EDITORIAL

ARTÍCULOS

RELIME 21-3

02103

9 771665 243002

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa

Vol. 21, Núm. 3, noviembre 2018

ISSN 1665-2436

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa

RELIME

Vol. 21, Núm. 3, 2018

Clame Comité Latinoamericano de Matemática Educativa

Publicación oficial de investigación del Comité Latinoamericano de Matemática Educativa

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa

Departamento de Matemática Educativa – Cinvestav
AP 14-740, México 07000, CDMX
M É X I C O

Portada: «Opus 1» de Oscar Reutersvärd en 1934. Reproducida con permiso de los herederos del artista.

Publicación oficial de investigación del Comité Latinoamericano de Matemática Educativa, Clame A.C. Consejo Directivo: *Presidente:* Olga Lidia Pérez González – Cuba; *Secretario:* Hugo Parra Sandoval – Venezuela; *Tesorera:* Daniela Reyes Gasperini – Argentina; *Vocal Norteamérica:* Rebeca Flores García – México; *Vocal Caribe:* Juan Mazueta Concepción – República Dominicana; *Vocal Centroamérica:* Rodolfo Fallas Soto – Costa Rica*; Vocal Sudamérica:* Marcela Parraguez González – Chile.

Publicación cuatrimestral. Se publica en los meses de marzo, julio y noviembre. Vol. 21, Núm. 3, noviembre, 2018. Tiraje 1,000 ejemplares. Suscripciones: suscripcion@relime.org. Contribuciones e información: relime@clame.org.mx, http://www.clame.org.mx.

Relime es una revista indizada en:
ISI Web of Knowledge, SSCI – Social Sciences Citation Index y Journal Citation Reports • ERIH – European Reference Index for the Humanities • Conacyt – Índice de Revistas Mexicanas de Investigación Científica y Tecnológica • Scopus – Elsevier Database • ZDM – Zentralblatt für Didaktik der Mathematik • IBZ – International Bibliography of Periodical Literature in the Humanities and Social Sciences • Clase – Citas Latinoamericanas en Ciencias Sociales y Humanidades • Iresie – Índice de Revistas de Educación Superior e Investigación Educativa • Latindex – Sistema Regional de Información en Línea para Revistas Científicas de América Latina, el Caribe, España y Portugal • Redalyc – Red de Revistas Científicas de América Latina y el Caribe, España y Portugal • EBSCO – Information Services • Dialnet • Scielo-México – Scientific Electronic Library Online • Thomson Gale – Gale Iberoamérica.

2018 Impreso en México

Volumen 21 – Número 3 – 2018

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa

Publicación oficial del Comité Latinoamericano de Matemática Educativa

2018

Volumen 21 Número 3 Noviembre de 2018

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa

REVISTA LATINOAMERICANA DE INVESTIGACIÓN EN MATEMÁTICA EDUCATIVA, RELIME, es la publicación de investigación oficial del Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C. Editada por el Colegio Mexicano de Matemática Educativa, A. C., calle Av. Instituto Politécnico Nacional, 2508, Col. San Pedro Zacatenco, Delegación Gustavo A. Madero, C.P. 07360, Tel. (55) 57473819, www.clame.org.mx/relime.htm, relime@clame.org.mx. Director responsable: Ricardo Cantoral.

Reservas de Derechos al Uso Exclusivo, No. 04-2016-110914351000-102, con ISSN: 1665-2436, para el formato impreso; y No. 04-2016-110413025500-203, con e-ISSN: 2007-6819, para el formato digital; otorgados por el Instituto Nacional del Derecho de Autor. Derechos Reservados © Colegio Mexicano de Matemática Educativa, A. C. RFC: CMM 040505 IC7. Publicación cuatrimestral. Se publica en los meses de marzo, julio y noviembre, con el financiamiento del Clame. El Volumen 21, Número 3, se terminó de imprimir en noviembre de 2018, con un tiraje de 1,000 ejemplares más sobrantes.

Impresa por Editorial Progreso, S. A. de C. V., Sabino No. 275, Col. Sta. María la Ribera, C.P. 06400, Delegación Cuauhtémoc, México, CDMX.

EDITORIAL

POSGRADO EN DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA DE LA PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE VALPARAÍSO: UN MULTIPROCESO EN BÚSQUEDA DE LA CONSTRUCCIÓN CIUDADANA

POSTGRADUATE IN MATHEMATICS DIDACTICS OF VALPARAÍSO PONTIFICAL CATHOLIC UNIVERSITY: A MULTIPROCESS IN SEARCH OF CITIZEN CONSTRUCTION

MARCELA PARRAGUEZ GONZÁLEZ
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile. marcela.parraguez@pucv.cl

1. INTRODUCCIÓN

Sin duda un programa académico o profesional de posgrado en didáctica de la matemática centrado en la innovación o en la investigación científica es por sí sola un proyecto de suma relevancia para la institución que lo alberga (Bachelard, 1938). El Posgrado en Didáctica de la Matemática (DM) de la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso (PUCV), conformado por los Programas de Magíster y Doctorado nace en el seno del Instituto de Matemáticas (IMA) de dicha universidad y se inserta en la Facultad de Ciencias, lo que lo convierte en un programa único en su tipo.

El Magíster de DM de la PUCV es profesional, y el de Doctorado es académico; ambos constituyen un programa de investigación científica en didáctica de la matemática y se diferencian de cualquier otro programa de estudios en la disciplina en cuanto a que en éste concurren diversos procesos de desarrollo, no sólo el de enseñanza y aprendizaje, sino también complejos procesos de alto grado de autonomía y creatividad, tales como la investigación, la innovación, la metodología investigativa y la profesionalización (Bernaza, Zaldívar y Fuente, 2013), en particular la especializada en didáctica de la matemática propiamente como tal.

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (2018) *21* (3): 239-246.
DOI: 10.12802/relime.18.2130

1. El programa de posgrado y su influencia en la comunidad

Ante los planteamientos descritos, es lícito preguntarse cuáles de los elementos que cultiva el Posgrado en DM de la PUCV influyen en su comunidad. Responder esta pregunta no es fácil, más aún si ésta se generaliza al programa de investigación científica de posgrado en la PUCV y sobre todo, debido a que en el trabajo cotidiano no es habitual establecer el arco reflexivo en el que la educación y la formación de docentes son efectivamente pilares básicos en la construcción de la comunidad.

El trabajo del posgrado no puede comprenderse sino como un multiproceso de desarrollo continuo en el que intervienen distintos elementos enmarcados en un proceso interno y otro externo que definen en gran medida el posgrado. Se reconoce, por tanto, una dimensión interna del programa –que exhibirá elementos que subyacen al interior del posgrado– y otra dimensión externa –que mostrará cómo el posgrado influye en las comunidades, sean éstas internas (IMA y PUCV), o externas, como la región de Valparaíso, de Chile o del extranjero. Ambas dimensiones proporcionarán aproximaciones para responder cómo el Posgrado en DM influirá en la comunidad.

Desde la dimensión interna, la didáctica de la matemática se concibe en el sentido de Brousseau (1988), esto es, como una disciplina científica de carácter experimental, provista de marcos teóricos explícitos, que nace de la reflexión y de la problematización de los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática. Al alero de esta concepción, los elementos internos que estarían sustentando el programa de posgrado serían: *1)* la matemática; *2)* la epistemología de la matemática; *3)* los enseñantes de la matemática; *4)* los aprendices de la matemática; *5)* lo cognitivo en la enseñanza y el aprendizaje de la matemática; *6)* lo intuitivo en la enseñanza y el aprendizaje de la matemática, y *7)* lo social en la enseñanza y el aprendizaje de la matemática.

La dimensión externa estaría sustentada en los elementos que van direccionados hacia el exterior del programa –la comunidad–, a través de: *a)* la divulgación de las producciones; *b)* el impacto en la enseñanza y el aprendizaje de la matemática en el aula; *c)* la innovación en los diseños de aula, y *d)* el aprendizaje de los formadores de la matemática de aula.

Ambas dimensiones coexisten de manera integrada en el programa con el propósito de retroalimentarlo y trazar nuevas líneas de investigación que permitan a la comunidad de didáctica de la matemática del IMA adherirse a una determinada línea de investigación del mismo programa para *i)* validarla; *ii)* sustentarla; *iii)* continuarla, y *iv)* desarrollarla.

2. Proceso interno del Posgrado

Desde un punto de vista estructural, enunciaremos siete elementos que lo sitúan como un programa de investigación científica en didáctica de la matemática, lo describen y lo definen.

1. *La matemática*. Las problemáticas didácticas de investigación están sustentadas en enseñantes y aprendices de cuestiones relacionadas con matemática dentro de una institución. Por ejemplo, una mamá no puede enseñar a su hijo los números complejos porque justamente el problema para ella está ahí, en la propia matemática de este tópico.
2. *La epistemología de la matemática*. Es un antecedente obligatorio en toda investigación en didáctica de la matemática. Ésta brinda las raíces de los momentos de desarrollo o estancamiento que ha tenido el conocimiento de los tópicos matemáticos a lo largo de su historia, es decir, nos informa cómo se ha construido y constituido el saber matemático a lo largo del tiempo.
3. *Los enseñantes de la matemática*. Para precisar este punto y el que sigue, nos situaremos en el triángulo didáctico (Ibáñez, 2007) conformado por el profesor (enseñante de la matemática), el alumno y el saber o conocimiento (véase figura 1); en éste el profesor de matemática representa a uno de los actores principales y se inserta en una compleja red de interrelaciones …, *¡muchas veces discontinua!* Dichas interrelaciones, a través de los proyectos de investigación, se traducen en problemáticas didácticas si consideramos algunos de los vértices de este triángulo como uno de los focos de estudio e interpretamos la conjunción de elementos a través de marcos teóricos explícitos, cuyos resultados son reportados en tesis de posgrados, revistas del área, actas de congresos, entre otros medios de difusión, para informar a la comunidad interesada.

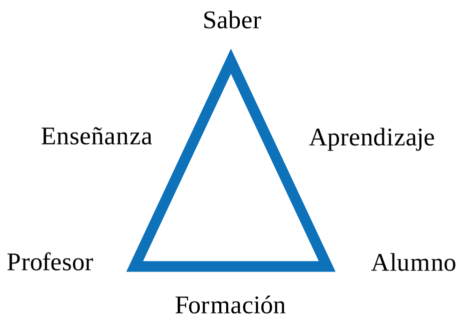


Figura 1. Triángulo didáctico (Houssaye, 1988)

4. *Los aprendices de la matemática*. El alumno es otro actor principal alrededor del cual aparecen obstáculos que lo trastocan a él y a los otros dos vértices del triángulo. En cada vértice se encuentra el obstáculo correspondiente (véase figura 2): el obstáculo de origen didáctico para el profesor resulta del sistema educativo; el obstáculo de origen ontogenético para el alumno se debe a las características del desarrollo del niño, y para el saber, aparece un obstáculo epistemológico intrínsecamente relacionado con el propio concepto. Según Bachelard (1938), el conocimiento científico se edifica salvando obstáculos.

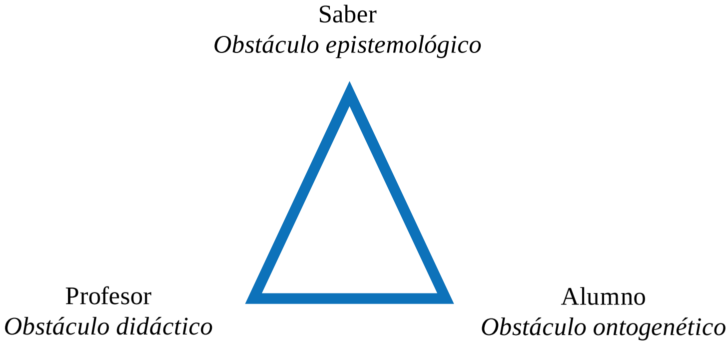


Figura 2. Triángulo didáctico que ilustra los obstáculos

5. *Lo cognitivo en la enseñanza y el aprendizaje de la matemática*. En muchas líneas investigativas en didáctica de la matemática, éste es un aspecto que muestra la complejidad de las relaciones entre enseñantes y aprendices que se manifiestan en la subjetividad de la toma de decisiones del enseñante y en la insuficiencia de la práctica de la enseñanza para que el aprendiz se convierta en un constructor activo y social de su propio conocimiento.
6. *Lo intuitivo en la enseñanza y el aprendizaje de la matemática*. La matemática constituida como ciencia es inseparable de la intuición para la realización de tareas y la resolución de problemas. Esto último ha sido la base de investigaciones en didáctica de la matemática que trabajan con modelos que a la vez entrelazan la realidad con modelos sustitutos o tácticos de matemática.
7. *Lo social en la enseñanza y el aprendizaje de la matemática*. Las matemáticas son una actividad humana (Cantoral, 2013), por ende, la forma en que éstas se conciben queda inserta en una cultura, que querámoslo o no, incidirá en la forma en que una determinada institución la enseña y otra la aprende.

3. Proceso externo del Posgrado

Desde el punto de vista externo, y al considerar la vinculación propiamente como tal, vamos a identificar siete elementos presentes en el programa de investigación científica en didáctica de la matemática que lo describen y sitúan en una comunidad.

1. *Comunidad PUCV*. La PUCV dispone de una amplia variedad de programas de estudios avanzados, que incluyen los posgrados en didáctica de la matemática, a través de los cuales se forman investigadores o especialistas del más alto nivel, capacitados para impulsar el desarrollo en la enseñanza y el aprendizaje de la matemática en diversos ámbitos.
2. *Comunidad IMA*. Los posgrados de didáctica de la matemática tienen su hábitat en el IMA, que junto con el área de Estudios Avanzados aseguran la calidad y la efectividad de los programas de posgrado. Particularmente, la Comunidad IMA visualiza a estos programas con un amplio nivel nacional e internacional, mismos que conforman una propuesta distintiva y comprometida con el rigor matemático y aportan a la generación el conocimiento necesario para gravitar en las maneras de abordar la enseñanza y el aprendizaje de la matemática al mismo tiempo que se vinculan en ámbitos regionales e internacionales.
3. *Divulgación de las producciones*. Como parte de las investigaciones que realizan, los egresados del Posgrado en DM de la PUCV deben presentar una propuesta innovadora para la clase de matemáticas (en el caso del magíster) y una investigación autónoma que constituya un aporte original al conocimiento (en el caso del doctorado). Más tarde estas producciones se materializan en artículos que se proponen a revistas científicas en el área, en libros, en innovaciones curriculares para el pre y el posgrado en diferentes disciplinas afines con la matemática, en fin, en instalar tratamientos de tópicos específicos desde lo social, lo cognitivo, lo epistemológico y lo didáctico.
4. *Congresos en el área e innovación en los diseños de aula*. Desde hace un tiempo, en Chile y en otros países, se ha venido consolidando la presentación de investigaciones de posgrado en desarrollo, en las cuales se muestran las problemáticas didácticas, la metodología empleada, el referente teórico o marco conceptual con el cual se "*miran*" los datos y las conclusiones. En la mayoría de los casos, este trabajo finaliza con una propuesta para el aula de la clase de matemática, con osadía e ímpetu, lo que debe provocar cambios que impacten positivamente la educación de la matemática en nuestras regiones.

5. *Presencia de la didáctica de la matemática en el Currículo de la Formación de Profesores del IMA*. El trayecto de la didáctica de la matemática en el IMA de la PUCV se inicia en 1996 con la creación del magíster en DM. Desde esa fecha hasta ahora se han realizado diferentes acciones dirigidas a incluir la didáctica de la matemática en el currículo de la formación de profesores a través de talleres y cursos formales. Hoy, puedo señalar que existe absoluta presencia en ese currículo, y que se han organizado en cursos semestrales (Didáctica de la Geometría, Didáctica de los Sistemas Numéricos, Didáctica de la Funciones y Didáctica de la Estadística) talleres en los que se trabaja el estudio de casos de aula. El trabajo final que conduce al título de Profesor de Matemáticas es codirigido por un Didacta de las Matemáticas y otro académico del IMA. Además, hay que mencionar que el conjunto de prácticas que realizan estos estudiantes también es liderado por un Didacta de las Matemáticas.
6. *Articulación de la Formación de Profesores de Matemática con el Posgrado en Didáctica de la Matemática de la PUCV*. Dada la larga trayectoria de la pedagogía en Matemáticas en la PUCV y la consolidación de la didáctica de la matemática, hoy existe una activa articulación entre la Pedagogía en Matemáticas y el Magíster en DM que consiste en que el estudiante de pregrado elija y curse las asignaturas optativas de entre las asignaturas de cursos de primer semestre del magíster, los cuales le serán homologadas en caso de que más tarde sea seleccionado. Todo esto con la finalidad de dar respuestas a las demandas y a las inquietudes de perfeccionamiento de nuestros titulados y egresados y del público en general que cumpla los requisitos solicitados.
7. *Internacionalización del Posgrado en DM*: En los últimos cinco años, el IMA ha recibido en los posgrados un gran número de estudiantes extranjeros. En el proceso de internacionalización de los programas de Magíster y Doctorado en Didáctica de la Matemática, el IMA recibió a tres estudiantes de Colombia, a dos de México y a uno de Uruguay. Con el objetivo de seguir consolidando dicha internacionalización, los posgrados participan anualmente en ferias de posgrados realizadas en distintas ciudades de Latinoamérica, entre ellas Lima, Bogotá y Santiago, cuyo principal objetivo es expandir la influencia de los estudios avanzados en didáctica de la matemática, y al mismo tiempo crear vínculos con otros países y centros de investigación en el área.

4. A MODO DE CONCLUSIÓN

En general, los desafíos de la sociedad del conocimiento a la que el país busca sumarse requieren de una creciente especialización y de profesionales en todos los campos disciplinarios. En no más de 30 años, el Posgrado en DM de la PUCV ha logrado dar respuestas a fenómenos didácticos, muchas veces expresados en hechos didácticos específicos que se han instalado en la comunidad de investigadores *seniors* y novatos, y al mismo tiempo se ha cultivado esta disciplina en un nicho fecundo para investigar y mostrar a la comunidad los aportes para disminuir las discontinuidades producidas en la enseñanza y el aprendizaje de la matemática que el país y la comunidad tanto necesita. Todo con una característica especial que distingue a la didáctica de la matemática como campo disciplinar, esto es, el uso de marcos teóricos –*lentes* explícitos– que ayudan a interpretar y a precisar el fenómeno estudiado, muchas veces amorfo, que aparece y desaparece bajo ciertas circunstancias. Más aún, da sustento a las evidencias empíricas que se derivan de datos recopilados y analizados bajo estos *lentes*, que, como resultado de la investigación, evocan diseños de situaciones de aula para la enseñanza y el aprendizaje de la matemática.

Sin duda quedan muchas interrogantes por responder, pero a pesar de eso debemos tener en cuenta que las teorías que hoy conforman programas de posgrado en el área son particularmente relevantes en relación con aquellos aspectos que interesa considerar en el sistema educacional de un país, como por ejemplo, qué contenidos de matemática enseñar en un aula, cómo hacerlo, analizar entre docentes pares la clase de matemática que se desarrolla en el aula, el análisis de textos escolares y el estudio desde el saber crítico del profesor, la comunicación entre el saber del docente y el saber y el alumno, en fin, la mirada de los múltiples escenarios que emergen de lo que realmente sucede en un aula es diversa. Sin embargo, existen en la didáctica de la matemática elementos transversales explícitos que buscan dar explicaciones a lo que realmente sucede con la matemática en la comunidad –ésas son las teorías de la didáctica de la matemática–, cuya misión es sustentar las evidencias de manera explícita, y conviene que la comunidad tenga presente no sólo en su práctica, sino también en su concepción personal de los posgrados en didáctica de la matemática que todo el conjunto se inserta en un multiproceso. Finalmente, las teorías son parte importante del fundamento de un posgrado en la especialidad.

Propongo al lector reflexionar sobre relevantes cuestiones vinculadas a un programa de posgrado de investigación científica en didáctica de la matemática para educar a la ciudadanía en el lenguaje matemático, que va mucho más allá de operatorias en la resolución de objetos matemáticos. Comprender lo que subyace al lenguaje matemático implica una lectura del mundo profunda y compleja, necesaria para la convivencia entre los seres humanos, que no es ni más ni menos que la educación para la ciudadanía (Redon, 2016). Otro aspecto relevante a considerar en estas reflexiones finales se relaciona con la tarea del posgrado de informar y aportar al sistema educacional del país. Hoy los sistemas educativos, inmersos y atrapados en pruebas estandarizadas del campo de las matemáticas, han mecanizado y automatizado el lenguaje matemático y se han centrando en las operatorias, lo que representa olvidar que dicho lenguaje es sustancialmente comprensión de los significados.

Un país requiere de la matemática que pone en uso un ciudadano informado (y la experiencia personal con la matemática del ciudadano común), la presencia del enfoque histórico cultural en los diseños de la clase de matemática (y la formación de los profesores), los estudiantes, los procesos de enseñanza y de aprendizaje, el desarrollo disciplinar de la matemática, entre otros, y, por qué no, la articulación de los posgrados en didáctica de la matemática con el pregrado, en el rol de la universidad como espacio de formación ciudadana y por tanto de la comunidad.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido subvencionado parcialmente por el proyecto Fondecyt 1180468.

Referencias bibliográficas

Brosseau, G. (1988). *Utilité et interet de la didactique pour un professor de college*. Petit x, 21, 47-68. [Traducción castellana en la revista *Suma*, n. 4 y 5].

Bernaza, G., Zaldívar, M., y Fuente, O. (2013). La evaluación del aprender a especializarse en el postgrado. *Revista Iberoamericana de Educación, 61*(2), 1-13.

Bachelard, G. (1938). *La formation de l'esprit scientifique. Contribution à une psychanalyse de la connaissance objective.* Paris: Librairie Philosophique J. Vrin.

Cantoral, R. (2013). *Teoría socioepistemológica de la matemática educativa*. España: Gedisa.

Chevallard, Y. (1985). *La transposition didactique; du savoir savant au savoir enseignné.* Paris: La Pensée Sauvage.

Houssaye, J. (1988). *Le triangle pédagogique*. Berna: Peter Lang.

Ibáñez, C. (2007). Un análisis crítico del modelo del triángulo pedagógico. Una propuesta alternativa. *Revista Mexicana de Investigación Educativa, 12*(32), 435-456.

Redon, S. (2016). Una reflexión sobre la escuela pública y la ciudadanía. *Revista Interuniversitaria de Formación del Profesorado, 85*, 25-35.

Lianggi Espinoza Ramírez, Andrea Vergara Gómez, David Valenzuela Zúñiga

GEOMETRÍA EN LA PRÁCTICA COTIDIANA: LA MEDICIÓN DE DISTANCIAS INACCESIBLES EN UNA OBRA DEL SIGLO XVI

Geometry in everyday practice: the measurement of inaccessible distances in a text of the xvi century

RESUMEN

El estudio del saber matemático en distintos contextos adquiere relevancia debido al interés actual en que los estudiantes puedan usar las matemáticas en la resolución de problemas reales. Por esto, el propósito de esta investigación es caracterizar al conocimiento puesto en uso, en la medición de distancias inaccesibles, en la obra *Elucidatio Fabricae Ususque Astrolabii* de Johann Stöffler, publicada en 1513. El modelo teórico utilizado considera el estudio de la constitución del saber a través del análisis de su génesis, desarrollo y transversalidad. Los resultados revelan, en la obra analizada, una *episteme* de la medición de distancias inaccesibles que incluye tanto la búsqueda de una razón conveniente para realizar la medición, como el análisis dinámico del comportamiento de las sombras o los rayos visuales en la estimación de inclinaciones. Esta *episteme* es determinante para la comprensión de estos conocimientos matemáticos en la resolución de problemas.

PALABRAS CLAVE:

- *Razón matemática*
- *Proporcionalidad*
- *Uso del conocimiento*
- *Gnomon*
- *Astrolabio*
- *Historización del conocimiento matemático*

ABSTRACT

The study of mathematical knowledge in different contexts has acquired relevance due to the current interest in students' ability to use mathematics in solving real life problems. Thus, the purpose of this research is to characterize the knowledge in use in the measurement of inaccessible distances in Johann Stöffler's *Elucidatio Fabricoe Ususque Astrolabii*, published in 1513. The theoretical model used considers the study of the constitution of knowledge through the analysis of its genesis, development and transversality. The results reveal in the analyzed work an episteme of the measurement of inaccessible distances that includes both the search for a suitable reason to carry out the measurement and the dynamic analysis of the behavior of the shadows or the visual rays in the estimation of inclinations. This episteme is critical for the understanding of this mathematical knowledge in problem solving.

KEY WORDS:

- *Mathematical ratio*
- *Proportionality*
- *Use of knowledge*
- *Gnomon*
- *Astrolabe*
- *History of mathematical knowledge*

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (2018) *21* (3): 247-274.
Recepción: Noviembre 5, 2017 / Aceptación: Noviembre 19, 2018. DOI: 10.12802/relime.18.2131

RESUMO

O estudo do conhecimento matemático em diferentes contextos torna-se importante por causa do interesse atual em que os alunos possam usar a matemática na resolução de problemas reais. Portanto, o propósito desta pesquisa é caracterizar o conhecimento colocado em uso na medição de distâncias inacessíveis na obra *Elucidatio Fabricoe Ususque Astrolabii* de Johann Stöffler, publicado em 1513. O modelo teórico utilizado considera o estudo da constituição do saber por meio da análise de sua gênese, desenvolvimento e transversalidade. Os resultados revelam uma episteme da medição de distâncias inacessíveis na obra analisada, que inclui tanto uma busca de -uma razão adequada para realizar a medição, quanto a análise dinâmica do comportamento das sombras ou os raios visuais na estimativa de inclinações. Esta episteme é decisiva para a compreensão desses conhecimentos matemáticos na resolução de problemas.

PALAVRAS CHAVE:
- *Razão matemática*
- *Proporcionalidade*
- *Uso de conhecimento*
- *Gnomon*
- *Astrolábio*
- *Historicização do conhecimento matemático*

RÉSUMÉ

L'étude du savoir mathématique concernant différents contextes est de plus en plus important, en raison de l'intérêt actuel que les étudiants peuvent trouver à utiliser les mathématiques dans la résolution de problèmes de la vie réelle. Pour cela, le but de cette recherche est de caractériser les connaissances mises en œuvre, dans la mesure de distances inaccessibles, dans le travail d'Elucidatio Fabricoe Ususque Astrolabi de Johann Stöffler publié en 1513. Le modèle théorique utilisé considère l'étude de la constitution du savoir à partir de l'analyse de sa genèse, de son développement et de sa transversalité. Les résultats montrent dans le travail analysé l´existence d´un épistème de la mesure de distances inaccessibles, qui comprennent tant la recherche d'unrapport souhaitable pour réaliser la mesure, comme l'analyse dynamique du comportement des ombres ou des rayons visuelles dans l'estimation de ces comportements. Cet épistème est déterminant pour comprendre les connaissances mathématiques mises en jeu dans la résolution de problèmes.

MOTS CLÉS:
- *Raison mathématique*
- *Proportionnalité*
- *Connaissances mises en œuvre*
- *Gnomon*
- *Astrolabe*
- *Historicisation des connaissances mathématiques*

1. Introducción

Las reformas educativas contemporáneas han enfatizado en la necesidad de que los estudiantes puedan formular, emplear e interpretar las matemáticas en distintos contextos, usarlas para describir, explicar y predecir fenómenos, y reconocer el papel que desempeñan en el mundo (OECD, 2016). En otras palabras, se requiere propiciar que los aprendices vinculen las matemáticas que aprenden en la escuela con el mundo en el que viven. Sin embargo, en el ámbito de la geometría escolar, y a pesar de que los libros escolares actuales incluyen referencias a problemas reales, no se logran vínculos significativos con los contextos de uso del conocimiento. En efecto, estas actividades contextualizadas tienden a forzar la realidad para adaptarla a la matemática escolar, o bien, presentan situaciones que se distancian de los contenidos escolares (Espinoza, Vergara y Valenzuela, 2017).

En la unidad de geometría, la medición de distancias inaccesibles es uno de los contenidos curriculares de secundaria en los que se hace explícito el uso de la matemática para la resolución de problemas reales. Acerca de la importancia de la medición como una competencia para la vida cotidiana, existen investigaciones que estudian el tema desde su implementación curricular a nivel escolar (Peng Yee, 2014; Tan-Sisman y Aksu, 2012), desde su rol en la formación técnica para el trabajo (Bakker, Wijers, Jonker y Akkerman, 2011) y a partir de las argumentaciones y representaciones geométricas que surgen en los estudiantes al observar fenómenos físicos, como el comportamiento de las sombras producidas por el Sol (Boero, 2012; Douek, 1999). Por otra parte, el estudio de la enseñanza y aprendizaje de la medición ha sido abordado considerando distintas perspectivas teóricas, tales como el desarrollo cognitivo con foco en la primera infancia (Clements, 1999; Drake, 2014) y la construcción social e histórica - epistemológica del conocimiento matemático (Montiel y Jácome, 2014; Reyes - Gasperini, 2016).

Boero (2012) evidencia que, al enfrentar una situación ligada a la observación de las longitudes de las sombras, los estudiantes identificaron que el fenómeno posee propiedades que difieren de los conceptos propios de la geometría escolar. A su vez, Montiel y Jácome (2014) señalan que los problemas de medición de distancias inaccesibles propuestos en los textos escolares reducen la actividad de medición a la sustitución de datos sobre una fórmula preestablecida, en la cual no hay necesidad real de medir. También, plantean que estos problemas utilizan frecuentemente medidas que no son reales. Es decir, la matemática escolar evoca situaciones realistas, pero sin un vínculo significativo con la vida cotidiana (Cantoral, Montiel y Reyes - Gasperini, 2015). Además, Montiel y Jácome (2014) evidenciaron que profesores fueron capaces de responder correctamente a problemas de medición de distancias inaccesibles en un contexto real, pero sin entender la naturaleza no proporcional implícita en la relación ángulo - distancia. Por consiguiente, se requiere comprender en mayor profundidad la epistemología intrínseca del conocimiento puesto en uso en la medición de distancias inaccesibles en contextos reales, así como analizar su posible incorporación al aula de matemáticas.

En esta investigación se propone hacer lo primero en un escenario histórico, en efecto, el análisis histórico-epistemológico de obras antiguas es un medio propicio para estudiar el uso del conocimiento (Cantoral, 2013). En relación con esto, cabe señalar que la medición de distancias inaccesibles ha sido importante para el quehacer práctico del ser humano en el estudio del tiempo, la calibración de relojes, la estimación de tamaños y distancias de los cuerpos celestes, el estudio del tamaño de la Tierra, la elaboración de mapas, la estimación del punto de impacto de una bala de cañón, la construcción, la siembra y la división de terrenos, entre otras prácticas (Covián, 2013; Scriba y Schreiber, 2015; Vicente, 1993).

En relación con el estudio de obras antiguas que tratan la medición de distancias inaccesibles, Vicente (1993) señala que durante el siglo XVI se imprimieron numerosos tratados relativos al tema. Camacho, Sánchez, Blanco y Cuevas (2011), estudiando significados matemáticos asociados a la topografía, analizaron en textos antiguos el uso de instrumentos de medición como la dioptra o el grafómetro en la segunda parte del siglo XVI y durante el siglo XVII. A su vez, Meavilla (2012) analiza las técnicas de medición presentes en la obra titulada *El Perfecto Capitán*, *instruido en la disciplina militar,* publicada por Diego de Álava y Viamont en 1590. De un modo similar, Covián (2013), estudiando el desarrollo histórico de la topografía, analiza algunas proposiciones del *Tratado de Geometría Práctica y Speculativa*, publicado por Pérez de Moya en 1573. Todas las obras reseñadas tratan la medición con una alta especificidad técnica y con un léxico accesible a un público especializado.

En esta investigación se estudia la obra *Elucidatio Fabricae Ususque Astrolabii*[1], publicada en 1513 por el matemático, astrónomo y clérigo alemán Johann Stöffler. A diferencia de las obras descritas en el párrafo anterior, este fue uno de los primeros libros impresos acerca de la medición de distancias inaccesibles. Por tanto, es posible inferir de él aquellas ideas sobre medición que circulaban en Europa a principio del siglo XVI. Además, su autor escribió esta obra evitando la especificidad técnica, para así llegar a un público amplio, motivo por el cual encontramos en esta una estructura y organización de los conocimientos permeada por una intencionalidad de difusión masiva. Estos argumentos convierten a la obra de Stöffler (1513) en un referente interesante para explorar al saber matemático en la medición de alturas, longitudes y profundidades inaccesibles. En consecuencia, el objetivo de esta investigación es caracterizar al conocimiento puesto en uso en las proposiciones que tratan la medición de distancias inaccesibles en Stöffler (1513). A continuación, presentamos el marco teórico de esta investigación.

1 Traducción libre: "Acerca de la fabricación y los usos del astrolabio".

2. Marco teórico

En el marco de la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa (TSME), se estudia la naturaleza práctica del saber matemático al considerarlo como conocimiento puesto en uso. En este sentido, Cantoral (2013) señala que "el conocimiento es la información sin uso, mientras el saber es la acción deliberada para hacer del conocimiento un objeto útil frente a una situación problemática" (p.52). No se entiende al saber como un conocimiento separado e independiente de toda experiencia, más bien, se le concibe "lleno de" y "en" experiencia (Espinoza, 2014). También, se asume la legitimidad de toda forma de saber, sea este culto, técnico o popular (Cantoral, 2013). Es decir, no se asume al saber técnico o popular como una mera "aplicación" del saber culto, sino que en los tres se reconocen diversas significaciones del conocimiento matemático. A su vez, se sostiene que el conocimiento matemático, incluso aquel que se considera avanzado, tiene un origen y una función social vinculados a un conjunto de actividades prácticas socialmente establecidas, que lo anteceden y que acompañan su desarrollo (Cantoral, 2013). Sin embargo, en la escuela, puesto que suele enfatizarse el aprendizaje basado en la memorización de algoritmos y conceptos, se dejan fuera significados, procedimientos y argumentos que son constitutivos del saber matemático. De aquí que se soslayen aspectos sociales, contextuales y culturales de la construcción del conocimiento (Soto y Cantoral, 2014).

Por consiguiente, surge el interés de estudiar aquellos significados que han antecedido y acompañado la constitución del saber matemático, y que actualmente se encuentran perdidos, simplificados o invisibilizados en la matemática escolar, y analizar su posible incorporación al aula. Cantoral (2013) señala que esto se puede hacer problematizando al saber a través del análisis de su historización y dialectización. En el proceso de historizar, se ubica al saber en tiempo y espacio, se explora desde la óptica de quien lo inventa, lo aprende o lo usa, teniendo en cuenta una perspectiva histórica, cultural e institucional. Esta historización debe superar la construcción de una cronología factual, abordando una historia crítica en la que se estudie una epistemología situada del desarrollo conceptual (Cantoral, Montiel y Reyes-Gasperini, 2015). A su vez, al dialectizar, se contrastan los significados de la matemática escolar con los de otros escenarios, entre ellos, los provistos por la historización. El presente estudio desarrolla la historización de la medición de distancias inaccesibles en Stöffler (1513). La dialectización de los resultados de esta investigación queda propuesta para futuras investigaciones.

En esta investigación, se propone un modelo teórico para estudiar el proceso de *constitución del saber matemático*, el cual involucra a la humanidad en su devenir histórico, social y cultural. Para comenzar, se concibe al saber como el resultado de la interacción entre un mundo cognoscible e individuos cognoscentes, a los cuales este mundo les causa asombro y les interpela a la explicación. Asimismo, se destacan las cualidades creativa, explicativa y comunicativa manifestadas por el ser humano, a causa de las cuales este está en constante creación, genera sistemas de explicaciones y busca la difusión de sus ideas. También, siguiendo a Espinoza (2014), se consideran las siguientes tesis relativas a la construcción social del conocimiento: 1) el saber es dinámico, aglutinante y está en constante desarrollo; 2) la construcción social y difusión institucional son procesos simultáneos, imbricados y vivos; y 3) existen constantes tránsitos entre saber y conocimiento.

Así como el Big Bang explica la constitución del universo, el presente modelo explica la constitución del saber (Figura 1). El saber es representado con una flecha curva, la cual, expresa que este no está fragmentado y que se desarrolla de manera transversal a diversos ámbitos de la experiencia humana (Espinoza, 2014). En cambio, el conocimiento es representado con una flecha recta, pues, al transitar a conocimiento, el saber se cristaliza y se vuelve estable (Chevallard, 1991). De esta manera, en su difusión, la naturaleza, organización y estructura del saber se transforman al transitar hacia conocimientos, es decir, hacia objetos susceptibles de ser aprendidos y difundidos (Espinoza, 2014). A su vez, cuando el conocimiento se aprende, es decir, cuando se pone en uso a través de la experiencia, este se vuelve saber (Cantoral, 2013).

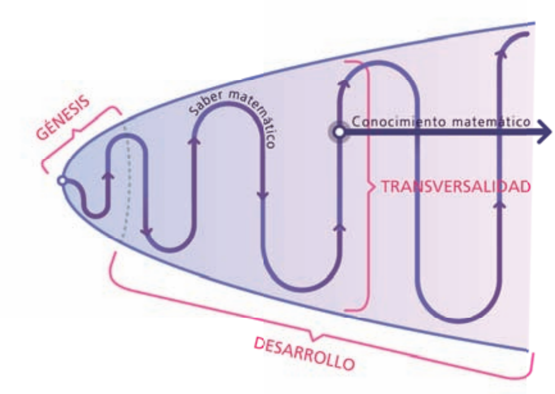


Figura 1. Esquema del modelo teórico para el estudio de la constitución del saber

En el proceso de constitución del saber, identificamos su *génesis*, su *desarrollo* y su *transversalidad*. Así como en la teoría del Big Bang, las condiciones de origen determinan significativamente las configuraciones actuales de lo material, en el proceso de *constitución del saber* se considera fundamental explorar los momentos de *génesis* del saber matemático. En efecto, considerando que la naturaleza epistemológica del conocimiento está anclada a sus contextos de producción (Espinoza, 2009), estos momentos germinales determinan significativamente tanto la forma como las cualidades intrínsecas del saber. A su vez, en estos momentos germinales el saber no está fragmentado. Estos momentos actúan como una singularidad, pues son un ámbito para explorar tanto la producción y naturaleza del saber como aspectos relativos a su devenir en el tiempo.

De modo similar, se reconoce el *desarrollo* del saber, en el cual, en su devenir histórico y a través de procesos de disciplinarización y escolarización, el saber se "cristaliza" en discursos científicos y escolares (Soto y Cantoral, 2014), producto de lo cual tiende a la especialización y su consecutiva fragmentación (Espinoza, 2014). Como resultado, se construyen conocimientos disciplinares (Cantoral, 2013) y operan sus respectivos procesos de transposición didáctica, en los que se producen conocimientos escolares (Chevallard, 1991). Por último, se identifica la transversalidad del saber, la cual expresa que el saber va constituyéndose en su uso, en el que atraviesa transversalmente diversos ámbitos de acción inmersos en prácticas humanas (Cantoral, 2013). Al respecto, se considera que la actividad humana se articula, principalmente, a través de prácticas fundamentales, las cuales son ancestrales, permanecen en el tiempo y se expresan en distintos ámbitos culturales.

En suma, se propone el estudio de la constitución del saber a través del análisis de su génesis, desarrollo y transversalidad:

- *Su génesis:* Explora la pregunta ¿cómo el saber llega a ser? Aborda aspectos relativos a su producción y naturaleza, situándose en contextos, intencionalidades y prácticas específicas.
- *Su desarrollo:* Explora la pregunta ¿cómo el saber es difundido? Aborda aspectos sobre su devenir histórico y sus tránsitos hacia y entre discursos disciplinares y escolares.
- *Su transversalidad:* Explora la pregunta ¿cómo este saber vive en diversas prácticas? Aborda el uso y desarrollo en prácticas científicas, técnicas, artísticas y cotidianas.

Al ser un modelo sistémico, la *génesis*, el *desarrollo* y la *transversalidad* no deben ser concebidas como independientes o secuenciadas, sino que requieren ser entendidas de manera articulada. En definitiva, este modelo permite desarrollar comprensiones amplias acerca del saber matemático y su devenir histórico, social y cultural. Particularmente, en el estudio de obras antiguas, al contemplar el examen de la producción, el devenir y los usos del saber, propicia la construcción de una mirada amplia en torno a constitución del saber matemático presente en estas obras. En efecto, en este modelo se considera al saber matemático como una expresión de la sabiduría humana (Cantoral, 2013). De esta manera, así como el conocimiento está ligado con el ejercicio intelectual, la sabiduría, dando un paso más allá, está ligada con el conocimiento "en" experiencia (Espinoza, 2014). Por consiguiente, se entiende que es en la experiencia humana, considerando esta no acotada a la experiencia social del aprendiz, sino involucrando además la de los seres humanos como colectivos, sociedades y la humanidad en general, donde se constituye el saber matemático (Cantoral, Montiel y Reyes - Gasperini, 2015).

3. Consideraciones metodológicas

Con respecto al diseño metodológico, se realizó un análisis temático de la obra de Stöffler (1513). Con relación a la selección de la obra, se escogió el siglo XVI debido a que en este se publicaron numerosos libros acerca de la medición de distancias inaccesibles (Vicente, 1993). Entre estos, se eligió el libro de Stöffler (1513) dado que: 1) fue publicado a comienzos del siglo, 2) se escribió con la intencionalidad de llegar a un público amplio, y 3) influenció significativamente en los libros relativos al tema, escritos a lo largo del siglo (Morrison, 2007). Estudiamos la obra desde su traducción al francés, realizada por Jean-Pierre de Mesmes en 1560, en conjunto con la versión original escrita en latín y publicada en 1513. En la traducción, se incluye el tratado de Stöffler (1513) en conjunto con breves comentarios del traductor. También, las imágenes de la versión original de 1513, a diferencia de las imágenes de la traducción de 1560, están proporcionadas a escala. Estudiamos en la traducción de 1560 el texto original de Stöffler, sin considerar los comentarios del traductor, y lo analizamos usando las imágenes de la publicación original.

En Stöffler (1513), la medición de distancias inaccesibles se trata entre las proposiciones 60 y 67, como un anexo de un libro que trata acerca de la construcción y el uso astronómico del astrolabio. De estas ocho proposiciones, en esta investigación se estudiaron las primeras cuatro, considerando que en estas se desarrollan las técnicas de medición de alturas inaccesibles tal cual se presentan en los textos escolares de nivel medio y superior. Siguiendo el método de análisis temático (Maguire y Delahunt, 2017), se realizó la indagación de la siguiente manera: 1) las proposiciones fueron segmentadas siguiendo el orden de los temas que el autor desarrolló en su obra; 2) se realizó una codificación mediante unidades semánticas, considerando como eje el cómo se pone en uso la medición de distancias inaccesibles; 3) estos códigos fueron analizados y agrupados en temas preliminares; 4) se volvió a analizar el texto, buscando corroborar y legitimar estos temas preliminares. Finalmente, estos temas refinados constituyen las categorías obtenidas del análisis.

Después del análisis temático, se analizó el proceso de constitución del saber matemático presente en las proposiciones estudiadas de Stöffler (1513). Para hacer esto, se siguió la propuesta metodológica de Espinoza (2009), en la cual, se propone el estudio de obras matemáticas antiguas considerando el contexto específico en el que fueron producidas, las prácticas a las que están vinculadas y el escenario sociocultural en el que fueron gestadas. Las obras son consideradas como una producción con historia, un objeto de difusión y parte de una producción intelectual más global. En la presente investigación, estos elementos son operacionalizados de la siguiente manera:

1. *Producción con historia:* Exploramos la época en la que el texto fue escrito, la cual fue singular, tanto por la invención de la imprenta en Occidente como por el arribo de los europeos a América.
2. *Objeto de difusión:* Analizamos la naturaleza de difusión de la obra, considerando el público al que se dirige el texto y la intencionalidad didáctica que el autor plasmó en la misma.
3. *Parte de una expresión intelectual más global:* Examinamos la obra en conjunto con otros 5 libros que tratan la misma temática y que fueron escritos en el siglo XVI.

De esta manera, estudiamos este proceso de *constitución del saber matemático* indagando su *génesis* en textos escritos antes del siglo XVI en los que están presentes los conocimientos puestos en uso en las proposiciones estudiadas. Analizamos las proposiciones 18, 19, 20 y 21 de la *Óptica de Euclides*, datada en el siglo III antes de Cristo, y el capítulo 4 de la obra *De Arte Mesurandi*, escrita por Johannes de Muris en la primera mitad del siglo XIV. Para el análisis del *desarrollo* y de la *transversalidad* del saber, recurrimos a estudios de tratados acerca de la medición de distancias inaccesibles publicados entre los siglos XI y XVI. Consideramos la *Histoire de l´astronomie du moyen age* de Delambre (1819) y la *Altimetría y longimetría en textos renacentistas: estudio comparado* de Vicente (1993), en conjunto con otras investigaciones que estudian el contexto de producción de la obra de Stöffler (1513) (Morrison, 2007, Hayton, 2017). Además, analizamos la presencia de las categorías obtenidas del análisis temático de Stöffler (1513) en cinco obras escritas en el siglo XVI, que tratan la medición de distancias inaccesibles, a saber: 1) la *Nova Scienctia* de Nicolo Fontana (1537/1998), 2) El tratado *L'usage de l'anneau astronomique* de Gema Frisius (1544), 3) al *Commentariorum in Astrolabium quod planisphaerium vocant* de Juan de Rojas y Sarmiento (1551), 4) a la *Geometría Práctica y Speculativa* de Pérez de Moya (1573), y 5) *El Perfecto Capitán, instruido en la disciplina militar* de Álava y Viamont (1590). De esta manera, buscamos indagar si estas categorías son representativas en las obras escritas durante el siglo XVI.

En definitiva, el primer análisis permitió develar las categorías que caracterizan al conocimiento matemático puesto en uso en la obra de Stöffler (1513), mientras que el segundo posibilitó examinar estas categorías considerando la constitución del saber matemático en su devenir histórico, social y cultural. A continuación, presentamos los resultados de la investigación.

4. Análisis temático de la medición de distancias inaccesibles en la obra de Stöffler de 1513

En la proposición 60 de su *Elucidatio Fabricae Ususque Astrolabii*, Stöffler comienza señalando la utilidad y beneficio que la Geometría tiene para el ser humano en diversas prácticas. Después de explicitar las unidades de medida a utilizar, el autor señala que la medición de una distancia inaccesible se basa en el siguiente principio: considerar la magnitud a medir como el lado de un triángulo, rectángulo en (Figura 2). A su vez, el lado representa la longitud entre esta magnitud y el observador, y la hipotenusa, la “línea visual” trazada desde el ojo hasta un extremo de la magnitud a medir. Considerando esta configuración geométrica, el autor desarrolla un método de medición en el que se usa la inclinación de la línea visual, así como la distancia entre el observador y la magnitud a medir.

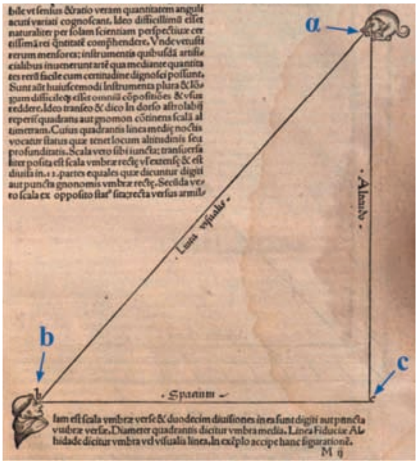


Figura 2. Imagen que muestra la configuración geométrica de la medición, tomada de *“Elucidatio Fabricae Ususque Astrolabii”,* por Stöffler, 1513, segunda parte, folio LXXI [descripciones añadidas]

A continuación, Stöffler (1513) plantea que su intención es proponer un método de medición que permita llegar a un público amplio mediante la simplificación de los cálculos. Por este motivo, escogió para su obra el uso del instrumento llamado “gnomon” o “cuadrado”. Como se puede apreciar en la Figura 3, el gnomon en la época de Stöffler era un cuadrado que tenía dos lados divididos en doce partes iguales, los cuales eran conocidos como escalas aritméticas. El lado inferior era llamado “Sombra Recta” (*Umbra Recta*) y el lado vertical “Sombra Lateral” (*Umbra Versa*). La diagonal del cuadrado era conocida como

"Línea de Sombra Media" (*Linea Medle Umbre*), y tenía un ángulo de inclinación de 45 grados por sobre la Sombra Recta. Además, el autor señala que es necesario considerar que la magnitud a medir puede ser dividida en doce partes iguales.

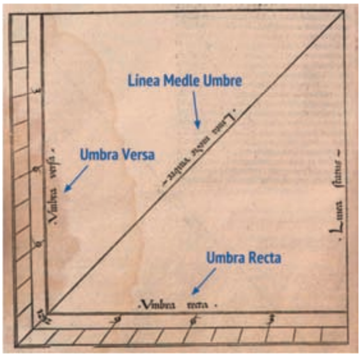


Figura 3. Imagen del gnomon usado por Stöffler para realizar las mediciones, tomada de *"Elucidatio Fabricae Ususque Astrolabii"*, por Stöffler, 1513, segunda parte, folio LXIX [descripciones añadidas]

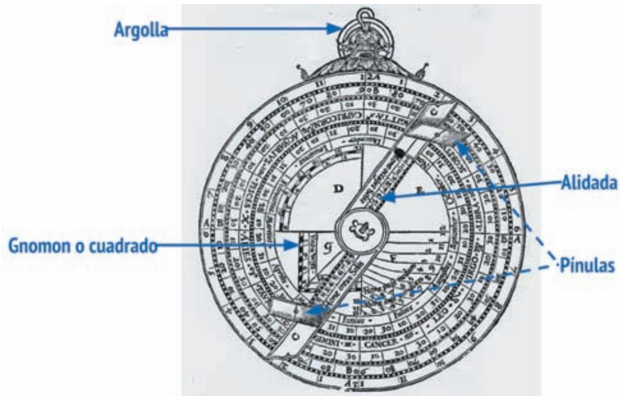


Figura 4. Parte trasera de astrolabio (Rojas, 1551, p.7) [descripciones añadidas]

Como puede apreciarse en la Figura 4, el gnomon usado por Stöffler estaba ubicado en la parte trasera de los astrolabios de su época. Estos astrolabios tenían una argolla, la cual, al sujetarse con la mano, aseguraba que el instrumento estuviera nivelado. En su centro giraba una barra de metal, llamada "*Alidada*", usada para determinar visualmente inclinaciones y declinaciones. En los extremos de esta *Alidada* había dos pequeñas láminas metálicas, llamadas "*pínulas*", que tenían cada uno un pequeño orificio circular usado para ajustar la mirada. Estas servían para asegurar la precisión y exactitud de la estimación de la inclinación o declinación.

En la proposición 61, Stöffler (1513) presenta la técnica de medición de una altura inaccesible utilizando la sombra generada por la luz del Sol o de la Luna. Considera una altura perpendicular al piso y cuya sombra esté proyectada sobre una superficie plana. En su explicación, el autor sostiene que para medir esta altura hay que esperar que el cuerpo celeste (Sol o Luna) se mueva hasta que la línea visual (entre el ojo y el cuerpo celeste) calce con la Línea de Sombra Media (diagonal) del gnomon (Figura 5). En este caso, la altitud del Sol o Luna será de 45 grados, por tanto, la medida de la sombra será igual a la medida de la altura buscada. De esta manera, midiendo la sombra se tendrá la medida de la altura buscada.

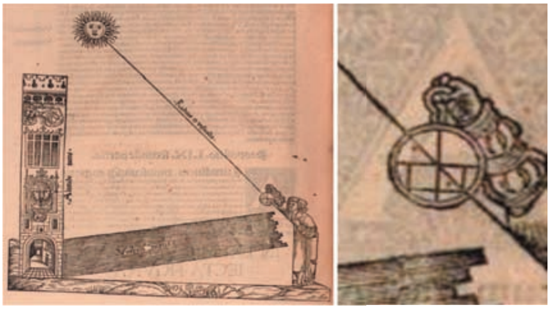


Figura 5. Imagen de la técnica de medición cuando la elevación del Sol es 45º, tomada de *"Elucidatio Fabricae Ususque Astrolabii",* por Stöffler, 1513, segunda parte, folio LXX

A continuación, el autor explica la misma técnica de medición considerando el caso en el que la altitud del Sol o la Luna es superior a los 45 grados, caso en que la altura será más grande que su sombra. La razón entre la altura y su sombra será de doce entre el número de puntos obtenidos en la medición de la inclinación del Sol o la Luna en la Sombra Recta del gnomon. Stöffler presenta dos ejemplos, uno en el que el rayo visual toca en cuatro puntos la Sombra Recta, y otro en el que la toca en seis. En estos, la altura será consecutivamente tres y dos veces más grande que su sombra. Por tanto, multiplicando la magnitud de la sombra por 3 o 2 se obtiene la magnitud de la altura inaccesible. Stöffler (1513) termina señalando que la sombra será el doble de la altura cuando el Sol o la Luna estén elevados aproximadamente sesenta grados y treinta o cuarenta minutos sobre el horizonte.

Para finalizar, el autor desarrolla el caso en el que la altura es más pequeña que su sombra, es decir, cuando la inclinación del Sol o la Luna es menor a 45 grados (Figura 6). La magnitud de la altura será igual al valor de la medida de su sombra, multiplicada por el punto en el que la altitud del Sol o Luna toque sobre la Sombra Lateral del gnomon, y dividida por doce. Concluye enfatizando que, cuando la sombra toque seis puntos del gnomon, la sombra será el doble de la altura, lo cual ocurrirá cuando el Sol o la Luna estén elevados sobre el horizonte aproximadamente veintiséis grados y treinta minutos.

Figura 6. Imagen de la técnica de medición cuando la elevación del Sol es menor a 45º, tomada de *"Elucidatio Fabricae Ususque Astrolabii"*, por Stöffler, 1513, segunda parte, folio LXXI

En la proposición 62, el autor describe la técnica para encontrar una altura inaccesible cuando esta se encuentra perpendicular al piso sin usar su sombra. Es el caso en el que el medidor está sobre una superficie plana y tiene acceso a la base de la altura. El medidor debe poner la *Alidada* alineada con la sombra media del gnomon, es decir, midiendo una altitud de cuarenta y cinco grados. Después, debe ubicarse bajo la torre y moverse hacia atrás o adelante de la magnitud a medir hasta que la línea visual, pasando por las *pínula*s, se cruce con la parte más alta de la altura a medir. En este caso, se tendrá que la inclinación de la línea de visión es de 45 grados. Por tanto, la magnitud de la altura inaccesible será igual a la distancia del medidor a la base de esta, más la longitud del medidor (Figura 7).

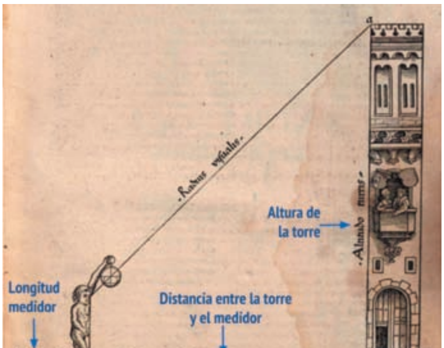


Figura 7. Imagen de la técnica de medición cuando la línea visual está elevada 45º, tomada de *"Elucidatio Fabricae Ususque Astrolabii"*, por Stöffler, 1513, segunda parte, folio LXXI [descripciones añadidas]

En la proposición 63 se explica cómo medir una altura inaccesible, usando la línea visual, pero sin que cambie el lugar del medidor. El autor divide esta proposición en dos casos: cuando el ángulo que genera la línea visual sobre el gnomon es mayor o menor a 45 grados. Aquí se procede con técnicas similares a las que se usan cuando se consideran la sombra que produce el Sol o la Luna. En el primer caso, la línea visual tocará a la Sombra Recta del gnomon, mientras que en el segundo tocará a la Sombra Lateral. En el primero, debe multiplicarse por 12 la distancia desde el medidor a la base de la altura, dividirse por el número obtenido en el gnomon, y sumarse la altura del observador. En el segundo, se procede de manera similar, pero multiplicando por el número del gnomon y dividiendo por 12 (Figura 8). A su vez, Stöffler (1513) da ejemplos prácticos de medición para esta proposición, así como en las dos proposiciones anteriores. En todos estos ejemplos, el autor señala que para medir la distancia accesible se requiere usar alguna unidad de medida.

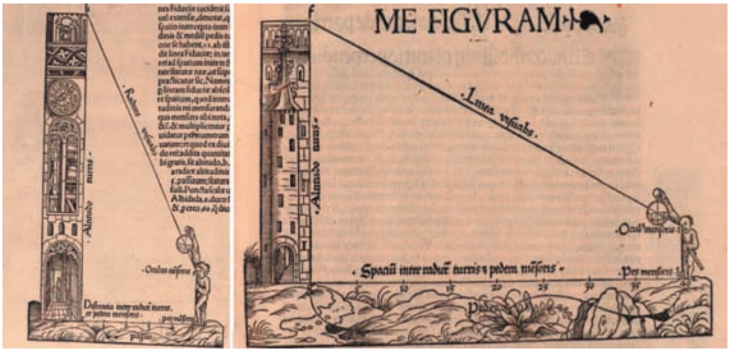


Figura 8. Imagen de la técnica de medición cuando la línea visual está elevada más y menos de 45º respectivamente, tomada de *"Elucidatio Fabricae Ususque Astrolabii",* por Stöffler, 1513, segunda parte, folio LXXI

Como resultado del análisis temático, encontramos tres aspectos característicos de la medición de distancias inaccesibles en Stöffler (1513), a saber: 1) la búsqueda de una razón conveniente para realizar la medición, 2) el uso del dinamismo del fenómeno involucrado, y 3) la elección de una unidad de medida adecuada. A continuación, se presenta una síntesis de estos resultados.

4.1. *La búsqueda de una razón conveniente para realizar la medición*

Las técnicas descritas en Stöffler (1513) comienzan analizando la posibilidad de encontrar ciertas razones en el gnomon que permitan simplificar el procedimiento de medición y los cálculos. A esto le hemos denominado *la búsqueda de una razón conveniente.* El autor inicia la descripción de la técnica de la proposición 61 buscando la razón 1:1 entre la altura y su sombra. También, en la proposición 62, al explicar las técnicas en las que se usa la línea visual, el primer caso presentado es la búsqueda de la razón 1:1 entre las magnitudes involucradas. Esta búsqueda de una razón conveniente para realizar la medición se hace explícita en la proposición 61, donde el autor señala lo siguiente:

> L´utilité de cette partie est fort grande. Car s´il aduient quelquefois, que l´altitude du Soleil, ou de la Lune, ne soit justement de Quarante cinq degres: attendez un peu, jusques â ce, que vous ayes ceste altitude en vostre Astrolabe. Et lors par tout l´unbre ferá egale â la hauteur des choses (Stöffler, 1513/1560, pp. 199-200) [2].

A su vez, en esta misma proposición, en los ejemplos para los casos donde la altura es mayor o menor a 45 grados, propone mediciones que involucran las razones 2:1, 3:1 y 1:2 entre la altura y su sombra, señalando además los ángulos de inclinación del Sol o la Luna para tener la razón 2:1 y 1:2. Y de manera general, al medir con la técnica descrita por Stöffler (1513), siempre se tendrá como razón una fracción de la forma $\frac{a}{12}$ o $\frac{12}{a}$, siendo a un número entero entre 1 y 12. Es decir, el gnomon se dividió con la intención de encontrar razones convenientes. En efecto, el número 12, al ser el menor número natural que tiene entre sus divisores al 1, 3, 4 y 6, es a la vez el menor entero que permite formar simultáneamente las razones 1:1, 1:2, 2:1, 1:3, 3:1, 1:4 y 4:1 con respecto a sus divisores. Estas son las razones más convenientes que permiten realizar los cálculos de manera más simple. En definitiva, la búsqueda de razones convenientes es una característica de la medición de distancias inaccesibles en las proposiciones analizadas del libro de Stöffler (1513).

4.2. *El uso del dinamismo del fenómeno involucrado*

La búsqueda de una razón conveniente es posible gracias al dinamismo inherente a las técnicas de medición utilizadas. Por ejemplo, en la técnica en la que se usa la línea visual, el dinamismo está dado por la posibilidad de desplazamiento del medidor. A su vez, en el caso de la técnica en la que se usan las sombras, el dinamismo está dado por el movimiento del Sol y la Luna. Este caso es particularmente interesante, pues hay periodos del año en los que, en Europa, no se tendrá la razón 1:1 entre alturas y sombras (Bedaque y Bretones, 2016). Con respecto a esto, en la proposición 61, el autor señala lo siguiente:

> En nostre septiesme climat, quand le Soleil chemine par les lignes Meridionaux, jamais l´umbre n´est esgal à la chose que la faict: car le Soleil, en temps de Midy, n´est jamais elevé sur nostre Horizon, de quarante cinq

---

[2] Traducción libre: "La utilidad de esta parte es muy grande. Ya que, si sucede a veces que la altitud del Sol, o de la Luna, no sea justamente de cuarenta y cinco grados: esperar un poco, hasta que se tenga esta altitud en vuestro Astrolabio. Entonces todas las sombras serán iguales a la altura de las cosas".

> degrez [...] Mais quand le Soleil chemine par les lignes Septentrionaux, depuis le neusiesme degré du Belier jusques au vingt & vneisme de la Vierge: touts les iuors, si le Soleil luyt, l`umbre móstre la hauteur du corps, duquel elle est l´umbre, à tout le moins, una fois le jour (Stöffler, 1513/1560, p. 200) [3].

En esta cita, Stöffler (1513) señala que no se tendrá la razón 1:1 cuando el Sol recorre entre el noveno y décimo grado de Aries, y el vigésimo y vigésimo primer grado de Virgo. En el siglo XVI, se usaron nociones astronómicas antiguas, en la que la eclíptica era dividida en doce partes iguales, obteniendo los signos zodiacales. Cada zodiaco equivalía a 30 grados de arco de circunferencia, de manera que los doce zodiacos completan los 360 grados. Asimismo, los astrolabios usados en la primera parte de este siglo XVI relacionaban las divisiones zodiacales con los meses y días del año. Por ejemplo, el astrolabio descrito en la obra de Frisius (1544) tenía una circunferencia exterior dividida por los doce signos zodiacales, subdivididos respectivamente en 30 grados cada uno, y una circunferencia interior dividida en los meses y días del año. Para este astrolabio, el noveno grado de Aries equivale al 19 de marzo y el veintiún grado de Virgo equivale al 5 de septiembre (Figura 9).

Figura 9. Imagen de un astrolabio en la obra de Frisius (1544, p. Fo.XII)

---

3 Traducción libre: "En nuestro clima séptimo, cuando el Sol camina por las líneas meridionales, jamás la sombra será igual a las cosas que uno mide: como el Sol, en tiempos de mediodía, jamás se eleva sobre nuestro horizonte, de cuarenta y cinco grados [...] Pero cuando el Sol camina por las líneas Septentrionales, después del noveno grado de Aries hasta el vigésimo primero de Virgo: todos los días, si el Sol resplandece, la sombra muestra la altura del cuerpo, de la cual ella es la sombra, al menos, una vez al día".

Por tanto, el planteamiento de Stöffler considera que, en su latitud, entre el 5 de septiembre y el 19 de marzo no se tendrá la razón 1:1. En cambio, entre el 19 de marzo y el 5 de septiembre esta razón se obtendrá dos veces al día, una antes del mediodía y otra después del mediodía. Y exactamente el 19 de marzo y 5 de septiembre esta razón se tendrá una vez al medio día. Más aún, el autor señala que usando el astrolabio pueden determinarse de manera precisa los horarios exactos en los que sucederá esto para cualquier latitud y fecha. Usando el astrolabio, los medidores podían predecir los horarios en los que se tendrían razones convenientes. Además, la búsqueda de estas razones estaba directamente relacionada a entender la posición de los astros y la bóveda celeste en función de la posición del observador. Cabe señalar que esta problematización del comportamiento de las sombras se realizó en el contexto de la naturaleza astronómica del libro de Stöffler (1513). En síntesis, tanto el movimiento del observador como el del Sol y la Luna permiten y condicionan la búsqueda de razones convenientes para realizar la medición.

4.3. *La elección de una unidad de medida adecuada*

En la proposición 60 de su obra, Stöffler (1513), define la medición de la siguiente manera:

> Mesurer aucune quantité, c´est trouver combien de fois quelque mesure commune, & quasi par tout cogneuë, est trouvée en la quantité: au quelle partie ceste quantité est de ladite commune quantité, ou combien de parties d´icelles elle contient (Stöffler, 1513/1560, p. 194)[4].

Estas medidas comunes o famosas, señala el autor, son aquellas que son comunes en todos los países, o bien, las usadas y acostumbradas por muchos. Stöffler (1513) presenta diversas unidades de medida, las cuales, son patrones que tienen como referencia partes del cuerpo humano. Tales patrones consideraban las siguientes equivalencias y unidades: el dedo, la palma (4 dedos), el pie (4 palmas), el paso (5 pies), la *perche* (10 pies), el estadio (125 pasos), la milla (8 estadios) y la legua (un millar y medio), entre otras. Estas unidades de medida eran necesarias dado que, para conocer una distancia inaccesible, se requería, además de cierta razón, la medición de una distancia accesible como la medida de cierta sombra, la distancia entre el observador y la base de la altura o la altura del medidor.

En las cuatro proposiciones analizadas se explicita la necesidad de elegir una unidad de medida. Por ejemplo, en una técnica de medición en la que se usan

[4] Traducción libre: “Medir alguna cantidad, es encontrar cuántas veces alguna medida común y casi por todos conocida, se encuentran en la cantidad: o cuál parte de esta cantidad es de dicha cantidad común, o cuántas partes de ella contiene”.

las sombras, el autor señala que el medidor debe "mesurez doncques l´umbre de la chose, par quelque mesure que cognoisiez" (Stöffler, 1513/1560, p. 201)[5]. También, al explicar la técnica de medición en la que se usa la línea visual, Stöffler señala que es necesario "mesurez l´espace, qui est compris entre la racine de l´altitude de la chose, qui est à mesurer, & vostre pied, par quelque mesure commune, a vous cogneuë, comme par pieds, ou par pas u autre" (Stöffler, 1513/1560, pp. 205-206)[6]. En definitiva, para Stöffler (1513) medir implica elegir una unidad de medida y compararla con la magnitud que se desea medir.

TABLA I
Presencia de las categorías en las proposiciones analizadas

Proposiciones analizadas de Stöffler (1513):		*Categorías emergentes:*		
		Búsqueda de una razón conveniente	*Uso del dinamismo del fenómeno involucrado*	*Elección de una unidad de medida*
Proposición 60	Definiciones			X
	Descripción de las unidades de medida			X
	Explicación del uso del Gnomon	X	X	
Proposición 61	inclinación de 45 º	X	X	
	inclinación mayor a 45º	X	X	X
	inclinación menor a 45º	X	X	X
Proposición 62	inclinación de 45 º	X	X	X
Proposición 63	inclinación mayor a 45º	X	X	X
	inclinación menor a 45º	X	X	X

A modo de síntesis, en la tabla 1 se presenta la presencia de las tres categorías emergentes de la medición de distancias inaccesibles en los diferentes fragmentos de las proposiciones analizadas.

5 Traducción libre: "Medir entonces la sombra de la cosa, por alguna medida que conozca".

6 Traducción libre: "Medir el espacio, que está entre la base de la altura de la cosa que se va a medir y vuestro pie, por alguna medida común, por usted conocida, como el pie, el paso u otra".

5. La obra de Stöffler y el proceso de constitución del saber

En esta sección, analizaremos el proceso de la constitución del saber presente en las proposiciones analizadas. Con relación a su *génesis*, el saber puesto en juego en Stöffler (1513) tiene antecedentes que datan alrededor del siglo III antes de Cristo. En efecto, en la *Óptica de Euclides*, tratado geométrico antiguo en el que se estudia el fenómeno de la percepción visual, hay cuatro proposiciones que tratan acerca de la medición de alturas, profundidades y longitudes inaccesibles (Figura 10). A su vez, la medición de distancias inaccesibles también se encuentra en textos antiguos de carácter astronómico, como es el caso del tratado *Sobre los tamaños y las distancias del Sol y la Luna* de Aristarco de Samos (Scriba y Schreiber, 2015). Por otra parte, las unidades de medidas citadas en Stöffler (1513) se remontan a la antigüedad (Robinson, 2007).

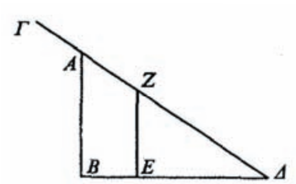


Figura 10. Imagen de la proposición 18 de la *Óptica de Euclides*, en la que se explica cómo encontrar el tamaño de una altitud AB usando su sombra (Euclides, 2000, p. 151)

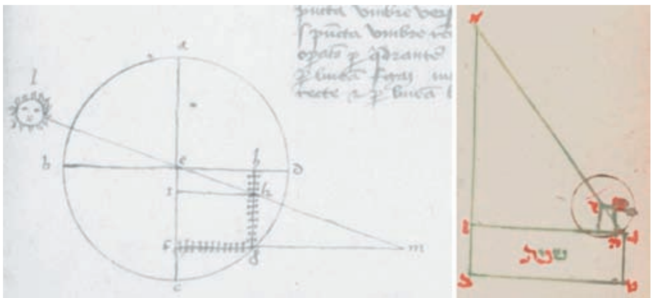


Figura 11. Imágenes que evidencian el uso del gnomon en el astrolabio en de Muris (1301-1400, p. 31) y Recueil d´Astronomie (1501-1600, p. 68)

Acerca del uso del astrolabio para realizar estas mediciones, encontramos el uso del gnomon en un tratado antiguo, escrito en hebreo y titulado *Recueil d´Astronomie*. También, en la obra *De Arte Mesurandi*, escrita por Johannes de Muris en la primera mitad del siglo XIV, existe una detallada descripción del uso del gnomon dentro del astrolabio. Como se puede apreciar en la figura 11, el gnomon de Muris también está construido con doce divisiones, las cuales, como ya se señaló, son útiles para encontrar razones convenientes. Específicamente, el autor ejemplifica en la imagen el caso de 4/12, donde la magnitud de la altura es un tercio de la magnitud de su sombra. Además, al representar el movimiento del Sol, se hace patente el dinamismo del fenómeno involucrado.

Con relación al *desarrollo* del saber, los antecedentes del uso del astrolabio tienen al menos dos mil años de antigüedad (Delambre, 1819). El primer tratado conocido fue escrito alrededor del 375 d.C. Después, los astrónomos islámicos incorporaron a los tratados una base teórica más sólida. Más tarde, estos se transmitieron a Europa por medio de la traducción al latín en monasterios cristianos (Morrison, 2007). Contractus escribió un tratado en 1050, al igual que Athélard en 1130, en conjunto con una traducción del árabe al latín de *Elementos* de Euclides. En el siglo XIV se escribieron otros tratados, algunos de los cuales fueron reimpresos a comienzos del siglo XVI, como el de Nicéforo Grégoras (1295-1359), reimpreso en 1498, y el de Pietro d`Abano (1250-1318), reimpreso en 1502 (Delambre, 1819). Cabe señalar que no todos los tratados tenían en sus versiones originales una sección de técnicas para la medición de distancias inaccesibles. Por ejemplo, en el caso del *A Treatise on the Astrolabe* de Chaucer de 1391, es probable que la sección de medición de distancias inaccesibles no haya sido incluida en su versión original, sino que haya sido anexada después (Eisner, 2002).

El tratado de Stöffler (1513) fue, en su temática, el más influyente del Renacimiento (Morrison, 2007). Si bien, como señala Hayton (2017), Stöffler (1513) no solo cita a varios de los tratados más antiguos, sino que también extiende algunas proposiciones para casos más generales, de manera global su tratado no hace aportaciones significativas a la ciencia del astrolabio (Delambre, 1819). Más bien, se reconoce que la gran aportación de su escrito está en su carácter divulgativo. De hecho, el mismo autor dedica su libro a amateurs de buenas letras y estudiantes de artes liberales. A su vez, señala su intencionalidad de llegar a un público amplio mediante la simplificación de los cálculos. Morrison (2007) plantea que el libro de Stöffler se destaca por ser claro, conciso y completo para su época, además de requerir solamente modestos conocimientos previos para entenderlo. Más aún, al ser un libro impreso, tuvo una amplia difusión y era asequible a un precio razonable. Además, se publicó en un momento donde la popularidad del astrolabio llegaba a su punto máximo en Europa, particularmente por su uso en la astrología. Como puede apreciarse, el astrolabio tuvo gran importancia en el desarrollo del Renacimiento europeo (Hayton, 2017).

El libro de Stöffler (1513) fue ampliamente difundido en el siglo XVI; fue editado dieciséis veces, en distintos países e idiomas, y prácticamente todos los tratados escritos posteriormente que tratan los mismos temas lo citan (Morrison, 2007). Durante el siglo XVI se escribieron varios libros que desarrollaron el tema de la medición de distancias inaccesibles, como es el caso de las populares obras de Fontana (1537/1998), Frisius (1544), Rojas (1551), Pérez de Moya (1573) y Álava y Viamont (1590). Cabe señalar que los contenidos tratados por Stöffler (1513) también están tratados en estas cinco obras citadas. A su vez, las tres categorías emergentes que surgieron del análisis de Stöffler (1513) también están presentes en estas obras (tabla II).

TABLA II
Presencia de las categorías obtenidas en el análisis de Stöffler (1513) en otras obras escritas en el siglo XVI

Categorías emergentes surgidas del análisis temático de Stöffler (1513)		Fontana (1537/ 1998)	Frisius (1544)	Rojas (1551)	Pérez de Moya (1573)	Álava y Viamont (1590)
1. Búsqueda de una razón conveniente		X	X	X	X	X
2. Uso del dinamismo del fenómeno involucrado	Movimiento de las sombras		X	X	X	
	Movimientos del medidor	X	X	X	X	X
3. Elección de una unidad de medida		X	X		X	X

La *búsqueda de una razón conveniente* para realizar la medición está presente en estos cinco tratados. En comparación con Stöffler (1513), algunos de estos tratados contienen descripciones técnicas más detalladas. Rojas (1551), por ejemplo, buscando mayor precisión en las mediciones, divide cada doceava división del gnomon en cuatro subdivisiones. También, Fontana (1537 / 1998) realiza doce subdivisiones para cada división. En su libro, escrito para ser usado en la balística, Fontana explicó que pequeños errores de observación generan grandes imprecisiones en la medición. A pesar de estas diferencias, estas obras siguen el mismo principio de comenzar con las proposiciones en las que se busca la razón 1:1 (Figura 12).

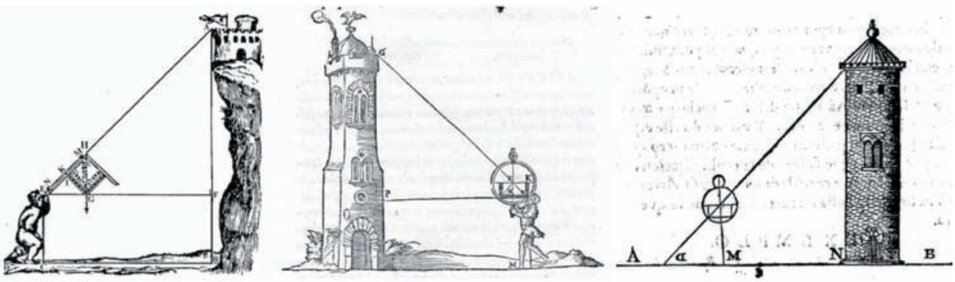


Figura 12. Imágenes de la búsqueda de la razón 1:1 en las técnicas de medición en Fontana (1537 / 1998, p. 129), Rojas (1551, p. 168), y Álava y Viamont (1590, p. 210), respectivamente

También, en estas obras se encuentra el *uso del dinamismo del fenómeno involucrado* en la medición. Por ejemplo, el uso del dinamismo del sol y la luna en la medición se encuentra en los tratados de Frisius (1544), Rojas (1551) y Pérez de Moya (1573) (Figura 13).

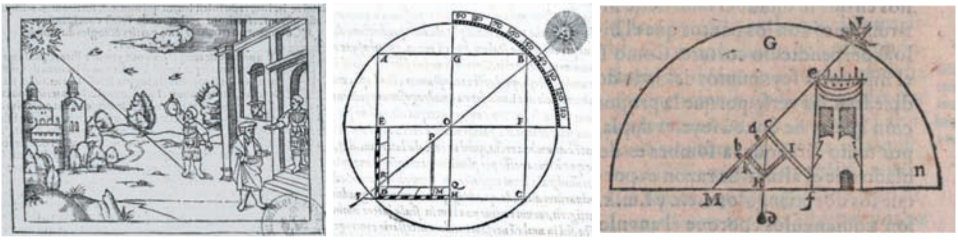


Figura 13. El movimiento del Sol y su uso para la medición en Frisius (1544, p. Fo.LXIII), Rojas (1551, p. 148) y Pérez de Moya (1573, p. 123), respectivamente

Además, la *elección de la unidad de medida* también está presente en estos tratados. A modo de ejemplo, Fontana, al explicar una de las técnicas de medición en su obra, señala que “se multiplica por 12 el número de pasos (o de cualquier otra medida) que existe entre mis pies y el punto B” (Fontana, 1537 / 1998, p. 132). Asimismo, las obras de Frisius (1544), Pérez de Moya (1573) y Álava y Viamont (1590), al igual que Stöffler (1513), tienen una sección en la que explican las unidades de medida utilizadas en cada obra. Cabe señalar que, en estas mediciones, la unidad de medida escogida podía variar si la magnitud a medir era la profundidad de un pozo, la altura de una torre o la distancia entre dos ciudades.

Finalmente, en relación con la *transversalidad* del saber, las cuatro proporciones analizadas se desarrollan al final del libro de Stöffler, el cual trata acerca de la construcción del astrolabio y su uso para calcular la inclinación del Sol y las estrellas en varias posiciones de sus órbitas, así como el cálculo de latitudes y longitudes de ciudades. De esta misma naturaleza es el tratado de Rojas (1551). A su vez, el tratado de Fontana (1537/1998) es de Balística, el de Álava y Viamont (1590) de Ciencia Militar y Artillería, el de Frisius (1544) es de Cosmografía y Geografía, y el de Pérez de Moya (1573) de Geometría Práctica. Vicente (1993) sostiene que las técnicas de medición de distancias inaccesibles, presentes en las obras del siglo XVI, fueron de gran utilidad para astrónomos, cosmógrafos, geógrafos, mecánicos, militares, arquitectos y agrimensores. El interés por estas labores se vio incrementado en el siglo XVI, entre otros motivos, por el arribo de los europeos a América, donde estas técnicas se usaron particularmente para la construcción, la fabricación de mapas y la Balística. En estas obras, también se explicaron otras técnicas de medición de distancias inaccesibles “utilizando varas, espejos o piedras como los más elementales y al alcance de cualquier técnico" (Vicente, 1993, p. 295). Es decir, en su mayoría, las obras en las que se estudió la medición de distancias inaccesibles fueron de carácter técnico. En definitiva, el carácter técnico de la obra de Stöffler debe ser considerado para su interpretación, pues la búsqueda de la economía en la técnica incide en la naturaleza epistemológica que el autor impregna en ella, particularmente, en el uso del dinamismo de los fenómenos para encontrar razones convenientes y así realizar la medición.

6. Caracterización de la medición de distancias inaccesibles desde el análisis de la obra de Stöffler

Para Stöffler (1513), medir involucra comparar cierta unidad de medida o patrón de referencia con una magnitud que desea conocerse. La diferencia entre la medición de distancias accesibles e inaccesibles en Stöffler (1513) radica en cómo se realiza la comparación entre la magnitud y la unidad de medida. En la primera, esta se realiza de manera directa, mientras que, en la segunda, ante la imposibilidad de hacerlo de aquel modo, se requiere usar una proporción.

Con relación a los significados asociados a la medición de distancias inaccesibles, Vicente (1993) señala que los tratados que abordan este tema, escritos en el siglo XVI, operan bajo el mismo principio: el uso de triángulos semejantes. Si bien, concordamos con el autor, puntualizamos que este principio pertenece más al ámbito de la justificación matemática de las técnicas de medición que al de su uso práctico. Por tanto, en otros ámbitos del saber, como por ejemplo el saber técnico, existen otras significaciones del conocimiento matemático.

En el caso de la obra de Stöffler (1513), no se hace alusión explícita al uso de triángulos semejantes. Más bien, lo que se hace es *identificar la razón entre una distancia inaccesible y otra distancia accesible, a través de una construcción a escala de esta razón, la cual, se establece por medio de la determinación de cierta inclinación*. Por ejemplo, en el caso de la medición de una altura usando su sombra, se determina la razón entre estas magnitudes en el gnomon (Umbra Versa / Umbra Recta), la cual, está establecida por la inclinación del Sol o la Luna. En las otras técnicas de medición, esta razón en el gnomon se establece por la inclinación o declinación de los rayos visuales.

De esta manera, para medir distancias inaccesibles se requiere de una razón y una distancia accesible. La razón se establece considerando el dinamismo propio del fenómeno involucrado, de manera tal de tener en cuenta la posibilidad de establecer una razón conveniente. Una vez establecida la razón, se mide la distancia accesible involucrada, para lo cual se requiere escoger una unidad de medida adecuada. Finalmente, la distancia accesible es proporcionada con la razón para así determinar la distancia inaccesible. Aquí, entendemos por proporcionar al acto de dilatar o contraer cierta magnitud con un determinado parámetro. En síntesis, con base en el análisis de la obra de Stöffler (1513), sostenemos que la medición de una distancia inaccesible requiere de:

1. Identificar y comprender la naturaleza, propiedades y comportamiento de cierto fenómeno que permita establecer una proporción.
2. Reconocer una distancia accesible pertinente que permita establecer la relación proporcional.
3. Incorporar un instrumento de medición adecuado, en función de la precisión buscada.
4. Representar geométricamente el fenómeno, incluyendo un triángulo en el que estén presentes las distancias accesible e inaccesible.
5. Encontrar una razón conveniente para medir usando el dinamismo inherente al fenómeno involucrado. Si esto no es posible, identificar una razón cualquiera que permita construir una proporción.
6. Elegir una unidad de medida apropiada y medir la distancia accesible.
7. Proporcionar la distancia accesible usando la razón encontrada para obtener la distancia inaccesible buscada.

Considerando que Stöffler (1513) es, principalmente, un sistematizador de saberes desarrollados a lo largo de siglos se tiene que tanto esta estructura de su libro como las explicaciones contenidas en las proposiciones están influenciadas por la búsqueda de una economía en los procedimientos empleados, aspecto propio de una disciplina técnica, y por la intencionalidad del autor de difundir sus ideas a un público amplio. A su vez, se tiene que las tres categorías que caracterizan la medición de distancias inaccesibles en Stöffler (1513) también están presentes en libros más antiguos y en tratados publicados a lo largo del siglo XVI. De esta manera, a pesar de estar situadas al carácter técnico y astronómico del texto de Stöffler (1513), estas categorías trascienden a esta obra, estando presentes en un periodo histórico que abarca, a lo menos, los siglos XIV al XVI. En definitiva, y teniendo en cuenta la evidencia estudiada, consideramos a estas categorías como referentes significativos para caracterizar al conocimiento puesto en uso en la medición de magnitudes inaccesibles.

7. Conclusiones

En esta investigación, nos propusimos caracterizar al conocimiento puesto en uso en las proposiciones que tratan la medición de distancias inaccesibles en el libro de Stöffler (1513). En esta obra, se ha develado una *episteme* en la que se explicitan aspectos esenciales de las técnicas de medición de distancias inaccesibles. En primer lugar, en esta *episteme* está presente lo que hemos denominado la *búsqueda de una razón conveniente* para realizar la medición, la cual está presente, además de en la obra de Stöffler (1513), en otros tratados escritos antes y a lo largo del siglo XVI. Estas razones convenientes tienen una carga epistémica relevante en este contexto de uso del conocimiento, el cual se manifiesta en la búsqueda de economía de los procedimientos algorítmicos empleados, algo propio de las prácticas técnicas. Al respecto, resaltamos que los casos particulares (1:1, 1:2, 2:1, etc.) anteceden y significan a las técnicas generales. Por tanto, se tiene una generalidad que no absorbe la particularidad, sino que le da un sentido protagónico. Con base en esto, consideramos que, si se invisibilizan, subestiman o trivializan estos casos particulares, puede generarse una pérdida de sentido y significado de las relaciones proporcionales involucradas en la medición de distancias inaccesibles.

En segundo lugar, la búsqueda de una razón conveniente es posible gracias al entorno dinámico en el que está inmersa la medición, sea este el movimiento del Sol y las sombras, o bien, el del medidor y los rayos visuales. El *uso del dinamismo del fenómeno involucrado* en la medición, presente en Stöffler (1513), también está presente en tratados escritos antes y a lo largo del siglo XVI. Este uso dinámico llevó al autor a usar su conocimiento en relación con el comportamiento de las sombras, y a utilizar este conocimiento para establecer relaciones entre inclinaciones y razones convenientes. En efecto, es gracias al dinamismo del fenómeno que se pueden identificar aspectos invariantes en el comportamiento de las sombras. De esta manera, medir conllevó el desarrollo de sistemas explicativos de un fenómeno natural. Por otra parte, cabe señalar que el carácter dinámico inherente en las técnicas de medición de Stöffler (1513) se contrapone a la naturaleza estática, característica de la geometría escolar (Espinoza, Vergara y Valenzuela, 2017). Esta es una causa por la cual, consideramos que, en los problemas escolares, la medición se reduce al cálculo aritmético de valores prefijados en fórmulas preestablecidas, de manera tal que la naturaleza proporcional intrínseca queda evocada más no problematizada (Montiel y Jácome, 2014).

En tercer lugar, en Stöffler (1513) se explicita que medir consiste en elegir una unidad de medida y compararla con la magnitud que desea medirse. Esta idea concuerda con lo planteado por Reyes - Gasperini (2016) quién, al estudiar la construcción social de la proporcionalidad, plantea que la medición implica el ejercicio de las acciones de elegir y comparar. De manera similar, Peng Yee (2014) sostiene que medir demanda identificar un atributo, seleccionar una unidad y utilizarla de forma repetida. Esta manera de concebir la medición como razón es característica de la medición en general, y se hace presente particularmente en el caso de las distancias inaccesibles. Es importante señalar que, en el siglo XVI, si bien existían sistemas de medidas de uso común, no había uno masivamente estandarizado como lo tenemos en la actualidad; el sistema métrico decimal. La no existencia de un sistema estandarizado de medidas, consideramos, propició que las acciones de elegir y comparar, propia de la medición, hayan sido explicitadas. De este modo, no bastó con decir "mida", sino que también era necesario señalar "elija una unidad de medida adecuada".

Por último, destacamos que la medición de distancias inaccesibles fue usada en la Cartografía, la Navegación, la Arquitectura, la Astronomía, la Agrimensura y la Balística, entre otras prácticas (Scriba y Schreiber, 2015; Vicente, 1993). En cambio, en los textos escolares, la medición de distancias inaccesibles suele ser reducida al cálculo de la altura de un edificio o de un árbol (Montiel y Jácome, 2014). Esto, sostenemos, impide apreciar el amplio uso que tuvo este conocimiento en diversos tiempos históricos y entornos culturales. Por tanto, explicitar estos aspectos en el aula, sostenemos, podría ayudar a los estudiantes a comprender la medición de distancias inaccesibles y, de manera general, a la Geometría, en su amplia dimensión práctica en la historia de la humanidad. Para finalizar, la dialectización de los resultados de esta investigación con la matemática escolar queda propuesta para futuras investigaciones.

Agradecimientos

Agradecemos el financiamiento de esta investigación por parte de CONICYT + PAI / Concurso nacional apoyo al retorno de investigadores/as desde el extranjero, convocatoria 2014 + FOLIO 82140031, Gobierno de Chile.

Referencias bibliográficas

Álava y Viamont, D. (1590). *El perfecto capitán, instruido en la disciplina militar, y nueva ciencia de la Artillería*. Recuperado de http://bvpb.mcu.es/es/consulta/registro.cmd?id=399489

Bakker, A., Wijers, M., Jonker, V., y Akkerman, S. (2011). The use, nature and purposes of measurement in intermediate - level occupations. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, *43*(5), 737-746. doi: 10.1007/s11858-011-0328-3

Bedaque, P., y Bretones, P. (2016). Variação da posição de nascimento do Sol em função da latitude. *Revista Brasileira de Ensino de Física*, *38*(3), e3307. doi: 10.1590/1806-9126-RBEF-2015-0023.

Boero, P. (2012). From analysis and representation of space situations, to theoretical thinking in Geometry: A grade 3-grade 9 pathway. *Tecné, Episteme y Didaxis: TED*, *32*, 37-52. Recuperado de http://www.scielo.org.co/scielo.php?pid=S0121-38142012000200004&script=sci_arttext&tlng=pt

Camacho, A., Sánchez, B., Blanco, R., y Cuevas, J. (2011). Geometrización de una porción del espacio real. *Educación Matemática, 23*(3), 123-145. Recuperado de http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1665-58262011000300006

Cantoral, R. (2013). *Teoría socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento.* Barcelona: Gedisa.

Cantoral, R., Montiel, G., y Reyes-Gasperini, D. (2015). El programa socioepistemológico de investigación en Matemática Educativa: el caso de Latinoamérica. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa, 18*(1), 5-17. doi: 10.12802/relime.13.1810

Chevallard, Y. (1991). *La transposición didáctica, del saber sabio al saber enseñado.* Argentina: Aique Grupo Editor.

Clements, D. H. (1999). Teaching length measurement: Research challenges. *School Science and Mathematics, 99*(1), 5-11. doi: 10.1111/j.1949-8594.1999.tb17440.x

Covián, O. (2013). *La formación matemática de futuros profesionales técnicos en construcción* (Tesis de Doctorado no publicada). Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, D.F., México.

Delambre, J. (1819). *Histoire de L' Astronomie Du Moyen Age.* Paris: Imprimeur-Libraire pour les Sciences. Recuperado de https://archive.org/details/bub_gb_Gz9SqRVfqREC

De Muris, J. (1301-1400). *Tractatus de mensurandi ratione.* Recuperado de: http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/btv1b9077971k.r=muris?rk=214593;2

Douek, N. (1999). Argumentation and conceptualization in context: a case study on sunshadows in primary school. *Educational Studies in Mathematics, 39*, 89-110. doi: 10.1023/A:1003800814251

Drake, M. (2014). Learning to measure length: The problem with the school ruler. *Australian primary mathematics classroom, 19*(3), 27-32. Recuperado de https://search.informit.com.au/documentSummary;dn=662654173461232;res=IELHSS

Eisner, S. (2002). Introduction. En Eisner, S. (Ed.), A *Variorum Edition of the Works of Geoffrey Chaucer, Vol. VI: The Prose Treatises, Part One: A Treatise on the Astrolabe* (pp. 3-96). EE.UU.: University of Oklahoma Press.

Espinoza (2014). *La desescolarización del saber: su construcción social desde el malabarismo y las artes circenses* (Tesis de Doctorado no publicada). Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, D.F., México.

Espinoza (2009). *Una visión de la analiticidad de las funciones en el siglo XIX. Un estudio Socioepistemológico* (Tesis de Maestría no publicada). Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, D.F., México.

Espinoza, Vergara y Valenzuela (2017). La geometría escolar en crisis: una confrontación con la olvidada "Óptica de Euclides". *Premisa, 19*(74), 22-34. Recuperado de https://docplayer.es/95758030-La-geometria-escolar-en-crisis-una-confrontacion-con-la-olvidada-optica-de-euclides.html

Euclides (2000). La Óptica de Euclides. (Trad. Ortiz, P.). En Curbera, J. (Ed), *Aristóteles: Sobre las líneas indivisibles. Mecánica. Euclides: Óptica. Catóptrica. Fenómenos* (pp.117-197). Madrid: Editorial Gredos SA.

Fontana, N. (1998). *La nueva ciencia.* (Trad. J. Martínez y J. César). México D.F: UNAM. (Trabajo original publicado en 1537).

Frisius, G. (1544). L´ Usage de L´ anneau astronomicque. En G. Bonte y E. De Basle (Eds.), *La cosmographie de Pierre Apian.* (pp. Fo. LVII - Fo. LXV). Recuperado de: http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k6335840k/f11.item.r=cosmographie+de+Pierre+Apian

Hayton, D. (2017). Traditions of Byzantine astrolabes in Renaissance Europe. En W. Caferro (Eds.), *The Routledge History of the Renaissance* (pp. 183-191). New York: Routledge.

Maguire, M., y Delahunt, B. (2017). Doing a thematic analysis: A practical, step-by-step guide for learning and teaching scholars. *AISHE-J: The All Ireland Journal of Teaching and Learning in Higher Education, 9*(3). Recuperado de: http://ojs.aishe.org/index.php/aishe-j/article/view/335

Meavilla, V. (2012). *Eso no estaba en mi libro de matemáticas.* Barcelona: Editorial Almuzara.

Montiel, G., y Jácome, G. (2014). Significados trigonométricos en el profesor. *Boletim de Educação Matemática*, *28*(50), 1193-1216. doi: 10.1590/1980-4415v28n50a10

Morrison, J. E. (2007). Stoeffler's Elucidatio: The Construction and Use of the Astrolabe [Review of Grunella and Lamprey Eds. and Trans.]. *Aestimatio, 4*(1), 155-161. Recuperado de: http://www.ircps.org/aestimatio/4/155-161

OECD (2016), *PISA 2015 Results (Volume I): Excellence and Equity in Education*. Paris: OECD Publishing. doi: 10.1787/9789264266490-en

Peng Yee, L. (2014). *La enseñanza de la matemática en educación básica: Un libro de recursos.* Santiago: Academia Chilena de Ciencias.

Pérez de Moya, J. (1573). *Tratado de Geometría práctica y Speculativa* (Vol. 2). Alcalá de Henares: Ivan Gracian. Recuperado de http://bvpb.mcu.es/es/consulta/registro.cmd?id=406912

Recueil d´Astronomie (1501-1600). En Hébreu 1030. Recuperado de http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/btv1b105393023/f5.item.r=hebreu%201030

Reyes-Gasperini, D. (2016). *Empoderamiento docente y socioepistemología, un estudio sobre la transformación educativa en matemáticas.* Barcelona: Gedisa.

Robinson, A. (2007). *The story of measurement.* London: Thames & Hudson.

Rojas, J. (1551). *Commentariorum in astrolabium quod planisphaerium vocant: libri sex nunc primum in lucem editi.* Recuperado de http://fondosdigitales.us.es/fondos/libros/927/7/illustris-viri-d-ioannis-de-roias-commentariorum-in-astrolabium-quod-planisphaerium-vocant-libri-sex/

Scriba, C., y Schreiber, P. (2015). *5000 Years of Geometry: Mathematics in History and Culture.* Berlín: Springer Berlin Heidelberg

Stöffler, J. (1513). *Elucidatio fabricae ususque astrolabii.* Recuperado de https://archive.org/stream/bub_gb_0INILVEV32cC#page/n3/mode/2up

Stöffler, J. (1560). Traite de la composition et fabrique de l´Aftrolabe, & de fonvfage: auec les preceptes des mefures Geometriques (Trad. Jean Pierre de Mesmes). Recuperado de https://archive.org/stream/bub_gb_0INILVEV32cC#page/n3/mode/2up (Trabajo original publicado en 1513).

Soto, D. y Cantoral, R. (2014). Discurso matemático escolar y exclusión. Una visión socioepistemológica. *Boletim de Educação Matemática, 28*(50), 1525-1544. doi: 10.1590/1980-4415v28n50a25.

Tan-Sisman, G., y Aksu, M. (2012). The length measurement in the turkish mathematics curriculum: its potential to contribute to students' learning. *International Journal of Science and Mathematics Education, 10*(2), 363-385. doi: 10.1007/s10763-011-9304-1

Vicente, M. (1993). Altimetría y Longimetría en textos renacentistas: Estudio comparado. En Navarro, V., Salavert, V., Corell, M., Moreno, E., y Rosselló, V. (Eds.), *Actes de les II trobades d´història de la ciència i de la tècnica* (pp. 293-302). Peniscola: Societat catalana d´història de la ciència i de la tècnica.

Autores

Lianggi Espinoza Ramírez. Universidad de Valparaíso, Chile.
lianggi.espinoza@uv.cl

Andrea Vergara Gómez. Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile.
andrea.vergara.gomez@gmail.com

David Valenzuela Zúñiga. Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile.
david.valenzuela.z@gmail.com

Luis Armando Ramos Palacios, Luis Manuel Casas García

CONCEPCIONES Y CREENCIAS DE LOS PROFESORES DE HONDURAS SOBRE ENSEÑANZA, APRENDIZAJE Y EVALUACIÓN DE LAS MATEMÁTICAS

Conceptions and beliefs of honduran teachers about teaching, learning and assessment of mathematics

RESUMEN

El presente trabajo expone los resultados obtenidos de un estudio de investigación orientado a explorar las principales creencias y concepciones de los profesores que enseñan matemáticas en el nivel de secundaria en Honduras (alumnos de 13 a 18 años), en relación con la enseñanza, el aprendizaje y la evaluación de las matemáticas.

Los resultados muestran, entre otros aspectos, que para los profesores hondureños el aprendizaje de las matemáticas se logra por la participación del alumno, creencia que está más acentuada en los profesores con formación de licenciatura, y que la evaluación es un proceso que mejora la enseñanza y el aprendizaje, aunque debe tratarse con mucho cuidado por los errores y las imprecisiones existentes.

Como conclusiones, destacamos la necesidad de mejorar la formación inicial y continua de los profesores de manera que utilicen recursos que favorezcan la participación de los alumnos, y mejoren los procesos de evaluación.

PALABRAS CLAVE:

- *Concepciones docentes*
- *Creencias docentes*
- *Enseñanza y aprendizaje*
- *Evaluación*
- *Matemáticas*

ABSTRACT

This paper presents the results of a research study aimed to explore the main beliefs and conceptions that have teachers who teach mathematics at the secondary level in Honduras (students 13 to 18 years), in relation to the teaching / learning and assessment of mathematics.

The results show, among other elements, that for Honduran teachers the learning of mathematics is achieved by the active participation of the students. This belief is highlighted by teachers with a bachelor in Mathematics; and that the evaluation is a process that improves teaching and learning, providing useful results but, they must be taken with special scrutiny due to mistakes and inaccuracies that always exist.

KEY WORDS:

- *Teachers' conceptions*
- *Teachers' beliefs*
- *Teaching and learning*
- *Assessment*
- *Mathematics*

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (2018) *21* (3): 275-299.
Recepción: Febrero 12, 2018 / Aceptación: Noviembre 12, 2018. DOI: 10.12802/relime.18.2132

As conclusions highlight the need to improve initial training and continuous training of teachers so that use resources that promotes active student participation and improve the evaluation processes.

RESUMO

Este trabalho apresenta os resultados de um estudo de pesquisa teve como objetivo explorar as principais crenças e concepções que têm professores que ensinam matemática para o ensino secundário e nível médio em Honduras (estudantes de 13 a 18 anos), em relação ao ensino / aprendizagem e avaliação da matemática.

Entre outros aspetos, os resultados mostram que para os professores hondurenhos a aprendizagem da matemática é alcançada pela participação ativa do aluno, uma crença que está mais acentuada nos professores com licenciatura, e que a avaliação é um processo que melhoria do ensino e da aprendizagem que fornece resultados úteis mas que devem ser tratados com grande cuidado pelos erros e imprecisões que sempre existem.

Como conclusões, destaca-se a necessidade de melhorar a formação inicial e continuada dos professores, a fim de utilizar recursos que favoreçam a participação ativa dos estudantes e melhorar os processos de avaliação.

PALAVRAS CHAVE:

- *Concepções dos professores*
- *Crenças dos professores*
- *Ensino e aprendizagem*
- *Avaliação*
- *Matemática*

RÉSUMÉ

Cet article présente les résultats d'une étude de recherche visant à explorer les principales croyances et conceptions qui sont les professeurs qui enseignent les mathématiques au niveau secondaire au Honduras (élèves âgés de 13 à 18 ans), en relation avec enseignement et évaluation des mathématiques.

Les résultats montrent, entre autres éléments, que pour les enseignants honduriens l'apprentissage des mathématiques est réalisé par la participation active de l'étudiant, cette croyance est plus accentuée chez les enseignants ayant une formation de premier cycle et que l'évaluation est un processus qui améliore l'enseignement et l'apprentissage, qui fournissent des résultats utiles mais doivent être traités avec soin en raison des erreurs et des inexactitudes qui existent toujours.

En guise de conclusions, il est indiqué, qu'il est nécessaire d'améliorer la formation initiale et continue des enseignants afin qu'ils utilisent des ressources qui favorisent la participation active des élèves et d'améliorer les processus d'évaluation.

MOTS CLÉS:

- *Conceptions du professeur*
- *Enseigner et apprendre*
- *Évaluation*
- *Mathématiques*

1. Introducción

A principios del presente siglo, se inició en Honduras una reforma educativa en respuesta a los compromisos asumidos por el gobierno como parte del programa *educación para todos*, conocido por sus siglas en inglés como Plan EFA (Education For All), el cual propuso varias metas que cumplir en el periodo 2003 a 2015, entre las que se encontraba mejorar el rendimiento académico en Matemáticas y Español, entendiendo por tal el nivel de conocimientos y capacidades de los estudiantes (Educación, 2003).

Esta reforma educativa trajo como consecuencia un nuevo currículo y nuevos materiales de apoyo, entre ellos estándares educativos y libros de texto distribuidos en los centros educativos públicos del país. Todo el proceso se ha acompañado por evaluaciones nacionales periódicas desde el año 2007, con pruebas estandarizadas aplicadas a escala nacional, que clasifican a los alumnos participantes en diferentes niveles de desempeño.

El informe nacional de desempeño académico correspondiente al año escolar 2016 revela que los resultados en matemáticas son bajos en todos los grados de 1º a 9º, pero son particularmente críticos en el tercer ciclo (7º, 8º y 9º) dado que más de 90% de los estudiantes están en los niveles de aprendizaje de “Debe mejorar” e “Insatisfactorio”, niveles correspondientes a estudiantes que no logran alcanzar los estándares educativos definidos para cada grado (Educación, 2017).

Un estudio reciente sobre las evaluaciones nacionales de rendimiento académico, desarrollado por el Banco Mundial, señala que la evaluación no ha contribuido a hacer ni más eficiente ni eficaz el sistema educativo hondureño. Los resultados son escasamente utilizados y no han sido un mecanismo real de control ni de rendición de cuentas de modo que, hasta hoy, la información generada no parece haber tenido consecuencias significativas más allá de informar, sensibilizar y concienciar (Kellaghan, Greaney y Murray, 2016).

Aunque se han realizado estudios de los factores asociados al rendimiento escolar, en nuestra opinión no se ha considerado suficientemente la importancia de uno de los actores principales en el sistema: el profesorado.

Consideramos que el conocimiento de las concepciones y las creencias de los profesores es importante para la mejora de los resultados de los alumnos, pues son, como muestra una abundante investigación educativa, factores determinantes de su práctica profesional y de sus acciones en el aula (Thompson, 1992; Pajares,1992; Llinares, 1998; Gil y Rico 2003; Brown, 2004; Remesal, 2006; Casas, Carvalho, González y Luengo, 2015; Hidalgo y Murillo, 2017). Existe, pues, suficiente evidencia de que influyen fuertemente en cómo enseñan los profesores y, por lo tanto, en qué aprenden y logran sus estudiantes (Thompson, 2002; Brown, 2004; Remesal, 2006).

Del mismo modo, consideramos importante revisar, pues existen amplias evidencias en este sentido (Hidalgo y Murillo, 2017), cómo las concepciones de los profesores sobre la evaluación tienen repercusiones directas en sus prácticas evaluativas, y éstas en el aprendizaje de los estudiantes.

Por dicha razón, los objetivos de esta investigación están orientados a conocer las principales concepciones y creencias sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas y de la evaluación en general de los profesores hondureños que enseñan matemáticas en los grados de secundaria y media (7º a 12º), haciendo referencia a las características personales de los participantes con relación a género, edad, formación inicial, tipo de centro educativo y área de trabajo.

En síntesis, tratamos de responder a las siguientes cuestiones que guiarán nuestro trabajo de investigación:

1. ¿Qué concepciones poseen los profesores que enseñan matemáticas en Honduras sobre su enseñanza, aprendizaje y rendimiento?
2. ¿Cuáles son sus concepciones sobre la evaluación?
3. ¿Existen diferencias entre las concepciones de los profesores con distinta formación académica, en diferentes contextos de trabajo o por años de servicio?

En nuestra opinión, conociendo y actuando sobre las concepciones y creencias de los profesores y sus motivaciones a la hora de enseñar, se podrían orientar más adecuadamente procesos de cambio, de capacitación y actualización, e incluso reformas educativas.

2. Marco teórico

2.1. *Las concepciones y creencias docentes desde el paradigma del pensamiento del profesor*

El estudio de las creencias y concepciones docentes se inició desde el campo de la psicología a principios del siglo XX. Alrededor de los años veinte hubo un considerable interés entre los psicólogos sociales por el estudio de su naturaleza y la influencia en la acción de las personas. En las décadas siguientes este interés por el estudio de las creencias decayó y fue en los años sesenta cuando este interés se renovó, siempre dentro del campo de la psicología (Nespor, 1987; Thompson, 1992).

En los últimos años ha habido un reconocimiento creciente de la importancia de conocer las principales concepciones y creencias de los docentes, que se han encuadrado dentro del paradigma del pensamiento del profesor. Este paradigma profundiza en el conocimiento de las percepciones, las creencias, las concepciones y los procesos de pensamiento de los profesores (Moreno y Azcárate, 2003) y sobre la forma en que influye en sus actuaciones profesionales.

A criterio de Ernest (1989), si se quieren lograr cambios importantes en la enseñanza de la matemática es necesario considerar las creencias de los profesores y, en particular, las concepciones que tienen sobre la matemática. Además, reconoce que la práctica de la enseñanza de esta ciencia depende de una serie de elementos clave, entre ellos el sistema de creencias sobre las matemáticas y su enseñanza y aprendizaje.

La presente investigación aborda, como hemos expuesto anteriormente, el estudio de las concepciones y creencias de los profesores, por lo que una primera distinción de tipo terminológico que debemos hacer es la diferencia entre ambos conceptos, reconociendo que las múltiples investigaciones relacionadas con esta temática exponen la dificultad de establecer tal diferencia.

Para García, Azcárate y Moreno (2006) algunas características de las concepciones del profesor están relacionadas con que forman parte del conocimiento, actúan como filtros en la toma de decisiones, son producto del entendimiento e influyen en los procesos de razonamiento. Para estos autores las concepciones consisten en la estructura que cada profesor de Matemáticas da a sus conocimientos para posteriormente enseñarlos o transmitirlos a sus estudiantes.

Las creencias (Ponte, 1994; Moreno, 2000) constituyen verdades personales derivadas de la experiencia o de la fantasía, con un fuerte componente afectivo y evaluativo. Están relacionadas con los sentimientos y las emociones. Suelen ser subjetivas, discutibles, poco elaboradas y presentar distinto grado de fortaleza.

Las concepciones, por su parte, están más relacionadas con el razonamiento, con lo cognitivo. Son representaciones simbólicas que actúan del mismo modo que los presupuestos teóricos de los científicos (Ponte, 1994), son producto del entendimiento e influyen en él (García, Azcárate y Moreno, 2006). Para autores como Hidalgo y Murillo (2017), se entienden como las ideas previas, creencias, teorías implícitas y estructuras mentales que dibujan la forma en la que los profesores entienden la enseñanza, el aprendizaje y la evaluación de los estudiantes.

Para algunos investigadores, sin embargo, no existen diferencias entre creencias y concepciones docentes, y consideran más simple referirse a las concepciones en general que a las creencias en particular (Pajares, 1992). Pueden abordarse creencias y concepciones indistintamente, aunque se reconozca que las creencias están más próximas al dominio afectivo, mientras que las concepciones están en el dominio cognitivo, más próximas, por tanto, al conocimiento.

Numerosas investigaciones se han centrado, dentro de lo que se ha denominado como paradigma del pensamiento del profesor, en el campo de las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje, conformándose a partir de los trabajos de Shulman (1986), dos amplios dominios dentro de este campo: el Conocimiento de las Matemáticas y el Conocimiento Didáctico del Contenido Matemático (Climent, Romero, Carrillo, Muñoz y Contreras, 2013; Muñoz - Catalán, Contreras, Carrillo, Rojas, Montes y Climent, 2015).

El Conocimiento Didáctico del Contenido (CDC) se refiere al conocimiento de la enseñanza de las matemáticas, al conocimiento de las características de su aprendizaje (Gil y Rico, 2003; Hidalgo y Murillo, 2017; Llinares, 1998; Philipp, 2007). El CDC se ha desarrollado por los profesores para ayudar a otros a aprender, y se ha construido en tanto que ellos enseñan contenidos específicos de su área de saber. Melo, Cañada y Mellado (2017) lo definieron como un atributo personal del profesor de carácter particular, producto de una simbiosis entre los conocimientos necesarios para la enseñanza y la acción de enseñar.

El modelo presentado por Carrillo, Climent, Contreras y Muñoz-Catalán (2013), denominado Conocimiento especializado del profesor de Matemáticas (MTSK, por sus iniciales en inglés mathematics teacher's specialised knowledge) considera tres dominios: dominio del conocimiento matemático, del conocimiento didáctico del contenido y de las creencias y concepciones sobre la matemática y sus procesos de enseñanza y aprendizaje como elemento que permea todo el conocimiento.

El modelo MTSK reconoce el papel de las creencias del profesor en la interpretación de su práctica, considera que representan una predisposición a través de las acciones. Estas creencias, consideradas con fines analíticos, sólo pueden ser inferidas, ya que no pueden ser directamente observadas ni medidas (Escudero - Ávila, D. I., Carrillo, J., Flores - Medrano, E., Climent, N., Contreras, L. C. y Montes, M., 2015).

2.2. *Dos estudios internacionales sobre concepciones y creencias docentes en torno a la enseñanza de las matemáticas y sobre la evaluación*

En el campo de los estudios internacionales sobre este tema, debemos destacar dos de ellos:

El primero, sobre la naturaleza de las matemáticas, el aprendizaje y el rendimiento en matemáticas ha sido el estudio internacional TEDS-M (Teacher Education Study in Mathematics), publicado por el Ministerio de Educación de España (INEE, 2012). Este estudio tuvo como uno de sus objetivos indagar acerca de las creencias sobre el aprendizaje de las matemáticas de los actuales y futuros docentes provenientes de 17 países. Integra entre las variables de estudio las creencias de los futuros profesores en torno a la naturaleza de las matemáticas y de la enseñanza de las mismas, así como también la visión de las capacidades propias y la preparación para enseñar.

El estudio TEDS-M considera dos creencias sobre el aprendizaje de las matemáticas: se aprende siguiendo las instrucciones del profesor o el aprendizaje se logra a través de la participación activa del alumno.

Estas dos creencias son consideradas en el estudio realizado por Philipp (2007): en primer lugar, la creencia de que el aprendizaje de las matemáticas se produce siguiendo las instrucciones del profesor, de modo que las acciones de los profesores se centran en una imagen de las matemáticas como la aplicación de cálculos y procedimientos para obtener resultados numéricos, siendo, pues, un enfoque basado en el cálculo.

De igual manera, considera la creencia de que el aprendizaje de las matemáticas se produce a través de la participación activa del alumno, lo que se corresponde con enfoques o metodologías pedagógicas denominadas “activas” y, en particular, con la orientación pedagógica que Philipp (2007) ha denominado “orientación conceptual”.

Del mismo modo, el estudio TEDS-M presentó ítems orientados a valorar si, en opinión de los profesores, el rendimiento en matemáticas dependería de la capacidad natural del alumno. Esta creencia transformaría una visión del rendimiento del alumnado que, si fuera asumida por el profesorado, implicaría menores expectativas de aprendizaje.

El segundo estudio internacional se refiere a las concepciones de los profesores sobre la evaluación, en donde se destacan los trabajos de Brown (2002, 2004, 2011), Brown y Remesal (2012). Estas investigaciones se fundamentan en la aplicación y el análisis de un cuestionario conocido como Teacher’s Conceptios of Assessmet (TCOA) (Brown y Remesal, 2012), y en éstas es posible reconocer cuatro grandes concepciones docentes relacionadas con la evaluación:

1. La primera de ellas considera la evaluación como mejora. Desde esta perspectiva, los profesores consideran que la información que genera sirve para cambiar y mejorar su propia enseñanza, así como el aprendizaje de los estudiantes.
2. Una segunda concepción considera la evaluación como rendición de cuentas de la escuela. Los profesores estiman que sirve para dar cuenta de su propia labor docente y de la consecución de estándares, así como de la aportación educativa de la escuela a la sociedad. Para ellos, la evaluación es responsabilidad de la escuela y sirve para demostrar la calidad de su enseñanza.
3. Para otros profesores, la evaluación se corresponde con una rendición de cuentas del propio estudiante. Esta concepción sostiene que los estudiantes son responsables de su propio proceso de aprendizaje, por lo que el docente se limita a acreditar y calificar su logro académico.

4. Por último, para un cuarto grupo, la evaluación se considera como un proceso irrelevante. Creen que tener que calificar o valorar a los estudiantes afecta su autonomía, así como al aprendizaje. Además, piensan que los datos obtenidos de la evaluación son poco válidos y menos fiables.

Los resultados obtenidos indican que el cuestionario utilizado (TCOA) podría ser una herramienta poderosa en la formulación de la política de evaluación y el desarrollo profesional de los maestros de tal manera que la evaluación mejore la calidad de la enseñanza y eleve los estándares de rendimiento de los estudiantes (Brown, 2002, 2004, 2011; Brown y Remesal, 2012).

Consideramos que la utilización de los cuestionarios propuestos en ambos estudios, en el contexto hondureño, tal como describiremos más adelante, generaría un conocimiento más amplio sobre el pensamiento de los profesores de matemáticas y ayudaría a implementar estrategias de mejora.

3. Método

Este trabajo sigue una metodología descriptiva con orientación exploratoria y se realiza mediante la administración de un cuestionario a una muestra de la población en estudio, la cual describimos a continuación.

3.1. *Participantes*

En el tercer ciclo de la Educación Básica de Honduras laboran 4 452 profesores que enseñan matemáticas. Para este trabajo se logró la participación de 471 de ellos, es decir, 10.6% de ellos, provenientes de todas las regiones del país.

La participación de los profesores en este estudio fue por disponibilidad, aunque consideramos muy importante señalar que si bien la muestra empleada no es probabilística, presenta porcentajes de profesores similares a los presentes en la población, en cuanto a género, formación académica, área de trabajo (urbano, rural) o tipo de centro educativo. Además, los participantes en el estudio atienden a 14% del total de estudiantes del tercer ciclo del país, por lo que el estudio, en nuestra opinión, puede tener un alto interés en el contexto hondureño.

De esta muestra, 58% son hombres, con una experiencia docente que va de 1 a 32 años con un promedio de 11.1 años., 66% son especialistas en matemáticas a nivel de licenciatura; 3% tienen formación a nivel de maestría, y 31% restante tiene otra formación académica.

Del total, 68% trabaja en el área urbana, y 32% restante en el área rural. De igual manera, 79% de los profesores de la muestra trabaja en instituciones públicas, y 21% restante en el sector privado. De los que trabajan en instituciones públicas, 54% corresponde a Colegios (centros educativos que atienden a los grados de 7º a 12º), y 25% en Centros de Educación Básica (centros educativos que atienden a los grados de 1º a 9º).

3.2. *Instrumento de recogida de datos*

Dado que los objetivos del presente trabajo se relacionan directamente con los estudios señalados en el marco teórico, en Honduras el instrumento aplicado a profesores que enseñan matemáticas incluye las preguntas propuestas en esas investigaciones internacionales, con algunas adaptaciones dado el contexto.

Se aplicó un cuestionario formado por 39 ítems en escala tipo Likert de seis categorías, se agruparon en dos partes: a la primera le corresponden 12 ítems, tomados del cuestionario utilizado en el estudio TEDS-M para conocer creencias sobre la enseñanza, el aprendizaje y el rendimiento de las matemáticas. Estos ítems se presentan en la tabla III. La segunda parte del cuestionario lo forman los 27 ítems del cuestionario TCOA, utilizado por Brown y Remesal (2012), para indagar en las concepciones de los profesores sobre la evaluación, como se muestran en la tabla VIII.

El cuestionario fue aplicado en ambientes académicos, en reuniones departamentales de profesores de matemáticas y en visitas a centros educativos que son referentes en los departamentos por ser los de mayor cantidad de estudiantes.

Una vez aplicado el cuestionario se calculó su consistencia interna a través del Alpha de Cronbach. El valor encontrado para los 39 ítems fue de 0.847, considerado por la mayoría de los investigadores como de alta fiabilidad (Hernández-Sampieri, Fernández y Baptista, 2010).

Para realizar los respectivos análisis factoriales a cada una de las dos partes del cuestionario se atendió en primer lugar al cumplimiento de los supuestos básicos requeridos para tal fin.

A criterio de Hair, Anderson, Tatham y Black (1999), desde el punto de vista estadístico se puede obviar el supuesto de normalidad pues sólo sería necesario cuando se aplicase una prueba estadística a la significación de los factores, lo que raramente se utiliza.

Los valores obtenidos de las pruebas KMO y de Bartlett para cada parte del cuestionario se muestran en las tablas 1 y 2 a continuación:

TABLA I
Prueba KMO y de Bartlett, ítems sobre creencias sobre la E/A y rendimiento de las matemáticas

Medida de adecuación muestral de Kaiser - Meyer - Olkin.		.796
Prueba de esfericidad de Bartlett	Chi-cuadrado aproximado	831.187
	gl	66
	Sig.	.000

TABLA II
Prueba KMO y de Bartlett, ítems sobre concepciones de la evaluación

Medida de adecuación muestral de Kaiser - Meyer - Olkin		.829
Prueba de esfericidad de Bartlett	Chi-cuadrado aproximado	3277.511
	gl	351
	Sig.	.000

Los valores obtenidos para cada una de las dos partes del cuestionario referentes a KMO y la prueba de esfericidad de Bartlett nos indican que es adecuado continuar con el análisis factorial para cada uno de los dos casos.

4. Resultados obtenidos

4.1. *Creencias sobre la enseñanza - aprendizaje y el rendimiento de las matemáticas*

El análisis factorial exploratorio obtenido sugiere reducir los 12 ítems relacionados a creencias sobre enseñanza, aprendizaje y rendimiento de las matemáticas a tres factores claramente definidos, como se muestra en la tabla siguiente:

TABLA III

Matriz de componentes rotados:[a] creencias sobre E/A y rendimiento de las matemáticas

	Componentes		
	1	*2*	*3*
Es necesario enseñar a los alumnos procedimientos exactos para la resolución de problemas matemáticos.	.789	-.031	-.024
Las matemáticas implican memorizar y aplicar definiciones, fórmulas, hechos matemáticos y procedimientos.	.781	.015	-.008
Para ser bueno en matemáticas hay que ser capaz de resolver problemas rápidamente.	.607	-.075	.310
Cuando los alumnos trabajan problemas matemáticos se debe poner más énfasis en que obtengan la respuesta correcta que en el proceso que sigan para lograrlo.	.552	-.045	.419
Los profesores deberían permitir a los alumnos encontrar sus propias maneras de resolver los problemas matemáticos.	-.050	.799	-.073
Los alumnos son capaces de encontrar el modo de resolver un problema matemático sin la ayuda del profesor.	-.164	.728	.127
Los profesores deberían animar a los alumnos a buscar sus propias soluciones a los problemas matemáticos, aunque éstas sean ineficaces.	-.059	.620	.199
Además de obtener la respuesta correcta en matemáticas, es importante comprender por qué es correcta.	.238	.614	-.169
Las matemáticas son una asignatura en la que la capacidad innata importa mucho más que el esfuerzo.	.111	.014	.789
La utilización de ejemplos prácticos y otros materiales visuales no es tan necesaria en alumnos de grados superiores ya que pueden razonar de forma abstracta.	.127	.147	.683
En general, de forma natural los hombres tienen mejor desempeño en matemáticas que las mujeres.	-.054	-.124	.631
La habilidad matemática es un aspecto que permanece relativamente constante a lo largo de la vida de una persona.	.200	.130	.304

Método de extracción: Análisis de componentes principales.
Método de rotación: Normalización Varimax con Kaiser.

[a] La rotación ha convergido en cinco iteraciones.

Los 12 ítems del cuestionario referidos a este tema, reducidos a tres factores, coinciden con los obtenidos en el estudio TEDS-M, y por tal razón utilizamos las mismas etiquetas para nombrarlos:

Factor 1: *Aprendizaje de las matemáticas siguiendo las instrucciones del profesor*

Los profesores que están de acuerdo con esta creencia tienden a ver el aprendizaje de las matemáticas como un proceso centrado en la orientación docente del profesor: el alumno aprende matemáticas siguiendo sus instrucciones.

Los profesores que muestran su acuerdo con esta concepción, en general consideran que las matemáticas implican memorizar y aplicar definiciones, fórmulas, hechos matemáticos y procedimientos; concuerdan en que a los alumnos hay que enseñarles procedimientos exactos para la resolución de problemas, en que un alumno es bueno en matemáticas si resuelve problemas rápidamente y que se debe dar énfasis en que obtengan la respuesta correcta más que en el procedimiento para lograrlo.

Factor 2: *Aprendizaje de las matemáticas a través de una participación activa*

Bajo esta creencia los profesores tienden a ver el aprendizaje de las matemáticas como un proceso activo: para un aprendizaje efectivo, los alumnos deben hacer matemáticas, realizar sus propias indagaciones y desarrollar estrategias para resolver problemas.

Los profesores que se inclinan por esta concepción de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas expresan su acuerdo con afirmaciones que señalan la importancia de que al obtener respuestas a problemas matemáticos deben comprender las razones de por qué la respuesta es correcta y motivan a los alumnos a encontrar formas de resolver los problemas sin ayuda del profesor.

Factor 3: *El rendimiento en matemáticas depende de la capacidad natural del alumno*

Los profesores que sostienen esta creencia consideran que un elemento clave de la enseñanza de las matemáticas consiste en identificar cuáles son los alumnos con mayor capacidad intelectual para aprender.

Los profesores que expresan esta concepción tienden a considerar que solamente algunos alumnos tienen capacidad natural para aprender matemáticas, mientras que otros no la tienen. Manifiestan su acuerdo con que la capacidad innata del alumno importa mucho más que el esfuerzo o que la habilidad matemática es un aspecto constante a lo largo de la vida. Tienden a considerar que los hombres poseen mejor desempeño en matemáticas que las mujeres, y que en grados superiores los alumnos tienen mayor capacidad de razonar en forma abstracta, por lo que no es necesario utilizar ejemplos prácticos o materiales que ayuden en la visualización.

Para valorar el porcentaje de profesores que manifiestan su acuerdo con los factores definidos, agrupamos la escala Likert de manera que los valores 1, 2 y 3 corresponden a distintos niveles de "Desacuerdo", mientras que los valores 4, 5 y 6 corresponden a niveles "De acuerdo".

Atendiendo esta clasificación, los datos obtenidos nos proporcionan el porcentaje de profesores que están de acuerdo con las creencias sobre la enseñanza, aprendizaje y el rendimiento en matemáticas, expuestas anteriormente, como lo podemos ver en la gráfica siguiente:

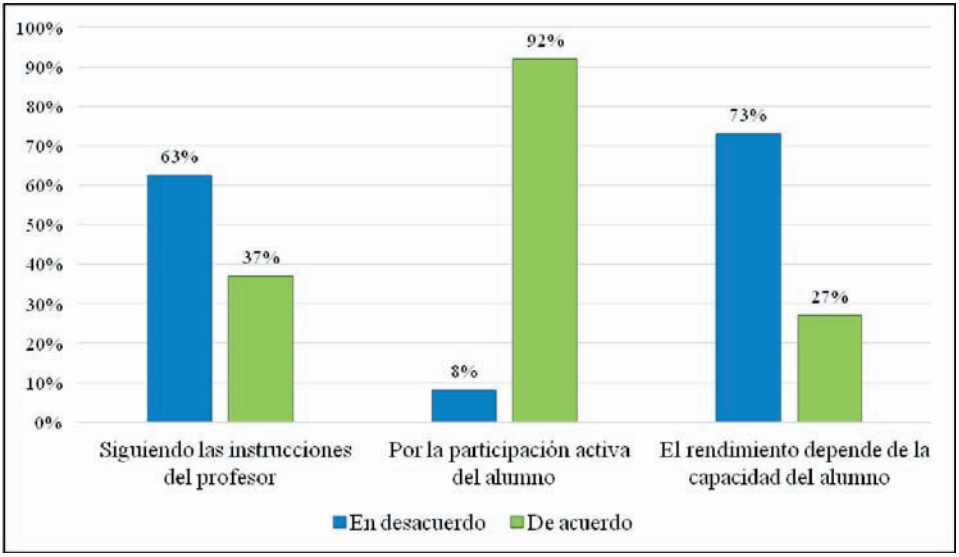


Figura 1. Porcentaje de profesores según creencias respecto a la E/A y al rendimiento de las matemáticas

4.1.1. *Diferencias entre grupos*

Al analizar las puntuaciones brindadas por los profesores participantes encontramos diferencias, estadísticamente significativas, de acuerdo con dos variables de agrupación: formación académica y tipo de centro educativo en el que trabajan, y no las hay en cuanto a género y años de servicio.

La tabla IV muestra que en el factor 2 (F2), referido a que la enseñanza de las matemáticas se logra por la participación activa del alumno, hay diferencias estadísticamente significativas obtenidas mediante la prueba de Kruskal - Wallis, como se muestra a continuación:

TABLA IV
Estadísticos de contraste[a] para la variable: Formación académica

	F1	*F2*	*F3*
Chi-cuadrado	7.145	14.851	3.767
gl	3	3	3
Sig. asintót.	.128	.005	.438

[a]. Prueba de Kruskal - Wallis

Los valores promedio asignados por los profesores, de acuerdo con su formación académica, se presentan a continuación en la tabla V:

TABLA V
Valores promedio para la variable: Formación académica (factor 2)

	Lic. en Mat.	*Lic. Ed. Básica*	*Otra Lic.*	*Ingeniería*
F2_Media	5.19	4.85	4.88	5.03

Al realizar los contrastes respectivos, usando la prueba U de Mann Whitney con 5% de significancia, encontramos que los profesores con formación en licenciatura en matemáticas están más de acuerdo con que el aprendizaje se produce por la participación activa del alumno, y asignan puntuaciones mayores a este factor que los profesores con otras formaciones.

Otra variable de agrupación en la que se muestran diferencias significativas es el tipo de centro educativo donde trabajan, referidas al factor 1 (F1): el aprendizaje de las matemáticas se logra siguiendo las instrucciones del profesor. Estos resultados se muestran en la tabla siguiente:

TABLA VI
Estadísticos de contraste[a] para la variable Tipo de centro educativo

	F1	*F2*	*F3*
Chi-cuadrado	13.942	1.567	1.849
gl	2	2	2
Sig. asintót.	.003	.667	.604

[a]. Prueba de Kruskal - Wallis

Los valores promedio obtenidos son:

TABLA VII
Valores promedio para la variable: Tipo de centro educativo (factor 1)

	Colegio público	*Centro básico*	*Colegio privado*
F1_Media	3.11	4.25	3.02

Las respectivas pruebas que usan la U de Mann-Whitney nos revelan que con 5% de significancia los profesores que trabajan en Centros de Educación Básica están más de acuerdo y dan una mayor puntuación al factor 1: el aprendizaje de las matemáticas se logra siguiendo las instrucciones del profesor.

De esta manera podemos destacar como resultados importantes los siguientes:

El análisis de los resultados de esta investigación nos indica que los profesores de matemáticas hondureños (92%) tienen la creencia de que el aprendizaje de las matemáticas se logra por la participación activa del alumno, creencia que está más acentuada en los profesores con formación a nivel de licenciatura.

Para un grupo significativo de profesores (37%) la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas se logra siguiendo las instrucciones del profesor, quienes muestran su acuerdo en que las matemáticas implican memorizar y aplicar definiciones y fórmulas; consideran necesario enseñar procedimientos exactos para la resolución de problemas haciendo énfasis en que el alumno obtenga la respuesta correcta. Esta creencia está más respaldada por los profesores que trabajan en Centros de Educación Básica.

Es también importante señalar que la creencia de que el rendimiento en matemáticas depende de la capacidad del alumno recibe poco respaldo por los profesores hondureños: el 73% de ellos están en desacuerdo.

4.2. *Concepciones sobre la evaluación*

Como hemos expresado anteriormente, para conocer las concepciones sobre la evaluación el cuestionario presentó 27 ítems, para los cuales el análisis factorial exploratorio sugiere seis factores, agrupando cada uno de ellos de tres a seis ítems, como se muestra en la tabla siguiente:

TABLA VIII
Matriz de componentes rotados:[a] Concepciones sobre la evaluación

	Componentes					
	1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
Evaluar es una forma de identificar cuánto han aprendido los alumnos de lo enseñado.	.750	-.029	.013	.059	.151	.280
La evaluación informa a los alumnos sobre su aprendizaje y rendimiento.	.708	-.043	.078	.028	.381	.141
La evaluación determina lo que han aprendido los alumnos.	.621	.002	.251	.109	.278	-.250
Los resultados de la evaluación del aprendizaje son de fiar.	.520	.040	.258	.096	.200	-.184
La evaluación del aprendizaje determina si los alumnos han alcanzado los niveles de competencia o habilidad requeridos.	.502	-.112	.130	.325	.163	.170
Evaluar es asignar una calificación al trabajo del alumno.	.423	.200	.206	.188	-.151	-.035
La evaluación tiene poca repercusión en la enseñanza.	.034	.740	.115	.107	-.129	-.158
Los resultados de la evaluación son archivados e ignorados.	.074	.728	.005	-.102	.049	.061
La evaluación es injusta para los alumnos.	.013	.728	.064	.049	-.045	.093
La evaluación es un proceso inexacto.	-.104	.649	-.049	.020	-.002	.225
La evaluación interfiere en la enseñanza.	-.009	.521	-.064	.298	-.124	.001
Los resultados de la evaluación son consistentes, es decir, un mismo alumno tendrá resultados similares en momentos distintos.	.201	.022	.756	.087	.137	-.074
La evaluación mide las habilidades de pensamiento complejo del alumno.	.285	-.077	.636	.147	.207	-.093
Los resultados de las evaluaciones son fiables, es decir, miden el rendimiento real del alumno.	.441	.019	.616	.146	.118	-.080

La evaluación fuerza a los profesores a enseñar de cierta manera contraria a sus creencias.	-.009	.260	.552	.180	-.098	.226
La evaluación permite que algunos alumnos diferentes reciban una enseñanza diferente de los demás.	.004	-.023	.548	.124	.230	.346
La evaluación es un indicador exacto de la calidad de las instituciones educativas.	.103	.040	.250	.810	.121	-.061
La evaluación del aprendizaje es una buena forma de valorar un centro educativo.	.039	.124	.122	.768	.315	-.009
La evaluación del aprendizaje informa acerca de cómo funcionan los centros educativos.	.191	.093	.054	.721	.079	.115
La evaluación del aprendizaje distribuye a los alumnos en niveles y categorías.	.241	.045	.202	.467	-.112	.312
La información que aporta la evaluación del aprendizaje modifica la enseñanza sobre la marcha.	.109	-.103	.133	.071	.701	.250
La evaluación ayuda a los alumnos a mejorar su aprendizaje.	.182	-.047	.258	.154	.670	.030
La evaluación informa a los alumnos sobre cuáles son sus necesidades de aprendizaje.	.241	.019	.138	.164	.660	-.134
La evaluación está integrada en la enseñanza.	.375	-.157	-.122	.012	.591	.311
Los profesores deben tener en cuenta el error y la imprecisión que tiene toda evaluación.	.002	.108	-.159	.068	.191	.695
Los resultados de las evaluaciones se deben tratar con precaución por el error de medición que siempre existe.	.079	.085	.123	.038	-.003	.687
Los profesores evalúan el aprendizaje, pero usan muy poco los resultados de esta evaluación.	-.045	.393	.294	.045	.111	.405

Método de extracción: Análisis de componentes principales.
Método de rotación: Normalización Varimax con Kaiser.

[a]. La rotación ha convergido en nueve iteraciones

El nombre y la descripción de cada uno de los factores se ha realizado atendiendo sus respectivos ítems, como se presenta a continuación:

Factor 1: *La evaluación es un proceso válido que describe el aprendizaje*

Los profesores que están de acuerdo con este criterio muestran su inclinación hacia expresiones que ven la evaluación como una forma de identificar cuánto han aprendido los alumnos de lo enseñado; que esta información debe comunicarse a los alumnos ya que es información fiable y determina si han alcanzado los objetivos propuestos.

Factor 2: *La evaluación es un proceso innecesario*

Los profesores que respaldan esta concepción generalmente conciben la evaluación como un proceso que tiene poca repercusión en la enseñanza, que los resultados que provee no son útiles, son archivados e ignorados, muchas veces es injusta para los alumnos y la consideran como un proceso inexacto que interfiere en la enseñanza.

Factor 3: *La evaluación es un proceso adecuado que mide el rendimiento real del alumno*

Los profesores que se identifican con esta concepción están muy de acuerdo con expresiones que consideran la evaluación como un proceso fiable y consistente, en el sentido de que miden el rendimiento real del alumno proporcionando los mismos resultados en momentos distintos; la consideran además como la forma de medir las habilidades de pensamiento complejo de los alumnos misma que les permite atender de diferente manera a los alumnos de acuerdo con su capacidad.

Factor 4: *La evaluación como indicador de calidad de los centros educativos*

Esta concepción se caracteriza por considerar la evaluación como un indicador exacto de la calidad de los centros educativos y como un mecanismo para valorarlos, ya que informa de cómo funcionan.

Factor 5: *La evaluación mejora el proceso de enseñanza - aprendizaje*

Esta concepción se caracteriza por considerar que la función primordial de la evaluación es aportar información del aprendizaje lo que permite modificar la enseñanza y de esta manera ayudar a los alumnos a mejorar.

Factor 6: *La evaluación como un proceso con múltiples errores*

La característica principal de esta concepción es que considera la evaluación como un proceso que tiene errores e imprecisiones y que por tal razón se debe tratar con precaución. Los profesores que se identifican con ella evalúan el aprendizaje, pero utilizan muy poco los resultados.

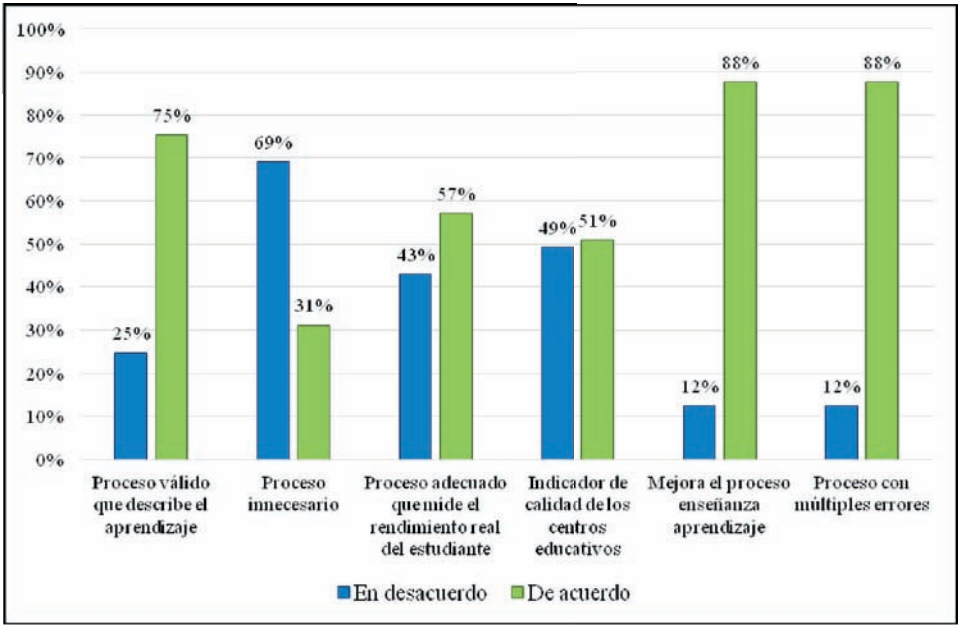


Figura 2. Porcentaje de profesores según sus concepciones sobre la evaluación

De acuerdo con estos seis factores definidos anteriormente, conviene preguntarse sobre qué concepciones tienen mayor énfasis en el pensamiento de los profesores de matemáticas de Honduras. Lo expresado por los 471 profesores participantes se resume en la siguiente gráfica:

4.2.1. *Diferencias entre grupos*

El análisis correspondiente a los diferentes niveles de agrupación de los profesores, alrededor de los seis factores, nos revela que existen diferencias, estadísticamente significativas, en dos variables: por centro educativo y por área geográfica donde trabajan. No hay diferencias por género, formación académica, ni por años de servicio.

La tabla IX nos muestra la información sobre los datos de contraste:

TABLA IX
Estadísticos de contraste,[a] para la variable: Tipo de centro educativo

	F1	*F2*	*F3*	*F4*	*F5*	*F6*
Chi-cuadrado	5.936	8.846	1.945	4.291	1.057	4.809
gl	2	2	2	2	2	2
Sig. asintót.	.115	.031	.584	.232	.787	.186

[a]. Prueba de Kruskal - Wallis

Los valores promedio de las puntuaciones dadas por los profesores participantes al factor 2 (F2), que es donde se aprecian diferencias significativas, se muestran a continuación:

TABLA X
Valores promedio para la variable: Tipo de centro educativo (factor 2)

	Colegio público	*Centro básico*	*Colegio privado*
F2_Media	3.11	2.93	3.84

Este factor 2 (la evaluación es un proceso innecesario) recibe una puntuación promedio mayor de los profesores que trabajan en colegios privados, respecto a los que trabajan en centros básicos. La diferencia es estadísticamente significativa, según los resultados de la prueba U de Mann Whitney a 5% de significancia.

La segunda variable que muestra diferencias significativas es el área geográfica donde trabajan los profesores participantes. Los valores de contraste se muestran a continuación:

TABLA XI
Estadísticos de contraste[a] para la variable: Área geográfica

	F1	*F2*	*F3*	*F4*	*F5*	*F6*
Chi-cuadrado	.096	.045	.682	.082	1.691	12.383
gl	1	1	1	1	1	1
Sig. asintót.	.757	.832	.409	.775	.193	.000

[a] Prueba de Kruskal - Wallis

Como puede apreciarse a continuación, la diferencia entre puntuaciones promedio se obtiene en el factor 6 (F6); éste se refiere a la concepción de que la evaluación es un proceso con múltiples errores.

Las puntuaciones promedio asignadas a esta variable son:

TABLA XII
Valores promedio para la variable: Área geográfica (factor 6)

	Rural	*Urbano*
F6_Media	4.22	4.99

La prueba U de Mann-Whitney nos revela que los profesores que trabajan en el área urbana asignan puntuaciones más altas al factor 6.

En síntesis, las principales concepciones de los profesores hondureños sobre la evaluación son:

– Un alto porcentaje de profesores (88%) respalda la concepción de que la evaluación aporta información del aprendizaje de los alumnos, que les ayuda a mejorar, que reporta información valiosa sobre las necesidades de aprendizaje y que es un proceso que mejora la enseñanza y el aprendizaje

– Los profesores participantes (75%) están de acuerdo con que la evaluación es un proceso válido que describe el aprendizaje y permite asignar una calificación al estudiante y que es una forma de identificar cuánto han aprendido sus alumnos y si han alcanzado los objetivos propuestos. Consideran, además, que los resultados que proporciona la evaluación son fiables.

– Los profesores, por último, rechazan (69%) la concepción de que la evaluación sea innecesaria.

– Sin embargo, la mayoría (88%) de los profesores están de acuerdo en que se debe tener en cuenta el error y la imprecisión que siempre existe en una evaluación. Estos profesores manifiestan evaluar, pero afirman que los resultados se deben tratar con mucha precaución. Es importante señalar que a esta concepción le dan puntuaciones más altas los profesores que trabajan en el área urbana.

– De igual modo, una elevada proporción de los profesores señala que la evaluación, ni mide el rendimiento real del estudiante (57%), ni es un indicador de la calidad de los centros (49 %).

Comparando los resultados obtenidos en este trabajo con los reportados en el informe TEDS-M, en cuanto a las creencias sobre el proceso de aprendizaje de las matemáticas, observamos que al igual que los profesores hondureños, un alto porcentaje de profesores de España (76%) y de Chile (86%) respaldan la creencia de que el aprendizaje de las matemáticas se logra por la participación activa del alumno. Así mismo, un bajo porcentaje (10%) de profesores de estos países tienen la creencia de que el rendimiento en matemáticas depende de la capacidad del alumno, de igual manera un 27% de los profesores hondureños participantes en este estudio respaldan esta creencia.

Consideramos interesante destacar que los estudios realizados por Brown (2011), Brown y Remesal (2012) que utilizan el TCOA, muestran cómo los profesores respaldan la concepción de que la evaluación mejora el proceso de enseñanza-aprendizaje, pero simultáneamente están en desacuerdo con usar la evaluación como un instrumento de rendición de cuentas del alumno.

5. Conclusiones

El estudio de las concepciones y creencias sobre la enseñanza, el aprendizaje y la evaluación de los profesores de matemáticas hondureños es un paso importante para desarrollar cambios y reformas curriculares que el país requiere.

Como aporte de esta investigación, consideramos que los aspectos que observamos en las concepciones y creencias expresadas por los profesores pueden servir de orientación para la formación de futuros profesores de matemáticas, para los procesos de capacitación y formación docente, así como para el diseño de las estrategias de evaluación que realiza la Secretaría de Educación en el contexto hondureño.

El estudio refleja que existen diferencias, según la formación académica, respecto a las concepciones sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas que tienen los profesores.

En la formación de docentes de matemáticas se debería reflexionar sobre las creencias de los profesores especialistas en matemáticas, ya que la mayoría considera que se aprende a partir de la participación activa de los alumnos, mientras que un buen grupo de ellos aún considera que se aprende siguiendo las instrucciones del profesor. Esto supone la necesidad de mejorar la formación de los profesores en la utilización de técnicas y recursos didácticos que favorezcan la participación activa, fuente de un aprendizaje más significativo y de mejor calidad.

Resulta muy esperanzador, en nuestra opinión, constatar que los profesores hondureños señalen en su mayoría que el rendimiento no depende sólo de la capacidad del alumno. Esto, por una parte, implica la necesidad de incidir desde el sistema educativo en los factores que afectan a este rendimiento, entre los que pueden estar los de tipo social. Pero implica también la convicción de estos profesores con respecto a que el rendimiento, si no depende únicamente de la capacidad innata del alumno, se puede mejorar.

En cuanto a los aspectos relacionados con la evaluación, recogidos en nuestro estudio, resulta llamativo constatar que si bien los profesores consideran la evaluación como un proceso válido y que sirve para mejorar el proceso de enseñanza y aprendizaje, señalan los múltiples errores que aparecen en el proceso y que lo hacen menos adecuado para medir el rendimiento de los alumnos o la calidad de los centros educativos. Estos resultados apuntan a la necesidad de mejorar los procesos de evaluación utilizados en el sistema educativo de Honduras.

Referencias bibliográficas

Brown, G. (2002). *Teachers' Conceptions of Assessment.* Auckland, NZ: University of Auckland. https://researchspace.auckland.ac.nz/bitstream/handle/2292/63/02whole.PDF?sequence=6

Brown, G. (2004). Teachers'conceptions of assessment: implications for policy and professional development. *Assessment in Education*, 11 (3), 301-318. DOI: https://doi.org/10.1080/0969594042000304609

Brown, G. (2011). Teachers' conceptions of assessment: Comparing primary and secondary teachers in New Zealand. *Assessment Matters*, 3, 45-70.

https://www.researchgate.net/profile/Gavin_Brown3/publication/233871169_Teachers'_conceptions_of_assessment_Comparing_primary_and_secondary_teachers_in_New_Zealand/links/56a2de6a08ae232fb201cd0f/Teachers-conceptions-of-assessment-Comparing-primary-and-secondary-teachers-in-New-Zealand.pdf

Brown, G. y Remesal, A. (2012). Prospective Teachers' Conceptions of Assessment: A Cross-Cultural Comparison. *The Spanish Journal of Psychology*, 15 (1), 75-89. DOI: https://doi.org/10.5209/rev_SJOP.2012.v15.n1.37286

Casas, L., Carvalho, J., González, M. y Luengo, R. (2015). Concepciones y creencias de los profesores en formación sobre las matemáticas y su enseñanza aprendizaje. Propuesta de nueva metodología cualitativa. *Campo Abierto*, 34 (2), 85-104. https://mascvuex.unex.es/revistas/index.php/campoabierto/article/view/2638

Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L.C. y Muñoz - Catalán, M. C. (2013). Determining specialised knowledge for mathematics teaching. En B. Ubuz, C. Hasery M. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the CERME 8* (pp. 2985-2994). Antalya, Turquía: ERME. http://www.mathematik.uni-dortmund.de/~erme/doc/CERME8/CERME8_2013_Proceedings.pdf

Climent, N., Romero, J., Carrillo, J., Muñoz - Catalán, M. y Contreras, L. (2013). ¿Qué conocimientos y concepciones movilizan futuros maestros analizando un vídeo de aula?. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 16 (1), 13-36. http://relime.org/index.php/repositorio/volumen-16/numero-16-1/1601p/142-pdf-que-conocimientos-y-concepciones-movilizan-futuros-maestros-analizando-un-video-de-aula/file

Educación (2003). Diseño Curricular Nacional para la Educación Básica. Secretaría de Educación, Tegucigalpa, Honduras: SE.

Educación (2017). *Informe Nacional de Desempeño Académico: Español y Matemáticas 1ro. a 9no. grado 2016.* Secretaría de Educación, Tegucigalpa, Honduras: SE - Proyecto MIDEH.

Ernest, P. (1989). *The Impact of Beliefs on the Teaching of Mathematics*, at 6th International Congress of Mathematical Education, Budapest, August 1988. http://webdoc.sub.gwdg.de/edoc/e/pome/impact.htm

Escudero - Ávila, D. I., Carrillo, J., Flores - Medrano, E., Climent, N., Contreras, L. C. y Montes, M. (2015). El conocimiento especializado del profesor de matemáticas detectado en la resolución del problema de las cuerdas. *PNA*, 10 (1), 53-77. http://pna.es/Numeros2/pdf/Escudero2015PNA10(1)Elconocimiento.pdf

García, L., Azcárate, C., Moreno, M. (2006). Creencias, concepciones y conocimiento profesional de profesores que enseñan cálculo diferencial a estudiantes de ciencias económicas. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa,* 9 (1), 85-116. http://relime.org/index.php/repositorio/volumen-9/numero-9-1/0901/297-pdf-creencias-concepciones-y-conocimiento-profesional-de-profesores-que-ensenan-calculo-diferencial-a-estudiantes-de-ciencias-economicas/file

Gil, F. y Rico, L. (2003). Concepciones y creencias del profesorado de secundaria sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Enseñanza de las Ciencias*, 21 (1), 27-47. https://core.ac.uk/download/pdf/38990723.pdf

Hernández - Sampieri, R., Fernández, C. y Baptista, P. (2010). *Metodología de la investigación*. México, D.F.: Mc Graw Hill. Quinta edición.

Hair, J., Anderson, R., Tatham, R. y Black, W. (1999). *Análisis multivariante.* Madrid: Prentice Hall.

Hidalgo, N. y Murillo, F. (2017). Las concepciones sobre el proceso de evaluación del aprendizaje de los estudiantes. *REICE. Revista Iberoamericana sobre Calidad, Eficacia y Cambio en Educación*, 15 (1), 107-128. DOI: http://dx.doi.org/10.15366/reice2017.15.1.007

INEE. (2012). *TEDS-M, Estudio Internacional sobre la formación inicial en matemáticas de los maestros. Informe español.* Madrid: MECD. https://www.mecd.gob.es/dctm/inee/internacional/teds-mlinea.pdf?documentId=0901e72b8143866e

Kellaghan, T., Greaney, V. y Murray, T. (2016). *Utilización de los resultados de una evaluación nacional del rendimiento académico* (vol. 5). Washington: Banco Mundial. https://openlibra.com/es/book/evaluaciones-nacionales-del-rendimiento-academico-vol-5

Llinares, S. (1998). Aprender a enseñar matemáticas en la enseñanza secundaria: relación dialéctica entre el conocimiento teórico y práctico. *Revista interuniversitaria de formación del profesorado*, 32, 117-127 https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=117982

Melo, L., Cañada, F., y Mellado, V. (2017). Initial Characterization of a Colombian High School Physics Teacher's Pedagogical Content Knowledge on Electric Fields. *Research in Science Education*, 47 (1), 25-48. DOI: https://doi.org/10.1007/s11165-015-9488-4

Moreno, M. (2000). *El profesor universitario de matemáticas: estudio de las concepciones y creencias acerca de la enseñanza de las ecuaciones diferenciales* (tesis doctoral). Universidad Autónoma de Barcelona.

Moreno, M., y Azcárate, C. (2003). Concepciones y creencias de los profesores universitarios de matemáticas acerca de la enseñanza de las ecuaciones diferenciales. *Enseñanza de las ciencias*, 21 (2), 265-280. https://core.ac.uk/download/pdf/13268099.pdf

Muñoz - Catalán, M., Contreras, L., Carrillo, J., Rojas, N., Montes, M. y Climent, N. (2015). Conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK): un modelo analítico para el estudio del conocimiento del profesor de matemáticas. *La Gaceta de la RSME*, 18, 1801-1817. https://idus.us.es/xmlui/bitstream/handle/11441/51501/GacRSocMatEsp_Conocimiento_profesor_provisional.pdf?sequence=1&isAllowed=y

Nespor, J. (1987). The role of beliefs in the practice of teaching. *Journal Curriculum Studies*, 19 (4), 317-328. https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED270446.pdf

Pajares, M. (1992). Teachers' Beliefs and Educational Research: Cleaning Up a Messy Construct. *Review of Educational Research*, 62 (3), 307-332. DOI: https://doi.org/10.3102%2F00346543062003307

Philipp, R. (2007). Mathematics Teachers'Beliefs and Affect. En F. Lester, *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning: A Project of the National Council of Teachers of Mathematics* (págs. 257-318). New York: NCTM.

Ponte, J. P. (1994). Mathematics teachers' professional knowledge (plenary conference). In J. P. Ponte & J. F. Matos (Orgs.), *Proceedings of the XVIII International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (PME) (vol. I, pp. 195-210), Lisboa, Portugal. http://repositorio.ul.pt/bitstream/10451/4387/1/94%20Ponte%20%28PME%29.pdf

Remesal, A. (2006). *Los problemas en la evaluación del aprendizaje matemático en la educación obligatoria: perspectiva de profesores y alumnos* (tesis doctoral). Barcelona, España: Universidad de Barcelona. https://www.tdx.cat/handle/10803/2646

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15 (2), 4-14. DOI: https://doi.org/10.3102%2F0013189X015002004

Thompson, A. (1992). *Teachers´beliefs and conceptions: a synthesis of the research*. In D. Grouws, Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning (pp. 127-146). New York: MacMillian Publishing Company.

Autores

Luis Armando Ramos Palacios. Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán, Honduras. larmandoramos@gmail.com

Luis Manuel Casas García. Universidad de Extremadura, España. luisma@unex.es

Gonzalo Espinoza - Vásquez, Diana Zakaryan, José Carrillo Yáñez

EL CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS EN EL USO DE LA ANALOGÍA EN LA ENSEÑANZA DEL CONCEPTO DE FUNCIÓN

The Mathematics Teacher's Specialized Knowledge in the use of Analogy on teaching the Function Concept

RESUMEN

Las analogías, frecuentemente usadas para hacer comprensible una idea, al recurrir a un conocimiento o una experiencia anterior, han sido consideradas como un componente del conocimiento didáctico del contenido desde las primeras conceptualizaciones del conocimiento del profesor. En este artículo se aborda el conocimiento especializado del profesor de matemáticas en el uso de la analogía de la función como una máquina, a partir de observaciones de aula de dos profesores de secundaria chilenos y una entrevista posterior. Los hallazgos del estudio respecto al conocimiento especializado del profesor sobre la función en el uso de la analogía permiten establecer relaciones entre los distintos conocimientos manifestados por los profesores en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las funciones y avanzar en la comprensión de su conocimiento.

PALABRAS CLAVE:

- *Conocimiento especializado del profesor de matemática*
- *Concepto de función*
- *Analogía*
- *Profesor de secundaria*

ABSTRACT

Analogies, often used to make an idea understandable using previous knowledge or experience, have been considered as a component of pedagogical content knowledge since earliest conceptualizations of teacher's knowledge. This paper addressed the mathematics teacher's specialized knowledge in the use of the analogy of function as a machine, based on lessons observation of two Chilean high school teachers and a subsequent interview. Study's findings regarding the teacher's knowledge about the function in the use of analogy allow establishing relations between different knowledge manifested by teachers in the functions' teaching-learning process, advancing in the understanding of their knowledge.

KEY WORDS:

- *Mathematics teacher's specialized knowledge*
- *Function concept*
- *Analogy*
- *High school teacher*

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (2018) *21* (3): 301-324.
Recepción: Abril 2, 2018 / Aceptación: Noviembre 6, 2018. DOI: 10.12802/relime.18.2133

RESUMO

As analogias, frequentemente utilizadas para tornar compreensível uma ideia, recorrendo a um conhecimento ou experiência anterior, têm sido consideradas como uma das componentes do conhecimento didático do conteúdo desde as primeiras conceitualizações do conhecimento do professor. Neste artigo discutimos o conhecimento especializado do professor de matemática no uso da analogia da função como uma máquina, a partir de observações da prática de sala de aula de dois professores do Ensino Médio no Chile e de uma entrevista posterior. Os resultados relativos ao conhecimento do professor sobre função no uso de analogias permitem estabelecer relações entre os distintos conhecimentos manifestados pelos professores no processo de ensino e aprendizagem das funções, aprofundando a compreensão do seu conhecimento.

PALAVRAS CHAVE:

- *Conhecimento especializado do professor de matemática*
- *Conceito de função*
- *Analogia*
- *Professor do Ensino Médio*

RÉSUMÉ

Les analogies, fréquemment utilisées pour rendre compréhensible une idée, s'appuient sur une connaissance ou une expérience antérieure. Elles constituent un ensemble qui a été considéré comme une composante des connaissances didactiques d'un contenu dès les premières conceptualisations des connaissances du professeur. Dans cet article, on aborde la connaissance spécialisée de l'enseignant de mathématiques dans l'usage de l'analogie d'une fonction comme une machine, à partir d'observations de classes de deux professeurs de l'enseignement secondaire chilien suivies d'un entretien. Les résultats principaux de l'étude, en ce qui concerne les connaissances spécialisées du professeur sur l'usage de l'analogie pour la notion de fonction, permettent d'établir des relations entre les différentes connaissances manifestées par les professeurs dans le processus d'enseignement - apprentissage des fonctions, et d'avancer sur la compréhension de ses connaissances.

MOTS CLÉS:

- *Connaissances spécialisées du professeur de mathématiques*
- *Concept de fonction*
- *Analogie*
- *Professeur de secondaire*
- *Enseignement des fonctions*

1. Introducción

Las analogías están presentes en discursos que pretenden enseñar algún concepto nuevo y así constituyen un recurso utilizado para comunicar ideas o experiencias nuevas (Curtis y Reigeluth, 1984; Godoy, 2002) al relacionarlas con conocimientos existentes de modo que dicha relación sea significativa. El uso de la analogía es recurrente en nuestra forma de comunicación y no es ajeno al discurso de los profesores, quienes muchas veces producen y usan analogías de manera inconsciente durante sus clases (*e.g.*, Glynn, 1994; Glynn, Law, Gibson y Hawkins, 1994; Felipe, Gallareta y Merino, 2006; Ünver, 2009).

En el caso de la enseñanza de las ciencias, Dagher (1994) señala que técnicas de abstracción como las analogías han contribuido al desarrollo del pensamiento científico y a la construcción del conocimiento, al otorgarle un lugar importante en el proceso de enseñanza-aprendizaje. En esta línea, se han conducido diversos estudios sobre la analogía como una herramienta para la enseñanza (*e.g.*, Duit, 1991; González, 2005; Oliva, 2008), destacando sus potencialidades en el desarrollo del conocimiento y pensamiento creativo en los estudiantes debido a la posibilidad de describir nuevas ideas y replantear problemas (Polya, 1989; Pérez, 2007). Otros estudios indagan en las características de las analogías, su composición y aspectos que se deben considerar cuando éstas se emplean en la enseñanza (*e.g.*, Godoy, 2002; Oliva, Aragón, Mateo y Bonat, 2001; Oliva, 2008).

La revisión de la literatura revela la importancia de la analogía en la enseñanza de la matemática como método científico o como heurística para la resolución de problemas (Cruz, García, Rojas y Sigarreta, 2016; Novick y Holyoak, 1991; Polya, 1989; Walter y Baros, 2011). Los estudios realizados se centran, principalmente, en el aprendizaje de los estudiantes (*e.g.*, Adams y Eliot, 2013) o en su uso para la resolución de problemas (*e.g.*, Cruz *et al.*, 2016; Polya, 1989), y aunque se muestra como estrategia de enseñanza (*e.g.*, Cuya, Fortes y Nivera, 2017; Sarina y Namukasa, 2010), no se profundiza en el conocimiento profesional del profesor de matemáticas.

En estas investigaciones se destaca la relevancia de que el profesor use analogías a la vez que promueva en sus estudiantes razonamientos por analogía (*e.g.*, Cuya *et al.*, 2017). Por ejemplo, reconocer analogía entre el rectángulo y el paralelepípedo rectangular o entre el área del rectángulo y el volumen del paralelepípedo rectangular como analogías dentro del cuerpo matemático, intra-matemáticas, o conocer la comparación entre el ajedrez y la resolución de ecuaciones (Adams y Eliot, 2013) como analogía extra-matemática. Asimismo, como Lakoff y Núñez (2000) distinguen dos tipos de metáforas conceptuales en matemáticas, es posible hacer la misma distinción para las analogías: aquellas que tienen dominio de partida y llegada en la matemática (*linking*) y aquellas que tienen el dominio de llegada en la matemática y el de partida fuera de ella (*grounding*). El interés de este artículo reside en las analogías del segundo tipo, donde el dominio de partida es extra-matemático.

Dada la relevancia de la analogía en diversos ámbitos, ésta ha sido objeto de estudio desde diferentes perspectivas. Así, desde las ciencias cognitivas, comprender los procesos cognitivos implicados en el descubrimiento, la construcción y el uso de analogías es un objetivo importante de la investigación actual en esta área y genera muchas preguntas importantes (Bartha, 2016), por ejemplo, acerca de cómo identifican los humanos las analogías. Desde el ámbito de la Didáctica de la Matemática, también se han planteado preguntas relevantes al respecto: ¿cómo influyen las analogías y las metáforas en la formación del concepto matemático?, ¿cómo el uso de las analogías se relaciona con el aprendizaje de los estudiantes? O la pregunta que rige esta investigación: ¿qué conocimientos pone en juego el profesor de matemáticas al usar una analogía? Si bien existen investigaciones que abordan el uso de analogías y metáforas en la enseñanza de la matemática (*e.g.*, Font y Acevedo, 2003; Sarina y Namukasa, 2010) y otras que mencionan el conocimiento de la analogía en el estudio del conocimiento profesional del profesor de matemáticas (*e.g.*, Rowland, Huckstep y Thwaites, 2005; Zakaryan *et al.*, 2018), hacen falta estudios que indaguen en el conocimiento del profesor de matemáticas sobre analogías en general.

El conocimiento sobre analogías y su uso es considerado parte del conocimiento del profesor desde la propuesta de Shulman (1986) en el conocimiento pedagógico del contenido (PCK), refiriéndose a la potencialidad que pueden tener éstas en la enseñanza de un tema. Por su parte, Rowland *et al.*, (2005) dentro de *Knowlegde Quartet*, en la categoría *trasformación* que aborda aspectos del conocimiento del profesor en la acción, consideran las analogías en las formas en las cuales el conocimiento a enseñar es trasformado y desarrollado durante la planificación y la enseñanza, haciéndolo accesible a los alumnos. En la misma línea, Carrillo *et al.* (2014) incluyen el conocimiento sobre las analogías en el *conocimiento de la enseñanza de las matemáticas* en el PCK del modelo del Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK)[1], de este modo, se considera que este conocimiento, junto con otros tipos de conocimiento del modelo, son propios de un profesor de matemáticas y son sólo útiles a él, de ahí el carácter especializado del mismo.

Por otra parte, investigar acerca del conocimiento del profesor sobre el concepto de función, su enseñanza y su aprendizaje es importante dado que es uno de los conceptos más relevantes en matemáticas y ha sido clave en el desarrollo de la matemática en general (Ponte, 1992). Tanto el currículum escolar como los programas de formación de profesores de matemáticas incluyen ampliamente este concepto, particularmente en Chile, se destinan unidades completas a su estudio (Ministerio de Educación [MINEDUC], 2016). En cuanto a su presencia

[1] Mathematics Teacher's Specialized Knowledge. La presentación del modelo fue realizada en un contexto internacional y los autores decidieron mantener las siglas en inglés.

en el currículum escolar chileno, se sugiere ver *la función como una máquina*, además señala que la incorporación de representaciones, metáforas y analogías completa el proceso de aprendizaje de los estudiantes y favorece la compresión de los conceptos (MINEDUC, 2016). Este acercamiento promueve la comprensión de la función de modo *operacional* (Sfard, 1991), que consiste en describirla como un conjunto de procesos computacionales o calculatorios; la perspectiva *estructural* de la función como un conjunto de pares ordenados queda fuera del alcance del currículum.

Teniendo en consideración los antecedentes expuestos, en este artículo presentamos resultados de una investigación sobre el conocimiento especializado de dos profesores de secundaria al usar la analogía en la enseñanza del concepto de función con el fin de avanzar en la comprensión de su conocimiento al respecto y con el propósito de contribuir a la mejora de la formación inicial y continua de los profesores de matemáticas.

2. La analogía como recurso para la enseñanza

Un recurso utilizado en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las ciencias es la comparación de objetos o estructuras nuevas con elementos conocidos por los estudiantes, tomando el conocimiento que poseen los estudiantes como base y referente para el nuevo conocimiento (*e.g.*, Oliva, 2008).

Pero antes de considerarse como un recurso para la enseñanza, las analogías han sido ampliamente reconocidas por desempeñar un importante papel heurístico, como ayuda al descubrimiento, en una amplia variedad de entornos y con un éxito considerable, para generar conocimiento y formular posibles soluciones a los problemas (Bartha, 2016). Según Beuchot (2017), el concepto de analogía llega a estudiarse en filosofía debido al impulso que le asignan los pitagóricos en el área de las matemáticas. El autor señala que el estudio de este concepto cobra relevancia en la Modernidad donde decae y posteriormente vuelve a recuperarse por los pensadores románticos, entre otros. Recientemente, su recuperación se basó en la necesidad filosófica de contar con un elemento que tuviera la “sensibilidad para lo que no es exacto, pero que tampoco requiera que sea ambiguo” (p. 6).

Se entiende por analogía la relación de comparación de estructuras que se establece entre dos dominios: uno familiar (llamado dominio fuente o análogo) y uno no familiar (llamado objetivo).

> An analogy refers to comparisons of structures between domains. An analogy is a relation between parts of the structures of two conceptual domains and may be viewed as a comparison statement on the grounds that these structures bear some resemblance to one another (Treagust, Duit, Joslin y Lindauer, 1992, p. 413).

De este modo, una analogía no pretende ser una comparación total y exhaustiva entre ambas estructuras, sino que destaca ciertos aspectos conocidos en el dominio fuente para que éstos se transfieran al dominio objetivo. Esto conlleva un proceso de selección de características del dominio fuente que se quieran resaltar en el dominio objetivo y, según González (2005), siempre existirán diferencias estructurales entre los dominios fuente y objetivo. De acuerdo con Bartha (2016), en la práctica especificamos una analogía simplemente al indicar las similitudes más significativas (y algunas veces las diferencias) y al manifestar las características de la analogía que Beuchot (2017) señala como *univocidad* y *equivocidad*, es decir, sin mostrar una comparación exacta que tampoco dé espacio a la ambigüedad.

Por otra parte, la teoría estructuralista más influyente, la teoría de mapeo de estructuras (Gentner, 1983), evalúa las analogías sobre bases puramente estructurales. Desde esta perspectiva, las analogías son sobre relaciones, más que simples características, es decir, son las propiedades estructurales (las interrelaciones entre los hechos) las que determinan el contenido de una analogía. En este sentido, la analogía puede entenderse como una alineación estructural dada por un mapeo desde los elementos del dominio fuente a los elementos del dominio objetivo (Cuya *et al.*, 2017), tal que las relaciones entre los elementos del dominio fuente son preservadas por las imágenes de los elementos en el dominio objetivo. Este mapeo cobra relevancia cuando se pretende hacer familiar el dominio objetivo, pues se recurre al conocimiento previo que se posea sobre el dominio fuente, posibilitando la comprensión de las relaciones entre los elementos en el dominio objetivo a través de la comprensión de las relaciones conocidas entre los elementos del dominio fuente (Schlimm, 2008).

En cuanto al razonamiento analógico, Norton (2011) argumenta que no existe un principio lógico universal para la inferencia analógica cuando se afirma que las cosas que comparten algunas propiedades también comparten otras. Según el autor, cada inferencia analógica está garantizada por alguna constelación local de hechos que deben determinarse e investigarse caso por caso. Siempre que no se trate de proporcionar una "lógica" universal de analogía, se identifican criterios generales para evaluar argumentos analógicos, algunos de los más importantes de los cuales son (Bartha, 2016):

- Mientras más similitudes (entre dos dominios), más fuerte es la analogía.
- Mientras más diferencias, más débil es la analogía.
- Cuanto mayor es el grado de nuestra ignorancia sobre los dos dominios, más débil es la analogía.
- Las analogías que involucran relaciones causales son más plausibles que aquellas que no involucran relaciones causales.
- Las analogías estructurales son más fuertes que las basadas en similitudes superficiales.

Si bien estos principios son demasiado vagos para proporcionar mucha información (*e.g.*, Bartha, 2016), consideramos que éstos pueden ser útiles, sobre todo desde el punto de vista del conocimiento del profesor sobre la analogía.

En cuanto a la presentación de las analogías, Curtis y Reigeluth (1984) señalan dos formatos: el verbal, mediante el uso exclusivo de palabras, y el pictórico - verbal, que complementa las palabras con alguna imagen. Por otra parte, la relación entre los dominios fuente y objetivo puede ser *estructural,* referida al parecido físico o de construcción similar de los conceptos, o *funcional*, referida a la forma de funcionamiento de ambas estructuras. Un tercer tipo es la relación *estructural-funcional* resultante de la combinación de los dos anteriores.

En ciertos casos puede ser difícil distinguir entre metáfora y analogía. Siendo ambas recursos del lenguaje, la analogía permite establecer comparaciones entre distintas realidades y es un instrumento tanto para el desarrollo del pensamiento como para la explicación, mientras que la metáfora produce una interacción entre los dominios y busca que términos conocidos sirvan de referencia para términos nuevos (Pérez, 2007). La metáfora se distingue al utilizar términos de los que se conocen sus características o evocan ciertas cualidades y permiten atribuirle a su vez dichas cualidades al término al que se hace referencia, funcionando "como si se tratara de un filtro que mediatiza la forma de ver el término que se trata de expresar" (Pérez, 2007, p. 206). El significado literal de un término activa en el oyente una inconsistencia entre los términos utilizados, y el conjunto de significados de esos términos son interpretados de acuerdo con el dominio y el objeto involucrado. Font y Acevedo (2003) proponen como ejemplo de metáfora *la función es una máquina* para interpretar la función al usar un objeto real, evocando las características de la máquina para transferirlas a la función. En contraste, cuando se explicita la comparación, incluyendo generalmente la palabra "como", se tiene una analogía (Oliva *et al*., 2001; Soto - Andrade, 2007). Por ejemplo, al decir que *la función es como una máquina lavadora*, se compara el proceso o funcionamiento de la máquina lavadora con el proceso de mapeo que realiza la función. Tanto las analogías como las metáforas poseen el potencial para sugerir nuevas ideas y hacerlas inteligibles, y constituir una herramienta del profesor para potenciar lo inteligible y plausible de sus explicaciones (Dagher, 1994).

Según Pérez (2007), existe potencial en el uso de la analogía para la producción de conocimiento, dado que la analogía ayuda en la adquisición del conocimiento y actúa como guía del pensamiento creativo gracias a la capacidad de poder re-describir la realidad y replantear los problemas.

Del mismo modo, el uso de analogías en el proceso de enseñanza - aprendizaje puede ayudar a los estudiantes a aprender nuevos conceptos y a reflexionar sobre sus propios procesos científicos (Duit, 1991). Sin embargo, el uso de una analogía puede conducir a la idea errónea del concepto comunicado y de la propia analogía como único modelo válido, lo que descartaría otros rasgos aún no destacados con dicha analogía, impidiendo, quizá, mejores explicaciones. Las ventajas o desventajas de una analogía se determinarán en cada caso de acuerdo con la utilidad que presenten para la resolución de problemas o para el proceso de enseñanza y aprendizaje (González, 2005).

De ahí es preciso que el profesor sea consciente, al momento de usar una analogía, que ésta "presenta una imagen incompleta de la realidad y si confundimos esa imagen parcial con la totalidad, difícilmente podremos avanzar" (Pérez, 2007, p. 204). Debido a que ninguna analogía hace coincidir perfectamente los dominios, Glynn (1994) sugiere que se presenten diversas analogías a los estudiantes para que ellos puedan tener diferentes perspectivas del concepto que se les está enseñando.

Por otra parte, las analogías no planificadas o sin la reflexión suficiente del profesor pueden originar efectos no deseados en el aprendizaje (Oliva, 2008). Por tanto, el uso de una analogía para la enseñanza y el aprendizaje supone conocimiento tanto del objeto al que se hace referencia así como sobre su enseñanza, su aprendizaje y sobre las características que, según Bartha (2016), permiten evaluar la solidez de la analogía.

3. El conocimiento especializado del profesor de matemáticas

El MTSK es una conceptualización del conocimiento del profesor (Carrillo *et al.*, 2018) que pone énfasis en el carácter especializado de dicho conocimiento y abarca el conocimiento que le es útil y necesario sólo al profesor de matemáticas y que tiene relación con el proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática. El modelo MTSK recoge el espíritu del trabajo de Shulman (1986) y considera los dominios: Conocimiento Matemático (MK); Conocimiento Didáctico de Contenido (PCK), y además el dominio Creencias sobre la matemática y sobre su enseñanza y aprendizaje (figura 1).

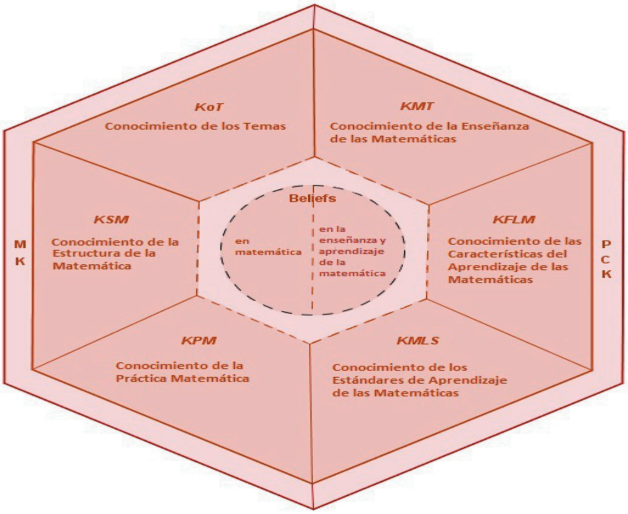


Figura 1. Subdominios del MTSK (Carrillo *et al*., 2014)

El dominio MK comprende el conocimiento de la matemática como una disciplina científica y se compone de tres subdominios descritos a continuación:

1. El Conocimiento de los temas (KoT) se refiere al conocimiento de los temas matemáticos de manera fundamentada. Se considera que el profesor debe conocer el *qué*, el *cómo* y el *por qué* de las ideas matemáticas, es decir, debe existir una comprensión profunda de los temas matemáticos, mayor a la que se quiere que aprendan sus estudiantes. El KoT considera las siguientes categorías: Fenomenología y aplicaciones; Definiciones, propiedades y sus fundamentos; Registros de representación, y Procedimientos asociados a un tema.
2. El Conocimiento de la estructura de las matemáticas (KSM) se refiere al conocimiento de las relaciones entre diferentes temas matemáticos de los distintos niveles educativos desde una perspectiva de la temporalidad en el desarrollo de la complejidad del objeto matemático y desde la delimitación del mismo. Sus categorías son conexiones intramatemáticas de Complejización, de Simplificación, Transversales y Auxiliares.
3. El Conocimiento de la práctica matemática (KPM) se refiere al conocimiento del profesor sobre las formas de explorar, validar, proceder y generar conocimiento en matemática. Corresponden al KPM conocimientos sobre cómo se argumenta o demuestra en matemáticas la importancia del lenguaje formal, la simbología y la sintaxis matemática, entre otros.

Por su parte, el PCK está en estrecha relación con el conocimiento matemático de cara a su enseñanza y aprendizaje y se compone de los siguientes tres subdominios:

1. El Conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT) se refiere al conocimiento del contenido matemático como objeto de enseñanza, es decir, el conocimiento del profesor de las distintas estrategias de enseñanza del contenido, la potencialidad de estas estrategias y de los recursos materiales, incluyendo las ventajas y limitaciones que se pueden involucrar. Sus categorías son: Teorías de enseñanza; Recursos materiales y virtuales; Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos. El conocimiento de la analogía, objeto de estudio de esta investigación, está incluido en el conocimiento de estrategias de enseñanza.
2. El Conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas (KFLM) se refiere al conocimiento del contenido matemático como objeto de aprendizaje, esto es el conocimiento del profesor de las características del aprendizaje que se derivan de la interacción entre el estudiante y el contenido matemático. Sus categorías son: Teorías de aprendizaje; Fortalezas y dificultades asociadas al aprendizaje; Formas de interacción de los alumnos con el contenido matemático y Aspectos emocionales del aprendizaje de las matemáticas.
3. El Conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas (KMLS) se refiere al conocimiento del profesor sobre lo que se estipula que un estudiante debe aprender y desarrollar en cierto nivel. Sus categorías son: Expectativas de aprendizaje; Desarrollo conceptual y procedimental esperado, y Secuenciación de temas.

El MTSK considera que las creencias sobre la matemática y sobre su enseñanza y aprendizaje permean el conocimiento del profesor y ubican este dominio en el centro del modelo, sin embargo, este dominio no se considera en este estudio.

De acuerdo con Carrillo *et al.* (2014), el carácter de especializado del conocimiento del profesor se encuentra en la integración y las relaciones entre conocimientos de todos los subdominios anteriores en distintas dimensiones, lo que deriva de su labor docente, siendo el resultado de esta interacción de distintas formas de conocer el contenido matemático y no del conocimiento del contenido en sí como una parte del dominio de conocimiento matemático necesario para la enseñanza (Carrillo *et al*., 2014). Por su parte, Scheiner, Montes, Godino, Carrillo y Pino - Fan (2017) señalan que esta especialización da lugar a considerar la génesis y el desarrollo de las ideas matemáticas desde una perspectiva histórica y cognitiva, teniendo en cuenta las características del aprendiz. En este sentido, y de acuerdo con lo expuesto en la sección anterior, son las características de la analogía (como forma de pensamiento o razonamiento analógico en la resolución de problemas, forma de proceder en ciencias, particularmente en matemáticas, para establecer conjeturas y descubrimiento como estrategia de enseñanza que favorece la comprensión de ideas abstractas) las que permiten considerarla como parte del conocimiento especializado del profesor de matemáticas.

4. Metodología

Dado que nuestro objetivo es avanzar en la comprensión del conocimiento especializado del profesor de matemáticas en el uso de analogías en la enseñanza del concepto de función, considerando el conocimiento como una red compleja de elementos que tiene sentido en su realidad específica, adoptamos un paradigma interpretativo (Bassey, 1999) y una metodología cualitativa que posibilitan comprender la práctica de los profesores y sus conocimientos manifiestos.

El diseño de la investigación corresponde a un estudio de casos de tipo instrumental (Stake, 2007) donde los casos son dos profesores de matemáticas, Arturo y Jaime. En el momento del estudio, ambos se desempeñaban en los cursos de 8º básico (13-14 años) y 1º medio (14-15 años) de dos colegios privados en una localidad chilena. Los profesores fueron seleccionados por el compromiso que manifestaron con esta investigación y de acuerdo con las características de profesores expertos (Rojas, Carrillo y Flores, 2012). Por ejemplo, poseen más de cinco años de experiencia, han enseñado el contenido al menos una vez y se han perfeccionado obteniendo el grado académico de magíster en la disciplina o en educación.

En nuestro estudio, para la recolección de datos, se observaron las sesiones de clases de ambos profesores destinadas a la enseñanza del concepto de función y se realizaron entrevistas a cada profesor. La fuente principal de datos han constituido las grabaciones en video de las nueve sesiones de clases por cada profesor. Dado el objetivo del estudio, se consideraron exclusivamente aquellas clases donde identificamos que los profesores ofrecieron una analogía para explicar algún aspecto de dicho concepto a sus estudiantes: las dos primeras clases, en el caso de Jaime, y la primera clase, en el caso de Arturo.

Las videograbaciones fueron transcritas y divididas en episodios, según el objetivo matemático del profesor. Las unidades de análisis consideradas son las comunicaciones escritas y orales del profesor con sus estudiantes, las que se trataron mediante el análisis de contenido, identificando, por una parte, la presencia de la analogía en el establecimiento de una comparación que determina dos dominios y las relaciones que vinculan sus elementos, y, por otra, las categorías y subdominios que propone el modelo MTSK. Con este fin, se consideró la diferencia entre indicio y evidencia de conocimiento (Flores-Medrano, 2015), donde esta última corresponde a un elemento que permite afirmar la presencia de conocimiento profundo o superficial del profesor, mientras que el primero es una sospecha de existencia o inexistencia de conocimiento identificada por alguna acción del profesor. Los indicios requieren de información adicional para confirmarse como evidencia de conocimiento.

Después de un análisis preliminar de los datos, se elaboró una entrevista semi-estructurada para profundizar en los indicios de conocimiento especializado y aportar más evidencias sobre ciertos subdominios que enriquezcan el análisis. Estas entrevistas también fueron video-grabadas y transcritas para su análisis bajo los mismos criterios que las grabaciones de clases, lo que constituyó otra fuente de datos.

Los resultados del estudio muestran el conocimiento especializado de los profesores en el uso de analogía para la enseñanza del concepto de función a partir de las evidencias observadas directamente o confirmadas en la entrevista posterior.

5. Resultados

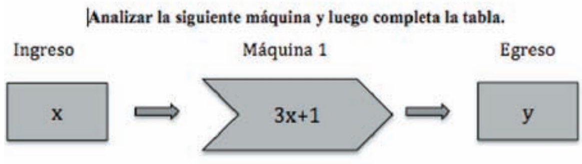
A continuación se describe el conocimiento especializado de Jaime y Arturo manifiesto en el uso de la analogía en la enseñanza del concepto de función.

5.1. *El MTSK de Jaime en el uso de la analogía*

Durante la primera clase, Jaime trabaja relaciones entre conjuntos representadas mediante diagramas sagitales que evidencian su conocimiento sobre representaciones para la función. El profesor propone ejemplos de funciones y relaciona los nombres de sus alumnos con su grupo musical preferido y sus nombres con sus apellidos. Con estos ejemplos, Jaime establece condiciones para definir el concepto de función como *una relación que va desde un conjunto, en el que a cada elemento de ese conjunto se le asigna un único elemento del otro conjunto.* La exposición de la definición de la función da cuenta del conocimiento de la misma de Jaime. Ésta se basa en la relación entre conjuntos, lo que asigna un significado a la función. En la definición proporcionada, se identifica el conocimiento de las propiedades de unicidad de imagen y exhaustividad que la definen. Lo anterior da cuenta del conocimiento sobre el concepto de función como Conocimiento del tema de Jaime.

En la segunda clase, destinada a resolver ejercicios, Jaime se apoya en la representación que incluye el texto del estudiante (figura 2) para mostrar una comparación entre la función y una máquina dispensadora de golosinas y con ello explicar un ejercicio propuesto en el mismo texto.

Jaime: En la página 117 [del texto del estudiante] aparecen este tipo de ejercicios donde dice: "ingresa (una X), máquina y sale (egreso)".



Ingreso	-5			7
Egreso		13	-2	

Figura 2. Ejercicios propuestos en el texto del estudiante

¿A qué se parece esto? A la máquina dispensadora de golosinas. Al colocar una moneda, la máquina acciona y sale un producto. Esto es similar a la Máquina 1: ingresa X "un valor", la máquina trabaja con ese valor y sale otro valor que está en esta tabla. Aquí dicen los valores que ingresan o egresan de la máquina. Usted tiene que completar los cuadritos vacíos de acuerdo con el hecho de que salga o entre.

El uso de la palabra "parecido" es útil para comparar la máquina dispensadora con el concepto de función y el establecimiento de las siguientes relaciones entre los objetos de los dominios fuente y objetivo: *a)* la moneda se relaciona con el número X que ingresa; *b)* el proceso que realiza la máquina con la expresión algebraica o "fórmula" para la función, y *c)* el objeto resultante con el número en el conjunto de llegada dan cuenta de la presencia de una analogía para el concepto de función. El profesor presenta la analogía de manera verbal y se apoya en el diagrama del texto haciendo referencia a la función como una máquina (figura 2). Jaime recurre a la analogía para ayudar a sus estudiantes a comprender y realizar el cálculo de imagen y pre-imagen, estableciendo la analogía desde su carácter *funcional* al comparar la máquina de golosinas con el proceso que define la función.

En el siguiente extracto, el profesor explicita la comparación entre los dominios fuente (máquina dispensadora) y objetivo (concepto de función).

Jaime: ¿te acuerdas cuando decíamos que esto era parecido a esos dispensadores de golosinas, de bebidas que había en los hospitales, en el centro comercial? Yo tomaba una moneda, la ingresaba a la máquina, la máquina hacía su trabajo de acuerdo con lo que yo le pedía y después salía el producto que tú quisieras. Acá [en el texto del estudiante] está indicando algo parecido, similar. Yo voy a tomar un número X, va a ingresar a esta máquina, y esa máquina hace este trabajo (3x+1).

Jaime señala que lo obtenido es el resultado del funcionamiento de la máquina según lo que se le pide hacer, asociando una moneda a una golosina mediante una instrucción del usuario.

Para determinar la pre-imagen de un valor de egreso, Jaime recurre a la resolución de una ecuación de tipo $f(x)=k$. El uso de ecuaciones corresponde a conocimiento de una conexión auxiliar entre la función y la ecuación en su Conocimiento de la estructura de las matemáticas, pues la ecuación no es un concepto propio de las funciones, sino que Jaime la utiliza como una herramienta durante el estudio de las imágenes y pre-imágenes de una función. En el caso de la determinación de imágenes, Jaime hace la evaluación de la expresión algebraica, mostrando así conocimiento sobre procedimientos para determinar imágenes y pre-imágenes y el conocimiento de la representación algebraica para la función y la notación $f(x)=y$ los que son parte del Conocimiento del tema.

Jaime muestra la función a través de la analogía como un proceso de entrada - salida, lo que evidencia el conocimiento sobre un significado de la función y revela su conocimiento de la analogía como estrategia de enseñanza, parte del Conocimiento de la enseñanza de las matemáticas.

Cuando, en la entrevista, se le pregunta a Jaime sobre la intencionalidad de esta analogía, señala que busca resaltar la condición de unicidad de imagen mediante la comparación entre la función y la máquina de golosinas.

> Jaime: [La comparación] Es sólo para explicar. Lo había escuchado en otro lado; a cualquier máquina que uno le da un valor, uno le da una moneda, aplica la función y sale una sola golosina o una sola bebida. Yo quería relacionar el que yo tomaba un valor, le aplicaba la función y salía sólo un tipo. Ésa era la idea de fondo: yo tomaba uno, se le aplica la máquina y salía otro valor.

La relación que Jaime establece entre función y máquina dispensadora se basa en el uso de la máquina como una relación entre una moneda y un producto al entregar sólo un resultado, enfatizando el carácter univalente de la función. A pesar de que el proceso de calcular imágenes y pre-imágenes en una función es comparado en el texto con una máquina, Jaime presenta la analogía para resaltar la característica de unicidad en la asignación de imagen de la función. Esto da cuenta del conocimiento de una de las propiedades del concepto de función como parte del Conocimiento del tema.

Respecto al conocimiento sobre la potencialidad de esta analogía para la enseñanza de la función, se le pregunta al profesor sobre la ayuda a los estudiantes que ofrece la analogía, a lo que responde:

Jaime: No sé si les ayuda o no al concepto, porque son ejemplos que pienso pueden ser útiles para iniciar el proceso. Si me preguntas propiamente tal de esta máquina, claramente que no. No creo que ni siquiera se acuerden, pero en ese instante, para mí era un ejemplo que yo lo encontraba útil, por lo menos conocido, porque todos han comprado en algún dispensador, pero no creo que les haya servido para el resto de lo que uno ve de funciones.

En este extracto, Jaime identifica la potencialidad de la analogía sólo como ayuda en el estudio inicial de las funciones y reconoce su limitación respecto al tiempo en que ésta es útil, lo que da cuenta del conocimiento sobre las interacciones de los estudiantes con el contenido, parte del Conocimiento de las características del aprendizaje de la función.

5.2. *El MTSK de Arturo en el uso de la analogía*

Arturo inicia la primera clase explicando el concepto de correspondencia con un ejemplo que involucra a los estudiantes, sus sillas y mesas individuales. Inmediatamente después, propone la siguiente definición de función usando el concepto de correspondencia antes explicado:

Arturo: Entonces, ¿cómo vamos a definir una función? Como una correspondencia de elementos de dos conjuntos en la que a cada elemento de un conjunto de partida le corresponde un único elemento en el conjunto de llegada. Lo voy a escribir [en la pizarra]: "es una correspondencia entre elementos de dos conjuntos (no vacíos), A y B, tales que a cada elemento del conjunto de partida le corresponde un único elemento en el conjunto de llegada, B".

En esta intervención se observa que Arturo conoce un significado para la función (correspondencia) y una definición para el concepto como parte del Conocimiento del tema. Al presentar la definición, Arturo elabora un diagrama sagital (imagen 1) en el que muestra una correspondencia entre los conjuntos A y B usando los elementos genéricos *a*, *b*, *x* e *y*. Esta representación tiene por objetivo identificar los componentes de la función incluidos en la definición: conjunto de partida, conjunto de llegada, codominio y sus respectivos elementos. Lo anterior da cuenta del conocimiento de las representaciones y notaciones de la función como parte del Conocimiento del tema.

En la definición que proporciona Arturo se incluyen las propiedades de unicidad de imagen y exhaustividad. Además, se condiciona que los conjuntos involucrados sean no vacíos, lo que evidencia conocimiento de las propiedades que hacen definible al concepto de función.

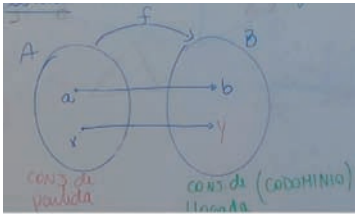


Imagen 1. Diagrama sagital

Una vez propuesto el diagrama sagital, Arturo hace una comparación entre la función y la máquina de lavar ropa, como se aprecia a continuación.

Arturo: Previo a darles más nombres, la función funciona igual que una especie de máquina. Un ejemplo podría ser la lavadora. La lavadora cumple una función, ¿cuál es la función?

Estudiante: ¡Lavar!

Arturo: ¿Qué es lo que usted hace? Toma una prenda sucia, la mete en la lavadora, y ¿cómo sale?

Estudiante: Limpia.

Arturo: La prenda sucia vendría a ser del conjunto de partida y la prenda limpia sería de llegada, eso es lo que hace una función. Acá [imagen 2] tendría la prenda sucia, hace la función, lo que le corresponda hacer, dependiendo de la máquina, y llega al otro lado, en este caso, como era la lavadora, llega limpia.

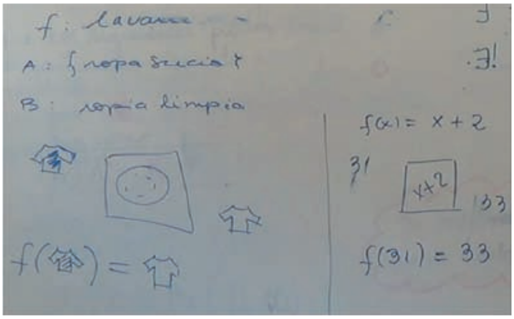


Imagen 2. Presentación pictórica - verbal de la analogía

En la intervención anterior, Arturo establece relaciones entre el proceso de lavar y el concepto de función siendo éstos los dominios fuente y objetivo, respectivamente, de una analogía. Además se vinculan los elementos de ambos dominios para explicitar la comparación. De esta forma, se puede afirmar que Arturo conoce una analogía para el concepto de función. Arturo presenta la analogía de manera pictórica-verbal y busca ofrecer una ayuda a sus estudiantes para comprender la definición del concepto. En la intervención anterior (imagen 2), Arturo explicita la relación entre los dominios fuente y objetivo: la ropa sucia es el conjunto de partida, la ropa limpia es el conjunto de llegada y el proceso de lavar es la operación que realiza la función, como un proceso de entrada - salida. Esta analogía compara la función con la máquina de lavar a nivel *funcional* (como dos procesos) y a nivel *estructural,* identificando explícitamente las relaciones entre los conjuntos y los procesos involucrados.

Cuando se le pregunta a Arturo sobre el motivo para presentar esta analogía, responde que intenta simplificar la idea matemática que está enseñando.

> Arturo: Hago la explicación simple, luego hago una explicación más formal matemática, tratando de hacer una comparación. Siempre hago una traducción del lenguaje formal matemático a un lenguaje simple que ellos puedan comprender. En esta ocasión yo partí con un lenguaje simple y después lo llevé a un lenguaje matemático [...] La traducción del concepto, la traducción de la definición. Cuando tú tienes una definición matemática, de repente es muy dura para que alumnos de primero medio la puedan entender, entonces uno hace una explicación de eso, utilizando sinónimos, de tal forma que ellos puedan comprender lo que ahí está escrito, lo que quieres decir.

Esta explicación que indica Arturo es propuesta con el fin de hacer comprensible una idea a sus estudiantes. En este caso, la definición de función y la forma de orientar la ayuda ofrecida es a través de la analogía, lo que corresponde tanto a Conocimiento de la enseñanza de la función como a Conocimiento de las características del aprendizaje de ésta, lo que se evidencia cuando Arturo menciona las dificultades de los estudiantes al enfrentarse con definiciones formales y nuevos conceptos. El uso de la analogía da cuenta de su estrategia de enseñanza para el concepto, pues pretende aclarar la definición recién dada.

Como se observa en la imagen 2, Arturo aprovecha la analogía para destacar el carácter de proceso de la función y para introducir la notación asociada a las funciones combinando los elementos que la analogía provee con la notación formal. Estas relaciones son el puente para las notaciones $y = f(x)$ y $A \rightarrow B$, presentando una combinación entre el lenguaje simbólico - matemático y la representación pictórica, todo esto como parte del conocimiento de los registros de representación y sobre cómo estas representaciones se articulan, como parte del Conocimiento del tema.

En la siguiente tabla 1, presentamos el conocimiento especializado de Arturo y Jaime de acuerdo con los subdominios y las categorías del MTSK identificados en el uso de la analogía.

La primera columna de la tabla 1 contiene los subdominios y las categorías evidenciadas, mientras que la segunda y la tercera columna presentan los conocimientos evidenciados en el uso de la analogía por cada uno de los profesores. Las filas centradas representan conocimientos que ambos profesores han manifestado en ese subdominio / categoría.

TABLA I

Conocimiento especializado de Arturo y Jaime en el uso de la analogía

Subdominio / categoría:	*Arturo conoce*	*Jaime conoce*
Conocimiento de los temas (KoT) / Definiciones	La univalencia La exhaustividad	
	La función como correspondencia entre elementos	La función como relación entre conjuntos
	La condición de conjuntos no vacíos	
	La función como proceso (máquina lavadora)	La función como proceso (máquina dispensadora)
KoT / Registro de representación	El diagrama sagital El lenguaje algebraico La notación f(x)=y	
KoT / Propiedades	El conjunto de partida El conjunto de llegada	El dominio y recorrido La pre-imagen, imagen
KoT / Procedimientos	El cálculo de imágenes y pre-imágenes	
Conocimiento de la estructura de las matemáticas (KSM) / Conexiones auxiliares		El uso de la ecuación lineal f(x)=k para determinar la pre-imagen de k
Conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT) / Estrategia de enseñanza	El uso de diagrama sagital usando variables El planteamiento de la definición	El uso de diagrama sagital usando conjuntos no numéricos El planteamiento de la definición
	La presentación pictórica-verbal	La presentación verbal
	La función como una máquina lavadora	La función como máquina dispensadora
	Que ayuda a simplificar la definición y a comprender conceptos de dominio, codominio, imagen y pre-imagen	Que ayuda a comprender la unicidad de imagen y permite calcular imagen y pre-imagen
Conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas (KFLM) / Fortalezas y dificultades asociadas al aprendizaje de la función	Las dificultades en la adquisición de nuevos conceptos (dominio, codominio)	La utilidad de la analogía sólo al inicio del estudio de la función
		Que los estudiantes suelen no recordar esta comparación

6. Discusión

Como se puede ver en la tabla 1, existen diferencias entre el conocimiento especializado identificado en ambos profesores. Esto puede deberse a que Arturo presenta la analogía después de definir la función para ayudar a la comprensión de esta definición, mientras que Jaime busca otorgar una ayuda para un procedimiento cuando plantea a sus estudiantes un ejercicio del texto. De acuerdo con González (2005), el momento en que se presenta la analogía puede afectar el proceso de enseñanza-aprendizaje, al evidenciar conocimientos de diferentes subdominios.

La lectura de la tabla permite observar que los profesores presentan la función sólo desde el significado de proceso (Figueiredo, Contreras y Blanco, 2015; García y Serrano, 2000; Sfard, 1991), visto como entrada y salida de objetos sin incluir, por ejemplo, el significado de la función como variación de magnitudes o como pares ordenados desde una perspectiva estructural (Sfard, 1991), lo que puede limitar la concepción de la función por parte de los estudiantes (González, 2005). Pese a esto, iniciar el estudio de la función desde la concepción del proceso favorece la comprensión del concepto en los estudiantes (Figueiredo *et al*., 2015). Asimismo, el conocimiento de los profesores sobre la necesidad de que los estudiantes estén familiarizados con las máquinas presentadas para resaltar el significado de la función como proceso, guarda concordancia con lo que Duit (1991) señala como condición para que los estudiantes puedan razonar exitosamente por analogía, y, por otra parte, con las características que según Bartha (2016) fortalecen la analogía. Sin embargo, cabe recordar que la analogía presenta una imagen parcial (Pérez, 2007) y requiere de comparaciones complementarias para la comprensión más profunda del concepto (Glynn, 1994).

En ambos casos, la analogía es presentada a los estudiantes y no construida por ellos, contrario a la recomendación hecha por Oliva (2008). Pese a ello, ambos profesores pretenden que sus estudiantes consigan establecer relaciones que les permitan comprender los nuevos conceptos, hecho que concuerda con la importancia que se le da a la analogía como recurso para la enseñanza (*e.g.*, Cuya *et al*., 2017) y para resolver problemas asociados mediante el razonamiento analógico por parte de los estudiantes (Cruz *et al*., 2016).

La pluralidad de características de la analogía posibilita observar, en su uso, la integración de conocimientos de diferente índole que Carrillo *et al.* (2018) y Scheiner *et al.* (2017) definen como conocimiento especializado del profesor de matemáticas. Así, se han visto distintos subdominios del conocimiento especializado del profesor en el uso de la analogía y se podrían considerar otros que no se observaron directamente. Por ejemplo, el conocimiento del profesor del hecho de que la máquina lavadora relacione objetos del mismo tipo (poleras con poleras) sin destacar una de las características relevantes de la función como es la naturaleza arbitraria de los conjuntos relacionados (Even, 1990) o que la analogía de la función como una máquina presenta la función como un proceso pueden limitar la comprensión a sólo un significado de la función. Por ejemplo, concebir la función como una co-variación de magnitudes o conjunto de pares ordenados, perspectivas que son también parte del desarrollo histórico de las funciones (Ruiz - Higueras, 1994).

Asimismo, el conocimiento del profesor acerca de las concepciones erróneas de los estudiantes cuando se limita la función a una máquina llevaría al profesor a reflexionar sobre cómo la analogía puede afectar el aprendizaje de los estudiantes como lo menciona Oliva (2008). Por ejemplo, si la lavadora no entrega la ropa limpia o la máquina dispensadora no entrega la golosina solicitada, el estudiante puede pensar que no "hay una función" en esos casos, pues los objetos resultantes del proceso de lavar no pertenecen al conjunto de llegada (ropa limpia), o una moneda puede no tener imagen. Estas situaciones dan cuenta de la importancia de los distintos subdominios del conocimiento especializado del profesor en el uso de la analogía como estrategia de enseñanza.

7. Conclusiones

En este estudio nos hemos preguntado por los conocimientos que el profesor de matemáticas pone en juego al usar una analogía para la enseñanza de la función. De nuestros resultados podemos concluir que en dicho uso intervienen diferentes subdominios de conocimiento especializado del profesor de manera integrada.

Consideramos que, a pesar de que las analogías presentadas por los profesores son potentes al mostrar la función como un proceso, el conocimiento del profesor sobre el concepto de función, su enseñanza y su aprendizaje le permitirá idear otras analogías que ayuden a sus estudiantes a comprender el concepto desde otras perspectivas. Además, es importante que el profesor sea consciente de las características de la analogía que utiliza, su aplicabilidad, alcances y el contexto donde se presentará. Al respecto, podemos concluir que los distintos subdominios del conocimiento del profesor identificados en el uso de las analogías nos permiten profundizar en la comprensión de dicho conocimiento.

Dado que el concepto de función es un tema presente tanto en la matemática escolar como en la formación inicial de profesores, los resultados de esta investigación y de estudios sobre el conocimiento matemático y didáctico del profesor sobre la función, así como del uso de la analogía en su enseñanza, son potencialmente útiles para los formadores de profesores en el diseño de tareas en los cursos de formación inicial de profesores. Asimismo, estos resultados pueden utilizarse en la formación continua de profesores de matemática para diseñar nuevas propuestas de enseñanza considerando sus experiencias profesionales y las características de las analogías en la discusión de las ventajas, dificultades u obstáculos que se producen al utilizar la analogía como estrategia de enseñanza. La reflexión acerca de estos aspectos, en contextos reales, es una oportunidad para los profesores de (re)construir su conocimiento especializado (Zakaryan *et al*., 2018).

Finalmente, este estudio aporta, a partir de datos empíricos, a la comprensión de este conocimiento y contribuye a la investigación en el área al profundizar en el conocimiento especializado sobre el uso de la analogía como estrategia de enseñanza y ofrece ejemplos de situaciones reales, provechosos en la formación de profesores.

Agradecimientos

Beca Conicyt Nº 21150897, Proyecto Fondecyt N° 11140092, Proyecto EDU2013-44047-P del MINECO (España).

Referencias bibliográficas

Adams, N., y Elliot, S. (2013). Capture the king: using analogies to teach mathematics to adults. *International Conference The Future of Education 3rd edition*. Obtenido de https://www.researchgate.net/publication/283638078

Bartha, P. (2016). Analogy and Analogical Reasoning. In E. N. Zalta (Ed.), *The Stanford Encyclopedia of Philosophy.* Obtenido de https://plato.stanford.edu/archives/win2016/entries/reasoning-analogy

Bassey, M. (1999). *Case study research in educational settings.* Buckingham, UK: Open University press.

Beuchot, M. (2017). Epistemología de la analogía: conocimiento, sociedad y expresión. *Sociología y Tecnología*, *7*(2), 1-12. doi: 10.24197/st.2.2017

Carrillo, J., Contreras, L. C., Climent, N., Escudero - Avila, D., Flores - Medrano, E., y Montes, M. A. (Eds.) (2014). *Un marco teórico para el conocimiento especializado del profesor de matemáticas.* Huelva, España: Universidad de Huelva Publicaciones.

Carrillo J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores - Medrano, E., Escudero - Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar - González, Ribeiro, M., y Muñoz - Catalán, M. (2018). The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education*. doi: 10.1080/14794802.2018.1479981

Cruz, M., García, M., Rojas, O., y Sigarreta, J. (2016). Analogies in mathematical problem posing. *Journal of Science Education, 17*(2), 84-90. Obtenido de https://www.researchgate.net/publication/304828183_Analogies_in_mathematical_problem_posing

Curtis, R. V., y Reigeluth, C. M. (1984). The use of analogies in written text. *Instructional Science, 13* (2), 99-117. Obtenido de https://www.jstor.org/stable/23368978

Cuya, R. G., Fortes, E. C., y Nivera, G. (2017). The use of non-math analogies in teaching mathematics. *The Normal Lights*, *11* (1), 18-42. Obtenido de http://po.pnuresearchportal.org/ejournal/index.php/normallights/article/view/372

Dagher, Z. (1994). Does the use of analogies contribute to conceptual change? *Science Education, 78* (6), 601-614. doi: 10.1002/sce.3730780605

Duit, R. (1991). On the role of analogies and metaphors in learning science. *Science education, 75* (6), 649-672. doi: 10.1002/sce.3730750606

Even, R. (1990). Subject matter knowledge for teaching and the case of functions. *Educational Studies in Mathematics, 21*, 521-544. doi: 10.1007/BF00315943

Felipe, A., Gallarreta, S., y Merino, G. (2006). Aportes para la utilización de analogías en la enseñanza de las ciencias. Ejemplos en biología del desarrollo. *Revista Iberoamericana de Educación, 37*(6). Obtenido de http://www.rieoei.org/1233.htm

Figueiredo, C., Contreras, L., y Blanco, L. (2015). Concepción de función: definición, presentación y ejemplificación en la enseñanza y aprendizaje. En C. Azcárate, M. Camacho - Machín, T. González, y M. Moreno (Eds.), *Didáctica del análisis matemático: una revisión de las investigaciones sobre su enseñanza y aprendizaje en el contexto de la SEIEM* (pp. 67-80). La Laguna, España: Servicio de Publicaciones Universidad de La Laguna.

Flores - Medrano, E. (2015). *Una profundización en la concepción de elementos del modelo de conocimiento especializado del porfesor de matemáticas MTSK* (Tesis doctoral, Universidad de Huelva). Obtenido de http://hdl.handle.net/10272/11503

Font, V., y Acevedo, J. (2003). Fenómenos relacionados con el uso de metáforas en el discurso del profesor. el caso de las gráficas de funciones. *Enseñanza de las Ciencias*, *21* (3), 405-418. Obtenido de https://ddd.uab.cat/record/1616

García, G., y Serrano, C. (2000). Variables institucionales en el conocimiento profesional del docente: el caso de la función. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*. *3*(3), 357-370. Obtenido de http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=33503306

Gentner, D. (1983). Structure-mapping: A theoretical framework for analogy. *Cognitive Science*, *7*, 155-170. doi: 10.1016/S0364-0213(83)80009-3

Glynn, S. M. (1994). *Teaching science with analogies: A strategy for teacher and textbook authors* (Reading Research Report No. 15). Obtenido de https://eric.ed.gov/?id=ED373306

Glynn, S. M., Law, M., Gibson, N., y Hawkins, C. (1994). *Teaching science with analogies: A resource for teacher and textbook authors* (Reading Research Report No. 7). Obtenido de https://eric.ed.gov/?q=ED378554&ft=on&id=ED378554

Godoy, L. (2002). Sobre la estructura de las analogías en ciencias. *Interciencia, 27* (8), 422-429. Obtenido de http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=33907107

González, B. (2005). El modelo analógico como recurso didáctico en ciencias experimentales. *Revista Iberoamericana de Educación*, *37* (2), 1-15. Obtenido de https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=3197041

Lakoff, G., y Nuñez, F. (2000). *Where Mathematics comes from?* New York, USA: Basic Books.

Ministerio de Educación de Chile [MINEDUC]. (2016). *Matemática: Programa de estudio de matemática - octavo básico.* Obtenido de http://www.curriculumenlineamineduc.cl/605/articles-18983programa.pdf

Norton, J. (2011). *Analogy.* Unpublished manuscript. University of Pittsburgh, Pittsburgh, USA. Obtenido de http://www.pitt.edu/~jdnorton/papers/Analogy.pdf

Novick, L., y Holyoak, K. (1991). Mathematical problem solving by analogy. *Journal of Experimental Psychology: Learning, Memory, and Cognition, 17*(3), 398-415. Obtenido de http://psycnet.apa.org/doi/10.1037/0278-7393.17.3.398

Oliva, J. Mª., Aragón, Mª. M., Mateo, J., y Bonat, M. (2001). Cambiando las concepciones y creencias del profesorado de ciencias en torno al uso de analogías. *Revista electrónica interuniversitaria de formación del profesorado*, *4*(1), 1-10. Obtenido de http://aufop.com/aufop/uploaded_files/articulos/1227733146.pdf

Oliva, J. Mª. (2008). Qué conocimientos profesionales deberíamos tener los profesores de ciencias sobre el uso de analogías. *Revista Eureka sobre Enseñanza y Divulgación de las Ciencias*, *5*(1), 15-28. Obtenido de https://revistas.uca.es/index.php/eureka/article/view/3770

Pérez, M. (2007). Metátora frente a analogía: del pudín de pasas al fuego diabólico. *Thémata. Revista de Filosofía*, 38, 201-211. Obtenido de https://idus.us.es/xmlui/handle/11441/27867

Polya, G. (1989). *Cómo plantear y resolver problemas.* México: Editorial Trillas.

Ponte, J. (1992). The history of the concept of function and some educational implications. *The Mathematics Educator*, *3*(2), 3-8. Obtenido de https://eric.ed.gov/?id=EJ453589

Rojas, N., Carrillo, J., y Flores, P. (2012). Caracterìsticas para identificar a profesores de matemaìticas expertos. En A. Estepa, Aì. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. Garciìa, y L. OrdoìnÞez (Eds.), Investigacioìn en Educacioìn Matemaìtica XVI (pp. 479 - 485). Jaeìn, España: SEIEM.

Rowland, T., Huckstep, P., y Thwaites, A. (2005) Elementary teachers' mathematics subject knowledge: the knowledge quarter and the case of Naomi. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *8*, 255-281. doi: 10.1007/s10857-005-0853-5

Ruiz - Higueras, L. (1994). Concepciones de los alumnos de Secundaria sobre la noción de función: análisis epistemológico y didáctico (Tesis doctoral). Universidad de Jaén, Jaén, España.

Sarina, V., y Namukasa, I. (2010). Nonmath analogies in teaching mathematics. *Procedia - Social and Behavioral Sciences*, *2*, 5738-5743. doi: 10.1016/j.sbspro.2010.03.937

Scheiner, T., Montes, M. A., Godino, J. D., Carrillo, J., y Pino-Fan, L. (2017). What makes mathematics teacher knowledge specialised? Offering alternative views. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 37, 270. doi: 10.1007/s10763-017-9859-6

Schlimm, D. (2008). Two ways of analogy: Extending the study of analogies to mathematical domains. *Philosophy of Science, 75*(2), 178-200. doi: 10.1086/590198

Shulman, L. (1986). Those who understand: knowledge growth in teaching. *American Educational Research Association, 15*(2), 4-14. Obtenido de www.jstor.org/stable/1175860

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and object as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics, 22*(1), 1-36. doi: 10.1007/BF00302715

Soto - Andrade, J. (2007). La cognición hecha cuerpo florece en metáforas. En A. Ibáñez y D. Cosmelli (Eds.), *Nuevos enfoques de la cognición. Redescubriendo la dinámica, la intención y la intersubjetividad* (pp. 71-90). Santiago de Chile: Universidad Diego Portales.

Stake, R. E. (2007). *Investigación con estudio de casos.* Madrid, España: Morata.

Treagust, D., Duit, R., Joslin, P., y Lindauer, I. (1992). Science teachers' use of analogies: observations from classroom practice. *International Journal of Science Education*, *14*(4), 413-422. doi: 10.1080/0950069920140404

Ünver, E. (2009). *Analysis of analogy use on function concept in the ninth grade mathematics textbook and classrooms.* (Master's Thesis, Middle East Technical University). Obtenido de http://etd.lib.metu.edu.tr/upload/3/12611356/index.pdf

Walter, J., y Barros, T. (2011). Students build mathematical theory: semantic warrants in argumentation. *Educational Studies in Mathematics*, *78* (3), 323-342. doi: 10.1007/s10649-011-9326-1

Zakaryan, D., Estrella, S., Espinoza-Vásquez, G., Morales, S., Olfos, R., Flores-Medrano, E., y Carrillo J. (2018). Relaciones entre el conocimiento de la enseñanza y el conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas: caso de una profesora de secundaria. *Enseñanza de las ciencias*, *36* (2), 105-123. doi: 10.5565/rev/ensciencias.22600

Autores

Gonzalo Espinoza - Vásquez. Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile. gonzalo.espinoza.v@gmail.com

Diana Zakaryan. Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile. diana.zakaryan@pucv.cl

José Carrillo Yáñez. Universidad de Huelva, España. carrillo@uhu.es

Carmen Batanero, María M. Gea, Pedro Arteaga, J. M. Contreras, Carmen Díaz

CONOCIMIENTO DEL CONTENIDO SOBRE CORRELACIÓN Y REGRESIÓN DE FUTUROS PROFESORES

Content knowledge of correlation and regression in prospective teachers

RESUMEN

El objetivo de esta investigación fue identificar el conocimiento del contenido: correlación y regresión (común, avanzado y especializado) en una muestra de 65 futuros profesores de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato. Para ello se analizaron sus respuestas escritas en diferentes tareas relacionadas con un proyecto estadístico basado en datos de las Naciones Unidas. Los resultados indican buena estimación de la correlación e identificación de la función ajuste (conocimiento común), corrección en la ordenación de las variables explicativas según su poder predictivo y mayor dificultad para explicar la correlación por relaciones diferentes a la causalidad (conocimiento avanzado) y un análisis razonable de la idoneidad didáctica del proyecto (conocimiento especializado). Se informa también de algunos sesgos y del efecto de las variables de tarea sobre las respuestas.

PALABRAS CLAVE:

- *Correlación y regresión*
- *Futuros profesores*
- *Conocimiento del contenido*
- *Evaluación*
- *Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato*

ABSTRACT

This research aimed to identify content knowledge (common, advanced and specialised) of correlation and regression in a sample of 65 prospective secondary and high school teachers. The participants' written productions in different tasks proposed within a statistical project based on United Nations Data were analysed. Results suggest a good estimation of correlation and identification of the model of fit (common knowledge), correct ordering of explanatory variables according to their predictive value, some difficulty in explaining correlation by relationships different from causality (advanced knowledge), and a reasonable analysis of the project didactic suitability (specialised knowledge). We also inform of some biases, as well as the effect of task variables in the responses.

KEY WORDS:

- *Correlation and regression*
- *Prospective teachers*
- *Content knowledge*
- *Assessment*
- *Secondary and high school levels*

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (2018) *21* (3): 325-348.
Recepción: Febrero 28, 2017 / Aceptación: Octubre 28, 2018. DOI: 10.12802/relime.18.2134

RESUMO

Esta investigação tinha por finalidade identificar o conhecimento do conteúdo correlação e regressão (comum, avançado e especializado) numa amostra de 65 futuros professores do 3.º ciclo do ensino básico e ensino secundário. Para tal, analisaram-se as suas respostas escritas a diferentes tarefas, dentro de um projeto estatístico baseado em dados das Nações Unidas. Os resultados indicam uma boa capacidade de estimação da correlação e de identificação da função de ajuste (conhecimento comum), correção na ordenação das variáveis explicativas segundo o seu poder preditivo e maior dificuldade em explicar a correlação por relações diferentes da causalidade (conhecimento avançado) e razoável análise da idoneidade didática do projeto (conhecimento especializado). Relatam-se também alguns enviesamentos e o efeito das variáveis de tarefa sobre as respostas.

PALAVRAS CHAVE:

- *Correlação e regressão*
- *Futuros professores*
- *Conhecimento do conteúdo*
- *Avaliação*
- *3.º ciclo do ensino básico e ensino secundário*

RÉSUMÉ

L'objectif de cette recherche était d'identifier la connaissance du contenu (commune, avancé et spécialisée) de la corrélation et la régression de 65 futurs enseignants de l'éducation secondaire et du baccalauréat. Pour atteindre cet objectif, leurs réponses écrites à différentes questions dans un projet statistique basé sur les données des Nations Unies ont été analysées. Leur travail écrit indique une bonne capacité pour estimer la corrélation et identifier la fonction d'ajustement (connaissance commune), la correct identification de l'ordre des variables explicatives selon son pouvoir prédictif, une grande difficulté à expliquer la corrélation par relations autres que la causalité (connaissance avancé), et un raisonnable analyse de la pertinence didactique du projet (connaissance spécialisée). On informe également de quelques biais et l'effet des variables de tâche sur les réponses des enseignants.

MOTS CLÉS:

- *Corrélation et régression*
- *Futurs enseignants*
- *Connaissance du contenu*
- *Évaluation*
- *Enseignement secondaire obligatoire et baccalauréat*

1. Introducción

El objetivo de esta investigación fue identificar algunos elementos del conocimiento matemático común, avanzado y especializado (Ball, Lubienski y Mewborn, 2001) requerido por los futuros profesores de Educación Secundaria y Bachillerato españoles para enseñar la correlación y la regresión. Dicho tema amplía el conocimiento sobre estadística descriptiva unidimensional y permite aplicar las funciones conocidas por el estudiante en una actividad de modelización (Engel y Sedlmeier, 2011; Gea, 2014; Puig y Monzó, 2013). Es también un método ampliamente utilizado en ciencia y tecnología y base de muchas técnicas estadísticas.

A pesar de esta relevancia, la investigación previa advierte de errores y sesgos en la estimación de la correlación (Estepa y Sánchez Cobo, 2001); el más conocido, denominado *correlación ilusoria* (Chapman, 1967), consiste en que los sujetos se guían por sus ideas previas, más que por los datos, al estimar la correlación. Otras investigaciones describen concepciones erróneas (Batanero, Godino y Estepa, 1998; Castro - Sotos, Vanhoof, Van Den Noortgate y Onghena, 2009), como la *concepción causal*, por la que el sujeto equipara correlación con causa - efecto; la *concepción unidireccional*, por la que no se acepta una correlación inversa, o la *concepción local*, consistente en estimar la correlación con sólo una parte de los datos (Estepa, 2007, 2008). Por otra parte, en el análisis de regresión, algunos estudiantes confunden las variables dependiente e independiente (Estepa y Sánchez Cobo, 2003).

La enseñanza de la correlación y regresión en España se realiza en el primer curso de Bachillerato, en las modalidades de Ciencias y de Humanidades y Ciencias Sociales (MECD, 2015). Además, se introduce la construcción e interpretación de diagramas de dispersión en cuarto curso de la Educación Secundaria Obligatoria.

Puesto que una buena enseñanza requiere una preparación adecuada del profesorado, en esta investigación nos hemos interesado por identificar los conocimientos matemáticos (común, avanzado y especializado) de los futuros profesores sobre este tema. En las siguientes secciones se desarrollan los fundamentos y metodología del estudio, se analizan sus resultados y se discuten las implicaciones para la formación de profesores.

2. Fundamentos

2.1. *Marco teórico*

En su análisis del conocimiento requerido por los profesores para tratar con éxito la enseñanza, Shulman (1986) describió el conocimiento del contenido, el conocimiento pedagógico del contenido y el conocimiento del currículo.

Centrándonos únicamente en el conocimiento del contenido matemático, nos basamos en la descomposición que Ball y sus colaboradores (Ball, Lubienski y Mewborn, 2001; Hill, Ball y Schilling, 2008) proponen en su modelo de conocimiento matemático para la enseñanza (MKT):

- *El conocimiento común del contenido* es el que posee una persona (no necesariamente profesor) después de haber estudiado el tema; se trataría del conocimiento que el profesor ha de enseñar a sus alumnos. Por ejemplo, ser capaz de identificar el signo y estimar la intensidad de la correlación o identificar el tipo de función de ajuste, a partir de un diagrama de dispersión.
- *El conocimiento matemático avanzado*, que los autores denominan conocimiento en el horizonte matemático, va más allá del conocimiento común; incluye conocimiento del tema a un nivel superior y las conexiones con otras materias. En nuestro estudio, consideraremos como parte de este conocimiento ordenar una serie de variables explicativas según su poder de predicción de una variable respuesta y diferenciar correlación y causalidad, al explicar la existencia de correlación mediante diferentes tipos de relaciones entre las variables.
- *El conocimiento especializado del contenido* es el que aplica el profesor para articular tareas de enseñanza (Hill, Ball y Schilling, 2008); un ejemplo, según Verdú, Callejo y Márquez (2014), se presenta al examinar y comprender procedimientos de resolución de problemas no usuales. En nuestro estudio, se pidió a los futuros profesores que analizaran la idoneidad epistémica de un proyecto estadístico, para lo cual debieron identificar el contenido matemático utilizado en el mismo.

La idoneidad epistémica de un proceso de estudio es parte de la *idoneidad didáctica* (Godino, Contreras y Font, 2006) que los autores introducen para valorar situaciones de aprendizaje y enseñanza de las matemáticas y tiene los siguientes componentes: idoneidad epistémica, cognitiva, interaccional, mediacional, emocional y ecológica. La idoneidad epistémica se define como la adecuación de los contenidos matemáticos en un proceso de enseñanza respecto a un contenido de referencia, fijado en las directrices curriculares y por el significado del tema dentro de la matemática. Para estudiarla, Godino (2013) propone una serie de descriptores que se presentan en la Sección 6. Como último punto de nuestro trabajo, analizaremos las respuestas escritas de los futuros profesores al utilizar tales descriptores para valorar la idoneidad epistémica de un proyecto estadístico para identificar algunos elementos de su conocimiento especializado del contenido.

2.2. *Antecedentes*

Como se indicó en la introducción, la investigación previa ha descrito numerosas dificultades con el tema, aunque son pocas las investigaciones que han analizado el conocimiento de los profesores sobre correlación y regresión.

El primero de estos trabajos fue realizado por Estepa y sus colaboradores (Batanero *et al*., 1998; Estepa y Batanero, 1995), quienes llevaron a cabo una experiencia de enseñanza (incluyendo la correlación y la regresión) con 22 futuros profesores de educación primaria. Entre otras dificultades, citan la identificación de la correlación inversa, y la confusión entre la variable dependiente e independiente en la regresión. También reportaron estrategias incorrectas en la interpretación de los diagramas de dispersión, por ejemplo, usar sólo parte de los datos. Identifican las siguientes variables relevantes en el estudio del tema: intensidad y signo de la correlación y tipo de función de ajuste. Otras variables que inciden en la dificultad del tema son la existencia o no de teorías previas sobre el tipo de relación en los datos (Estepa y Sánchez-Cobo, 2001) y tipo de relación entre las variables que puede explicar la correlación (Barbancho, 1992).

Casey (2010) usa el marco teórico del MKT para analizar la enseñanza sobre correlación y regresión desarrollada por tres profesores en ejercicio. Realiza un estudio muy completo del conocimiento del contenido, abarcando incluso los aspectos inferenciales, que no tenemos en cuenta en esta investigación. Casey y Wasserman (2015) analizan el conocimiento de 19 profesores en servicio sobre la enseñanza del ajuste informal de una recta de regresión. Sin embargo, los autores no diferencian en sus resultados los componentes común, avanzado y especializado de este contenido, ni tratan de identificar el conocimiento de los profesores, sino sólo el conocimiento matemático teórico que les sería necesario en la enseñanza. Por otro lado, nosotros usaremos tareas no tenidas en cuenta por Casey.

Quintas, Ferreira y Oliveira (2015) analizan el conocimiento pedagógico del contenido (en el modelo MKT) de dos profesoras con amplia experiencia, mientras explican la correlación y la regresión en un curso de secundaria. Las autoras describen ejemplos de cómo las profesoras observadas usaron su conocimiento de la enseñanza y del estudiante en las lecciones desarrolladas. Observaron también errores de las profesoras en el conocimiento común del contenido; más concretamente, ninguna de ellas advirtió la existencia de dos rectas diferentes de regresión y pidieron a los alumnos usar siempre la recta de regresión de Y sobre X, independientemente de cuál fuera la variable que se quisiera predecir.

Utilizamos también el estudio de Arteaga, Batanero, Cañadas y Gea (2012), quienes evalúan los conocimientos de futuros profesores sobre gráficos estadísticos siguiendo el modelo MKT. Como parte de su estudio, utilizaron el análisis de la idoneidad epistémica de un proyecto estadístico realizado por futuros profesores de educación primaria para valorar su conocimiento especializado del contenido. Nosotros emplearemos el mismo método para evaluar el conocimiento especializado sobre la correlación y regresión de los participantes en nuestra investigación. Igualmente, consideramos el trabajo de Puig y Monzó (2013), que incluye la regresión y la correlación como parte de la modelización.

Aunque los trabajos citados fundamentan el nuestro y proporcionan puntos de comparación, ninguno realiza un estudio con futuros profesores de secundaria y bachillerato; tampoco analizan su competencia en la identificación de la función de ajuste, la explicación de la relación entre las variables —diferente a la causalidad— o el análisis de los contenidos sobre correlación y regresión de las tareas por parte de los participantes. Éstas serán aportaciones originales en nuestro trabajo.

3. Método

3.1. *Muestra y contexto*

El estudio se desarrolló con 65 estudiantes españoles que se preparaban para ser futuros profesores dentro del Máster de Formación del Profesorado de Educación Secundaria y Bachillerato, especialidad de Matemática. De dicho conjunto de estudiantes, 56% eran licenciados en Matemáticas o Estadística, y el resto había cursado alguna ingeniería, arquitectura u otras ramas de ciencias. Todos habían estudiado alguna asignatura de estadística, y 57% tenían experiencia docente. Estuvieron divididos en dos grupos de aproximadamente el mismo tamaño, que trabajaron con el mismo profesor y método.

Las tareas propuestas se realizaron dentro de una asignatura de Didáctica de la Matemática, a lo largo de tres sesiones de dos horas cada una. En las dos primeras sesiones, dirigidas a identificar y desarrollar el conocimiento común y avanzado del contenido de la correlación y la regresión, los participantes resolvieron un proyecto estadístico (véase sección 3.2). En la tercera, dedicada a identificar y desarrollar su conocimiento especializado, los estudiantes analizaron la idoneidad didáctica de dicho proyecto. En la sección 3.2 se analizan las tareas propuestas y en las secciones 4 a 6 las respuestas a las mismas.

3.2. *Material y tareas propuestas*

El proyecto estadístico propuesto a los participantes expuso la pregunta "¿cuáles son los factores que más influyen en la esperanza de vida al nacer en un país?", la cual permitió plantear diferentes tareas. Los datos para elaborar los gráficos mostrados a los participantes se tomaron de los utilizados en la elaboración de los Informes sobre Desarrollo Humano por las Naciones Unidas, disponibles en el servidor (http://hdr.undp.org/es/data).

Las variables utilizadas en el proyecto son indicadores internacionales de desarrollo humano y se presentan en la tabla I junto a los criterios que motivaron su selección y tomaron en cuenta los factores que inciden en la dificultad de las tareas de correlación y regresión (Batanero *et al*., 1998; Castro - Sotos, *et al*., 2009; Estepa, 2007; 2008 y Estepa y Sánchez - Cobo, 2001). En primer lugar, se tuvo en cuenta el signo y la intensidad de la correlación, brindando así la posibilidad de analizar correlaciones de signo positivo y negativo y de diferentes grados de intensidad. La relación de dependencia entre las variables no se limitó a la regresión lineal, sino incluyó otros modelos de ajuste con funciones que se estudian en la Educación Secundaria. Igualmente, se consideraron variables para las que la correlación observada entre los datos contradice o confirma las posibles expectativas (teorías previas) de los participantes (Chapman, 1967). Siguiendo a Barbancho (1992), se utilizaron también relaciones que pueden ser explicadas por causa y efecto, y otras debidas a interdependencia o dependencia indirecta.

TABLA I
Criterios utilizados en la selección de las variables explicativas

Variable	r[1]	*Modelo de ajuste*	*Explicación de la dependencia*	*Teorías previas frente a los datos*
Índice de Desarrollo Humano	0,91	Lineal	Interdependencia	Coincide
PIB per cápita	0,61	Logarítmica	Dependencia indirecta	Coincide
Tasa de fertilidad en adolescentes	-0,73	Lineal	Dependencia indirecta	No hay
Tasa de mortalidad en menores de cinco años	-0,92	Exponencial	Causa - efecto	Coincide
Gasto en salud pública	0,38	Polinómica	Causa - efecto	Más débil de lo esperado
Índice de educación	0,78	Lineal	Dependencia indirecta	No hay teoría previa
Población total	0,004	Independencia	Independencia	No hay teoría previa
Población urbana	0,62	No hay modelo	Dependencia indirecta	Contraria

[1] Coeficiente correlación entre la esperanza de vida y la variable en el conjunto de datos.

En la primera sesión, el formador de profesores explicó a los estudiantes la forma en que se recogieron los datos y se aseguró de que se comprendía la utilidad y el método de cálculo de cada variable. Se realizaron también algunas actividades iniciales de interpretación de gráficos y resúmenes estadísticos de la distribución de la esperanza de vida, que no son objeto de este artículo. Una vez que los estudiantes se familiarizaron con las variables, se les proporcionó, sucesivamente, cada una de las tareas del cuestionario mostrado en la figura 1, en un formato con espacio suficiente para incluir cada solución. La última media hora de la primera sesión se dedicó a resolver la tarea 1; las tareas 2 a 4 se resolvieron en la segunda, y la tarea 5, en la tercera. Cada participante las respondió por escrito, individualmente. Una vez recogidas las respuestas a cada una de las tareas, se debatieron las soluciones con el fin de resolver las posibles dificultades y desarrollar el conocimiento matemático de los participantes.

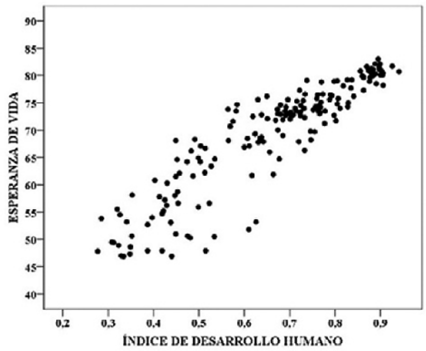
En la tarea 1 se pidió a los participantes estimar el valor absoluto del coeficiente de correlación y asignarle un signo. Esto resultó similar a otras tareas propuestas en las investigaciones sobre comprensión de la correlación (por ejemplo, Estepa, 2007, 2008 y Moritz, 2004). Al igual que la tarea 4 (identificar una función de ajuste), aparece con frecuencia en los textos de Bachillerato. Por tanto, nos posibilitaron identificar una parte del *conocimiento común* del tema de los futuros profesores (y posteriormente desarrollarlo en la discusión conjunta).

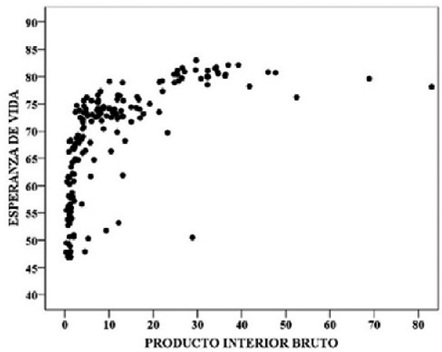
En la tarea 2 se solicitó a los futuros profesores que ordenaran las variables analizadas según su poder de predicción de la variable esperanza de vida, para lo cual los futuros profesores debían observar la mayor o menor dispersión de los puntos del diagrama de dispersión respecto a la tendencia, siendo la bondad de ajuste (o poder de predicción) mayor cuanto menor es la dispersión. La proporción de varianza explicada por la regresión se mide por el coeficiente de determinación. Dicho coeficiente es igual al cuadrado del coeficiente de correlación, en caso de dependencia lineal. En la tarea 3 se pidió a los participantes analizar si la correlación observada en cada caso era una relación causal, y se buscara, si las hubiera, otras posibles explicaciones de correlación. Estas tareas son algo más complejas de lo que se incluye habitualmente en la enseñanza, pero el profesor debe saber realizarlas. Las utilizamos para valorar su *conocimiento avanzado* del contenido.

La tarea 5 es específica del trabajo del profesor, quien ha de ser capaz de valorar la idoneidad de cualquier actividad planteada a sus alumnos; para resolverla ha de identificar los contenidos matemáticos implicados en el proyecto. Siguiendo a Verdú, Callejo y Márquez (2014), se utilizaron los resultados de este análisis para evaluar el *conocimiento especializado* de los participantes del contenido.

Una vez recogido el informe con las respuestas a las tareas que entregó cada participante, se realizó un estudio de dichas respuestas que se recoge en los siguientes apartados.

En las gráficas siguientes se representan los diagramas de dispersión de la esperanza de vida al nacer en función de ocho variables explicativas:[1]





Utilizando cada una de estas gráficas, resuelve las siguientes tareas:

1. Asigna a cada gráfica una puntuación entre 0 (si no hay relación) y 1 (máxima intensidad de la relación), según la intensidad de esta relación. Asigna también un signo (+ o -), según la relación sea directa o inversa.
2. Ordena las ocho variables explicativas del proyecto, según su potencia (mayor a menor) para predecir mejor la esperanza de vida.
3. Indica cuáles de las variables explicativas tienen una relación causal con la esperanza de vida y explica por qué.
4. ¿Podríamos para alguna de estas variables hallar una función matemática para predecir, aproximadamente, esperanza de vida a partir de la otra variable? Indica para cada gráfica un tipo de función que podría usarse con esta finalidad. En la siguiente tabla se presentan los componentes y descriptores de la idoneidad epistémica de un proceso de estudio de las matemáticas; utiliza esta tabla para valorar la idoneidad epistémica del proyecto trabajado en las sesiones anteriores.

[1] Se proporcionaron un total de ocho diagramas de dispersión en los que se representaba la variable esperanza de vida en función de cada una de las ocho variables explicativas.

Figura 1. Cuestionario dado a los participantes

4. Conocimiento común del contenido

4.1. *Estimación de la correlación a partir del diagrama de dispersión*

En primer lugar, se analizaron el valor absoluto y el signo del coeficiente de correlación que los futuros profesores asignaron a cada una de las gráficas (tarea 1). En la tabla II se proporcionan los resultados globales: media del valor absoluto estimado para el coeficiente de correlación en las diferentes variables y porcentaje de participantes que asignó un signo correcto. Se acompaña de los valores reales del coeficiente de correlación en los datos (segunda columna) para una mejor interpretación de los resultados.

Observamos que el signo de la correlación en los datos fue identificado fácilmente. En el caso de independencia (población total), la mayoría indicó correctamente que la independencia supone ausencia de signo. Sin embargo, algunos futuros profesores no respondieron o no identificaron correctamente el signo para esta variable o para el gasto en salud pública, que es la única variable con intensidad baja. Globalmente, los resultados son mucho mejores que los proporcionados con el mismo tipo de tarea por otros estudiantes (e.g., Estepa, 2007, 2008 y Moritz, 2004).

Las estimaciones de la intensidad del coeficiente son también buenas, pues los valores medios en la muestra de futuros profesores se aproximan, en general, a la correlación observada en los datos. La precisión de la estimación es mayor para las correlaciones altas, y dentro de ellas, de menor calidad para las negativas que para las positivas, lo que coincide con los resultados expuestos por Estepa (2007), Sánchez Cobo, Estepa y Batanero (2000) y Moritz (2004).

TABLA II

Valor absoluto estimado y signo asignado al coeficiente de correlación para cada variable explicativa

Variable explicativa	*Valor absoluto estimado*			*Porcentaje de futuros profesores que identifican el signo*
	Valor r	*Media*	*Desviación típica*	
Índice de Desarrollo Humano	0,91	0,88	0,08	98,5
PIB per cápita	0,61	0,71	0,18	95,4
Tasa de fertilidad en adolescentes	-0,73	0,52	0,22	93,8
Tasa de mortalidad en menores de cinco años	-0,92	0,82	0,23	96,9
Gasto en salud pública	0,38	0,39	0,23	83,1
Índice de educación	0,78	0,68	0,18	96,9
Población total	0	0,05	0,14	80,8
Población urbana	0,62	0,39	0,21	92,3

Los futuros profesores estimaron un valor medio del coeficiente de correlación cercano a cero en el caso de independencia (población total). En este punto, los resultados son mejores que en el estudio de Estepa (2008), en el que sólo 72% de los estudiantes identificó la independencia perfecta en un diagrama de dispersión en el que asignaron un coeficiente de correlación cercano a cero.

Se puede observar cierta influencia de las teorías previas sobre la menor precisión de la estimación de la correlación, cuando los datos se muestran en contra de esas teorías (población urbana). Igualmente se aprecia una sobreestimación de la correlación en el caso del PIB per cápita, para el que los participantes esperaban una correlación fuerte. Estos dos resultados se explican por el fenómeno de la correlación ilusoria (Chapman, 1967), es decir, algunos futuros profesores basaron su estimación de la correlación atendiendo, de algún modo, a expectativas o esquemas propios referidos a las variables que estudiaban (se confirmó este hecho con la puesta en común de las respuestas al finalizar la tarea). Por otra parte, en caso de las correlaciones negativas (tasa de fertilidad en adolescentes, tasa de mortalidad), encontramos una estimación a la baja, lo que coincide con lo expuesto en investigaciones previas (e.g. Estepa, 2008).

4.2. *Reconocimiento de la función de ajuste*

En la tabla III presentamos la función de ajuste sugerida por los futuros profesores para cada variable explicativa trabajada en el proyecto, a la que se añadió en la segunda columna el tipo de función de ajuste más adecuada a los datos. Se identificaron correctamente los tipos de funciones de ajuste convenientes, sobre todo para las variables índice de desarrollo humano, índice de educación, PIB per cápita y tasa de fertilidad en adolescentes, todas (salvo el PIB), con función de ajuste lineal.

En general, los participantes reconocieron bien la forma de la función lineal y logarítmica, y más de 50% la exponencial, con lo que mostraron su alta preparación matemática; incluso en muchos casos se indicó el signo de los parámetros, su ecuación y el tipo de crecimiento de una variable respecto a la otra. En la variable población urbana, los participantes advirtieron la alta dispersión de los datos y lo indicaron en sus respuestas, y además sugirieron que no sería muy preciso el resultado de la predicción si utilizaban una función de ajuste a los datos. El alto índice de omisión de respuesta para esa variable se debió a que algunos participantes no asignaron una función porque no consideraban que hubiera una adecuada (así lo manifestaron en la puesta en común de respuestas a la tarea). Este efecto también se presentó con la variable población total (tabla II), para la que un alto porcentaje de participantes identificó correctamente la independencia.

TABLA III
Porcentaje de participantes, según la función de ajuste considerada en cada variable

Variable explicativa	*Tipo de función prevista*	*Correcta*	*Lineal*	*Otra*	*No responde*
Índice de Desarrollo Humano	Lineal	96,9		1,5	1,5
PIB per cápita	Logarítmica	86,2		10,8	3,1
Tasa de fertilidad en adolescentes	Lineal	83,1			16,9
Tasa de mortalidad en menores de cinco años	Exponencial	52,3	21,5	24,6	1,5
Gasto en salud pública	Polinómica	44,6	6,2	9,2	40
Índice de educación	Lineal	96,9			3,1
Población total	Independencia	24,6	1,5		73,8
Población urbana	Lineal	53,8		9,2	36,9

Como resumen de este apartado, se observó un muy buen "conocimiento común" sobre correlación y regresión en esta muestra de futuros profesores que resolvieron con éxito las tareas.

5. Conocimiento avanzado del contenido

5.1. *Orden de fiabilidad en la predicción*

Para analizar los resultados de la tarea 2, se consideraron parcialmente correctas las respuestas que asignaron un orden de predicción que difirió en una unidad del orden correcto. En la tabla IV se presentan la media y la desviación típica del orden asignado por los futuros profesores y el porcentaje de participantes, según su grado de corrección en la tarea. Se añade una columna con los valores correctos del orden de las variables, según su poder de predicción, para facilitar la lectura de los resultados.

Los futuros profesores, en general, ordenaron de modo correcto o parcialmente correcto las variables según su poder para predecir la esperanza de vida. Las respuestas se distribuyeron en torno al valor correcto, como se deduce de la proximidad de la media del orden asignado y del orden de predicción en los datos, así como la baja desviación típica. Las tres variables que mejor predicen la esperanza de vida, tasa de mortalidad, índice de desarrollo humano y PIB per cápita, en ese orden, se suelen identificar correctamente o en forma parcialmente correcta, aunque para el PIB per cápita aparezca mayor variabilidad de órdenes asignados. Igualmente encontramos una buena asignación del orden de predicción en la población total y la tasa de fertilidad en adolescentes, para las que se obtuvo la mayor proporción de respuestas correctas.

Observamos mayor dificultad en las asignaciones de orden para correlaciones menos intensas, como el gasto en salud pública, pero en general, son bastante precisas. Además, confirmamos la buena capacidad de los futuros profesores para identificar la independencia, ya que la mayor proporción de respuestas correctas se refirieron a la asignación de la población total al último orden para predecir la esperanza de vida.

TABLA IV
Media y desviación típica del orden de predicción asignado
y porcentaje de participantes según corrección de la respuesta

Variable	*Orden de predicción según datos*	*Orden asignado*		*Grado de corrección (porcentaje de participantes)*			
		Media	*D. Típica*	*Correctas*	*Parcialmente correctas*	*Incorrectas*	*No responde*
Índice de Desarrollo Humano	2	1,6	0,71	30,8	67,7		1,5
PIB per cápita	3	3,3	1,44	23,1	46,1	29,2	1,5
Tasa de fertilidad en adolescentes	5	4,8	1,09	50,8	29,2	18,5	1,5
Tasa de mortalidad en menores de cinco años	1	1,9	1,07	41,5	36,9	20	1,5
Gasto en salud pública	7	5,4	1,50	26,2	32,3	38,5	3,1
Índice de educación	4	4	1,21	38,5	35,4	24,6	1,5
Población total	8	7,5	0,95	70,8	16,9	9,2	3,1
Población urbana	6	6,5	1,04	24,6	55,4	18,5	1,5

5.2. *Orden de fiabilidad en la predicción*

Previo al desarrollo de la tarea 3, el formador indicó a los futuros profesores que su finalidad era ayudarles a diferenciar correlación y causalidad, lo que es importante en situaciones tales como de diagnóstico médico o de evaluación. Se pidieron ejemplos de situaciones causales y no causales en las que aparece correlación; entre otras, algún participante aportó: "la talla o peso de un padre, sabiendo la talla o peso del hijo adulto"; variables que están claramente correlacionadas, pero la posible relación causal iría de padre a hijo, y no al contrario. Se explicó a los participantes los tipos de explicaciones de la correlación sugeridos por Barbancho (1992) con ejemplos que clarificasen las diferentes categorías.

En nuestro análisis previo (tabla I), la relación sería de tipo causal unilateral sólo para las variables tasa de mortalidad y gasto en salud pública, siendo la correspondiente al PIB per cápita y tasa de fertilidad en adolescentes de dependencia indirecta, la del índice de desarrollo humano de interdependencia, el índice de educación y población urbana dependencia indirecta y la población total independencia.

Los resultados de la tarea se presentan en la tabla V, en donde se observa mayor porcentaje de reconocimiento de la causalidad en la variable tasa de mortalidad que en gasto en salud pública. También se asignó con gran frecuencia causalidad al índice de desarrollo humano, aunque en este caso la relación es de interdependencia, pues la esperanza de vida se incluye en el cálculo de este índice, como así se hizo saber en la presentación de las variables a los participantes. Hay una proporción variable de estudiantes que asignaron incorrectamente una relación de causalidad en las otras variables, como ocurrió con el PIB per cápita, que además, en este caso, coincidió con sus teorías previas, con lo que pudo presentarse en algunos la concepción causal de la asociación (Estepa y Batanero, 1996).

Los argumentos utilizados por los futuros profesores para justificar la causalidad se han clasificado según las categorías que se resumen a continuación, con ejemplos tomados de las respuestas de los participantes, cuyas iniciales indicamos entre paréntesis. Entre ellos hemos encontrado los siguientes argumentos correctos:

- *Influencia en la variable respuesta*. Cuando se justifica la causalidad por la influencia directa de la variable explicativa sobre la esperanza de vida, por ejemplo: "Si gastas más en salud e investigación se encuentran curas a nuevas enfermedades y por tanto la esperanza de vida aumenta" (GM).
- *Modo en que se calcula la esperanza de vida*. En algunos casos se justifica la causalidad por el método de cálculo de la esperanza de vida; generalmente se aplica correctamente para la variable tasa de mortalidad, como se muestra en el siguiente ejemplo: "Es causal, pues a menor mortalidad infantil, mayor será el índice de esperanza de vida puesto que crecerá la media" (CL).

También se han identificado algunos argumentos incorrectos para justificar una relación causal entre las variables:

- *Crecimiento/decrecimiento*. Se identifica la relación de tipo causal con el crecimiento (decrecimiento) conjunto de la variable explicativa y la esperanza de vida. Aunque en algunas gráficas se presentan estas dos propiedades, el argumento no es correcto, en general, pues una causa puede actuar sobre un efecto en forma no lineal, como se indica en el siguiente ejemplo: "Cuanto más avances tiene una población o mayor desarrollo humano posee, mayor será la esperanza de vida" (PP).

También se aplica este argumento erróneamente, al intercambiar la variable explicativa con la variable explicada, por ejemplo: "Nos indica que cuanto menor sea la esperanza de vida mayor será la mortalidad" (ChC).

- *Existencia de terceras variables*. Cuando se justifica la causalidad por el efecto de otras variables que influyen sobre las dos que se analizan, sin diferenciar causalidad de relación indirecta, por ejemplo: "Mientras más alto sea el PIB per cápita por persona, más bienestar se tendrá y, por tanto, la esperanza de vida mejorará; es una relación causal" (LT).

En algunos casos se utiliza erróneamente este tipo de argumentación, al justificar una esperanza de vida baja por una superpoblación, como indica CM: "A mayor fecundidad de la población, más población habrá. Menor será la esperanza de vida por superpoblación", o intercambiar la variable explicativa con la variable explicada, por ejemplo, PG: "Va directamente ligado con el índice de desarrollo humano, pues cuanto más desarrollo tiene un país, más escolaridad, más educación".

- *Correlación*. Cuando se identifica explícitamente correlación y causalidad, lo que implicaría una concepción causal de la correlación (Batanero *et al*., 1998), como se muestra en el siguiente ejemplo: "El índice de correlación está cercano a 1, así que las variables son causa y efecto" (MIH).

En la tabla V se presenta el porcentaje de futuros profesores que sugirieron que la relación de cada una de las variables explicativas con la esperanza de vida era causal (segunda columna). Observamos que las variables que se citan con mayor frecuencia fueron el índice de desarrollo humano y la tasa de mortalidad, seguida del PIB per cápita. Por tanto, se identificó correctamente la tasa de mortalidad como relación causal con la esperanza de vida, pero no el gasto en salud pública y se supusieron causales relaciones que no lo eran. Por otra parte, y como ocurrió con la estimación y asignación del coeficiente de correlación, la población total se consideró por todos los participantes como independiente de la esperanza de vida.

El resto de las columnas de la tabla V descompone el porcentaje de los participantes que asumieron una relación causal en cada variable, según la explicación dada a esa relación. El principal argumento de la supuesta relación causal por los futuros profesores fue la existencia de terceras variables que, al afectar o ser afectadas por la variable explicativa, a su vez influían en la esperanza de vida. En consecuencia, algunos futuros profesores podrían no diferenciar la relación causal de la dependencia indirecta. El segundo argumento más frecuente fue el del crecimiento/decrecimiento conjunto de las variables. Como hemos indicado, esta explicación podría ser aceptable, aunque no siempre. Siguió en importancia la influencia directa de la variable explicativa sobre la esperanza de vida y el cálculo (razones correctas). Por último, fueron pocos los casos que, explícitamente, identificaron correlación y relación causal, principalmente entre variables para las que la relación estaba en consonancia con sus teorías previas, sobre todo en el índice de desarrollo humano y el Producto Interior Bruto.

TABLA V

Porcentaje de participantes que asumieron una relación causal de cada variable explicativa con la esperanza de vida y porcentaje de justificaciones correctas e incorrectas de la relación causal

Variable	*Asumen relación causal*	*Justificación de la relación causal*				
		Correcta		*Incorrecta*		
		Influencia	*Cálculo*	*Crecimiento*	*Terceras variables*	*Correlación*
Índice de Desarrollo Humano	89,2	7,7		27,7	46,2	7,7
PIB per cápita	56,9	4,6		7,7	40	4,6
Tasa de fertilidad en adolescentes	13,8	1,5	1,5	3,1	7,7	
Tasa de mortalidad en menores de cinco años	80	10,8	26,2	35,4	4,6	3,1
Gasto en salud pública	32,3	12,3		3,1	15,4	1,5
Índice de educación	33,8	15,4		6,2	10,8	1,5
Población total						
Población urbana	3,1	1,5		1,5		

En resumen, el conocimiento avanzado del contenido correlación y regresión fue bueno en la tarea relacionada con ordenar las variables explicativas en función de su poder de predicción sobre la esperanza de vida. Respecto a la diferenciación entre correlación y causalidad, el conocimiento mostrado fue menor, pues no se identificaron algunas relaciones causales, mientras se supusieron otras que no eran tales. Además, se observaron participantes que identificaron la causalidad con el crecimiento/decrecimiento conjunto de las variables, la confundieron con la dependencia indirecta o bien la identificaron con la correlación, aunque en pocos casos.

6. Conocimiento especializado del contenido

Para valorar este componente del conocimiento matemático de la enseñanza se proporcionó a los profesores la pauta de análisis de la idoneidad didáctica, adaptada de Godino (2013), y utilizada por Arteaga *et al.* (2012), y se les pidió que la aplicasen para valorar el proyecto estadístico en el que habían trabajado las sesiones anteriores. Su aplicación requería que el futuro profesor reconociera la presencia de los distintos tipos de objetos matemáticos en ese proyecto y valorara la pertinencia de cada uno. Respecto al componente de la idoneidad epistémica, los futuros profesores respondieron por escrito a cada una de las nueve cuestiones planteadas (tabla VI).

TABLA VI
Pauta de análisis de la idoneidad epistémica proporcionada a los participantes

		Descriptores de la idoneidad epistémica
Situaciones - problemas	D1.	¿Te parece que los problemas que se presentan en el proyecto son útiles para contextualizar, aplicar y ejercitar los contenidos de correlación y regresión? ¿Por qué?
	D2.	¿Se proponen situaciones para que el alumno de Bachillerato invente nuevos problemas?
Lenguaje matemático	D3.	¿Se usan diferentes modos de expresión matemática (verbal, gráfica, simbólica...), traducciones y conversiones entre dichas expresiones?
	D4.	¿Hay actividades de representación e interpretación del lenguaje matemático?
Conceptos, propiedades, procedimientos	D5.	¿Qué conceptos, propiedades y procedimientos sobre la correlación y la regresión habría que explicar previamente para desarrollar este proyecto?
	D6.	¿Se proponen tareas en las que los alumnos tengan que reconocer definiciones propiedades o procedimientos?
Argumentos	D7.	¿Son las explicaciones, comprobaciones y demostraciones apropiadas para Bachillerato?
	D8.	¿Se incluyen situaciones en las que el alumno tenga que argumentar?
Relaciones	D9.	¿Se relacionan y conectan entre sí los contenidos matemáticos (problemas, definiciones, propiedades, etcétera)?

Para realizar esta tarea, los participantes debían ser capaces de reconocer los conceptos, propiedades y procedimientos, lenguajes usados en el proyecto, los tipos de justificaciones, relaciones, así como las diferentes situaciones - problemas implicados. Es decir, debieron identificar las configuraciones epistémicas de objetos y procesos matemáticos requeridas en el proceso de estudio llevado a cabo, y compararlas con las pretendidas en la enseñanza y dictaminadas por las orientaciones curriculares (Godino, Bencomo, Font y Wilhelmi, 2006).

Para evaluar la respuesta a cada pregunta se asignó a cada participante un nivel y se atendió al conocimiento mostrado en la aplicación del descriptor. Estos niveles desarrollan los propuestos por Arteaga *et al.* (2012), quien utilizó únicamente tres niveles para evaluar el conocimiento especializado sobre gráficos estadísticos de futuros profesores de educación primaria; los dos primeros coinciden con los nuestros, el tercero lo hemos desglosado en tres niveles en nuestro trabajo. Añadimos un primer nivel "0" cuando no se alcanza el primero. A continuación se describen los niveles de análisis que son comunes a todos los descriptores y se incluyen algunos ejemplos tomados de las respuestas de los participantes para clarificarlos.

- *Nivel 0.* El futuro profesor deja en blanco la respuesta a un descriptor, no habiendo comprendido la pregunta, o no siendo capaz de aplicarla en el contexto del proyecto.
- *Nivel 1.* Responde a la pregunta, aunque el participante se limita a copiar casi literalmente el descriptor, sin aplicarlo al proyecto analizado.
- *Nivel 2.* Responde a la pregunta, aplicando el descriptor, pero no se centra específicamente en el proyecto desarrollado, sino en aspectos anecdóticos o no estrictamente matemáticos. Por ejemplo, en lugar de valorar los contenidos matemáticos se fija en el contexto utilizado (esperanza de vida). También consideramos en este nivel a los futuros profesores que aplican una parte del descriptor correctamente y otra incorrectamente, por no haberlo interpretado adecuadamente.

Creo que sí, porque al tomar los datos de la página *web* de la ONU, trabajamos en el contexto público que los alumnos están acostumbrados a ver en los medios de comunicación (ME, descriptor D1).

Sí, ya que se pueden hacer más deducciones y los conceptos tienen más sentido y se entienden mejor (EGO; descriptor D7).

- *Nivel 3.* El futuro profesor aplica el descriptor a contenidos matemáticos del proyecto y a la forma en que se trabajó con el proyecto en el aula, pero la aplicación es incompleta, porque se centra en un aspecto no recogido por el descriptor. Por ejemplo, se le pide valorar las situaciones - problema propuestas en el proyecto, y en su lugar valora una propiedad.

Sí, porque la nube de puntos representa el grado de correlación entre dos variables (ChC, descriptor D1).

Sí, son conceptos básicos que deben saber de años anteriores, no sólo en Bachillerato (media, varianza y desviación típica, por ejemplo) (CL; descriptor D7).

– *Nivel 4.* Aplica correctamente el descriptor al utilizar contenidos matemáticos del trabajo en el proyecto en forma consistente con la pregunta, pero razona mediante un único ejemplo.

Sí, por ejemplo, el cuadro de datos dado en la clase anterior de la media, moda, mediana… Para saber las relaciones entre ellas deben saber su significado (CM; descriptor D6).

Además, cuando nos dan la nube de puntos tenemos que interpretar si hay correlación o no (JFM; descriptor D4).

– *Nivel 5.* El futuro profesor hace una aplicación correcta y consistente del descriptor y utiliza contenidos matemáticos en forma consistente con la pregunta y razona a partir de dos o más ejemplos. Sería idéntico, pero más completo que el caso anterior.

Sí. Por ejemplo, en la actividad en la que se habla de qué variables sirven para predecir mejor la esperanza de vida. O en las actividades de ampliación cuando se pide estudiar "otras variables que te interesen e influyan en el desarrollo humano" (ME, descriptor D2).

Sí, al tener que asignar una relación positiva - negativa, fuerte - débil e incluso el coeficiente de correlación, se le está pidiendo que reconozca los conceptos relacionados con esto. También lo es la tarea de ajustar nubes de puntos con un tipo de función (lineal, exponencial, logarítmica). (ATL; descriptor D6).

Para resumir los resultados de esta tarea, se han calculado las puntuaciones medias obtenidas por el total de participantes en cada pregunta planteada (tabla VII). Los resultados son buenos, ya que la media global (3.6) supera en un punto el nivel medio teórico (2.5), y es mucho mejor que el mostrado por los futuros profesores de educación primaria en el trabajo de Arteaga *et al.* (2012) (puntuación media 1.11). Por lo tanto, los participantes muestran su capacidad para identificar los objetos matemáticos implícitos, o que se han hecho explícitos en una cierta situación de enseñanza, lo que sería parte de su conocimiento especializado del contenido, según Hill, Ball y Schilling (2008). Estos resultados son coherentes con los anteriores debido a la relación entre el conocimiento especializado del contenido y el conocimiento común, y al hecho de que el conocimiento avanzado sobre el tema también fue razonable.

TABLA VII
Medias y desviaciones típicas en los descriptores de la idoneidad epistémica

Descriptor	*Contenido*	*Media*	*D, Típica*
D1	Problemas contextualizados	3,2	1,3
D2	Invención de nuevos problemas	2,7	1,5
D3	Variedad de lenguaje	4,3*	1,3
D4	Interpretación / traducción	3,3	1,2
D5	Conocimientos previos requeridos	2,8	1,2
D6	Tareas de reconocimiento de objetos	4,2*	1,1
D7	Nivel adecuado argumentación	3,5	1,3
D8	Argumentación por el alumno	4,2*	1,1
D9	Relaciones entre objetos	4,4*	1,1
Total		3,6	1,4

* Media (en la aplicación del descriptor) superior a 4.

TABLA VIII
Ejemplos de conocimientos especializados sobre la correlación y regresión en los futuros profesores

Objetos matemáticos		*Ejemplos de conocimientos especializados*
Situaciones - problema	1.1.	Identifica ejemplos de problemas en los que se contextualiza la correlación y la regresión en el proyecto, como la búsqueda de la variable que mejor explique la variabilidad de la esperanza de vida.
	1.2.	Identifica situaciones en que los estudiantes tengan que proponer o modificar problemas relacionados con la correlación y la regresión; en particular, el análisis de otras variables dependientes en el fichero de datos.
Lenguaje matemático	1.3.	Reconoce que los diagramas de dispersión, las ecuaciones de las funciones de ajuste y los términos en el proyecto son distintos modos de expresión matemática ligados a la correlación y la regresión.
	1.4.	Reconoce las representaciones gráficas que permiten visualizar mejor la correlación y la regresión; por ejemplo, ve la necesidad de un cambio de escala en los datos.
	1.5.	Identifica situaciones de interpretación y traducción de representaciones de la correlación, como la búsqueda de un coeficiente de correlación o la estimación de éste, a partir del diagrama de dispersión.
Conceptos, propiedades, procedimientos	1.6.	Reconoce los conceptos, propiedades y procedimientos asociados a la correlación y a la regresión que el alumno ha de aplicar al resolver cada problema, relacionando, entre otros, la dependencia estadística y funcional, la intensidad y el sentido, la correlación, el ajuste y el modelo.
	1.7.	Reconoce cuáles de ellos han de ser explicados previamente y cuáles pueden ser construidos por el alumno con la ayuda del profesor.
	1.8.	Identifica y propone nuevas tareas en las que el alumno ha de reconocer o recordar conceptos, propiedades y procedimientos asociados a la correlación y a la regresión.
Argumentos	1.9.	Identifica argumentaciones adecuadas e inadecuadas para el nivel del estudiante para justificar una solución o una propiedad.
	1.10.	Identifica situaciones que requieran una argumentación por parte del estudiante, como por ejemplo las referidas a la justificación de situaciones causales y no causales en el proyecto.
Relaciones	1.11.	Identifica relaciones entre objetos matemáticos en el contexto del proyecto, como la relación entre la dirección de la dependencia y el signo del coeficiente de correlación o la dispersión de la nube de puntos y la intensidad de la correlación.
	1.12.	Es capaz de proponer nuevas tareas en que los estudiantes deban relacionar diferentes objetos matemáticos.

Otra aportación del análisis es la identificación, a partir de las respuestas de los estudiantes, de ejemplos de conocimientos especializados requeridos por parte del profesor sobre los distintos objetos matemáticos presentes en el estudio de la correlación y la regresión que mostramos en la tabla VIII. Esta tabla se ha construido con ejemplos específicos de conocimientos manifestados por los participantes en las respuestas del análisis de la idoneidad epistémica (niveles 4 y 5), algunas de las cuales hemos presentado a lo largo de la sección.

7. Discusión e implicaciones para la formación de profesores

La principal contribución de la investigación reseñada es la identificación de conocimientos matemáticos (común, avanzado y especializado) de la correlación y la regresión en una muestra de futuros profesores de Educación Secundaria y Bachillerato que complementa los escasos antecedentes sobre el tema.

Los resultados muestran buenos conocimientos de los participantes sobre el significado y los tipos de correlación, así como buena estimación del valor absoluto y el signo de la correlación a partir de diagramas de dispersión e identificación de la tendencia de los datos en el caso de ajuste lineal, así como de tendencia logarítmica, exponencial o polinómica por un porcentaje alto de futuros profesores. Además, los participantes en este estudio mostraron mejor identificación de la independencia estadística en diagramas de dispersión y estimación de su correlación que los participantes en estudios previos. Todo ello indica un buen conocimiento común del contenido.

Los futuros profesores, en general, ordenan de modo correcto o parcialmente correcto las variables según su poder para predecir la esperanza de vida. Fue más difícil aceptar explicaciones de la correlación diferentes de las causales, pero, en general, los futuros profesores mostraron un conocimiento avanzado razonable del tema. Igualmente fue bueno su análisis de la idoneidad epistémica del proyecto, pues el nivel medio alcanzado (en una escala de 5 puntos) se sitúa en todos los descriptores de la pauta de análisis sobre el valor medio teórico (2.5). Otras aportaciones de la investigación son la propuesta de niveles para valorar la competencia de análisis de la idoneidad didáctica por parte de los futuros profesores, que amplía la de Arteaga *et al.* (2012) y la identificación de ejemplos de conocimiento especializado sobre la correlación y la regresión a partir de las respuestas de los participantes.

Por la limitación de espacio, en este trabajo sólo se describen resultados de las tareas que se muestran en la figura 1, cuyas soluciones se discutieron una vez realizadas con los futuros profesores y posteriormente se ampliaron con otras, con objeto de reforzar su conocimiento sobre el tema. Para completar las nuevas tareas se proporcionaron a los participantes los datos empleados en la elaboración de los diagramas de dispersión en una hoja Excel (193 países con datos recogidos de nueve variables). Usando estos datos, se trabajó colectivamente con la hoja Excel para identificar la ecuación de la función de regresión de la esperanza de vida respecto a cada una de las variables explicativas propuestas. Se realizaron actividades de interpretación de los parámetros de las funciones de regresión y se analizaron los valores del coeficiente de determinación como indicador de la bondad de ajuste de cada modelo. Todos estos resultados se compararon con las respuestas de los participantes en las tareas 1 a 4.

Las tareas planteadas resultaron interesantes a los futuros profesores que pudieron razonar con datos reales sobre variables relevantes en la sociedad actual y materializar la distinción entre distintos tipos de correlación, principalmente la causalidad y la dependencia indirecta (*conocimiento avanzado*). Las variables seleccionadas para trabajar en el proyecto estadístico les permitieron observar diversos aspectos que influyen en la comprensión del tema (*conocimiento especializado*); la determinación del signo e intensidad de la correlación entre las variables, e identificación de funciones más allá de la dependencia lineal, permitió trabajar el *conocimiento común*. Al trabajar con fuentes internacionales aumentó el interés de los participantes y su reconocimiento de la utilidad de la estadística, lo que mejoró sus actitudes. La actividad de valoración de la idoneidad epistémica también mejoró su *conocimiento especializado.*

Además, se les mostró un ejemplo del trabajo con proyectos que pueden utilizar con sus futuros alumnos para recorrer un estudio estadístico completo: problema, datos, análisis y conclusiones (Batanero y Borovcnick, 2016). Proporciona igualmente una actividad de modelización en la que el interés se centra en analizar la dependencia y, en caso de ser alta, encontrar el modelo de ajuste más adecuado (lineal, logarítmico, etc.). Precisamente Puig y Monzó (2013) incluyen la regresión y la correlación como una de las lecciones en su propuesta de enseñanza de la modelización. Con esta actividad el alumno puede comprender que, como explica Henry (1997), “un modelo es una interpretación abstracta, simplificada e idealizada de un objeto del mundo real, de un sistema de relaciones o de un proceso evolutivo que surge de una descripción de la realidad” (p. 78). Las actividades permiten también analizar la diferencia entre el modelo (ecuación de regresión) y la realidad reflejada en los datos bivariantes. Asimismo, traducir los resultados del trabajo matemático realizado con el modelo a la realidad modelizada.

Estos últimos puntos forman parte del conocimiento didáctico del tema, que era escaso en los futuros profesores de la muestra, pues casi ninguno había trabajado previamente con datos reales con la regresión utilizando Excel, ni el método de proyectos, cuya importancia en la modelización resaltan Puig y Monzó (2013). Desconocían asimismo las investigaciones didácticas sobre el tema, que fueron discutidas con ellos a la vez que se debatieron las soluciones. Nuestra reflexión final es que la mejora de la enseñanza de la correlación y la regresión depende de la formación de los profesores, que puede mejorarse con actividades como las descritas en este trabajo.

Reconocimiento

Trabajo realizado en el marco de los proyectos EDU2013-41141-P (MINECO), EDU2016-74848-P (AEI, FEDER) y FCT-16-10974 (FECYT) y grupo de investigación FQM126 (Junta de Andalucía).

Referencias bibliográficas

Arteaga, P., Batanero, C., Cañadas, G. R. y Gea, M. (2012). Evaluación del conocimiento especializado de la estadística en futuros profesores mediante el análisis de un proyecto estadístico. *Educaçao Matemática Pesquisa*, *14*(2) 279-297. Disponible en: https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/9317

Ball, D. L., Lubienski, S. T., & Mewborn, D. S. (2001). Research on teaching mathematics: The unsolved problem of teachers' mathematical knowledge. En V. Richardson (Ed.), *Handbook of research on teaching* (pp. 433-456). Washington, DC.: American Educational Research Association.

Barbancho, A. G. (1992). *Estadística elemental moderna*. Barcelona: Ariel.

Batanero, C. & Borovcnik, M. (2016). *Statistics and probability in high school*. Londres: Sense Publishers [https://doi.org/10.1007/978-94-6300-624-8].

Batanero, C., Godino, J. D., y Estepa, A. (1998). Building the meaning of statistical association through data analysis activities. En A. Olivier & K. Newstead, (Eds.), *Proceedings of the 22nd Conference of the Internacional Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 221-236). Stellembosch, South Africa: Universidad de Stellenbosh.

Casey, S. A. (2010). Subject matter knowledge for teaching statistical association. *Statistics Education Research Journal*, *9*(2), 50-68. Disponible en https://iase-web.org/documents/SERJ/SERJ9(2)_Casey.pdf

Casey, S. A. y Wasserman, N. H. (2015). Teachers' knowledge about informal line of best fit. *Statistics Education Research Journal*, *14*(1), 8-35. Disponible en https://iase-web.org/documents/SERJ/SERJ14(1)_Casey.pdf

Castro-Sotos, A. E., Vanhoof, S., Van Den Noortgate, W. & Onghena, P. (2009). The transitivity misconception of Pearson's correlation coefficient. *Statistics Education Research Journal*, *8*(2), 33-55. Disponible en https://iase-web.org/documents/SERJ/SERJ8(2)_Sotos.pdf

Chapman, L. J. (1967). Illusory correlation in observational report. *Journal of Verbal Learning and Verbal Behavior*, *6*(1), 151-155.

Engel, J. & Sedlmeier, P. (2011). Correlation and regression in the training of teachers. En C. Batanero, G. Burrill & C. Reading (Eds.), *Teaching statistics in school mathematics-challenges for teaching and teacher education: A Joint ICMI/IASE study* (pp, 247-258). New York: Springer. [https://doi.org/10.1007/978-94-007-1131-0_25]. Disponible en https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-94-007-1131-0_25

Estepa, A. (2007). Caracterización del significado de la correlación y regresión de estudiantes de Educación Secundaria. *Zetetiké*, *15*(28), 119-151.

Estepa, A. (2008). Interpretación de los diagramas de dispersión por estudiantes de Bachillerato. *Enseñanza de las Ciencias, 26,* 257-270. Disponible en https://www.raco.cat/index.php/Ensenanza/article/download/118098/297686

Estepa, A. y Batanero, C. (1995). Concepciones iniciales sobre la asociación estadística. *Enseñanza de las Ciencias, 13*(2), 155-170. Disponible en https://www.raco.cat/index.php/ensenanza/article/viewFile/21404/93364

Estepa, A. y Sánchez Cobo, F. T. (2001). Empirical research on the understanding of association and implication for the training of researchers. En C. Batanero (Ed.) *Training researchers in the use of statistics* (pp. 37-51). Granada, España: International Association for Statistical Education and International Statistical Institute.

Estepa, A. y Sánchez-Cobo, F. T. (2003). Evaluación de la comprensión de la correlación y regresión a partir de la resolución de problemas. *Statistics Education Research Journal, 2*(1), 54-68. Disponible en https://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/serj/SERJ2(1).pdf#page=56

Gea, M. M. (2014). *La correlación y regresión en bachillerato: análisis de libros de texto y del conocimiento de los futuros profesores.* Tesis doctoral. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. Disponible en http://www.ugr.es/~batanero/pages/librostesis.html

Godino, J. D. (2013). Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática, 11,* 111-132. Disponible en https://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/article/view/14720

Godino, J. D., Bencomo, D., Font, V. y Wilhelmi, M. R. (2006). Análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de estudio de las matemáticas. *Paradigma, 27*(2), 221-252.

Godino, J. D., Contreras, A. y Font, V. (2006). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, *26*(1), 39-88.

Henry, M. (1997). Notion de modéle et modélisation dans l'enseignement. En M. Henry (Ed.), *Enseigner les probabilités au lycée* (pp. 77-84). Reims: Commission Inter-IREM.

Hill, H. C., Ball, D. L. & Schilling, S. G. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education*, *39*(4), 372-400.

MECD. (2015). *Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato.* Madrid: Ministerio de Educación, Cultura y Deporte.

Moritz, J. (2004). Reasoning about covariation. En D. Ben-Zvi & J. Garfield (Eds.), *The challenge of developing statistical literacy, reasoning and thinking* (pp. 221-255). Dordrecht: Kluwer.

Puig, L. y Monzó, O. (2013). Fenómenos y ajustes. Un modelo de enseñanza del proceso de modelización y los conceptos de parámetro y familia de funciones. En T. Rojano (Ed.*). Las tecnologías digitales en la enseñanza de las matemáticas* (pp. 9-35) México: Trillas.

Quintas, S., Ferreira, R. y Oliveira, H. (2015). O conhecimento didático de estatística de duas professoras de matemática sobre dados bivariados. *Bolema*, *29*(51), 284-306. [http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v29n51a15]. Disponible en http://www.redalyc.org/html/2912/291238322016/

Sánchez Cobo, F. T., Estepa, A. y Batanero, C. (2000). Un estudio experimental de la estimación de la correlación a partir de diferentes representaciones. *Enseñanza de las Ciencias*, *18*(2), 297-310. Disponible en https://www.raco.cat/index.php/Ensenanza/article/viewFile/21674/21508

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, *15*(2), 4-14. Disponible en http://journals.sagepub.com/doi/pdf/10.3102/0013189X015002004

Verdú, C., Callejo, M. L. y Márquez, M. (2014). Conocimiento de los estudiantes para maestro cuando interpretan respuestas de estudiantes de primaria a problemas de división-medida. *Enseñanza de las Ciencias*, *32*(3), 407-424. [10.5565/rev/ensciencias.1235]. Disponible en https://www.raco.cat/index.php/Ensenanza/article/view/287552.

Autores

Carmen Batanero. Universidad de Granada, España, batanero@ugr.es

María M. Gea. Universidad de Granada, España, mmgea@ugr.es

Pedro Arteaga. Universidad de Granada, España, parteaga@ugr.es

J. M. Contreras. Universidad de Granada, España, jmcontreras@ugr.es

Carmen Díaz. Universidad de Huelva, España, carmen.diaz@dpsi.uhu.es

La Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (*Relime*) es la publicación oficial de investigación del Comité Latinoamericano de Matemática Educativa (Clame AC). Se edita tres veces por año. Acepta artículos en español, portugués, inglés y francés. Está dirigida a investigadores en Matemática Educativa, a profesores de matemáticas y ciencias, y estudiantes de licenciatura y posgrado interesados en conocer los resultados recientes de las investigaciones y en profundizar en el conocimiento de un tema en particular.

Objetivos:

1. *Relime* pretende ser un foro abierto a las diversas escuelas del pensamiento (paradigmas, teorías, metodologías, métodos, enfoques) en nuestra disciplina, la Matemática Educativa, sin definir perspectivas únicas y con un profundo respeto a las tradiciones educativas y los contextos de los diversos sistemas educativos de nuestra región.
2. Dar a conocer resultados de investigación original en Matemática Educativa que se realizan en América Latina y el Caribe y en el resto del mundo.
3. Contribuir al proceso de profesionalización de la Matemática Educativa en nuestra región.
4. Fomentar una cultura de divulgación e investigación entre los distintos grupos de investigación en nuestra región.
5. Propiciar el debate y la reflexión profunda sobre problemas de investigación que fortalezca la disciplina en nuestra área geográfica.
6. Fortalecer la calidad de la investigación en Matemática Educativa y la vinculación entre comunidades nacionales e internacionales.

INSTRUCCIONES TÉCNICAS PARA AUTORES

LAS CONTRIBUCIONES

Toda contribución propuesta a Relime se somete a un estricto proceso de arbitraje. Las contribuciones deberán ser resultado de investigaciones teóricas o experimentales, estudios de caso, etnográficos, etc., en formato de artículo. Estas contribuciones deberán ser trabajos inéditos de investigación, no estar en arbitraje en otra revista ni tratarse de traducciones previamente publicadas en su lengua original.

CARACTERÍSTICAS DE LOS MANUSCRITOS

Relime publica artículos en castellano, portugués, inglés y francés. Acepta ensayos teóricos originales así como propuestas que sean resultado de estudios experimentales, de casos, de observación, etnográficos, etc.

Los artículos deberán tener un máximo de nueve mil palabras, incluyendo referencias, figuras, cuadros y anexos. En caso de que su propuesta exceda esta extensión, el Comité de Redacción decide si considera la posibilidad de publicarlo siempre que tal propuesta no ocupe todo el espacio disponible en un número de la revista.

En el caso de reportes de estudios experimentales, de casos, de observación, etnográficos, etcétera, recomendamos que los escritos contengan:

1) Resumen del trabajo, deberá tener un máximo de 10 renglones escrito en español, portugués, inglés y francés y de 5 palabras clave en las cuatro lenguas. Resumen, título y palabras clave deben ser escritos en los cuatro idiomas.
2) Una exposición del problema de investigación (su pertinencia y relevancia en el tema que se aborda).
3) Indicaciones globales acerca de la estructura teórica del reporte.
4) Justificación de la metodología usada.
5) Desarrollo de algunos ejemplos y análisis de resultados.
6) Referencias bibliográficas.

Si se trata de ensayos teóricos y filosóficos, nuestra recomendación es la siguiente:

1) Iniciar con una exposición del problema de investigación (su pertinencia y relevancia en el tema que se aborda).
2) Revisión de la literatura que incluya trabajos importantes que sustenten la investigación, en el que se refleje una variedad de resultados actuales. Esta revisión debe incluir investigaciones internacionales pertinentes y no limitarse a estudios de un solo país.
3) Ofrecer indicaciones sobre la estructura teórica o filosófica en la cual se desarrolla el tema del artículo.
4) Exposición detallada de la posición del autor dentro del tema o los temas de exposición. Esto debe reflejarse a través del desarrollo de ideas, más que de una lista de reflexiones.

5) Implicaciones o consecuencias de la investigación en el área.
6) Referencias bibliográficas.

Proceso de evaluación en Relime

Los artículos propuestos a Relime serán leídos por dos miembros del Comité de Redacción, y si el contenido atiende a la originalidad y satisface los criterios anteriores, así como a la claridad de la presentación e interés para la comunidad de matemática educativa, serán evaluados en forma "ciega" por dos investigadores reconocidos y con experiencia dentro del área. En el proceso de evaluación se garantizará el anonimato de autores y evaluadores.

El resultado del dictamen puede ser:

A. Sugerencia de publicar el artículo sin modificaciones.
B. Sugerencia de publicar el artículo bajo reserva de hacer ligeras modificaciones.
C. Sugerencia de reestructurar el artículo atendiendo a los comentarios, lo que precisaría una nueva revisión.
D. Sugerencia de rechazo del artículo.

Formato de las contribuciones

Todas las contribuciones deberán estar escritas en procesador de texto Word 6.0 o superior, tipo de letra Times New Roman, tamaño 11 y utilizar un espacio anterior y posterior de 4 pt, lo que significa que no se requiere dar espacio entre un párrafo y otro. Los cuatro márgenes de la página deberán ser de 2.5 cm. Para las expresiones matemáticas debe usarse el editor de ecuaciones.

Encabezados principales

El estilo de letra para los encabezados principales es tipo VERSALES en formato minúsculas, utilizando un espacio anterior de 36pt y el posterior de 12pt, lo que significa que no se requiere dar espacio entre un encabezado y los párrafos subsecuentes. Enumerar las secciones de los encabezados principales (usando 1, 2, 3, etc.) y utilizar el estilo de alineación centrada.

Subtítulos

El estilo de letra para los subtítulos del artículo es tipo Times New Roman, tamaño 11 y cursiva. La primera letra debe escribirse con mayúsculas. Utilizar un espacio anterior de 24 pt y el posterior de 10 pt, lo que significa que no se requiere dar espacio entre un subtítulo y los párrafos subsecuentes. Los subtítulos deberán enumerarse 1.1., 1.2, 1.3, etc., según corresponda en estilo tipo Normal. Los subtítulos posteriores a un encabezado principal deben tener un espacio anterior y posterior de 6 pts.

Estilo para las tablas

Las tablas deben tener una alineación centrada. El estilo de letra del texto en el interior de la tabla debe ser tipo Times New Roman, Normal, tamaño 10 y con un espacio anterior y posterior de 2 pto. Enumerar las tablas, usando tipo de letra VERSALES tamaño 10, en formato minúscula: TABLA I, TABLA II, TABLA III, etc., utilizando un espacio anterior de 6 pto y posterior de 0 pto. El número de la tabla debe escribirse en la parte superior y su título debajo, utilizando un estilo de alineación centrada y tipo de letra normal tamaño 10.

Estilo para las figuras e imágenes

Las figuras e imágenes deben tener una alineación centrada. El estilo de letra debe ser tipo Times New Roman, tamaño 10 y tipo Cursiva y Normal. Escribir el número de la figura o imagen en formato tipo cursiva y el título en formato tipo normal. Utilizar un espacio anterior de 2 pt y el posterior de 4 pt. Las imágenes y figuras deberán adjuntarse en un archivo independiente al manuscrito en formato de alta resolución.

Transcripciones

Para las transcripciones usar el estilo de letra normal, tipo Times New Roman tamaño 10. Utilizar un interlineado sencillo.

Usar estilos de transcripción como los siguientes:

Estudiante: Para graficar utilicé uno de los métodos que vimos en clase. Me pareció que era el más simple para resolverlo
Profesor: ¿Por qué consideras que ese método es más simple?

Si las líneas de la transcripción requieren ser numerados, entonces usar el estilo de transcripción enumerada como sigue:

[122] Entrevistador: En la primera actividad se te propuso determinar la función velocidad ¿Podrías explicar cómo la hallaste?
[123] Alumno: Hum... pues...

En el caso de que no se requiera hacer referencia a los números, se sugiere usar el primer estilo de transcripción (indicada párrafos arriba).

RECONOCIMIENTOS

Los reconocimientos a personas, fondos, asociaciones, etc. deberán colocarse en una sección separada antes de las referencias bibliográficas. Los nombres de organizaciones financieras deberán escribirse completos.

BIBLIOGRAFÍA, REFERENCIAS Y NOTAS

Solicitamos emplear el estilo de la APA (Publication Manual of the American Psychological Association, 6th ed., 2009) para las citas de pie, notas, referencias textuales y bibliografía. (Pueden apoyarse en el siguiente link: http://www.apastyle.org/learn/tutorials/basics-tutorial.aspx; o bien, consultar el Manual).

La bibliografía deberá escribirse en forma de lista sin enumerar y en orden cronológico. El estilo de letra debe ser Times New Roman 9. Para escribir una referencia debe usarse alineación justificada para el primer renglón. A partir del segundo renglón deberán establecer una sangría especial de 0.63 cm.

Las notas deberán escribirse al final de cada página del documento. El estilo de letra que deberá usarse es Times New Roman 9 en formato normal.

INFORMACIÓN COMPLEMENTARIA

1) No se devolverán los artículos originales.
2) El editor se reserva el derecho de hacer algunas modificaciones necesarias para mantener el estilo de la publicación.
3) Los textos pueden ser publicados en otro órgano editorial previo permiso expreso, por escrito, y haciendo referencia explícita de la fuente.
4) Los autores recibirán gratuitamente dos ejemplares del número en que se haya publicado su artículo.
5) No se realizarán pagos a los autores por los artículos que se publiquen en *RELIME*. Para mayores informes, puede visitar la página web: http://www.clame.org.mx/relime.htm o bien el correo electrónico:

relime@clame.org.mx

En este último número del vigésimo primer volumen de la *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *Relime*, agradecemos la colaboración de aquellos colegas que aportaron su conocimiento y tiempo en la revisión y arbitraje de los manuscritos propuestos a la revista. A través de sus comentarios críticos nuestros revisores contribuyen no solamente a mantener la calidad de los manuscritos publicados sino al desarrollo de nuestra disciplina en un ambiente de pluralidad a fin de fortalecer la escuela latinoamericana.

EVALUADOR / A	INSTITUCIÓN, PAÍS
Armando Albert Huerta	ITESM, México
Agustín Grijalva	Universidad de Sonora, México
Alain Kuzniak	Université Paris Diderot-Paris 7, Francia
Alicia Ávila Storer	Universidad Pedagógica Nacional, México
Ana Isabel Maroto Sáez	Universidad de Valladolid, España
Ana María Ojeda	DME-Cinvestav, México
Ángel Gutiérrez	Universidad de Valencia, España
Arlete Brito	UNESP, Brasil
Arturo Mena	Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile
Astrid Morales Soto	Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile.
Bertha Ivonne Sánchez Luján	Instituto Tecnológico de Cd. Jiménez, Chihuahua
Blanca Ruiz Hernández	ITESM, México
Carolina Tamayo	Universidad de Antioquia, Colombia
Cecilia Crespo Crespo	ISP “Dr. Joaquín V. González”, Argentina
Ceneida Fernández	Universidad de Alicante, España
Cristina Ochoviet	Administración Nacional de Educación Pública, Uruguay
Daniela Soto	Universidad de Santiago, Chile
Diana Solares Pineda	DIE-Cinvestav, México
Edgar Guacaneme	Universidad Pedagógica Nacional - Colombia
Eduardo Hinojos	DME-Cinvestav, México
Encarnación Castro	Universidad de Granada, España
Enrique Castro	Universidad de Granada, España
Erika Canché	INEE, México
Evelia Reséndiz	Universidad Autónoma de Tamaulipas, México

Felipe Tirado	UNAM, México
Francisco Cordero	DME-Cinvestav, México
Francisco Javier Perales	Universidad de Granada, España
François Pluvinage	DME-Cinvestav, México
Gabriela Buendía	CICATA-IPN, México
Germán Torregrosa	Universidad de Alicante, España
Giovanni Sanabria Brenes	Tenológc de Costa Rica, Costa Rica
Gisela Montiel	DME-Cinvestav, México
Guadalupe Cabañas	Universidad Autónoma de Guerrero, México
Guadalupe Simón	Universidad Autónoma de Tamaulipas, México
Hilbert Blanco Álvarez	Uuniversidad de Nariño, Colombia
Hugo Balbuena Corro	Universidad Pedagógica Nacional, México
Hugo Parra Sandoval	Universidad de Zulia, Venzuela
Ileana Gómez Flores	Universidad Autónoma de Chihuahua, México
Inés Mª Gómez-Chacón	Universidad Complutense de Madrid
Isaías Miranda	CICATA-IPN, México
Javier Lezama	CICATA-IPN, México
João Pedro da Ponte	Universidade de Lisboa, Portugal
José Carrillo Yáñez	Universidad de Huelva, España
José Gabriel Sánchez	UNAM, México
Karly Barbosa Alvarenga	Universidade Federal de Sergipe, Brasil
Leonora Díaz	Universidad de Valparaíso, Chile
Lianggi Espinoza Ramírez	Universidad de Valparaíso, Chile
Liliana Mabel Tauber	Universidad de Sevilla, España
Liliana Suárez	Instituto Politécnico Nacional, México
Luc Trouche	Institut Français de l'Éducation Department, Francia
Luis Carlos Arboleda	Universidad del Valle - Colombia
Luis López	DME-Cinvestav, México
Luis Manuel Cabrera Chim	INEE, México
Manuel Joaquim Félix da Silva Saraiva	Universidade da Beira Interior, Portugal
Manuel Soriano	Universidad de Valencia, España
Mará Fernanda Del Prato	Universidad Nacional de Córdoba, Argentina
Marcela Parraguez	Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile.
María del Mar Moreno Moreno	Universidad de Alicante, España
María Guadalupe Amado Moreno	Instituto Tecnológico de Mexicali, México

María Trigueros	Instituto Tecnológico Autónomo de México, México
Mariangela Borello	CICATA-IPN, México
Matías Arce Sánchez	Universidad de Valladolid, España
Mónica Monroy Kuhn	Universidad Popular Autónoma de Puebla, México
Mónica Villareal	Universidad Nacional de Córdoba
Núria Planas	Universidad Autónoma de Barcelona, España
Paola Valero	Universidad de Estocolmo, Suecia
Patricia Rosas Colín	DME-Cinvestav, México
Patricia Salinas	ITESM, México
Pilar Peña Rincón	Pontificia Universidad Católica de Chile, Chile
Pilar Peña Rincón	Universidad Católica de Santiago, Chile
Rosa María Farfán	DME-Cinvestav, México
Ruth Rodríguez	ITESM, México
Saddo Ag Almouloud	PUCSP, Brasil
Samantha Quiroz	ITESM, México
Santiago Inzunza Cazares	Universidad Autónoma de Sinaloa, México
Sergio Martínez Juste	Universidad de Zaragoza, España
Soledad Montoya González	Universidad Alberto Hurtado, Chile
Sonia Ursini	DME-Cinvestav, México
Ulises Xolocotzin	DME-Cinvestav, México
Verónica Molfino Vigo	Departamento de Matemática del Consejo de Formación en Educación, Uruguay
Víctor Larios	Universidad Autónoma de Querétaro, México
Yolanda Serres	Universidad Central de Venezuela, Venezuela

Cálculo integral. M. B. FERNÁNDEZ / Perfeccionamiento de la enseñanza-aprendizaje del tema límite de funciones con el uso de un asistente matemático. C. CUBILLO, T.ORTEGA / Influencia de un modelo didáctico en la opinión/actitud de los alumnos hacia las Matemáticas. M. F. LASALVIA, J. D. PIQUET / Construcción de gráficos de funciones: "Continuidad y prototipos".

M. ACEVEDO DE MANRIQUE, M. FALK DE LOSADA / Formación del pensamiento algebraico de los docentes. R. CANTORAL, H. MIRÓN / Sobre el estatus de la noción de derivada: De la epistemología de Joseph Louis Lagrange al diseño de una situación didáctica. A. CAÑADA / Una perspectiva histórica de las series de Fourier: de las ecuaciones de onda y del calor a los operadores compactos y autoadjuntos. B. D'AMORE / Escolarización del saber y de las relaciones: efectos sobre el aprendizaje de las matemáticas. P. FLORES, C. BATANERO, J. D. GODINO / Aplicación del análisis de textos mediante técnicas multivariantes al estudio del cambio de concepciones sobre las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje. G. GARCÍA, C. SERRANO / Variables institucionales en el conocimiento profesional del docente: El caso de la función.

VOLUMEN 4, 2001

O. L. LEÓN, D. I. CALDERÓN / Validación y argumentación de lo matemático en el aula. R. A. OLFOS / Entendiendo la clase de matemática. G. T. BAGNI / La introducción de la historia de las matemáticas en la enseñanza de los números complejos. Una investigación experimental en la educación media superior. R. ZAZKIS / Múltiplos, divisores y factores: explorando la red de conexiones de los estudiantes.

F. CORDERO / La distinción entre construcciones del cálculo. Una epistemología a través de la actividad humana. J. GASCÓN / Incidencia del modelo epistemológico de las matemáticas sobre las prácticas docentes. J. LEZAMA, R. M. FARFÁN / Introducción al estudio de la reproducibilidad.

C. ACUÑA / Concepciones en graficación, el orden entre las coordenadas de los puntos del plano cartesiano. S. BLÁZQUEZ, T. ORTEGA / Los sistemas de representación en la enseñanza del límite. A. CAMACHO, M. AGUIRRE / Situación didáctica del concepto de límite infinito. M. R. OTERO, M. FANARO, I. ELICHIRIBEHETY / El conocimiento matemático de los estudiantes que ingresan a la universidad.

VOLUMEN 5, 2002

A. CAMACHO / Difusión de conocimientos matemáticos a los colegios mexicanos del siglo XIX. De la noción de cantidad al concepto de límite. A. CASTAÑEDA / Estudio de la evolución didáctica del punto de inflexión: una aproximación socioepistemológica. G. MARTÍNEZ / Explicación sistémica de fenómenos didácticos ligados a las convenciones matemáticas de los exponentes. L. SIÑERIZ / La enseñanza de la resolución de problemas de regla y compás. Del mundo de la pura resolución de problemas a la escuela media argentina: estudio de dos casos.

A. CONTRERAS, M. CONTRERAS, M. GARCÍA / Sobre la geometría sintética y analítica. La elipse y sus construcciones. F. CORDERO, E. MIRANDA / El entendimiento de la transformada de Laplace: una epistemología como base de una descomposición genética. I. ELICHIRIBEHETY, M. R. OTERO, M. A. FANARO / Los modelos mentales que subyacen a la resolución de problemas algebraicos: un estudio transversal. M. M. SOCAS / Las interacciones entre iguales en clase de matemáticas. Consideraciones acerca del principio de complementariedad en educación matemática.

C. DOLORES, G. ALARCÓN, D. F. ALBARRÁN / Concepciones alternativas sobre las gráficas cartesianas del movimiento: El caso de la velocidad y la trayectoria. A. GARCIADIEGO / El teorema de Pitágoras como paradigma de la enseñanza de la geometría plana: simplificar no siempre simplifica. T. ORTEGA, M. ORTIZ / Diseño de una intervención para la enseñanza-aprendizaje del cálculo mental en el aula.

VOLUMEN 6, 2003

C. BROITMAN, H. ITZCOVICH, M. E. QUARANTA / La enseñanza de los números decimales: el análisis del valor posicional y una aproximación a la densidad. R. CANTORAL, R. M. FARFÁN / Matemática Educativa: Una visión de su evolución. M. C. PAPINI / Algunas explicaciones vigostkianas para los primeros aprendizajes del álgebra.

L. ANDRADE, P. PERRY, E. GUACANEME, F. FERNÁNDEZ / La enseñanza de las Matemáticas: ¿en camino de transformación? L. J. BLANCO, M. BARRANTES / Concepciones de los estudiantes para maestro en España sobre la geometría escolar y su enseñanza-aprendizaje. R. CANTORAL, E. RESÉNDIZ / El papel de la variación en las explicaciones de los profesores: un estudio en situación escolar.

A. BERGÉ, C. SESSA / Completitud y continuidad revisadas a través de 23 siglos. Aportes a una investigación didáctica. K. BARBOSA / La enseñanza de inecuaciones con el punto de vista de la teoría APOE. D.E. MEEL / Modelos y teorías de la comprensión matemática: Comparación de los modelos de Pirie y Kieren sobre el crecimiento de la comprensión matemática y la teoría APOE. B. D´AMORE / Matemática en algunas culturas suramericanas. Una contribución a la Etnomatemática.

VOLUMEN 7, 2004

G. T. BAGNI / Una experiencia didáctica sobre funciones en la escuela secundaria. A. BRUNO, J. A. GARCÍA / Futuros profesores de primaria y secundaria clasifican problemas aditivos con números negativos. S. M. SEGURA / Sistemas de ecuaciones lineales: una secuencia didáctica. Y. SERRES / Una visión de la comunidad venezolana de educación matemática.

P. AGUILAR, A. OKTAÇ / Generación del conflicto cognitivo a través de una actividad de criptografía que involucra operaciones binarias. M. FERNÁNDEZ, C. RONDERO / El inicio histórico de la ciencia del movimiento: Implicaciones epistemológicas y didácticas. L. RADFORD / Del símbolo y de su objeto: Reflexiones en torno a la teoría de la conceptualización de Cassirer. L. ORTIZ-FRANCO / Prolegómenos a las etnomatemáticas en Mesoamérica.

C. DOLORES / Acerca del análisis de funciones a través de sus gráficas: Concepciones alternativas de estudiantes de bachillerato. M. E. QUARANTA, P. TARASOW / Validación y producción de conocimientos sobre las interpretaciones numéricas. M. E. VALDEMOROS / Lenguaje, fracciones y reparto.

VOLUMEN 8, 2005

C. ACUÑA / ¿Cuántos puntos hay? Concepciones de los estudiantes en tareas de construcción. M. MARCOLINI, J. PERALES / La noción de predicción: Análisis y propuesta didáctica para la educación Universitaria. H. PARRA / Creencias matemáticas y la relación entre actores del contexto. F. PLUVINAGE / Árboles de transiciones etiquetadas en cálculo de probabilidades.

C. CASTELA / A propósito de los conocimientos que no se enseñan explícitamente, empero necesarios para tener éxito en las matemáticas escolares. M. F. DELPRATO / Educación de adultos: ¿saberes matemáticos previos o saberes previos a los matemáticos? L. DÍAZ / Profundizando en los entendimientos estudiantiles de variación. S. GARBIN / ¿Cómo piensan los alumnos entre 16 y 20 años el infinito? La influencia de los modelos, las representaciones y los lenguajes matemáticos. G. MARTÍNEZ / Los procesos de convención matemática como generadores de conocimiento. G. MONTIEL / Interacciones en un escenario en línea. El papel de la socioepistemología en la resignificación del concepto de derivada.

C. BATANERO / Significados de la probabilidad en la educación secundaria. F. CORDERO / El rol de algunas categorías del conocimiento matemático en educación superior. Una socioepistemología de la integral. C. CRESPO, R.M. FARFÁN / Una visión socioepistemológica de las argumentaciones en aula. El caso de las demostraciones por reducción al absurdo. M. FALSETTI, M. RODRÍGUEZ / Interacciones y aprendizaje en matemática preuniversitaria: ¿Qué perciben los alumnos? J. LEZAMA / Una mirada socioepistemológica al fenómeno de la reproducibilidad. M. ROSA, D. CLARK / Las raíces históricas del programa Etnomatemáticas. B. D´AMORE / Oscar Reutersvärd.

VOLUMEN 9, 2006

E. APARICIO, R. CANTORAL / Aspectos discursivos y gestuales asociados a la noción de continuidad puntual. A. BERGÉ / Análisis institucional a propósito de la noción de complejidad del conjunto de los números reales. A. CONTRERAS, L. ORDOÑEZ / Complejidad ontosemiótica de un texto sobre la introducción a la integral definida. L. GARCÍA, C. AZCÁRATE, M. MORENO / Creencias, concepciones y conocimiento profesional de profesores que enseñan cálculo diferencial a estudiantes de ciencias económicas. J. D. GODINO, V. FONT, A. CONTRERAS, M. WILHELMI / Una visión de la didáctica francesa desde el enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática. M.R. OTERO, L. BANKS-LEITE / Modelos mentales y modelos numéricos: un estudio descriptivo en la enseñanza media.

S. BLÁZQUEZ, T. ORTEGA, S.N. GATICA, J. BENEGAS / Una conceptualización de límite para el aprendizaje inicial de análisis matemático en la universidad. A. BRUNO, M. NODA, R. AGUILAR, C. GONZÁLEZ, L. MORENO, V. MUÑOZ / Análisis de un tutorial inteligente sobre conceptos lógico-matemáticos en alumnos con Síndrome de Down. G. BUENDÍA / Una socioepistemología del aspecto periódico de las funciones. A. CASTAÑEDA / Formación de un discurso escolar: el caso del máximo de una función en la obra de L´Hospital y Maria G. Agnesi. O. PEREZ / ¿Cómo diseñar el sistema de evaluación del aprendizaje en la enseñanza de las matemáticas? E. RUIZ, M.E. VALDEMOROS / Vínculo entre el pensamiento proporcional cualitativo y cuantitativo: el caso de Paulina.

M. A. ANIDO, R. LÓPEZ, H.E. RUBIO / Las superficies en el aprendizaje de la geometría. V. LARIOS / La rigidez geométrica y la preferencia de propiedades geométricas en un ambiente de geometría dinámica en el nivel medio. A.L. LAVALLE, E.B. MICHELI, N. RUBIO / Análisis didáctico de regresión y correlación para la enseñanza media. Y. OTÁLORA, M. OROZCO / ¿Por qué 7345 se lee como “setenta y tres cuarenta y cinco? E. RESENDIZ / La variación y las explicaciones didácticas de los profesores en situación escolar. R. UICAB, A. OKTAÇ / Transformaciones lineales en un ambiente de geometría dinámica.

RELIME ESPECIAL, 2006

L. RADFORD / Introducción. Semiótica y Educación Matemática. M. OTTE / Proof and Explanation from a Semiotical Point of View. R. DUVAL / Quelle sémiotique pour l’analyse de l’activité et des productions mathématiques? R. CANTORAL, R.M. FARFÁN, J. LEZAMA, G. MARTÍNEZ / Socioepistemología y representación: algunos ejemplos. L. RADFORD / Elementos de una teoría cultural de la objetivación. J.D. GODINO, V. FONT, M. WILHELMI / Análisis ontosemiótico de una lección sobre la suma y la resta.

A KOUKKOUFIS, J. WILLIAMS / Semiotic Objectifications of the Compensation Strategy: En Route to the Reification of Integers. B. D´AMORE / Objetos, significados, representaciones semióticas y sentido. A. GAGATSIS, I. ELIA, N. MOUSOULIDES / Are registers of representations and problem solving processes on functions compartmentalized in students' thinking? A. SÁENZ-LUDLOW / Learning Mathematics: Increasing the Value of Initial Mathematical Wealth. GIORGIO T. BAGNI / Everyday and Mathematical Language 100 Years after the Publication of "On Denoting" by Bertrand Russell. F. ARZARELLO / Semiosis as a Multimodal Process. B. D'AMORE / Conclusiones y perspectivas de investigación futura.

VOLUMEN 10, 2007

F. CORDERO, R. FLORES / El uso de las gráficas en el discurso matemático escolar. Un estudio socioepistemológico en el nivel básico a través de los libros de texto. B. D´AMORE, M. I. FANDIÑO / Relaciones entre área y perímetro: convicciones de maestros y de estudiantes. C. DOLORES, I. CUEVAS / Lectura e interpretación de gráficas socialmente compartidas. C.L. OLIVEIRA, G. da SILVA NUNES / Currículo de matemática no ensino básico: a importância do desenvolvimento dos pensamentos de alto nível. A. ROMO, A. OKTAÇ / Herramienta metodológica para el análisis de los conceptos matemáticos en el ejercicio de la ingeniería. L. ZUÑIGA / El cálculo en carreras de ingeniería: un estudio cognitivo.

R. CANTORAL / Índices, bases de citas y factor de impacto. ¿Una política editorial para Relime? B. D´AMORE, J. D. GODINO / El enfoque ontosemiótico como un desarrollo de la teoría antropológica en didáctica de la matemática. T. M. MENDONÇA, S. M. PINTO, I. M. CAZORLA, E. RIBEIRO / As estruturas aditivas nas séries iníciais doensino fundamental: um estudo diagnóstico em contextos diferentes. J. G. MOLINA, A. OKTAÇ / Concepciones de la transformación lineal en contexto geométrico. G. TORREGROSA, H. QUESADA / Coordinación de procesos cognitivos en geometría.

R. CANTORAL / ¿Publicar o perecer, o publicar y perecer? A. ALSINA i PASTELLS / ¿Por qué algunos niños tienen dificultades para calcular? Una aproximación desde el estudio de la memoria humana. J.J. DÍAZ, V. BERMEJO / Nivel de abstracción de los problemas aritméticos en alumnos urbanos y rurales. U. MALASPINA / Intuición, rigor y resolución de problemas de optimización. C.R. MURO, P. CAMARENA, R. C. FLORES / Alcances de la Teoría de Vergnaud en la representación de un problema complejo de ingeniería. M.L. RODRÍGUEZ, L. RICARDO / El modelo holístico para el proceso de enseñanza-aprendizaje de geometría en arquitectos de la escuela cubana.

VOLUMEN 11, 2008

R. CANTORAL / ¿Cuál es el papel de una revista científica en la conformación de una comunidad? V. ABOITES, G. ABOITES / Filosofía de la matemática en el nivel medio superior. M. ARAVENA, C. CAAMAÑO, J. GIMÉNEZ / Modelos matemáticos a través de proyectos. C. STENGER, K. WELLER, I. ARNON, E. DUBINSKY, D. VIDAKOVIC / A search for a constructivist approach for understanding the uncountable set $P(N)$. M. E. VALDEMOROS, E. F. RUIZ / El caso de Lucina para el estudio de las fracciones en la escuela de adultos.

R. CANTORAL / El papel de las revistas especializadas en las agendas de investigación en Matemática Educativa. S. CASTILLO / Propuesta pedagógica basada en el constructivismo para el uso óptimo de las TIC en la enseñanza y el aprendizaje de la matemática. A. MATOS, J. P. DA PONTE / O estudo de relações funcionais e o desenvolvimento do conceito de variável em alunos do 8. º ano. A. B. RAMOS, V. FONT / Criterios de idoneidad y valoración de cambios en el proceso de instrucción matemática. G. SÁNCHEZ-MATAMOROS, M. GARCÍA, S. LLINARES / La comprensión de la derivada como objeto de investigación en didáctica de la matemática.

R. CANTORAL / En defensa de "lo nuestro". M. FERRARI, R. M. FARFÁN / Un estudio socioepistemológico de lo logarítmico: La construcción de una red de modelos. J. GALLARDO, J. L. GONZÁLEZ, W. QUISPE / Interpretando la comprensión matemática en escenarios básicos de valoración. Un estudio sobre las interferencias en el uso de los significados de la fracción. G. SCHUBRING / Gauss e a tábua dos logaritmos. C. VALDIVÉ, S. GARBIN / Estudio de los esquemas conceptuales epistemológicos asociados a la evolución histórica de la noción de infinitesimal.

VOLUMEN 12, 2009

R. CANTORAL / Relime en ISI Web: Social Science Citation Index (SSCI). G. BUENDIA, A. ORDOÑEZ / El comportamiento periódico en la relación de una función y sus derivadas: significados a partir de la variación. C. CRESPO CRESPO, R. M. FARFÁN, J. LEZAMA / Algunas características de las argumentaciones y la matemática en escenarios sin influencia aristotélica. U. T. JANKVIST / On empirical research in the field of using history in Mathematics Education. M. I. ROCHA, H. A. MENINO / Desenvolvimento do sentido do número na multiplicação. Um estudo de caso com crianças de 7 /8 anos.

R. CANTORAL / Identidad y desarrollo: Matemática Educativa y Relime. S. MAYÉN, C. BATANERO, C. DÍAZ / Conflictos semióticos de estudiantes mexicanos en un problema de comparación de datos ordinales. N. PLANAS, N. IRANZO / Consideraciones metodológicas para la interpretación de procesos de interacción en el aula de matemáticas. L. RADFORD, M. ANDRÉ / Cerebro, cognición y matemáticas. M. A. SORTO, J. H. MARSHALL,

T. F. LUSCHEI, M. CARNOY / Teacher knowledge and teaching in Panama and Costa Rica: A comparative study in primary and secondary education.

R. CANTORAL / Revistas Latinoamericanas en ISI WoK, reflexiones con la comunidad. A.R. CORICA, M.R. OTERO / Análisis de una praxeología matemática universitaria en torno al límite de funciones y la producción de los estudiantes en el momento de evaluación. B.GARII, R. SILVERMAN / Beyond the Classroom Walls: Helping Teachers Recognize Mathematics Outside of the School. P. SALINAS, J.A. ALANÍS / Hacia un nuevo paradigma en la enseñanza del Cálculo en una institución educativa. F. VISEU, J.P. DA PONTE / Desenvolvimento do conhecimento didáctico do futuro professor de Matemática com apoio das TIC´s.

VOLUMEN 13, 2010

R. CANTORAL / Finalmente… trois. A. ALSINA, M. DOMINGO / Idoneidad didáctica de un protocolo sociocultural de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. M. APARECIDA VIGGIANI BICUDO, M. ROSA / Educação matemática na realidade do ciberespaço – que aspectos ontológicos e científicos se apresentam? C. M. FERNÁNDEZ ESCALONA / Análisis epistemológico de la secuencia numérica. S. ROA-FUENTES, A. OKTAÇ / Construcción de una descomposición genética: Análisis teórico del concepto transformación lineal.

R. CANTORAL / Matemática Educativa: una disciplina de múltiples perspectivas. C.ARANDA, M. L.CALLEJO / Construcción del concepto de dependencia lineal en un contexto de geometría dinámica: un estudio de casos. M. BERGER / A semiotic view of mathematical activity with a computer algebra system. F. CORDERO OSORIO, C. CEN CHE, L. SUÁREZ TÉLLEZ / Los funcionamientos y formas de las gráficas en los libros de texto: una práctica institucional en el bachillerato. J. A. FERNANDES, P. FERREIRA CORREIA, R. ROA GUZMÁN / Aquisição das operações combinatórias por alunos pré-universitários através de uma intervenção de ensino.

R. CANTORAL / ¿Qué es la Matemática Educativa? F. J. BOIGUES, S. LLINARES, V. D. ESTRUCH / Desarrollo de un esquema de la integral definida en estudiantes de ingenierías relacionadas con las ciencias de la naturaleza. Un análisis a través de la lógica Fuzzy. C. CRESPO CRESPO, R. M. FARFÁN, J. LEZAMA / Argumentaciones y demostraciones: Una visión de la influencia de los escenarios socioculturales. M. D. POCHULU / Significados atribuidos a la resolución de problemas con software de geometría dinámica durante un desarrollo profesional docente. H. da S. ZAGO, C. R. FLORES / Uma proposta para relacionar arte e educação matemática.

RELIME ESPECIAL (TOMO I), 2010

RELIME ESPECIAL (TOMO II), 2010

VOLUMEN 14, 2011

R. CANTORAL / La Escuela Latinoamericana de Matemática Educativa. G. GÁLVEZ, D. COSMELLI, L. CUBILLOS, P. LEGER, A. MENA, E. TANTER, X. FLORES, G. LUCI, S. MONTOYA, J. SOTO-ANDRADE / Estrategias cognitivas para el cálculo mental. L. RUIZ-HIGUERAS, F. J. GARCÍA GARCÍA / Análisis de praxeologías didácticas en la gestión de procesos de modelización matemática en la escuela infantil. J. DÍEZ-PALOMAR, J. M. MENÉNDEZ, M. CIVIL / Learning mathematics with adult learners: drawing from parents' perspective. M. C. RICOY, M. J. V. S. COUTO / As TIC no ensino secundário na matemática em Portugal: a perspectiva dos professores.

R. CANTORAL / Relime en ERIH. J. L. BELMONTE MARTÍNEZ, M. SIERRA VÁZQUEZ / Modelos intuitivos del infinito y patrones de evolución nivelar. E. CANUL, C. DOLORES, G. MARTÍNEZ-SIERRA / De la concepción global a la concepción local. El caso de la recta tangente en el marco de la convención matemática. J. GASCÓN / Las tres dimensiones fundamentales de un problema didáctico. El caso del álgebra elemental. V. Y. KATAOKA, A. C. S. de OLIVEIRA, A. de SOUZA, A. RODRIGUES, M. SILVA de OLIVEIRA / A Educação Estatística no Ensino Fundamental II em Lavras, Minas Gerais, Brasil: avaliação e intervenção.

R. CANTORAL / Quince años y nuevos retos para Relime. A. CONTRERAS de la FUENTE, M. GARCÍA ARMENTEROS / Significados pretendidos y personales en un proceso de estudio con el límite funcional. M. L. MAGALHÃES GOMES / O ensino de aritmética na escola nova: Contribuições de dois escritos autobiográficos para a história da educação matemática (Minas Gerais, Brasil, primeiras décadas do século xx). A. T. de OLIVEIRA, G. de la ROCQUE PALIS / O potencial das atividades centradas em produções de alunos na formação de professores de matemática. M. POCHULU, V. FONT / Análisis del funcionamiento de una clase de matemáticas no significativa.

VOLUMEN 15, 2012

R. CANTORAL / *Nani gigantum humeris insidentes*. Relime y el Acceso Abierto. C. FERNÁNDEZ, S. LLINARES / Relaciones implicativas entre las estrategias empleadas en la resolución de situaciones lineales y no lineales. G. MARTÍNEZ / Concepciones y matemática escolar: Unidades de medida de las funciones trigonométricas en el nivel medio superior. J. J. ORTIZ, C. BATANERO, J. M. CONTRERAS / Conocimiento de futuros profesores sobre la idea de juego equitativo. M. RIBEIRO, R. MONTEIRO, J. CARRILLO / Cognições e tipo de comunicação do professor de matemática. Exemplificação de um modelo de análise num episódio dividido.

VOLUMEN 16, 2013

R. CANTORAL / El talón de Aquiles. L. ALBARRACÍN, N. GORGORIÓ / Problemas de estimación de grandes cantidades: Modelización e influencia del contexto. A. M. OLLER MARCÉN, J. M. GAIRÍN SALLÁN / La génesis histórica de los conceptos de razón y proporción y su posterior aritmetización. J. PRIOR MARTÍNEZ, G. TORREGROSA / Razonamiento configural y procedimientos de verificación en contexto geométrico. L. A. DE SOUZA, A. V. MARAFIOTI GARNICA / As matemáticas modernas: um ensaio sobre os modos de produção de significado ao(s) movimento(s) no ensino primário brasileiro.

VOLUMEN 17, 2014

R. CANTORAL / El quehacer del matemático educativo: el pasaje del *sujeto* a su *entorno.* I. M. ESCUDERO, J. M. GAVILÁN, G. SÁNCHEZ-MATAMOROS / Una aproximación a los cambios en el discurso matemático generados en el proceso de definir. P. LEGER, G. GÁLVEZ, M. INOSTROZA, L. CUBILLOS, G. LUCI, E. TANTER, D. COSMELLI, J. SOTO-ANDRADE / ECOCAM, un sistema computacional adaptable al contexto para promover estrategias de cálculo mental: características de su diseño y resultados preliminares. G. OBANDO, C. E. VASCO, L. C. ARBOLEDA / Enseñanza y aprendizaje de la razón, la proporción y la proporcionalidad: un estado del arte. S. E. PARADA, F. PLUVINAGE / Reflexiones de profesores de matemáticas sobre aspectos relacionados con su pensamiento didáctico.

R. CANTORAL / Matemática Educativa: *Relme, Clame* y *Relime.* / J. JUSTIN, C. L. OLIVEIRA, L. MORENO / Registros de representação semiótica e geometría analítica: uma experiência com futuros professores. S. PALMAS, D. BLOCK / Acceso a la representación escrita de los números naturales: una secuencia didáctica para adultos de baja o nula escolaridad. H. J. RUIZ, Y. RIASCOS / ¿4^3 se puede leer como “cuatro subido a la tres”?: un estudio sobre las estrategias de construcción de la representación polinomial. C. SÁENZ, A. LEBRIJA / La formación continua del profesorado de matemáticas: una práctica reflexiva para una enseñanza centrada en el aprendiz.

R. CANTORAL / No hay revista sin comunidad, ni comunidad sin diálogo. V. ALBANESE, F. J. PERALES / Pensar matemáticamente: una visión etnomatemática de la práctica artesanal soguera. C. FONSECA, J. GASCÓN, C. OLIVEIRA / Desarrollo de un modelo epistemológico de referencia en torno a la modelización funcional. A. MORALES, F. CORDERO / La graficación - modelación y la Serie de Taylor. Una socioepistemología del Cálculo. F. VISEU, L. MENEZES / Desenvolvimento do conhecimento didático de uma futura professora de matemática do 3.º ciclo: o confronto com a sala de aula na preparação e análise de tarefas de modelação matemática.

RELIME ESPECIAL (TOMO I), 2014

A. KUZNIAK, P. R. RICHARD / Espacios de trabajo matemático. Puntos de vista y perspectivas. J.-C. RAUSCHER, R. ADJIAGE / Espaces de travail et résolution d’un

RELIME ESPECIAL (TOMO II), 2014

VOLUMEN 18, 2015

R. CANTORAL, G. MONTIEL, D. REYES-GASPERINI / El programa socioepistemológico de investigación en Matemática Educativa: el caso de Latinoamérica. J. ARRIETA, L. DÍAZ / Una perspectiva de la modelación desde la Socioepistemología. A. MAZ-MACHADO, L. RICO / Principios didácticos en textos españoles de Matemáticas en los siglos XVIII y XIX. L. SOLANILLA, A. CELI TAMAYO, G. A. PAREJA / Memoria sobre la emergencia de las funciones elípticas. V. H. G. DE SOUZA, R. NOGUEIRA DE LIMA, T. M. M. CAMPOS / A functional graphic approach to inequations.

P. PEÑA-RINCÓN, C. TAMAYO-OSORIO, A. PARRA / Una visión latinoamericana de la etnomatemática: tensiones y desafíos. A. P. AIRES, H. CAMPOS, R. POÇAS / Raciocínio geométrico versus definição de conceitos: a definição de quadrado com alunos de 6.º ano de escolaridade. B. D'AMORE, M. FANDIÑO, M. IORI, M. MATTEUZZI / Análisis de los antecedentes histórico-filosóficos de la "Paradoja cognitiva de Duval". J. GARCÍA-GARCÍA, F. M. RODRÍGUEZ, C. NAVARRO / Las estrategias utilizadas por los niños *Tee Savi* en la resolución de problemas aritméticos. V. C. LLANOS, M. R. OTERO / La incidencia de las funciones didácticas topogénesis, mesogénesis y cronogénesis en un recorrido de estudio y de investigación: el caso de las funciones polinómicas de segundo grado.

P. VALERO, M. ANDRADE-MOLINA, A. MONTECINO / Lo político en la educación matemática: de la educación matemática crítica a la política cultural de la educación matemática. G. A. MARMOLEJO, M. T. GONZÁLEZ / Control visual en la construcción del área de superficies planas en los textos escolares. Una metodología de análisis. A. MENA-LORCA, J. MENA-LORCA, E. MONTOYA-DELGADILLO, A. MORALES, M. PARRAGUEZ / El obstáculo epistemológico del infinito actual: persistencia, resistencia y categorías de análisis. J. PEIXOTO / Gestos, sinais e esquemas de aprendizes surdos na multiplicação. E. A. SÁNCHEZ, A. L. GÓMEZ-BLANCARTE / La negociación de significado como proceso de aprendizaje: el caso de un programa de desarrollo profesional en la enseñanza de la estadística.

VOLUMEN 19, 2016

A. MÁRQUEZ, I. ORDORIKA, A. DÍAZ-BARRIGA, R. CANTORAL, W. DE VRIES / Consorcio Mexicano de Revistas de Investigación Educativa. P. ARTEAGA, C. BATANERO, J. M. CONTRERAS, G. CAÑADAS / Evaluación de errores en la construcción de gráficos estadísticos elementales por futuros profesores. M. J. CARVALHO, A. FREITAS / Nível de conhecimento em probabilidade condicionada e independência: um caso de estudo no ensino secundário português. M. POCHULU, V. FONT, M. RODRÍGUEZ / Desarrollo de la competencia en análisis didáctico de formadores de futuros profesores de matemática a través del diseño de tareas. R. RODRÍGUEZ, S. QUIROZ / El papel de la tecnología en el proceso de modelación matemática para la enseñanza de las ecuaciones diferenciales.

VOLUMEN 20, 2017

matemáticas: incidencia de la gravedad de las dificultades. A. BAROJAS, I. GARNICA / Comprensión de nociones del sistema métrico decimal mediada por la LSM en el aula de sordos [17-21]: estudio de casos. S. ESTRELLA, R. OLFOS, S. MORALES, P. VIDAL / Argumentaciones de estudiantes de primaria sobre representaciones externas de datos: componentes lógicas, numéricas y geométricas.

VOLUMEN 21, 2018

R. CANTORAL / Educación comparada en América Latina. El caso de la educación alternativa en Oaxaca: Matemáticas y práctica social. / Y. T. HOFFMANN, D. A. COSTA / História da educação matemática: conservação da cultura escolar. R. RAMÍREZ, P. FLORES, I. RAMÍREZ / Análisis de los errores en tareas geométricas de argumentación visual por estudiantes con talento matemático. M. RODRÍGUEZ, M. PARRAGUEZ, M. TRIGUEROS / Construcción cognitiva del espacio vectorial R^2. A. ZAPATERA / Cómo alumnos de educación primaria resuelven problemas de generalización de patrones. Una trayectoria de aprendizaje.

O. PÉREZ / La Matemática Educativa en Camagüey: incidencia social de un programa de maestría. H. ALVARADO, L. RETAMAL, S. ESTRELLA, M. GALINDO / Intuiciones probabilísticas en estudiantes de ingeniería: implicaciones para la enseñanza de la probabilidad. N. MARTÍNEZ P. R. GARZÓN, N. R. RODRÍGUEZ / Estrategias de los niños en la resolución de situaciones multiplicativas: reconocimiento y uso de unidades. V. ROJO, J. VILLARROEL, J. M. MADARIAGA / The affective domain in learning mathematics according to students’ gender. G. SÁNCHEZ, M. MORENO, P. PÉREZ, M. L. CALLEJO / Trayectoria de aprendizaje de la longitud y su medida como instrumento conceptual usado por futuros maestros de educación infantil.

M. PARRAGUEZ / Posgrado en didáctica de la matemática de la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso: un multiproceso en búsqueda de la construcción ciudadana. L. ESPINOZA, A. VERGARA, D. VALENZUELA / Geometría en la práctica cotidiana: la medición de distancias inaccesibles en una obra del siglo XVI. L. A. RAMOS, L. M. CASAS / Concepciones y creencias de los profesores de Honduras sobre enseñanza, aprendizaje y evaluación de las matemáticas. G. ESPINOZA, D. ZAKARYAN, J. CARRILLO / El conocimiento especializado del profesor de matemáticas en el uso de la analogía en la enseñanza del concepto de función. C. BATANERO, M. M. GEA, P. ARTEAGA, J. M. CONTRERAS, C. DÍAZ / Conocimiento del contenido sobre correlación y regresión de futuros profesores.

SUSCRIPCIÓN A RELIME

Costo del volumen 21 (tres números)

Suscripción Institucional:
Volumen US$ 120
Cada número US$ 50

Suscripción Individual:
Volumen US$ 50
Cada número US$ 20

Suscripción Miembros Clame:
Volumen US$ 20
Cada número US$ 10

Estos costos NO aplican a *números especiales*,
NO incluyen gastos de envío, NI comisión bancaria por transferencias
o depósitos de cheques emitidos fuera de México

Las suscripciones deberán solicitarse al correo electrónico
suscripcion@relime.org

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa

Volumen 21, Número 3

Diseño y Web: Emilio Serna Hernández
Servicios Editoriales Recrea
(Miembro CANIEM - 3663)
sernandem@yahoo.com.mx

Se imprimió en los talleres de
Editorial Progreso S.A. de C.V.
Sabino # 275
Col. Santa María la Ribera
Delegación Cuauhtémoc
06400, México, CDMX

Noviembre de 2018
Tiraje: 1000 ejemplares más sobrantes