Que la tarea no se encuentre en extremo pautada. La razón es que si se pauta mucho con preguntas, no se promueven procesos relevantes como son la formulación de conjeturas o la validación. Es preferible que tenga pocas preguntas (las más generales) y que los alumnos hagan un proceso de análisis que les lleve a resolver cuestiones intermedias.
- Que la tarea requiera justificar las elecciones que se realizan los alumnos, así como también las que se rechazan. La razón es que se trata de promover un proceso matemático relevante como es el de argumentación.
- Si se propone una tarea en un contexto real, procurar que para resolverla este contexto sea significativo y relevante. Dicho de otra manera, evitar hacer preguntas en las que el contexto sea un "decorado" intrascendente. Esto evita que el alumno advierta que la intención del docente está en los objetos matemáticos sobre los cuales pregunta, en lugar de poner el foco en el interés del problema en su contexto.
- En la medida de lo posible evitar dar información que asegure existencia y/o unicidad de la solución de la tarea.
- Considerar incluir consignas que activen en los futuros profesores una reflexión sobre la propia actividad que realizaron para resolver la tarea. Se trata de conseguir una metarreflexión sobre su propia actividad con consignas variadas del tipo: comparar resoluciones diferentes, reflexionar sobre estrategias que no fueron útiles, establecer conexiones con otros conceptos matemáticos.

– Que el uso de nuevos recursos sea necesario para resolver la tarea. Por ejemplo, que permitan aplicar ciertas técnicas, o realizar ciertos gráficos o figuras que sin esta tecnología no serían posibles.
– Que lo solicitado con la tarea sea algo matemático y no referido al uso de software. Se pretende enseñar matemáticas y no sólo el uso de un programa particular, o comandos específicos.

Estos criterios estaban pensados sobre todo para las tareas que debían de diseñar los asistentes para sus alumnos.

Otras dificultades conocidas en estudiantes de profesorado, e incluso en docentes noveles, es saber cómo intervenir adecuadamente en la clase de Matemáticas al responder consultas, al atender a estudiantes que no saben cómo comenzar a resolver la tarea. Para considerar esta observación se adoptó como criterio que el diseño de un ciclo formativo contemple:

– Considerar momentos de anticipación de posibles errores, respuestas inesperadas o inacción ante cada tarea y prever intervenciones docentes apropiadas. Expresarlo a modo de diálogo, evitando descripciones vagas.

A su vez, se propusieron los siguientes criterios para realizar intervenciones docentes:

– Evitar dar más información que la estrictamente puesta en juego en la pregunta o respuesta del estudiante.
– Intervenir a partir de lo que el estudiante presenta, tratando de identificar lo que piensa y cómo lo hace. Evitar llevar al alumno al modo en el que el profesor tiene pensada la resolución. En cierta manera, se trata de generar un conflicto cognitivo en el alumno (en términos piagetianos) para que él mismo llegue por sí solo a la solución.
– Si no aparecen diversidad de resoluciones o errores, hacer una intervención pidiendo que los estudiantes den argumentos sobre la validez de las conjeturas o procedimientos seguidos por otros ante el mismo problema (por ejemplo, intervenciones del tipo “Los alumnos del otro curso dicen que es válido hacer...”).
– Evitar decir directamente si la resolución es o no correcta. En cambio, pedir explicaciones para tratar de entender el modo de pensar que lo llevó al alumno hasta ahí.
– Considerar que no es necesario que en una única intervención el profesor resuelva la duda del alumno y posponer la resolución de la duda a

intervenciones posteriores. Por ejemplo, ampliarle la duda, hacerle nuevas preguntas o recordarles estrategias utilizadas anteriormente.

– Evitar pedir sólo explicaciones cuando se advierte que la respuesta es incorrecta. Pedir explicaciones también cuando la respuesta es correcta puede develar un argumento inválido usado, es decir, que llegó a una solución correcta por un camino inapropiado.

El objetivo de estas sugerencias es reflexionar sobre el valor de prever intervenciones a raíz de los diseños de las tareas, lo cual ayudaría a planificar intervenciones que tuviesen mayor idoneidad cognitiva, afectiva e interaccional. Las sugerencias buscan, entre otros aspectos, aumentar la autoestima de los alumnos, evitar la exclusión de los alumnos con dificultades, facilitar procesos cognitivos y metacognitivos, que son indicadores de estas cuatro idoneidades.

Estos criterios estaban pensados sobre todo para las tareas que debían diseñar los asistentes para sus alumnos.

4.2. *El ciclo formativo FFPMS*

El ciclo formativo FFPMS se inició en mayo de 2011, y finalizó en marzo de 2012, y estaba dirigido a profesores de matemáticas encargados de formar a futuros profesores de matemáticas de los Institutos de Formación Docente (IFD) de Argentina. Surgió por iniciativa del INFD, y fue encargado a tres formadores que participaron en experiencias previas realizadas en diferentes centros de formación de profesores, valoradas positivamente por este Instituto por estar centradas en el diseño de tareas, el desarrollo de la competencia en análisis didáctico (experiencia explicada anteriormente) y por la incorporación de recursos TIC en la formación de profesores.

La primera fase consistió en un seminario virtual de diez semanas de duración titulado: *"Secuencias didácticas para la formación matemática del profesor: un nuevo enfoque".* Se solicitó la inscripción en grupos de tres personas, los cuales debían estar integrados por un docente de una asignatura del área de Matemáticas, otro de Didáctica de las Matemáticas o involucrado en las prácticas profesionales y un tercero, que debía tener conocimiento de las TIC. En total se inscribieron 33 grupos.

A cada equipo de profesores se le propuso (de acuerdo con el criterio de proponer realizar tareas profesionales), diseñar una secuencia de tareas para ser implementada en sus respectivos IFD (ciclo formativo FPMS). La secuencia de tareas se realizó sobre un tema matemático particular y debía estar alineada, necesariamente, con el enfoque didáctico que planteaba el documento curricular, el cual promueve que el futuro profesor atraviese por experiencias de formación desafiantes, pues serán determinantes posteriormente para su desempeño profesional en la escuela secundaria (INFD, 2010). Además, por una decisión de las autoridades del INFD, se tenía que incorporar el uso de software en el diseño.

De acuerdo con los criterios expuestos en el apartado 4.1., el equipo de formadores decidió proponer una lista mínima de aspectos a considerarse en la memoria presentada para finalizar el seminario virtual, con el fin de facilitar la reflexión colectiva. Además de la secuencia de tareas (punto 6), se demandaban los siguientes apartados:

1. *Materia en la que se implementaría y año*;
2. *Contenidos involucrados*;
3. *Conocimientos anteriores que se requieren*;
4. *Objetivos / competencias.* Se dejó que los profesores decidieran cómo preferían trabajar en cada IFD y de acuerdo a las exigencias que les imponía su institución;
5. *Secuencia de contenidos.* Podrían usar diferentes herramientas: mapa conceptual, red conceptual, esquema diseñado para ordenar los contenidos, etc.;
6. *Tareas propuestas.* Incluiría la formulación de las consignas o enunciados de las tareas, y el modo de trabajo previsto tanto en el aula como fuera de ella. Anticipación de errores / respuestas de estudiantes e intervenciones que haría el docente;
7. *Propuesta de evaluación.*
8. *Fundamentación.* La fundamentación del diseño de la secuencia didáctica, conlleva la consulta obligada del documento curricular y las herramientas de la Didáctica de las Matemáticas, abordadas en el seminario virtual.

Hay que resaltar que el apartado seis se formuló, sobre todo, a partir de los criterios expuestos para anticipar los errores y dificultades que tendrían los alumnos al enfrentarse a la tarea que se les presentaba y, también para describir cómo gestionarían la clase ante estas dificultades. A su vez, para el apartado 8 se tuvo en cuenta el criterio de fundamentar la calidad de su secuencia de tareas a partir del uso de los criterios de idoneidad.

El trabajo inicial de cada grupo fue proponer tipos de tareas relacionadas con el contenido central de la secuencia e identificar los roles del docente y de los alumnos, los objetivos que se conseguían con la resolución de las tareas planteadas y su vínculo con el documento curricular. Simultáneamente, los encargados del curso presentaron ejemplos de tareas que serían acordes con el documento curricular y otras que no, ya que el documento curricular era de reciente publicación y era dificultoso el hallazgo de este tipo de tareas en los textos de Matemáticas que utilizaban los asistentes.

La plataforma virtual asignó a cada grupo un espacio de foros y chat para interacción entre los miembros del grupo y, a su vez, interacción entre los grupos. Esto permitió a los formadores del curso acceder al registro de la interacción entre los grupos y encontrar evidencias de las dificultades que tenían para diseñar secuencias de tareas adaptadas a las exigencias curriculares. Si bien los asistentes reconocían los ejemplos presentados por los profesores del curso como acordes a las directrices curriculares (nivel 1 de la tabla 1), tenían dificultades para que sus propuestas de tareas también lo fuesen (nivel 2 de la tabla 1).

El octavo punto del modelo de memoria del trabajo final del seminario virtual contemplaba una fundamentación didáctica de la calidad de su propuesta, en la que tenían que utilizar, entre otros referentes, los criterios de idoneidad didáctica propuestos por el EOS. En algunos casos, el hecho de tener que hacer esta fundamentación dio como resultado nuevos rediseños, porque los mismos profesores llegaban a la conclusión de que algunos criterios de idoneidad didáctica no se cumplían. Los criterios que solían considerar menos idóneos eran el interaccional, mediacional y afectivo.

La segunda fase del ciclo formativo FFPMS consistió en un encuentro de tres días en la ciudad de Buenos Aires, en la que participaron todos los grupos, los 3 formadores y técnicos del INFD, con la finalidad de realizar los últimos ajustes al diseño de tareas de cada grupo. El propósito central apuntaba a que una vez que el grupo diera por finalizado el diseño de la secuencia de tareas, observasen que había elementos que permitían mejorar su calidad con un nuevo rediseño. Para ello, los formadores de profesores presentaron sus secuencias a sus colegas. Previo a esas exposiciones los profesores a cargo del ciclo formativo retomaron los criterios y propusieron al grupo completo que, ante cada presentación, se atendiera colectivamente a identificar si alguno de ellos no había sido atendido. En ese caso se pretendió promover una revisión y ajuste de cada secuencia, en caso de ser necesario en la que cada equipo colaborara con el análisis de propuestas ajenas, sabiendo que esto resulta más sencillo, tal como se expresa en los niveles de desarrollo de la competencia de análisis didáctico, mencionados en la tabla I. Después de este encuentro presencial, cada grupo tuvo un intervalo de tres semanas para rediseñar la propuesta que sería implementada.

En la tercera fase cada grupo implementó su secuencia de tareas (septiembre y octubre de 2011) filmando dos clases consecutivas (a elección de cada grupo) de 80 a 120 minutos cada una. La cuarta fase consistió en seleccionar de estas filmaciones dos episodios de no más de cinco minutos cada uno. Esta selección fue realizada por los profesores a cargo del curso, juntamente con el personal de apoyo del INFD, de manera que, a su criterio, se pudieran observar, como mínimo, aspectos relevantes relacionados con las matemáticas implementadas, la gestión de la clase y el uso de recursos. Asimismo dicha selección debía permitir advertir los criterios trabajados, sea porque estuvieron presentes o ausentes.

La quinta fase consistió en el análisis y reflexión de los episodios seleccionados y se realizó entre noviembre y diciembre de 2011. Para ello, se organizaron reuniones en diferentes puntos del país, lo cual permitió una reunión presencial entre los formadores y cada uno de los grupos. En estas reuniones presenciales, de aproximadamente dos horas, participaron los tres profesores del grupo que implementó la secuencia de tareas, uno de los formadores a cargo de la capacitación, un especialista en pedagogía del INFD y un miembro de otro grupo. El objetivo era hacer un análisis exhaustivo de los dos episodios seleccionados, de manera que se tuviesen elementos para rediseñar de nuevo la secuencia didáctica de cada grupo. Estas sesiones fueron registradas en vídeo y los elementos de rediseño quedaron para una futura implementación en el curso siguiente (no se tiene constancia de ella, ya que no eran exigencias del proceso de capacitación). Las intervenciones de los profesores a cargo del curso tuvieron como finalidad lograr que los asistentes al Ciclo reconocieran la adecuación o no de algunos de los criterios sobre los que se trabajó. Al finalizar las reuniones, los equipos reflexionaron sobre su evolución en la competencia de análisis didáctico.

La sexta y última fase consistió en un encuentro final presencial en marzo de 2012. El propósito fue que todos los grupos compartiesen reflexiones matemáticas, didácticas y sobre el uso de TIC, y fortalecer el conocimiento matemático y didáctico de los participantes en la capacitación, en general, y en particular sobre una selección de seis episodios filmados. El criterio para su selección fue que tuviesen una buena calidad didáctica, o bien que presentasen elementos para discutir y sobre los cuales pudieran incorporarse mejoras. También, en esta sesión final, registrada en vídeo, los participantes realizaron sugerencias que se podían tener en cuenta para la mejora de futuras capacitaciones del mismo estilo.

Un aspecto relevante del encuentro fue la demanda a los participantes de que aportaran evidencias de que la secuencia que ellos diseñaron e implementaron generaba comprensión matemática, tal como ésta se caracterizaba en el currículo (ver apartado 4.1). A pesar de que en un momento del curso se les hizo observar a los participantes que la herramienta configuración epistémica/cognitiva podría ser útil para analizar la comprensión de los alumnos, no siempre fue utilizada para dar evidencias de la comprensión conseguida por los alumnos que participaron de la implementación de su secuencia de tareas. En algunos casos, se limitaron a dar afirmaciones sin justificarlas con evidencias. En general, no les resultó sencillo dar una justificación razonable de que sus alumnos comprendieron lo que se les enseñó. Se considera, como posible explicación de este hecho, que el uso de una herramienta compleja como es la configuración epistémica/cognitiva de objetos primarios necesita de un tiempo de apropiación más largo y probablemente, de un proceso de instrucción específico y sostenido a lo largo de varias sesiones. Este aspecto se considera como uno de los que se debería mejorar al momento de un nuevo rediseño de un ciclo formativo.

Un aspecto que hay que resaltar es la tasa de abandono del curso (aproximadamente el 50%) y de los motivos aducidos para ello. Por una parte, hubo grupos que hubieran necesitado disponer de más tiempo para diseñar tareas de acuerdo con las orientaciones dadas en el curso. Por otra parte, para algunos grupos fue clave que el modelo de enseñanza de las Matemáticas que se promovía no era acorde al magistral, el arraigado para el nivel superior, y fue vista como compleja la transferencia y aplicabilidad para otros contenidos.

De los grupos que se mantuvieron en el curso, sus primeros diseños proponían secuencias de tareas alejadas de las orientaciones curriculares, hecho que no les era sencillo de advertir al no utilizar evidencias para sostener las propuestas. Esto marca una realidad factible que es la no advertencia de la distancia que puede llegar a existir entre los principios que se sustentan en el currículo escolar para la formación de profesores y los que efectivamente se traducen en las clases impartidas. Este es otro indicador de que en algunos casos, los profesores iniciaron el curso con un nivel muy bajo de competencia en análisis didáctico.

Por último, destacar que algunos profesores cometieron errores de tipo matemático en la implementación a raíz de respuestas no esperadas, en general debidas al uso de nuevas tecnologías. Algunos de ellos no fueron detectados en el proceso de triangulación con los otros miembros del grupo. Podría entenderse como otro indicador del bajo nivel de competencia en análisis didáctico con el que finalizaron algunos asistentes al curso, o relativizarse debido al hecho de la obligatoriedad del uso de TIC que desvió su atención al uso de los recursos y la gestión de la clase que les resultó diferente a lo usual. Se concluye, por tanto, que en un nuevo rediseño del ciclo se pondría más énfasis en un criterio que resultó efectivo en el ciclo implementado en la UNVM: antes de realizar el diseño de tareas, promover la resolución de problemas que permitan una diversidad de estrategias de resolución y en todos los casos con uso de TIC.

Una de las reflexiones que hizo el equipo de formadores sobre la implementación del ciclo FFPMS estuvo dirigida a encontrar evidencias del desarrollo de la competencia en análisis didáctico de los participantes, con relación al nivel que tenían cuando iniciaron el curso. A lo largo del ciclo, encontramos bastantes evidencias de dicho desarrollo. Una de las que nos pareció más significativa es que las secuencias que los asistentes diseñaron e implementaron, por una parte, eran acordes con las orientaciones que se les dio, en especial las curriculares y, por la otra, eran significativamente diferentes a las que implementaban previo al curso. Algunas evidencias de estas diferencias significativas se infieren de sus reflexiones finales de manera generalizada por los participantes. Por ejemplo:

> *Profesora 1*: Tanto nuestros alumnos como nosotras estamos muy contentos con la implementación. Creo que ellos más que nosotras. El proceso nos depara tantas sorpresas; nuestros alumnos, tan pocos, trabajando a full, contentos con la propuesta, motivados, estoy muy feliz ya que mis clases son muchas veces dirigidas, y éstas me permitieron aprender que hay otra forma de enseñar, que os alumnos te enseñan un montón, ellos aprenden y nosotros con ellos. Por supuesto que observé muchas cosas de la secuencia que creo cambiaría o seguiría desarrollando más, ya lo charlaremos mejor con mis colegas, es una primera versión de la secuencia, es perfectible.
>
> *Profesora 2*: Fue una linda experiencia. Me encantó ver cómo mis alumnos manejaban el software. Superaron mis conocimientos del software y eso me produce mucho placer. Estuvieron estupendos, trabajaron tranquilos y fueron totalmente espontáneos en las respuestas y las preguntas. Están súper motivados y siento que están descubriendo las ventajas de este modo de trabajo al momento de aprender matemática. Me encantó que comenzaran a derribar viejas estructuras, pensaron muchísimo, pero llegamos a las conclusiones esperadas. Reflexionan sobre el trabajo en forma permanente, reconocen que en ningún momento se les dio una clase sobre el uso del software, sino que están aprendiendo matemática usando las herramientas del mismo. En fin, estamos muy contentos.

Por tal motivo, se considera un indicador de un tercer nivel de desarrollo de la competencia en análisis didáctico, según la tabla I.

Se incluyen a continuación ejemplos de las primeras formulaciones de consignas de tareas realizadas por un equipo de profesores y la última versión implementada. Los cambios surgidos siguen los criterios mencionados y se sostuvieron con los equipos en cada devolución. Asimismo se incluye la anticipación de posibles intervenciones, al momento del diseño en la primera y última versión de la planificación de las tareas.

Una de las primeras formulaciones:

a) Representa gráficamente, con papel y lápiz las siguientes funciones y dibuja, si es posible, la recta tangente a la curva en un punto p de la misma. Fundamenta tu respuesta.

$y=x+4$ en $x=3$	$y=\frac{1}{2}x^2$ en $x=1$	$y=x^3+3$ en $x=0$
$y=x^4-x^2$ en $x=0$	$y=-3x^5+5x^3$ en $x=\frac{1}{2}$	$y=\frac{3x^2}{x^2+1}$ en $x=2$

Realiza la actividad anterior utilizando como herramienta el software Geogebra, empleando el botón que te permite obtener la recta tangente y responde:

b) ¿Resulta igual la representación de la recta tangente, con papel y lápiz, que la representación utilizando la herramienta del Geogebra?
c) Reflexiona respecto de las actividades realizadas.
d) Establece semejanzas y diferencias en el trabajo efectuado.

En esta formulación se advierte la falta de utilización de varios de los criterios para elaborar consignas, encontrándose en extremo pautada, sin pedido de argumentación y el uso de TIC no resulta clave. La tarea sí incluye la reflexión sobre las consignas propuestas.

Los profesores a cargo del ciclo formativo consideran que esta propuesta pone de manifiesto la dificultad de analizar las producciones propias a la luz de los criterios, lo que ubica al docente en un nivel inicial bajo de la competencia de análisis didáctico. Sin embargo, considerando que es un punto de partida esperado, se sostuvo la necesidad de que tomen su producción como ajena para analizarla, se los acompañó en esta tarea realizando intervenciones para que fuesen los propios autores quienes advirtiesen la distancia entre lo que los criterios expresan.

La última versión del grupo de profesores, tras las devoluciones del equipo coordinador es la siguiente, donde se observa un planteo abierto, se promueve la argumentación, se mantienen las consignas para reflexionar sobre lo realizado y se hace una anticipación de intervenciones para la puesta en común que atienden a los criterios mencionados.

Primer momento: trabajo individual.

a) Reflexiona sobre el concepto de recta tangente a una curva y registra por escrito las ideas, gráficos, frases, características o expresiones simbólicas, etc., que se te ocurran cuando piensas en este tema.

Segundo momento: intercambio en pequeños grupos con la consigna de acordar una respuesta para ser presentada al resto de la clase.

b) Comparte con tu subgrupo estas ideas, extrae conclusiones y registralas en el afiche entregado para compartir y debatir con la clase.

Tercer momento: intercambio con la clase

Finalizada esta actividad se compartirán los registros realizados en los afiches, para visualizar las diferentes respuestas de los subgrupos, de modo tal que quedará explícita la imagen conceptual de cada alumno, en sus apuntes, y del grupo en el afiche. Algunas expresiones o ideas que pueden aparecer son:

I. La recta tangente a la curva en un punto es la recta que "corta" a la curva en ese único punto.
II. La recta tangente a la curva en un punto es la recta que "toca" a la curva en ese único punto.
III. La recta tangente a la curva en un punto es la recta que "corta" a la curva en ese punto y deja a todos los demás puntos de la curva en un mismo semiplano.

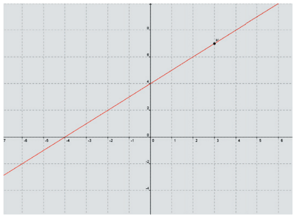
Y, las representaciones gráficas que pueden aparecer son circunferencias o parábolas, etc.

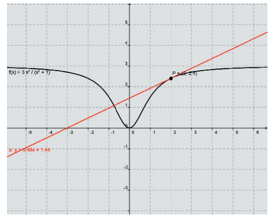
Cuarto momento: trabajo individual nuevamente.

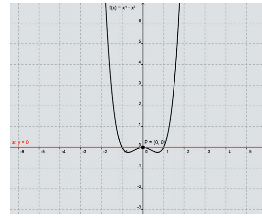
c) Representa gráficamente, con papel y lápiz, cinco funciones diferentes, y dibuja, si es posible, la recta tangente a la curva en un punto p de la misma. Fundamenta tu respuesta.
d) Realiza la actividad anterior utilizando como herramienta el software Geogebra y responde:
i) ¿Resulta igual la representación de la recta tangente, con papel y lápiz, que la representación utilizando la herramienta del Geogebra?
ii) Establece semejanzas y diferencias en el trabajo efectuado.
e) Reflexiona respecto de las actividades realizadas.

Respecto de la previsión de errores e intervenciones, el equipo señaló:

Suponemos que los estudiantes descartarán en un primer momento gráficas como éstas:

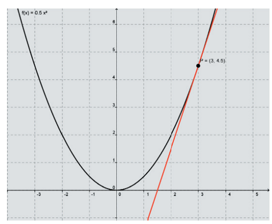






Esto se debe a que creemos que los estudiantes suponen que la recta tangente a la curva no puede tocar en más de un punto a la misma. Lo mismo ocurriría con el caso de las curvas que representan a las funciones trigonométricas.

Sí creemos que aparecerán gráficos como el siguiente:



Además, pensamos que aquí comienza un conflicto para los estudiantes, que los inicia en la idea de que el concepto de recta tangente no está claro para ellos.

Analiza lo que ocurre en un entorno del punto donde se busca la recta tangente, tratando de encontrar el significado geométrico de la misma. Realiza un documento que muestre el trabajo realizado por tu subgrupo, para ser entregado al finalizar el encuentro.

Quinto momento: trabajo en subgrupos e intercambio de las respuestas.

Reflexiona sobre el concepto de recta tangente, registrando por escrito las conclusiones obtenidas a partir del análisis de las actividades realizadas, para ser compartida al inicio del próximo encuentro.

Es probable que durante la discusión entre pares los estudiantes desestimen que la recta tangente corta o toca en un único punto a la curva y que advierta que la recta se confunde con la curva en un entorno del punto, lo cual los llevará a pensar que en las cercanías del punto la curva se comporta casi igual que la recta.

En este caso, el zoom en el Geogebra será un elemento que fortalecerá la conjetura de que la curva y la recta tangente comparten un segmento en común en los alrededores del punto. Este hecho, sumado a las anticipaciones sobre tangencia, al concepto en formación y a la búsqueda bibliográfica, permitirá avanzar hacia el ajuste de la noción, al tiempo que ayudaría a clarificar, en este caso, el alcance del software. Además, apelar a argumentaciones matemáticas será clave, en tanto es el objetivo del profesor en la clase de Matemáticas. Esto le otorga al nuevo diseño de la tarea una mayor idoneidad didáctica, de acuerdo a los indicadores propuestos por el EOS y atiende a los criterios generales mencionados, lo que permite tener evidencias de una mejora en la competencia de análisis didáctico.

5. Consideraciones finales

La revisión de la literatura muestra que inicialmente los criterios de idoneidad didáctica del EOS se diseñaron y fueron utilizados para valorar procesos de instrucción efectivamente implementados. Una de las novedades que se plantearon en los ciclos experimentados en Argentina fue utilizar los criterios de idoneidad directamente en el proceso de planificación de una secuencia de tareas. A partir de la experiencia, se considera que dichos criterios son elementos relevantes en un proceso de diseño instruccional, siempre y cuando se acompañen con indicaciones relacionadas con una hipotética implementación que los hagan operativos. Esto es, que haga reflexionar al profesor sobre los diferentes procedimientos de resolución que involucra la tarea, anticipación y tratamiento posible de los errores y dificultades que pudiesen tener los estudiantes, tipos de intervenciones a realizar durante la gestión de la clase, entre otros.

El ciclo FFPMS descrito muestra un caso de rediseño a partir de experiencias formativas previas. Resultó clave capitalizar experiencias anteriores estableciendo criterios que permitan ser reutilizados, trascendiendo los casos que les dieron origen. Fue necesario introducir, además de los criterios de idoneidad y sus indicadores, pautas concretas que diesen sugerencias de diseño y secuenciación de tareas. Específicamente, se tuvieron que introducir criterios para elaborar las consignas de las tareas y también sugerencias de intervención y gestión que hicieran pensar en una hipotética implementación de las tareas diseñadas. Esto, junto con la necesidad de fundamentar los diseños de tareas usando documentos curriculares y herramientas de la Didáctica de las Matemáticas, no sólo ayudó a lograr una mayor idoneidad didáctica de las secuencias, sino también, promovió el desarrollo de la competencia en análisis didáctico de los profesores.

La experiencia que se describió y analizó es un ejemplo relevante sobre cómo se pueden evaluar competencias profesionales en la formación de profesores. En los ciclos formativos FPMS y FFPMS se constató un desarrollo de la competencia en análisis didáctico de los participantes, lo cual se justifica en tanto se cumplieron algunos de los indicadores de esta competencia señalados en Font (2011). El desarrollo fue diverso debido, entre otras razones, a las características de los asistentes, la motivación y el tiempo. Sin embargo, en todos los casos, los participantes de los ciclos advirtieron su evolución logrando identificar obstáculos y facilitadores para desarrollar las tareas planteadas. Centralmente se identificaron dos cuestiones clave: la presencia de las nuevas tecnologías, como recurso obligatorio a ser incluido en las clases y el enfoque matemático que obligó a los participantes a articular los marcos geométrico, analítico, algebraico, numérico y verbal en sus propuestas. Por un lado, el uso requerido de las TIC puede haber tenido una influencia en la gestión de la clase y en el no reconocimiento de errores matemáticos que surgieron en las aulas. La anticipación de errores, aunque fuese una práctica usual en docentes, se ve modificada por las nuevas tecnologías de modo que muchos de ellos resultan novedosos e inesperados incluso en docentes con experticia. Los indicadores para valorar la idoneidad mediacional nos han permitido tener registro de estos casos. Asimismo en términos del enfoque que debieron plasmar con el contenido matemático abordado, las articulaciones entre los distintos marcos pueden haber facilitado en algunos casos argumentaciones que permitan sostener la validez o no de alguna cuestión; pero en otros casos la necesidad de moverse flexiblemente entre una y otra perspectiva fue una actividad no usual, constituyendo otro rasgo inusual dentro de las prácticas usuales de enseñanza de las Matemáticas en el nivel superior. Estos hechos se pudieron identificar mediante los indicadores para valorar la idoneidad epistémica de las clases.

El trabajo de rediseño desarrollado, que partió de capitalizar experiencias anteriores, permitió construir criterios reutilizables que favorecen el desarrollo de la competencia en análisis didáctico. Consideramos central en la formación de profesores, tanto la inicial como la continua, el desarrollo de esta competencia debido a que es una herramienta clave para que el profesor logre aprendizajes significativos en sus estudiantes y tenga elementos para explicar qué es lo que ocurre, en caso de que advierta que su propuesta no resulta adecuada. Entendemos que los criterios aquí expuestos son un aporte para la formación docente y permiten mejorarla en este aspecto específico. Considerar el Enfoque Integral (Weinert, 2001), dentro de los enfoques de competencias nos permitió atender, desde la propuesta de criterios, al manejo específico de conocimientos, habilidades y reflexión para alcanzar un desempeño eficaz en una de las tareas específicas de la profesión docente que redunda en mejores aprendizajes matemáticos.

Reconocimientos

Trabajo realizado en el marco de los proyectos: EDU2009-0820 y EDU2012-32644 del Ministerio de Economía y Competitividad de España, 31/0183 de la Universidad Nacional de Villa María (Argentina) y 30/3181 de la Universidad Nacional de General Sarmiento (Argentina).

Referencias bibliográficas

Burger, E. & Starbird, M. (2005). *The heart of mathematics: An invitation to effective thinking* (2nd ed.). Emeryville, United States of America: Key College Publishing.

Cobb, P., Confrey, J., diSessa, A., Lehrer, R. & Schauble, L. (2003). Design experiments in educational research. *Educational Researcher*, *32*(1), 9-13. doi: 10.3102/0013189X032001009

Cobb, P. & Gravemeijer, K. (2008). Experimenting to support and understand learning processes. In A.E. Kelly, R. A. Lesh, & J. Y. Baek (Eds.), *Handbook of design research methods in education. Innovations in science, technology, engineering and mathematics learning and teaching* (pp. 68-95). New Jersey, United States of America: Lawrence Erlbaum Associates.

Contreras, A., García, M. y Font, V. (2012). Análisis de un Proceso de Estudio sobre la Enseñanza del Límite de una Función. *Boletim de Educação Matemática*, *26*(42B), 667-690.

Even, R. & Ball, D. L. (Eds.) (2009). *The professional education and development of teachers of mathematics: The 15th ICMI study*. New York, United States of America: Springer.

Fernández, C., Llinares, S. & Valls, J. (2012). Learning to notice students' mathematical thinking through on-line discussions. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, *44*(6), 747-759. doi: 10.1007/s11858-012-0425-y

Font, V. (2011). Competencias profesionales en la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. *Unión. Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 26*, 9-25.

Font, V., Giménez, J., Zorrilla, J., Larios, V., Dehesa, N., Aubanell, A. y Benseny, A. (2012). Competencias del profesor y competencias del profesor de matemáticas: Una propuesta. En V. Font, J. Giménez, V. Larios y J. Zorrilla (Eds.), *Competencias del profesor de matemáticas de secundaria y bachillerato* (pp. 61-70). Barcelona, España: Publicaciones de la Universitat de Barcelona.

Font, V., Planas, N. y Godino, J. (2010). Modelo para el análisis didáctico en educación matemática. *Infancia y Aprendizaje*, *33*(1), 89-105.

Giménez, J., Font, V. & Vanegas, Y. (2013). Designing Professional Tasks for Didactical Analysis as a research process. En C. Margolinas (Ed.), *Task Design in Mathematics Education* (pp. 581-590). Oxford, England: Proceedings of ICMI Study 22.

Godino, J. Batanero, C. & Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM:* The International Journal on Mathematics Education*, 39*(1-2), 127-135. doi: 10.1007/s11858-006-0004-1

González, J. & Wagenaar, R. (2003). *Tuning Educational Structures in Europe. Informe Final – Proyecto Piloto, Fase 1*, Bilbao, Spain: Universidad de Deusto.

Hill, H., Blunk, M., Charambous, Y., Lewis, J., Phelps, G., Sleep, L. & Ball, D. (2008). Mathematical Knowledge for Teaching and the Mathematical Quality of Instruction. An Exploratory Study. *Cognition and Instruction, 26*(4), 430-511. doi: 10.1080/07370000802177235

INFD (2010). *Proyecto de mejora para la formación inicial de profesores para el nivel secundario. Área: Matemática*. Buenos Aires, Argentina: Ministerio de Educación, Instituto Nacional de Formación Docente y Secretaría de Políticas Universitarias.

Mason, J. (2002). *Researching your own practice. The discipline of noticing*. London, England: Routledge-Falmer.

Mason, J. & Johnston-Wilder, S. (2004). *Designing and Using Mathematical Tasks*. London, England: Tarquin.

Poblete, A. y Díaz, V. (2003). Competencias profesionales del profesor de matemáticas. *Números, 53*, 3-13.

Pochulu, M. y Font, V. (2011). Análisis del funcionamiento de una clase de matemáticas no significativa. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *14*(3), 361-394.

Schoenfeld, A. & Kilpatrick, J. (2008). Toward a theory of proficiency in teaching mathematics. In D. Tirosh & T. Wood (Eds.), *Tools and processes in mathematics teacher education* (pp. 321-354). Rotterdam, Netherlands: Sense publishers.

Silverman, J. & Thompson, P. (2008). Toward a framework for the development of mathematical knowledge for teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *11*(6), 499-511. doi: 10.1007/s10857-008-9089-5

Stein, M., Smith, M., Henningsen, M. & Silver, E. (2000). *Implementing standards-based mathematics instruction: a Casebook for Professional Development*. New York, United States of America: Teachers College Press.

Swan, M. (2007). The impact of task-based professional development on teachers' practices and beliefs: a design research study. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *10*(4-6), 217-237. doi: 10.1007/s10857-007-9038-8

Tzur, R., Sullivan, P. & Zaslavsky, O. (2008). Examining teachers' use of (non-routine) mathematical tasks in classrooms from three complementary perspectives: Teacher, teacher educator, researcher. In O. Figueras & A. Sepúlveda (Eds.), *Proceedings of the Joint Meeting of the 32nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, and the 30th North American Chapter* (Vol. 1, pp. 133-137). Ciudad de México, México: PME.

Weinert, F. (2001). Concept of competence: A conceptual clarification. In D. Rychen & L. Salganik (Eds.), *Definition and selection key competencies* (pp. 45–65). Gottingen, Germany: Hogrefe & Huber.

Wilson, P., Cooney, T. & Stinson, D. (2005). What constitutes good mathematics teaching and how it develops: Nine high school teachers' perspectives. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *8*(2), 83-111. doi: 10.1007/s10857-005-4796-7

Zaslavsky, O. & Sullivan, P. (Eds.) (2011). *Constructing knowledge for teaching: Secondary mathematics tasks to enhance prospective and practicing teacher learning*. New York, United States of America: Springer.

Autores

Marcel Pochulu. Universidad Nacional de Villa María, Argentina. mpochulu@unvm.edu.ar

Vicenc Font. Universitat de Barcelona, España. vfont@ub.edu

Mabel Rodríguez. Universidad Nacional de General Sarmiento, Argentina. pharos@arnet.com.ar

Ruth Rodríguez Gallegos, Samantha Quiroz Rivera

EL PAPEL DE LA TECNOLOGÍA EN EL PROCESO DE MODELACIÓN MATEMÁTICA PARA LA ENSEÑANZA DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES

The role of technology in the process of mathematical modeling for teaching differential equations

RESUMEN

El presente artículo tiene como intención mostrar el papel de la tecnología escolar en el tránsito por las diversas etapas de la modelación matemática. Desde 2008, en el Tecnológico de Monterrey, se implementó la modelación matemática en un curso de Ecuaciones Diferenciales como principal medio para el aprendizaje de este tema. Se reporta el diseño de una situación específica en el contexto de circuitos eléctricos RC donde se utilizan diversos recursos tecnológicos en el desarrollo de las actividades. A través del estudio de las praxeologías del ciclo de modelación matemática, se describen los tipos de tareas incorporadas gracias a la tecnología utilizada y el papel que dichos tipos de tareas pueden tener para un mejor tránsito entre los dominios de dicho ciclo. Finalmente, se presentan algunas implicaciones pertinentes a las que se llegan y futuras líneas de investigación.

PALABRAS CLAVE:

- *Modelación*
- *Matemáticas*
- *Tecnología*
- *Ecuaciones Diferenciales*
- *Circuitos Eléctricos*

ABSTRACT

The goal of this article is to present the role of the technology during the transit between the different stages of the mathematical modeling cycle. Since 2008 at Tecnológico de Monterrey, it was began the development of a course that involves a mathematical modeling perspective as the principal mean for learning Differential Equations. It is presented the design of a specific situation related with Circuits Electric Context with activities based on the use of diverse technology.

KEY WORDS:

- *Modeling*
- *Mathematics*
- *Technology*
- *Differential Equations*
- *Electrical Circuits*

Recepción: Febrero 17, 2014 / Aceptación: Diciembre 26, 2015. DOI: 10.12802/relime.13.1914

Based on a praxeological study we describes the types of tasks related to the mathematical modeling cycle when technology is applied, and also how the former ones might propose a better transit between the diverse domains of the modeling cycle. We conclude with the concluding remarks and future lines of research.

RESUMO

Este artigo destina-se a mostrar o papel da tecnologia em trânsito através dos vários estágios de modelagem matemática. A partir de 2008 Monterrey Tech iniciou o desenvolvimento de um curso que incorpora a modelagem matemática como o principal meio para a aprendizagem de Equações Diferenciais. Projeto situação específica é apresentada no contexto de circuitos RC actividades baseadas onde varia adicionados a utilização de tecnologia. Recorrendo ao estudo dos tipos de tarefas praxeologies modelagem ciclo incorporado graças à tecnologia utilizada e do papel que estes tipos de tarefas podem ser para melhor trânsito entre os domínios do ciclo de modelagem matemática são descritos. Finalmente, algumas conclusões que chegarão e pesquisas futuras são apresentadas.

PALAVRAS CHAVE:
- *Modelagem*
- *Matemática*
- *Tecnologia*
- *Equações Diferenciais*
- *Circuitos elétricos*

RÉSUMÉ

L'intention du présent article est de montrer le rôle de la téchnologie dans le parcours de diverses étapes du cycle de modelation mathématique. Dépuis 2008, au sein de Tecnológico de Monterrey, on a commencé à developper le cours qui incorpore la modelation mathématique comme moyen principal pour l'apprentissage des équations différentielles. On presente le dessin de la situación spécifique dans le contexte de circuits electriques RC auxquels on ajoute les activités basées sur l'usage de téchnologie variée. Faisant récours à l'étude de praxeologies, on décrit les types des tâches incorporées au cycle de modelation grâce à la téchnologie utilisée et le rôle que lesdits types de tâches peuvent jouer pour un meilleur parcours entre les domaines du cycle de modelation mathématique. Finalement on presente quelques conclusions auxquelles on arrive et les futures lignes de recherche.

MOTS CLÉS:
- *Modelation*
- *Mathématiques*
- *Téchnologie*
- *Équations Différentielles*
- *Circuits Eléctriques*

1. Introducción

Al día de hoy, la enseñanza usual de un curso de Ecuaciones Diferenciales (ED) se limita a la presentación de una serie de procedimientos analíticos que den respuesta a problemas matemáticos sin contexto. Los resultados de la predominancia de dichos métodos sobre los numéricos y cualitativos muestran desde años atrás un aprendizaje parcial por parte de los alumnos (Artigue, 1989; Blanchard, 1994; Arslan, Chaachoua y Laborde, 2004). Actualmente, y de acuerdo con los estándares dictados por organizaciones nacionales e internacionales, el aprendizaje memorístico de procedimientos analíticos no es suficiente para alcanzar la formación integral de los futuros profesionistas. El nuevo perfil de los alumnos requiere el desarrollo de una serie de competencias donde no solamente se adquieran conocimientos para la resolución de problemas, sino también las habilidades para hacer uso de ellos en contextos cotidianos y específicos de cada profesión.

Precisamente, el desarrollo de la competencia en la resolución de problemas de la vida real en el aprendizaje de las matemáticas es reconocida y destacada como elemental, tanto por la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE, 2003), como por el Proyecto Tuning Latinoamérica, (Beneitone, Esquetini, González, Maletá, Siufi y Wagenaar, 2007). Lograr los objetivos mencionados necesita del rediseño de situaciones de aprendizaje a través de estrategias didácticas que busquen tender un puente entre la matemática escolar y la matemática de la vida cotidiana, tal es el caso de la modelación matemática.

El Tecnológico de Monterrey, universidad privada ubicada al norte de México, brinda a la resolución de problemas en contexto un lugar privilegiado en el currículo de la formación de ingenieros desde sus planes de estudio 2008. Específicamente, el curso de ED ha sido modificado en busca de la generación de aprendizajes que provean relaciones entre la matemática escolar y la de la vida cotidiana y laboral futura de los estudiantes, mediante situaciones que permitan la inclusión de la modelación matemática. Las sesiones que se presentan en el curso están fuertemente apoyadas por el uso de tecnología diversa de acuerdo con los propósitos de cada sesión.

En investigaciones precedentes, se ha mostrado (Rodríguez, 2007, 2010), a través de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD), un análisis de situaciones donde se utiliza la modelación matemática para la enseñanza y el aprendizaje de las Ecuaciones Diferenciales utilizando contextos propios de la Ingeniería. El objetivo de la presente investigación es presentar la reformulación de las situaciones reportadas a través de la inserción de tecnología diversa y valorar la importancia que representa su uso en el tránsito entre los diferentes elementos del ciclo de modelación matemática. La situación didáctica donde se realizarán cambios en su diseño está basada en el contexto de circuitos eléctricos RC para la enseñanza del modelo ED ordinaria (EDO) lineal para futuros ingenieros.

Se presenta en primer lugar, una revisión del estado del arte concerniente tanto al tema de las ED como a la modelación matemática, específicamente con el fin de dar a conocer su manejo en la universidad donde se realiza el estudio. Posteriormente, se detalla la manera en que se realizó el proceso de rediseño de la situación elegida a través de los elementos propios del marco teórico para, finalmente, dar a conocer los resultados, así como las conclusiones a las que se llega.

2. Un curso de Ecuaciones Diferenciales basado en Modelación Matemática

En el Tecnológico de Monterey, el curso de ED es, para una gran parte de los estudiantes, el último curso formal de matemáticas básicas y la culminación de una serie de cursos de Cálculo Integral y Diferencial. A través de su estudio, se pretende que el alumno sea capaz de poder aplicar sus conocimientos a las materias de especialidad en cursos posteriores, hecho que, se ha demostrado, no ocurre necesariamente de manera automática. Este curso es impartido a 22 carreras diferentes y se sitúa en el tercer o cuarto semestre. Un antecedente importante de esta propuesta es el Rediseño Curricular en las Matemáticas del sector de Ingeniería, iniciado en el año 1999 (Salinas y Alanís, 2009; Salinas, Alanís y Pulido, 2011). En dicho rediseño, se cuestiona no solo el cómo enseñar (metodología o técnica didácticas), sino el qué enseñar (contenido) y para qué enseñarlo (prácticas profesionales/ingenieriles).

Con estos antecedentes, desde 2008 se inició con la propuesta de retomar el camino ya avanzado, pero además se propuso para el curso de Ecuaciones Diferenciales (ED) un enfoque basado en la enseñanza a través de la modelación matemática. El énfasis principal es la visión de los objetos matemáticos como herramientas para modelar fenómenos diversos en contextos varios (físicos, químicos, biológicos, sociales, etc.). Se escoge al objeto ED como una herramienta idónea para modelar fenómenos de naturaleza varia y que dotarán al alumno de significado al objeto mismo.

Las medidas para el rediseño del curso de ED se basan en la imperiosa necesidad de reformular su enseñanza a través de la modelación de fenómenos diversos (Lomen y Lovelock, 2000; Blanchard, Devaney & Hall, 2006; Zill, 2009) y en la preponderancia del uso variado de tecnología, entre ella: *software* especializado como Maple, Mathematica; *software* de acceso libre como Wolfram Alpha, calculadoras graficadoras como la TI Nspire CX CAS, simuladores (Recursos Educativos Abiertos, REA; como PhET y DETools), así como, muy recientemente, el uso de aplicaciones de tabletas y/o redes sociales. El rediseño se sustenta en estudios previos que han permitido identificar el uso específico que se le daba a las ED en otras áreas ingenieriles (2009, 2012 y 2013).

Un aspecto más importante incorporado al curso de ED es el cambio de la preponderancia de métodos analíticos sobre los métodos cualitativos y numéricos (Arslan et Laborde, 2003; Artigue, 1989, 1992, 1995, 1996; Blanchard, 1994; Kallaher, 1999; Moreno & Laborde, 2003; Rasmussen & Whitehead, 2003). Si bien es cierto que existen casos de éxito documentados en México en los últimos años y propuestas innovadoras sobre su enseñanza a nivel internacional (Lomen y Lovelock, 2000; Barnes & Fulford, 2002; Blanchard et al., 2006; Boyce y DiPrima, 2010; Brannan y Boyce, 2007), así como algunas investigaciones al respecto (Rasmussen, 2001), es necesario un mayor cambio en lo que se vive en las aulas, en particular en el área de ingeniería.

3. ¿Por qué elegir Modelación matemática?

Para la formación de ciudadanos críticos y buenos profesionistas en los contextos donde se desenvuelvan, es de gran importancia el desarrollo de competencias para identificar y resolver problemas en su ambiente cultural (Alsina, 2007; Confrey, 2007; Muller & Buskhardt, 2007; Niss, Blum & Galbraith, 2007). Sin embargo, las investigaciones siguen mostrando que existe en las aulas de clase una desvinculación entre las matemáticas y sus aplicaciones, lo cual conlleva a un bajo rendimiento académico de los alumnos (Brousseau, 1999; Niss et al., 2007; Santos, 1997).

La modelación matemática tiene su génesis precisamente en el establecimiento de una relación dicotómica entre las matemáticas y el estudio de sus aplicaciones. La comunidad de Matemática Educativa ha analizado a la modelación desde seis perspectivas acordes a Kaiser y Sriraman (2006): realística, contextual, educacional, sociocrítica, epistemológica y cognitiva. El presente trabajo retomará la perspectiva educativa, estudiando la modelación matemática como una estrategia didáctica que tiene como objetivo el dar contexto a las matemáticas en la escuela. Son numerosos los estudios que han pretendido proveer de una definición sobre lo que es la modelación matemática. Blum y Niss (1990) la describen como un proceso completo que consiste en transitar desde un problema planteado en una situación real hasta un modelo matemático. En la presente investigación, la modelación matemática es concebida como un proceso cíclico que vincula el dominio real con el matemático, reconociendo entre ellos dos dominios más identificados por Rodríguez (2007, 2010): el físico y el pseudo concreto. Las situaciones propuestas en modelación matemática parten del establecimiento de actividades que planteen un problema en el contexto real, para el posterior armado de un modelo pseudo concreto, que se traduce en uno físico y, posteriormente, en un modelo matemático. A dichas actividades les continúan la resolución del modelo matemático, tanto en términos matemáticos como en físicos y pseudo concretos, donde se promueve la crítica del modelo y, si es necesaria, su modificación. La respuesta a la pregunta establecida en un inicio completa el ciclo completo de la modelación matemática.

Para mostrar gráficamente el proceso de modelación matemática, se presenta en la Figura 1 el esquema presentado por Rodríguez (2007, 2010).

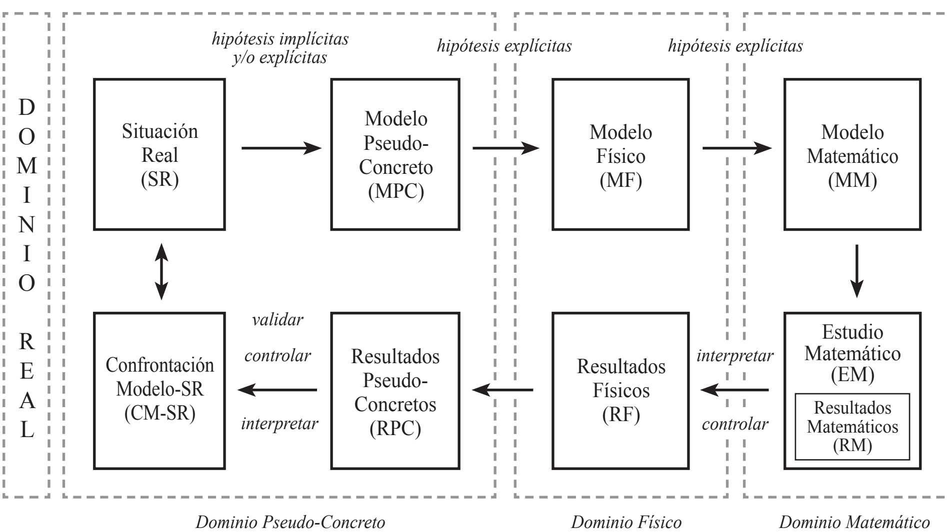


Figura 1. Ciclo de modelación de Rodríguez (2007, 2010)

Investigaciones respecto al diseño de clases basadas en modelación matemática han evidenciado en sus resultados un mayor logro de los alumnos en el establecimiento de conexiones entre las matemáticas escolares y las situaciones de la vida cotidiana, la reducción de la ansiedad hacia la asignatura de Matemáticas, mejor disposición para aceptar orientaciones, organizar información, pensar en sus acciones, la promoción de habilidades comunicativas e intercambio de ideas, el aumento de la motivación y el desarrollo de habilidades críticas y de resolución de problemas (Alsina, 2007; Aravena & Caamaño, 2009; Kaiser & Maaß, 2007).

Por todo lo anterior, se seleccionó la modelación matemática como estrategia didáctica en el diseño de situaciones propuestas en el curso de ED y específicamente en el diseño de la sesión de clase que se detalla a continuación.

4. Marco teórico

Se analiza el proceso de modelación matemática como un conjunto de diversas praxeologías. Esta idea se retoma de la Teoría Antropológica de lo Didáctico propuesta por Yves Chevallard en 1985, cuyo principal postulado establece la idea de que toda actividad humana puede describirse a través de praxeologías. Una praxeología, de acuerdo con Chevallard (1999) alberga cuatro elementos principales: tarea, técnica, tecnología y teoría. Los dos primeros conforman el bloque práctico-técnico, relativo al saber hacer, y los dos segundos, referentes al saber, conforman el bloque tecnológico-teórico[1].

Basados en estudios previos (Rodríguez, 2010; Quiroz y Rodríguez, 2015), se considera que el ciclo de modelación matemática está configurado por una sucesión de praxeologías donde, al menos, exista una por cada una de las etapas de éste, así como algunas presentes en las transiciones entre las etapas. La identificación de las praxeologías que componen el ciclo de modelación conforma una herramienta que sustenta análisis de prácticas que pueden abarcar desde lo establecido en libros de textos escolares, como las acciones didácticas realizadas por el profesor en una clase.

Atendiendo al primer propósito mencionado, retomamos los resultados descritos por Rodríguez (2010) para evidenciar que, en las clases de ecuaciones diferenciales, pocas veces se pueden identificar todas las praxeologías

[1] Es importante mencionar que el término “tecnología”, propuesto por Chevallard, es definido como el discurso racional sobre la técnica y no se refiere a los instrumentos o recursos usados en la clase (calculadoras, sensores, etc.) como en las secciones siguientes se utiliza.

referidas al ciclo completo de modelación matemática. De acuerdo al estudio, muy pocas actividades realizadas por el docente permiten a los alumnos el tránsito entre las etapas de Situación Real y el Modelo Pseudo-Concreto. Además de ello, se otorga un reducido espacio para el establecimiento de una ED y pocos ejercicios que confrontan al estudiante en la transición de Resultados Pseudo-Concretos y la Confrontación Modelo Realidad. En específico, los tipos de tareas que los libros de Matemáticas y Física de bachillerato en Francia plantean a sus alumnos para el aprendizaje de ED en un contexto de circuitos eléctricos son:

- T_{ED} Establecer una ecuación diferencial que modele la carga en el capacitor presente en el circuito
- T_{CE} Representar un diagrama de un circuito eléctrico RC
- T_{SP} Encontrar la solución general de la ED
- T_{SG} Encontrar una solución particular de la ED
- T_C Determinar la corriente eléctrica en el circuito usando la función de voltaje en el capacitor

Al omitir algunas de las etapas del ciclo de modelación, fue posible identificar las dificultades que persistían en los estudiantes al trabajar dicho contenido en el salón de clases, las cuales se enumeran en la Tabla 1.

TABLA I
Dificultades de los alumnos identificadas
durante la realización de la situación experimental

Transición entre etapas del proceso de modelación	*Descripción de la dificultad encontrada*
SR→MCP→MP	Los alumnos no sienten la necesidad de incluir una resistencia en el circuito eléctrico
MM	Los estudiantes olvidan algunas relaciones o leyes físicas para establecer la ecuación diferencial.
EM→SR→EM	Dificultad para establecer la condición inicial en forma física y/o matemática
RM→RF→RPC	Los estudiantes no consideran la corriente eléctrica en el circuito como función del tiempo

Con dichos resultados, la presente investigación muestra el diseño de una situación experimental en una clase de ED para ingenieros enmarcada en un contexto de circuitos eléctricos RC. Las actividades se centraron en la incorporación de tipos de tareas omitidas por los libros de texto analizados en estudios anteriores. Los tipos de tarea que configuran las actividades diseñadas se configuran precisamente como las categorías de análisis que guiarán los resultados del estudio.

Es preciso mencionar que el diseño realizado estuvo regulado por la incorporación de materiales tecnológicos. El principal objetivo es la identificación del impacto de dichos materiales tecnológicos en las transiciones entre las etapas del ciclo de modelación, así como en superar las dificultades que se presentaron en el estudio anteriormente descrito.

5. Diseño de la situación experimental

La actividad diseñada estuvo basada en la elección de la modelación matemática como estrategia principal. Se pretendía que el diseño de la secuencia didáctica llevara a los alumnos al dar respuesta a una situación problema, logrando el tránsito por las diferentes etapas de modelación matemática y con ello un aprendizaje de la resolución de la ED por el método de ED lineal. Para el diseño de la situación se tuvo como referente el ciclo de modelación presentado por Rodríguez (2007, 2010). El contexto elegido fue el estudio de la carga y descarga de un capacitor en un circuito eléctrico RC. Dicha elección se sustenta por ser una temática muy relacionada con las diversas ingenierías a las que pertenecen los alumnos, puesto que la mayoría de ellos ha cursado la materia de Electricidad y Magnetismo, donde se estudian de manera teórica los circuitos eléctricos.

La incorporación de la tecnología en la actividad tenía como intención el buscar un mejor entendimiento al problema planteado y, a su vez, la superación de las dificultades reportadas en las diferentes etapas del ciclo de modelación matemática, así como en los tránsitos entre ellas. De esta manera, se eligió como tecnología que apoyara la sesión de clase:

- Una calculadora TI Nspire CX CAS
- Un sensor de voltaje TI
- Navegador TI
- Circuito eléctrico
- Capacitor
- Resistencia (foco)
- Cuatro baterías
- Tres conectores

A los tipos de tareas que Rodríguez (2007, 2010) identifica en su estudio, se añaden cuatro más representadas en las actividades que se les pide a los alumnos realizar y que se fundamentan principalmente en la elección de la tecnología descrita:

- T_{ED} Establecer una ecuación diferencial que modela la carga en el capacitor presente en el circuito
- T_{AC} Armar un circuito eléctrico RC (resistencia-capacitor)
- T_{OG} Obtener la gráfica de carga y descarga del capacitor
- T_{AG} Analizar la gráfica de carga y descarga del capacitor
- T_{SG} Encontrar la solución general de la ED
- T_{SP} Encontrar la solución particular de la ED
- T_{RF} Reflexionar sobre la relación entre la solución analítica y la gráfica obtenida
- T_{C} Determinar la corriente eléctrica en el circuito usando la función de voltaje en el capacitor

Los tipos de tareas que fueron incorporadas a la sesión debido a la tecnología, se describen a continuación:

5.1. T_{AC} *Armar un circuito eléctrico*

El primer tipo de tareas tenía la intención de apoyar la transición entre el planteamiento de la situación real y la creación de un modelo físico y, posteriormente, el modelo matemático. Para ello, sustituyendo la práctica de dibujar el circuito eléctrico RC, se proporcionó material para que se armara físicamente. Cada equipo de trabajo contaba con un circuito eléctrico RC (Ver Figura 2).

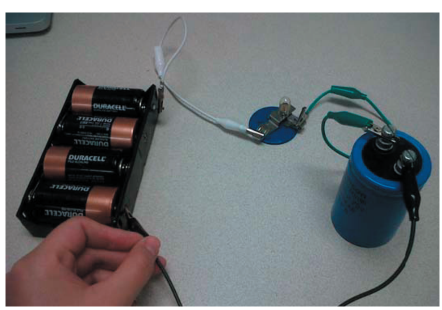


Figura 2. Materiales para la sesión

Además, cada equipo contó con una actividad que guiaba el armado del circuito como se muestra en la Figura 3. Con la presencia de imágenes, se indicaba a los alumnos la manera en que cada parte del circuito debía ser conectada.

Actividad: Circuito eléctrico RC (PRIMERA PARTE)

Equipo: ____

Integrantes: ____________________________________

I.- Construcción de un circuito eléctrico RC

1.- Verifica que tu material esté completo:

a) Generador (Baterías)	d) Tres cables conectores
b) Resistencia (foco)	e) Calculadora TI NSPIRE CX CAS
c) Capacitor	f) Sensor de voltaje

2.- Une el generador con la resistencia con ayuda de un conector

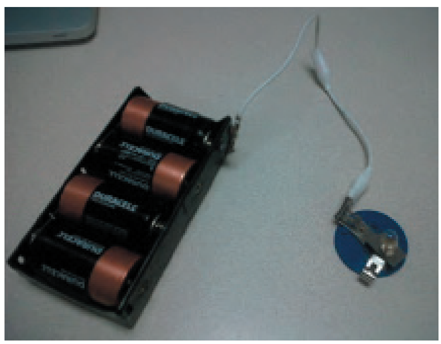


Figura 3. Actividad para el armado del circuito eléctrico RC

5.2. T_{OG} *Obtener la gráfica de carga y descarga del capacitor*

El segundo tipo de tareas consistía en registrar mediante el sensor de voltaje la gráfica de carga y la gráfica de descarga del capacitor. Para ello, se proveía a los alumnos de una calculadora TI Nspire CX CAS y un sensor de voltaje TI (Ver Figura 4).

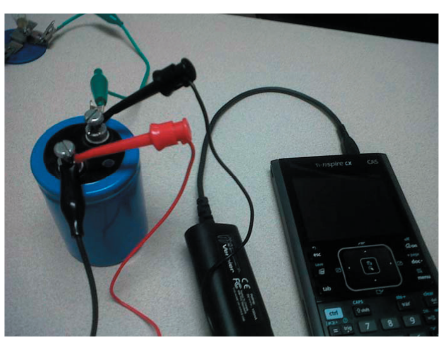


Figura 4. Calculadora y sensor de voltaje conectado al capacitor

Además de ello, se proporcionaba una guía o manual, en la que se indicaba la manera en que la calculadora y el sensor funcionaban, así como la forma de capturar las gráficas (Ver Figura 5).

6.- En la TI se abrirá automáticamente la aplicación que reconoce el Sensor de Voltaje. Da click en la pestaña que tiene una gráfica dibujada.

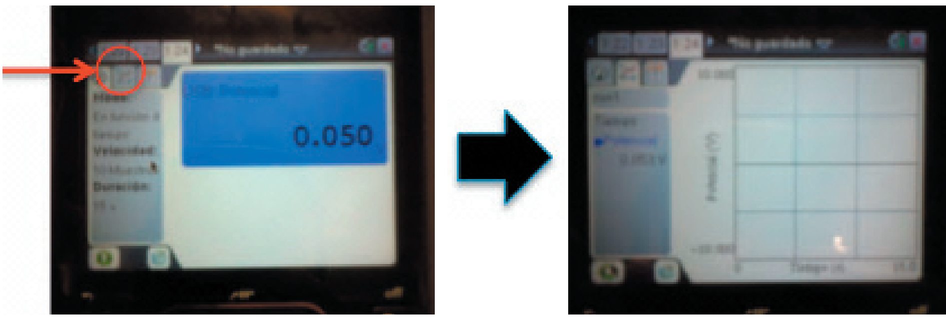


Figura 5. Actividad de guía en el uso del sensor de voltaje

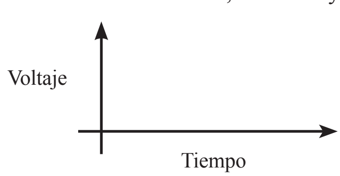
Esta actividad estaba destinada al apoyo entre la Situación Real y la creación del Modelo Físico, puesto que se propiciaba la creación de una representación física del fenómeno proporcionado.

5.3. T_{AG} *Analizar la gráfica de carga y descarga del capacitor*

El tercer tipo de tareas promovía el análisis de las gráficas obtenidas a través de los sensores de voltaje.

- Dibujar la gráfica de carga y descarga que el sensor registró
- Describir la forma de las gráficas
- Indicar sus asíntotas
- Establecer el porqué de las asíntotas en los valores mostrados (Ver Figura 6)

9.- Observa la gráfica de la calculadora TI, analízala y dibújala:



10.- ¿Qué puedes decir de la forma de la gráfica? ¿Cuál es su asíntota? ¿Porqué crees que es así?

Figura 6. Análisis de gráficas de carga y descarga del capacitor

Las preguntas estaban encaminadas a la relación entre el Modelo Físico y el Modelo Matemático.

5.4. T_{RF} *Reflexionar entre la solución analítica y la gráfica obtenida*

Por último, el cuarto tipo de tareas buscaba una relación entre el Resultado Matemático, el Resultado Físico y la Respuesta a la Situación Real. Se vinculaba la solución analítica y la gráfica, para provocar una reflexión respecto a ambos resultados. Se pedía a los alumnos el registro de las diferencias encontradas en las respuestas.

6. Metodología

El estudio, de corte cualitativo, tuvo lugar en el Tecnológico de Monterrey, universidad privada al norte de México. La población elegida fueron alumnos de tercer y cuarto semestre inscritos en 25 ingenierías diferentes que estuvieran cursando la materia de Ecuaciones Diferenciales. La muestra se seleccionó aleatoriamente y consistió en nueve alumnos que conformaban tres equipos de trabajo. El estudio se llevó a cabo en el semestre Enero-Mayo de 2013. La duración de la sesión fue de 90 minutos y, previamente, los alumnos analizaron el método para resolver una ED lineal para la resolución de ecuaciones diferenciales con estas características.

Para la recolección de datos se llevó a cabo mediante dos principales técnicas: la observación participante y el análisis de documentos. Para la primera se completó una guía de observación abierta donde se buscaba describir lo acontecido en las actividades planeadas. Para su llenado, se utilizó una videograbación de la sesión. Los documentos analizados correspondieron a los completados en clase: ejercicio donde se dibuja y analiza la gráfica y donde se realiza analíticamente la solución.

Siguiendo lo estipulado por el enfoque del estudio, fue a través de la triangulación de los datos recolectados, como fue posible perfilar las categorías que fueron emergiendo en el transcurso de su propia recolección (Hernández, Baptista y Fernández, 2010). Las categorías estuvieron ligadas al marco teórico utilizado, específicamente referidas a cada uno de los dominios de modelación matemática del ciclo estudiado. De esta manera, se enfatizaron los aspectos principales de las tareas diseñadas y aplicadas que favorecieron el tránsito entre cada elemento de la modelación matemática.

Así, en la siguiente sección se presentan cada una de las tareas incorporadas donde se utiliza la tecnología, así como la información recolectada por los instrumentos referidos que permiten evidenciar nuevos aspectos del ciclo y, con ello, aportar nuevas consideraciones hacia su estudio.

7. Resultados

Los resultados encontrados se muestran a continuación mediante el análisis de lo ocurrido en las sesiones de clase para cada una de los tipos de tareas descritas anteriormente en la sección de metodología.

7.1. T_{AC} *Armar un circuito eléctrico*

La interacción con los materiales que conformaban el circuito eléctrico RC fue intuitiva para los alumnos. La guía proporcionada permitió que los estudiantes realizaran las conexiones necesarias y lograran identificar cada una de las partes del circuito eléctrico. En dos de los tres equipos observados, se registró que los alumnos siguieron los pasos dados en la guía para armado, y entre los tres miembros del equipo realizaron todas las conexiones necesarias. Un equipo no recurrió a la guía de pasos y armó el circuito eléctrico RC de manera efectiva.

La búsqueda de ayuda fue recurrente en uno de los tres equipos. Se solicitó apoyo al docente puesto que tuvieron dificultades para el encendido del foco (resistencia) durante el momento de carga y descarga del capacitor. Los otros dos equipos lograron llevar esto a cabo después de algunos intentos.

A continuación se presenta la transcripción de la videograbación de una discusión activa entre los miembros de los equipos, en la que se explica la manera en que sucede el fenómeno eléctrico:

Diálogo Equipo 1.

El Estudiante 1 carga y descarga el capacitor cerrando el circuito eléctrico, tomando en cuenta y después ignorando, el juego de baterías.

Estudiante 1: Es que lo cargas porque va almacenando la energía y luego se abre y el circuito pues ya no corre.

Estudiante 1 dibuja en el pizarrón un circuito eléctrico.

Estudiante 1: Está así y aquí hay un voltaje (apunta al capacitor) y cuando llega arriba es como si ya no hubiera nada, entonces ya no fluye. Cuando lo conectas directo (ignorando las baterías) se cierra el circuito y baja a cero (el voltaje).

Diálogo Equipo 2.

Estudiante 1 lee el manual. El Equipo localiza los materiales.

Estudiante 2: ¿Cuál es la resistencia? Ah, pues el foco.

Estudiante 1 y Estudiante 2 conectan el circuito. El foco de la resistencia prende.

Estudiante 1: Ya se cargó.
Estudiante 2: ¿Por qué?
Estudiante 2: Se carga, imagina, lo que pasa es que fluye energía aquí hasta que se carga el capacitor.
Estudiante 2: Ya no prende el foco
Estudiante 1: Lo que pasa es que se cargó el capacitor, mira yo creo que si está cargado, entonces esto debería prender (Cierra el circuito ignorando las baterías. El foco prende de nuevo). Sí, actúa como batería (el capacitor), ¡venga! Es que el capacitor se carga y deja de fluir la corriente. El capacitor puede funcionar como una batería porque tú la cargas de energía y deja de fluir la corriente.

Entre los principales elementos del proceso de modelación matemática que fueron promovidos por la presente tarea están:

- Situación Real → Modelo Físico: El trabajo entre los equipos muestra discusiones promovidas desde el inicio de la clase donde los alumnos relacionan constantemente términos físicos para el entendimiento del problema. Ello permite que la creación del modelo físico tenga un sentido para los alumnos que pretenden dar respuesta a la situación real. Es posible apreciar a su vez una relación recíproca donde los mismos conocimientos físicos permiten una verdadera comprensión del problema planteado (Ver Figura 7).

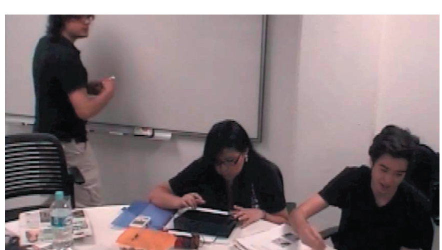


Figura 7. Equipo de trabajo discutiendo respecto al circuito eléctrico

7.2. T_{OG} *Obtener la gráfica de carga y descarga del capacitor*

La guía proporcionada para el armado del circuito eléctrico, también indicaba a los alumnos la manera en que se debían realizar las conexiones para utilizar el sensor de voltaje. Cada equipo buscaba la captura de la gráfica que modelaba la carga y descarga del capacitor. Los registros de video muestran que el uso de la calculadora, a pesar de ser la primera vez que era utilizada como medio para la generación de datos experimentales, se realizó muy ágilmente. Los alumnos manejaban las funciones apoyándose entre los miembros de su equipo y se lograron recolectar muchos tipos de gráficas.

Los primeros intentos dejaron ver algunas gráficas donde los datos no fueron recolectados correctamente. Incluso, se reportaron confusiones entre las conexiones lo que alteró la polaridad y, con ello, se generaron gráficas decrecientes a números negativos en la carga del capacitor (Ver Figura 8).

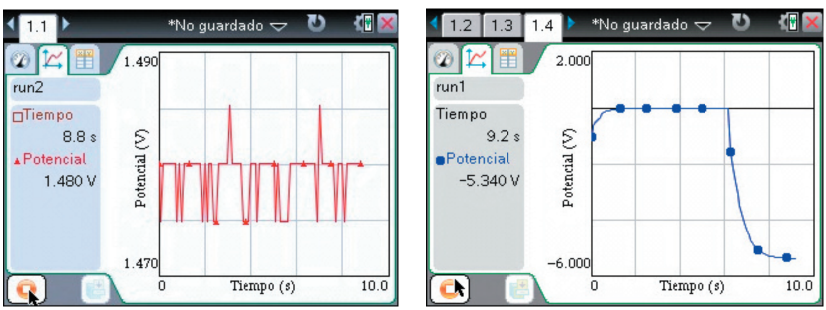


Figura 8. Gráficas registradas por el sensor en los primeros intentos

Fueron pocos los minutos necesarios para que los alumnos generaran gráficas de una manera correcta y ágil. Incluso, en una misma toma de datos lograban cargar y descargar el capacitor en reiteradas ocasiones (Ver Figura 9).

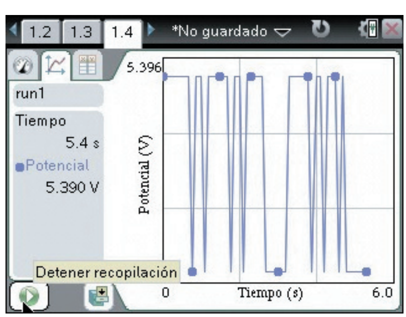


Figura 9. Gráficas registradas por el sensor

Era posible contemplar un diálogo constante entre los miembros de los equipos dando explicaciones de cómo se debía realizar la toma de datos y del fenómeno físico:

Diálogo Equipo 1.

Estudiante 1: ¿Ya registró?
Estudiante 2: Sí, ¿Viste?, ¿viste?, esta cosa grabó voltaje (refiriéndose a la calculadora).
Estudiante 1: ¿Ahorita está en cero?
Estudiante 2: Ahorita está en menos 6.023; no, estamos midiendo al revés.

El Estudiante 2 cambia la polaridad de los cables del sensor

Estudiante 2: Ya está. Imagina, mira, hagámoslo otra vez para que veas. Allí está cargado, ahorita lo conectas allí para que veas cómo se descarga.

El Estudiante 1 conecta el circuito sin las baterías.

Estudiante 2: ¿Viste? Ya se descargó, llegó a 0.

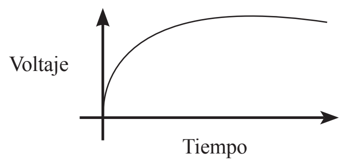
La tarea analizada permitió dar cuenta de lo que transcurrió en términos de los distintos elementos del ciclo de modelación matemática, específicamente entre la transición siguiente:

- Situación Real → Modelo Físico: El uso de la calculadora para la generación de la gráfica apoyó el esclarecimiento del fenómeno físico entre los equipos de trabajo. Las gráficas fueron explicadas por los alumnos retomando, tanto términos físicos, como algunos aspectos particulares del problema que resuelven. Los errores en el uso de los dispositivos, como fue el caso de la polaridad opuesta, fue explicada por los propios alumnos, quienes demostraron tener claridad en sus ideas, de modo que pudieron determinar cómo corregir las confusiones con ciertas conexiones. El uso de términos físicos que inició en la actividad anterior, continuó. Los alumnos compartieron los conocimientos que poseen respecto a circuitos eléctricos y a las funciones que cumplen cada parte de ellos, logrando, así, la creación de un modelo físico, mismo que vieron representado en la gráfica al mismo tiempo.

7.3. T_{AG} *Analizar la gráfica de carga y descarga del capacitor*

Durante la realización de esta actividad, se estableció más claramente la relación que existe entre el fenómeno físico, a través de un Modelo Físico y el Modelo Matemático, que comienza a ser vislumbrado con la creación de la gráfica de carga y descarga del capacitor. Los alumnos dialogan respecto a lo que representa la asíntota de la gráfica dentro del experimento y lo registran en su actividad (Ver Figura 10).

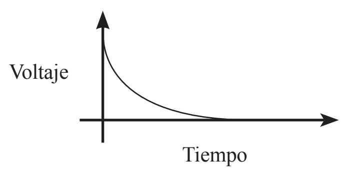
9.- Observa la gráfica de la calculadora TI, analízala y dibújala:



10.- ¿Qué puedes decir de la forma de la gráfica? ¿Cuál es su asíntota? ¿Porqué crees que es así?

Se descargó el capacitor. Su asintota es cercana a 0, porque se descarga.

13.- Realiza una gráfica de manera análoga al paso 4 anterior, dibújala en el sistema coordenado de abajo:



14.- ¿Qué puedes decir de la forma de la gráfica? ¿Cuál es su asíntota? ¿Porqué crees que es así?

significa que el capacitor se cargó. llega a su carga máxima y se abre.
su asintota es en 6, porque es el voltaje de las 4 baterías.

Figura 10. Análisis de las gráficas por parte de los alumnos

Los documentos muestran registros de las respuestas dadas por los estudiantes a las preguntas "¿Qué puedes decir de la forma de la gráfica?, ¿Cuál es su asíntota?, ¿Por qué crees que es así?" Las respuestas más comunes se muestran a continuación:

Para carga del capacitor:

- Significa que el capacitor se cargó. Llega a su carga máxima y se abre. Su asíntota es en 6 porque es el voltaje de las 4 baterías.

Para descarga del capacitor:

- Se descargó el capacitor. Su asíntota es cercana a cero, porque se descarga.

En los diálogos registrados en los videos, se registran las explicaciones que dan los estudiantes hasta concluir lo que posteriormente expresarían en la actividad anterior.

Estudiante 1:	Escríbele
Estudiante 2:	¿Qué?
Estudiante 1:	Cuando el capacitor se carga hasta el punto que su voltaje iguala al de la fuente, deja de fluir la corriente.
Estudiante 2:	¿O sea, en un momento dado, esto [capacitor] está cargado a seis volts?
Estudiante 1:	Seis volts. Haz de cuenta, en ese momento cuando tiene seis volts, se detiene la corriente.
Estudiante 2:	Pero, esto [capacitor] se va a ir bajando, va a ir decreciendo cuando lo desconectas, ¿no? En algún momento, este capacitor se va a descargar totalmente
Estudiante 1:	Se va a descargar, sí.

La inserción de esta tarea en el proceso de modelación matemática pudo observarse de la siguiente manera:

- Resultados Matemáticos → Resultados Físicos → Resultados Pseudo-concretos: Fue posible apreciar que los alumnos lograron una transición entre los Resultados Matemáticos, representados por la gráfica obtenida, y los Resultados Físicos y Pseudo-concretos. Las explicaciones respecto a los resultados de la gráfica están tildados por las reacciones físicas que ellos mismos pudieron apreciar en el armado del circuito eléctrico. Además, la ecuación diferencial, sus partes y su solución tienen un sentido tanto físico como matemático para los alumnos, lo que les permite anticipar la resolución del problema planteado en un inicio. Es importante resaltar que, hasta ahora, los alumnos no han resuelto analíticamente la Ecuación Diferencial y, sin embargo, tienen idea del comportamiento que seguirá la respuesta obtenida debido a las respuestas gráficas registradas por el sensor.

7.4. T_{RF} *Reflexionar entre la solución analítica y la gráfica obtenida*

A fin de provocar una reflexión más amplia, la siguiente actividad que se incorporó al plan de clase, gracias al uso de la tecnología en la sesión, fue la reflexión respecto a las diferencias o semejanzas que se encontraban entre la solución analítica, la gráfica y el circuito eléctrico armado.

A los alumnos se les preguntaba cuál era la relación entre estas tres etapas ubicadas en los tres dominios diferentes. Las respuestas obtenidas se dialogaron, primero, al interior de cada uno de los equipos para posteriormente plasmarlas en papel.

Las respuestas de los alumnos dieron cuenta de que había una relación entre lo que ocurría en el circuito eléctrico y que se había mostrado en la gráfica obtenida por el sensor y la respuesta analítica. Los alumnos describieron que, en la resolución analítica de la Ecuación Diferencial, pudieron encontrar ellos mismos errores en cálculos, puesto que conocían de qué manera se iba a comportar la respuesta y hacia qué valor debía tender, es decir, sabían la solución.

En el proceso de búsqueda de la solución analítica, se registraron expresiones entre los miembros del equipo donde se autoevaluaban respecto a lo que iban obteniendo, entre ellos:

Diálogo del Equipo 1.

Estudiante 1: Se eliminan las exponenciales y ya. No, ¿por qué?
Estudiante 2: Te falta la C [constante] después de la integral y multiplicarla para que quede la exponencial.

En este diálogo es posible apreciar que la eliminación de las exponenciales, aunque matemáticamente suponían estaba bien, no concordaba con lo que habían analizado físicamente, por lo que encuentran el error rápidamente.

Diálogo del Equipo 2.

Estudiante 1: ¿Qué pasa al infinito?, ¿cómo se hacía eso de límites?
Estudiante 2: Pero el infinito…
Estudiante 3: Este número cada vez se va a hacer más grande [exponencial]
Estudiante 1: Va a dar a 1.
Estudiante 2: No, va a dar a cero.
Estudiante 3: Según yo se va a descargar…
Estudiante 2: Sí, porque este es menos [el exponente del exponencial], ya decía yo, se te hace el número muy pequeño, entonces se te va a hacer cero…
Estudiante 1: Empieza así [estable] y cuando llega a 5 se estabiliza.

A través de lo registrado por los diversos instrumentos, se encuentran algunas acentuaciones particulares en ciertos elementos del proceso de modelación:

- Resultados Matemáticos → Resultados Físicos → Resultados Pseudo Concretos: El diálogo de nuevo deja ver cómo las respuestas matemáticas son validadas de acuerdo a los resultados físicos encontrados. Además, es posible apreciar que los alumnos utilizan términos físicos en las explicaciones de orden matemático. Los anteriores ejemplos dan cuenta de cómo la tecnología empleada apoyó la relación que los alumnos establecen entre las respuestas matemáticas (tanto analíticas como gráficas), las respuestas físicas y, a su vez, en los términos pseudo concretos con los que se planteó el problema.

8. Conclusiones

A través de los resultados obtenidos y descritos en la sección anterior, la presente investigación llegó a las siguientes conclusiones. La modelación matemática utilizada como estrategia didáctica en la enseñanza de las Ecuaciones Diferenciales permitió el acercamiento de los alumnos a problemas en contexto donde es posible la utilización de las matemáticas para dar respuesta a fenómenos propios de la ingeniería.

Las clases basadas en el uso de dicha estrategia demandan un diseño específico donde se cuiden las diversas etapas de la modelación matemática reflejadas en una secuencia de actividades que promuevan, tanto su desarrollo, como el tránsito entre ellas. En el desarrollo de la investigación se dio cuenta de la propuesta de una situación basada en el contexto de Circuitos Eléctricos.

El contexto eléctrico para estudiantes de ingeniería provee la oportunidad de comprender la manera de utilizar el método de Ecuaciones Diferenciales Lineales y el funcionamiento de un Circuito eléctrico RC. Las leyes que gobiernan la carga y descarga del capacitor, si bien en su mayoría han sido estudiadas por los ingenieros en formación, tienden a tener algunas lagunas que son compensadas cuando se trabaja colaborativamente en el aula. Los alumnos más aventajados explican a sus compañeros sus conocimientos y entre todos pueden llegar a manipular el experimento propuesto.

Una aportación importante de la investigación consiste en la incorporación del tipo de tareas específicas donde se utilizan diversas herramientas tecnológicas que permitieron superar las dificultades que habían sido reportadas previamente por Rodríguez (2007, 2010) en la implementación de la secuencia didáctica. De esta manera, el armado de un circuito eléctrico de manera física por parte de los alumnos, en el interior de cada equipo de trabajo, apoya el tránsito entre diversas etapas del proceso de modelación matemática que habían sido consideradas como dificultad en un estudio anterior.

El armado del circuito eléctrico RC vinculó la Situación Real con el establecimiento de un Modelo Pseudo-concreto y Físico. Se permitió el acercamiento de los alumnos a las diversas partes del circuito eléctrico y sus conexiones, lo que llevó a la comprensión del fenómeno de carga y descarga del capacitor. El trabajo realizado de manera colaborativa promovió explicaciones entre pares a través de representaciones pictográficas de un circuito eléctrico en los diversos pizarrones del salón de clase, así como con la manipulación de los mismos elementos proporcionados. Lo anterior deriva en una comprensión del fenómeno al tiempo que se realizaba la tarea propuesta T_{AC} (Armar un circuito eléctrico) de manera efectiva.

El segundo tipo de recurso tecnológico utilizado en el aula, la calculadora graficadora y un sensor de voltaje, fue indispensable para la visualización por parte de los estudiantes de las gráficas de carga y descarga de los capacitores de la experimentación. Dicha visualización permitió una reflexión que vinculó el Modelo Físico con el planteamiento del Modelo Matemático, segunda dificultad presentada en una investigación anterior. Con las leyes claras por el armado del circuito eléctrico, fue posible el tránsito hacia la creación de un Modelo Matemático del que, incluso, podían vislumbrar la respuesta (aun sin tener el resultado analítico), puesto que la calculadora indicaba punto a punto lo que ocurría con la carga del capacitor de manera gráfica.

Esta relación también apoyó el tránsito entre la Respuesta Matemática y la Respuesta Física, debido a que con el planteamiento de la ED, su resolución mediante el método de resolución de una ED lineal llevó inmediatamente a una reflexión conjunta donde los alumnos pudieron detectar errores en el procedimiento analítico debido a que conocían la manera en que se comportaría la respuesta gráficamente. La vinculación entre lo indicado analíticamente y los datos que la tecnología proporcionaba posibilitaron una reflexión en el interior de los equipos para una mejor comprensión del procedimiento seguido.

Con lo anterior, el estudio concluye que la tecnología, debidamente elegida y puesta en marcha en actividades clave del proceso de modelación (Ver Figura 11), puede ser un elemento importante e, incluso, indispensable para la generación de relaciones entre los diversos dominios del ciclo de modelación matemática por parte de los alumnos. La tecnología proporciona un apoyo para la vivencia de experiencias de trabajo en contextos de áreas ingenieriles diversos donde se aplican ecuaciones diferenciales en el mismo salón de clase.

Además, la utilización de tecnología resultó en un motivante para los alumnos quienes, a pesar de no haber tenido anteriormente contacto con los dispositivos utilizados, los manipularon de manera intuitiva y rápidamente fueron usuarios de todas sus posibilidades.

Sin embargo, es importante resaltar el papel del investigador en el diseño y selección de actividades didácticas más adecuadas para cada etapa del proceso, así como de tutoriales que guiaran a los alumnos en la utilización de los dispositivos seleccionados.

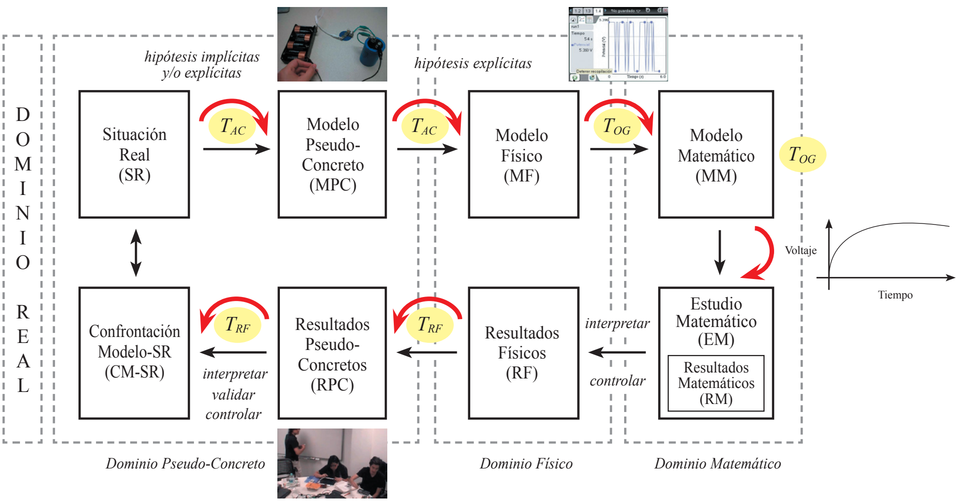


Figura 11. Momentos del ciclo de modelación favorecido por la incorporación de tecnología en clase.

Fue sumamente valiosa la búsqueda de características que permitieran el diseño de situaciones de clase donde se promovieran todos los elementos de la modelación matemática en el aula. Asimismo, es importante guiar el trabajo futuro hacia la profundización del papel de la tecnología en otros contextos propios de una Ecuación Diferencial. Actualmente, se trabaja en la búsqueda, diseño e implementación de tecnología para el apoyo del proceso de modelación matemática en contextos mecánicos, eléctricos, hidráulicos y de naturaleza social.

Referencias bibliográficas

Alsina, C. (2007). Less chalk, less words, less symbols... more objects, more context, more actions. In W. Blum, P. Galbraith, H.-W. Henn, & M. Niss (Eds.), *Modelling and Applications in Mathematics Education, The 14 th ICMI Study* (Vol. 10, pp. 35–44). doi:10.1007/97803872982212

Aravena, M. D. & Caamaño, C. E. (2009). Mathematical models in the secondary Chilean education. In M. Blomhøj & S. Carreira (Eds.), *Proceedings of the 11th International Congress on Mathematical Education: Mathematical applications and modelling in the teaching and learning of mathematics* (Vol. TSG 21, pp. 159–176). Monterrey, México: ITESM.

Artigue, M. (1989). *Une recherche d'ingénierie didactique sur l'enseignement des équations différentielles du premier cycle universitaire.* Cahier du séminaire de Didactique des Maths et de l'Informatique de Grenoble (pp. 183-209). Grenoble, France: Édition IMAG.

Artigue, M. (1992). Functions from an Algebraic and Graphic Point of View: Cognitive Difficulties and Teaching Practices. In E. Dubinsky & G. Harel (Eds.), *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy* (MAA notes 25). Washington, DC: MAA.

Artigue, M. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En P. Gómez (Ed.), *Ingeniería didáctica en educación matemática* (pp. 97-140). Ciudad de México, México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Artigue M. (1996). *Teaching and learning Elementary Analysis.* In C. Alsina, J. M. Álvarez, M. Niss, A. Pérez, L. Rico &, A. Sfard (Eds.) *Proceedings of the 8th International Congress on Mathematical Education* (Selected Lectures, pp. 15-30). Sevilla, España: S. A. E. M. Thales.

Arslan, S., Chaachoua, H., & Laborde, C. (2004). Reflections on the teaching of differential equations. What effects of the teaching of algebraic dominance? In Niss, M. A. (Ed.), *Proceedings of the 10th International Conference in Mathematics Education* (Vol. 10, pp. 54-69). Copenhagen, Denmark: University Dinamarca.

Arslan S. & Laborde C. (2003). Un outil favorisant le jeu de cadres: Cabri. Une étude de cas dans l'apprentissage des Equations Différentielles. Lagrange, J. B. & al. (Eds.), *Actes du Colloque Intégration des Technologies dans l'Enseignement des Mathématiques* (Vol. 1, pp. 1-10). Paris, France: Riems.

Barnes, M. & Fulford, G. (2002). *Mathematical Models with Case Studies. A differential Equation Approach Using Maple*. Nueva York, USA: Taylor & Francis Inc.

Beneitone, P., Esquetini, C., González, J., Maletá, M., Siufi, G. y Wagenaar, R. (2007). *Reflexiones y perspectivas de la Educación Superior en América Latina. Informe Final Proyecto Tuning Amética Latina 2004-2007*. Madrid, España: Universidad de Deusto.

Blanchard, P. (1994). Teaching differential equations with a dynamical systems viewpoint. *College Mathematics Journal*, *25*(5), 385-393. doi: 10.2307/2687503

Blanchard, P., Devaney, R., & Hall, G. (2006). *Differential Equations.* (3ra. ed.). Belmont, USA: Cengage.

Blum, W. & Niss, M. (1990). Applied mathematical problem solving, modelling, applications, and links to other subjects – State, trends and issues in mathematics instruction. *Educational Studies in Mathematics*, *22*(1), 37–68. doi: 10.1007/BF00302716

Boyce, W. y DiPrima, R. (2010). Ecuaciones Diferenciales y problemas en valores de la frontera (5ta. ed.). Ciudad de México, México: Limusa Wiley.

Brannan, J. y Boyce, W. (2007). *Ecuaciones Diferenciales. Una introducción a los métodos modernos y sus aplicaciones.* Ciudad de México, México: Grupo Editorial Patria.

Brousseau, G. (1999). Los obstáculos epistemológicos y los problemas en matemáticas. *Recherches en Didactique des Mathématicques*, *4*(2), 165–198.

Chevallard, Y. (1985). *La transposition didactique: du savoir savant au savoir ensigné*. Grenoble, France: La Pensée Sauvage.

Chevallard, Y. (1999). El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico. *Recherches en Didactique des Mathéematicques*, *19*(2), 221–266.

Confrey, J. (2007). Epistemology and modelling-overview. In W. Blum, P. Galbraith, H.-W. Henn, & M. Niss (Eds.), *Modelling and Applications in Mathematics Education, The 14th ICMI Study* (Vol. 10, pp. 125–128). doi: 10.1007/97803872982214

Hernández, R., Baptista, P. y Fernández, C. (2010). *Metodología de la investigación*. Ciudad de México, México: McGraw-Hill.

Kaiser, G., & Maaß, K. (2007). Modelling in lower secondary mathematics classroom-problems and opportunities. In W. Blum, P. Galbraith, H.-W. Henn, & M. Niss (Eds.), *Modelling and Applications in Mathematics Education, The 14 th ICMI Study* (Vol. 10, pp. 99–108). doi: 10.1007/97803872982218

Kaiser, G. & Sriraman, B. (2006). A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education. *ZDM*, *38*(3), 302–310. doi:10.1007/BF02652813

Kallaher, M. (1999). *Revolutions in Differential Equations: Exploring ODEs with Modern Technology*. Washington, D.C.: Mathematical Association of America Notes.

Lomen, D. y Lovelock, D. (2000). *Ecuaciones Diferenciales a través de gráficas, modelos y datos*. D.F., México: CECSA.

Moreno J. & Laborde C. (2003). Articulation entre cadres et registres de représentation des équations différentielles dans un environnement de géométrie dynamique. Lagrange, J. B. & al. (Eds.), *Actes du Colloque Intégration des Technologies dans l'Enseignement des Mathématiques* (Vol. 1, pp. 1-11). Paris, France: Riems.

Muller, E., & Buskhardt, H. (2007). Applications and modelling for mathematics-overview. In W. Blum, P. Galbraith, H.-W. Henn, & M. Niss (Eds.), *Modelling and Applications in Mathematics Education, The 14th ICMI Study* (Vol. 10, pp. 267–274). doi: 10.1007/978038729822128

Niss, M., Blum, W., & Galbraith, P. (2007). Introduction. In W. Blum, P. Galbraith, H.-W. Henn, & M. Niss (Eds.), *Modelling and Applications in Mathematics Education, The 14th ICMI Study* (Vol. 10, pp. 3–32). doi: 10.1007/9780387298221

OCDE - Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico. (2003). *Informe PISA 2003. Learning*. Madrid, España: OCDE Publishing.

Quiroz, S. y Rodríguez, R. (2015). Análisis de praxeologías de modelación matemática en libros de texto de educación primaria. *Educación Matemática*, *27*(3), 45-80.

Rasmussen, C. (2001). New directions in differential equations: A framework for interpreting students' understandings and difficulties. *The Journal of Mathematical Behavior*, *20*(1), 55-87. doi:10.1016/S0732-3123(01)00062-1

Rasmussen, C. & Whitehead, K. (2003). *Learning and Teaching Ordinary Differential Equations. The Mathematical Association of America*. Disponible en: http://www.maa.org/t_and_l/sampler/rs_7.html

Rodríguez, R. (2007). *Les équations différentielles comme outil de modélisation mathématique en Classe de Physique et de Mathématiques au lycée: une étude de manuels et de processus de modélisation d'élèves en Terminale S. Sciences-New York*. (Tesis de maestría no publicada). Université Joseph Fourier, Grenoble, Francia.

Rodríguez, R. (2010). Aprendizaje y enseñanza de la modelación: el caso de las ecuaciones diferenciales. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *13*(4-1), 191–210.

Salinas, P. y Alanís, J. A. (2009). Hacia un paradigma en la enseñanza del cálculo dentro de una institución educativa. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *12*(3), 355–382.

Salinas, P., Alanís, J. A. y Pulido, R. (2011). Cálculo de una variable. Reconstrucción para su enseñanza y aprendizaje. *DIDAC*, *56-57*, 62–69.

Santos, L. M. (1997). *Principios y métodos de la resolución de problemas en el aprendizaje de las matemáticas*. Ciudad de México, México: Grupo Editorial iberoamerica

Zill, D. (2009). *Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado* (9na. ed.). Ciudad de México, México: Cengage.

Autoras

Ruth Rodríguez Gallegos. Tecnológico de Monterrey, México. ruthrdz@itesm.mx

Samantha Quiroz Rivera. Tecnológico de Monterrey, México. samanthaq.rivera@gmail.com

La Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (*Relime*) es la publicación oficial de investigación del Comité Latinoamericano de Matemática Educativa (Clame AC). Se edita tres veces por año. Acepta artículos en español, portugués, inglés y francés. Está dirigida a investigadores en Matemática Educativa, a profesores de matemáticas y ciencias, y estudiantes de licenciatura y posgrado interesados en conocer los resultados recientes de las investigaciones y en profundizar en el conocimiento de un tema en particular.

Objetivos:

1. *Relime* pretende ser un foro abierto a las diversas escuelas del pensamiento (paradigmas, teorías, metodologías, métodos, enfoques) en nuestra disciplina, la Matemática Educativa, sin definir perspectivas únicas y con un profundo respeto a las tradiciones educativas y los contextos de los diversos sistemas educativos de nuestra región.
2. Dar a conocer resultados de investigación original en Matemática Educativa que se realizan en América Latina y el Caribe y en el resto del mundo.
3. Contribuir al proceso de profesionalización de la Matemática Educativa en nuestra región.
4. Fomentar una cultura de divulgación e investigación entre los distintos grupos de investigación en nuestra región.
5. Propiciar el debate y la reflexión profunda sobre problemas de investigación que fortalezca la disciplina en nuestra área geográfica.
6. Fortalecer la calidad de la investigación en Matemática Educativa y la vinculación entre comunidades nacionales e internacionales.

INSTRUCCIONES TÉCNICAS PARA AUTORES

LAS CONTRIBUCIONES

Toda contribución propuesta a Relime se somete a un estricto proceso de arbitraje. Las contribuciones deberán ser resultado de investigaciones teóricas o experimentales, estudios de caso, etnográficos, etc., en formato de artículo. Estas contribuciones deberán ser trabajos inéditos de investigación, no estar en arbitraje en otra revista ni tratarse de traducciones previamente publicadas en su lengua original.

CARACTERÍSTICAS DE LOS MANUSCRITOS

Relime publica artículos en castellano, portugués, inglés y francés. Acepta ensayos teóricos originales así como propuestas que sean resultado de estudios experimentales, de casos, de observación, etnográficos, etc.

Los artículos deberán tener un máximo de nueve mil palabras, incluyendo referencias, figuras, cuadros y anexos. En caso de que su propuesta exceda esta extensión, el Comité de Redacción decide si considera la posibilidad de publicarlo siempre que tal propuesta no ocupe todo el espacio disponible en un número de la revista.

En el caso de reportes de estudios experimentales, de casos, de observación, etnográficos, etcétera, recomendamos que los escritos contengan:

1) Resumen del trabajo, deberá tener un máximo de 10 renglones escrito en español, portugués, inglés y francés y de 5 palabras clave en las cuatro lenguas. Resumen, título y palabras clave deben ser escritos en los cuatro idiomas.
2) Una exposición del problema de investigación (su pertinencia y relevancia en el tema que se aborda).
3) Indicaciones globales acerca de la estructura teórica del reporte.
4) Justificación de la metodología usada.
5) Desarrollo de algunos ejemplos y análisis de resultados.
6) Referencias bibliográficas.

Si se trata de ensayos teóricos y filosóficos, nuestra recomendación es la siguiente:

1) Iniciar con una exposición del problema de investigación (su pertinencia y relevancia en el tema que se aborda).
2) Revisión de la literatura que incluya trabajos importantes que sustenten la investigación, en el que se refleje una variedad de resultados actuales. Esta revisión debe incluir investigaciones internacionales pertinentes y no limitarse a estudios de un solo país.
3) Ofrecer indicaciones sobre la estructura teórica o filosófica en la cual se desarrolla el tema del artículo.
4) Exposición detallada de la posición del autor dentro del tema o los temas de exposición. Esto debe reflejarse a través del desarrollo de ideas, más que de una lista de reflexiones.

5) Implicaciones o consecuencias de la investigación en el área.
6) Referencias bibliográficas.

PROCESO DE EVALUACIÓN EN RELIME

Los artículos propuestos a Relime serán leídos por dos miembros del Comité de Redacción, y si el contenido atiende a la originalidad y satisface los criterios anteriores, así como a la claridad de la presentación e interés para la comunidad de matemática educativa, serán evaluados en forma "ciega" por dos investigadores reconocidos y con experiencia dentro del área. En el proceso de evaluación se garantizará el anonimato de autores y evaluadores.

El resultado del dictamen puede ser:

A. Sugerencia de publicar el artículo sin modificaciones.
B. Sugerencia de publicar el artículo bajo reserva de hacer ligeras modificaciones.
C. Sugerencia de reestructurar el artículo atendiendo a los comentarios, lo que precisaría una nueva revisión.
D. Sugerencia de rechazo del artículo.

FORMATO DE LAS CONTRIBUCIONES

Todas las contribuciones deberán estar escritas en procesador de texto Word 6.0 o superior, tipo de letra Times New Roman, tamaño 11 y utilizar un espacio anterior y posterior de 4 pt, lo que significa que no se requiere dar espacio entre un párrafo y otro. Los cuatro márgenes de la página deberán ser de 2.5 cm. Para las expresiones matemáticas debe usarse el editor de ecuaciones.

ENCABEZADOS PRINCIPALES

El estilo de letra para los encabezados principales es tipo VERSALES en formato minúsculas, utilizando un espacio anterior de 36pt y el posterior de 12pt, lo que significa que no se requiere dar espacio entre un encabezado y los párrafos subsecuentes. Enumerar las secciones de los encabezados principales (usando 1, 2, 3, etc.) y utilizar el estilo de alineación centrada.

Subtítulos

El estilo de letra para los subtítulos del artículo es tipo Times New Roman, tamaño 11 y cursiva. La primera letra debe escribirse con mayúsculas. Utilizar un espacio anterior de 24 pt y el posterior de 10 pt, lo que significa que no se requiere dar espacio entre un subtítulo y los párrafos subsecuentes. Los subtítulos deberán enumerarse 1.1., 1.2, 1.3, etc., según corresponda en estilo tipo Normal. Los subtítulos posteriores a un encabezado principal deben tener un espacio anterior y posterior de 6 pts.

Estilo para las tablas

Las tablas deben tener una alineación centrada. El estilo de letra del texto en el interior de la tabla debe ser tipo Times New Roman, Normal, tamaño 10 y con un espacio anterior y posterior de 2 pto. Enumerar las tablas, usando tipo de letra VERSALES tamaño 10, en formato minúscula: TABLA I, TABLA II, TABLA III, etc., utilizando un espacio anterior de 6 pto y posterior de 0 pto. El número de la tabla debe escribirse en la parte superior y su título debajo, utilizando un estilo de alineación centrada y tipo de letra normal tamaño 10.

Estilo para las figuras e imágenes

Las figuras e imágenes deben tener una alineación centrada. El estilo de letra debe ser tipo Times New Roman, tamaño 10 y tipo Cursiva y Normal. Escribir el número de la figura o imagen en formato tipo cursiva y el título en formato tipo normal. Utilizar un espacio anterior de 2 pt y el posterior de 4 pt. Las imágenes y figuras deberán adjuntarse en un archivo independiente al manuscrito en formato de alta resolución.

Transcripciones

Para las transcripciones usar el estilo de letra normal, tipo Times New Roman tamaño 10. Utilizar un interlineado sencillo.

Usar estilos de transcripción como los siguientes:

Estudiante: Para graficar utilicé uno de los métodos que vimos en clase. Me pareció que era el más simple para resolverlo

Profesor: ¿Por qué consideras que ese método es más simple?

Si las líneas de la transcripción requieren ser numerados, entonces usar el estilo de transcripción enumerada como sigue:

[122] Entrevistador: En la primera actividad se te propuso determinar la función velocidad ¿Podrías explicar cómo la hallaste?

[123] Alumno: Hum... pues...

En el caso de que no se requiera hacer referencia a los números, se sugiere usar el primer estilo de transcripción (indicada párrafos arriba).

Reconocimientos

Los reconocimientos a personas, fondos, asociaciones, etc. deberán colocarse en una sección separada antes de las referencias bibliográficas. Los nombres de organizaciones financieras deberán escribirse completos.

Bibliografía, referencias y notas

Solicitamos emplear el estilo de la APA (Publication Manual of the American Psychological Association, 6th ed., 2009) para las citas de pie, notas, referencias textuales y bibliografía. (Pueden apoyarse en el siguiente link: http://www.apastyle.org/learn/tutorials/basics-tutorial.aspx; o bien, consultar el Manual).

La bibliografía deberá escribirse en forma de lista sin enumerar y en orden cronológico. El estilo de letra debe ser Times New Roman 9. Para escribir una referencia debe usarse alineación justificada para el primer renglón. A partir del segundo renglón deberán establecer una sangría especial de 0.63 cm.

Las notas deberán escribirse al final de cada página del documento. El estilo de letra que deberá usarse es Times New Roman 9 en formato normal.

Información complementaria

1) No se devolverán los artículos originales.
2) El editor se reserva el derecho de hacer algunas modificaciones necesarias para mantener el estilo de la publicación.
3) Los textos pueden ser publicados en otro órgano editorial previo permiso expreso, por escrito, y haciendo referencia explícita de la fuente.
4) Los autores recibirán gratuitamente dos ejemplares del número en que se haya publicado su artículo.
5) No se realizarán pagos a los autores por los artículos que se publiquen en *RELIME*. Para mayores informes, puede visitar la página web: http://www.clame.org.mx/relime.htm o bien el correo electrónico:

relime@clame.org.mx

SUSCRIPCIÓN A RELIME

Costo del volumen 19 (tres números)

Suscripción Institucional:
Volumen US$ 120
Cada número US$ 50

Suscripción Individual:
Volumen US$ 50
Cada número US$ 20

Suscripción Miembros Clame:
Volumen US$ 20
Cada número US$ 10

Estos costos NO aplican a *números especiales*,
NO incluyen gastos de envío, NI comisión bancaria por transferencias
o depósitos de cheques emitidos fuera de México

Las suscripciones deberán solicitarse al correo electrónico
suscripcion@relime.org

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa
Volumen 19, Número 1

Diseño y Web: Emilio Serna Hernández
Servicios Editoriales Recrea
(Miembro CANIEM - 3663)
sernandem@yahoo.com.mx

Se imprimió en los talleres de
Editorial Progreso S.A. de C.V.
Sabino # 275
Col. Santa María la Ribera
Delegación Cuauhtémoc
06400 México, D. F.

Marzo de 2016
Tiraje: 1000 ejemplares más sobrantes