EDITORIAL

Finalmente… *trois*

Ricardo Cantoral

ARTÍCULOS

Idoneidad didáctica de un protocolo sociocultural de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas

Àngel Alsina, Marta Domingo

Educação matemática na realidade do ciberespaço – que aspectos ontológicos e científicos se apresentam?

Maria Aparecida Viggiani Bicudo, Mauricio Rosa

Análisis epistemológico de la secuencia numérica

Catalina María Fernández Escalona

Construcción de una descomposición genética: Análisis teórico del concepto transformación lineal

Solange Roa-Fuentes, Asuman Oktaç

INSTRUCCIONES TÉCNICAS PARA AUTORES

ISSN 1665-2436

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa

Vol. 13, Núm. 1, marzo 2010

Vol. 13, Núm. 1, 2010

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa

Relime

Clame Comité Latinoamericano de Matemática Educativa

Publicación oficial de investigación del Comité Latinoamericano de Matemática Educativa

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa

Directora Fundadora: ROSA MARIA FARFÁN

Director Editorial: RICARDO CANTORAL
Departamento de Matemática Educativa
Centro de Investigación y Estudios Avanzados del IPN
Av. Instituto Politécnico Nacional No. 2508
CP 07360, San Pedro Zacatenco, Ciudad de México DF
M É X I C O
E-mail: rcantor@cinvestav.mx

Coordinación técnica: Guadalupe Cabañas, Mario Sánchez, Martha Maldonado e Iván Maldonado.
Portada: «Opus 1» de Oscar Reutersvärd en 1934. Reproducida con permiso de los herederos del artista.

Publicación oficial de investigación del Comité Latinoamericano de Matemática, Clame AC. Consejo Directivo: *Presidente:* Cecilia R. Crespo (presidencia@clame.org.mx) – Argentina; *Secretaria:* Olga L. Pérez (secretario@clame.org.mx) – Cuba; *Tesorera:* Gisela Montiel (tesorero@clame.org.mx) – México; *Vocal Norteamérica:* Apolo Castañeda (vocal_norteamerica@clame.org.mx) – México; *Vocal Caribe:* Ángela M. Martín (vocal_caribe@clame.org.mx) – República Dominicana; *Vocal Centroamérica:* Claudia M. Lara (vocal_centroamerica@clame.org.mx) – Guatemala*; Vocal Sudamérica:* Hugo Parra (vocal_sudamerica@clame.org.mx) – Venezuela.

Publicación cuatrimestral. Se publica en los meses de marzo, julio y noviembre. Vol. 13, Núm. 1, marzo, 2010. Tiraje 2000 ejemplares.
Las solicitudes de suscripciones deberán enviarse a la dirección electrónica: suscripcion-relime@clame.org.mx. Para cualquier contribución o mayor información, favor de enviarla a la dirección electrónica: relime@clame.org.mx, o consulte la página http://www.clame.org.mx.
Relime está disponible en los siguientes índices: SSCI – Social Sciences Citation Index y Journal Citation Reports / Social Sciences Edition del ISI Web of Knowledge: http://www.isiwebofknowledge.com/; Conacyt – Índice de Revistas Mexicanas de Investigación Científica y Tecnológica: http://www.conacyt.mx/Indice/Indice_4.html; ZDM – Zentralblatt für Didaktik der Mathematik: http://www.fizkarlsruhe.de/fiz/publications/zdm/zdmp1.html; IBZ – International Bibliography of Periodical Literature in the Humanities and Social Sciences: www.saur.de; Clase – Citas Latinoamericanas en Ciencias Sociales y Humanidades: http://dgb.unam.mx/clase.html; Iresie – Índice de Revistas de Educación Superior e Investigación Educativa: http://www.unam.mx/cesu/iresie/; Latindex – Sistema Regional de Información en Línea para Revistas Científicas de América Latina, el Caribe, España y Portugal: http://www.latindex.unam.mx/; Redalyc – Red de Revistas Científicas de América Latina y el Caribe, España y Portugal: http://www.redalyc.com; EBSCO – Information Services: http://www.ebsco.com/home/; Dialnet: http://dialnet.unirioja.es/; Scielo-México – Scientific Electronic Library Online: http://www.scielo.org.mx/scielo.php; Thomson Gale – Gale Iberoamérica: http://www.gale.cengage.com

2010 Impreso en México

Volumen 13 – Número 1 – 2010

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa

Clame Comité Latinoamericano de Matemática Educativa

Publicación oficial del Comité Latinoamericano de Matemática Educativa

ISSN 1665 – 2436.

Edición CLAME – México, RFC CMM 040505 IC7.
Impreso en México

2010

Volumen 13 Número 1 Marzo de 2010

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa

La *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* es una publicación cuatrimestral. Se publica en los meses de marzo, julio y noviembre.
Programa de publicación 2010: Volúmenes 13 (1 – 3), tres números. Tiraje 2000 ejemplares.

EDITORIAL

FINALMENTE... *TROIS*

FINALLY... *TROIS*

RICARDO CANTORAL

In memoriam
Giorgio T. Bagni

Como inicia el prefacio de una de las obras célebres de Alejandro Dumas, *Los tres mosqueteros*:

> "Les Trois Mousquetaires"
>
> Préface
>
> Dans laquelle il est établi que, malgré leurs noms en os et en is, les héros de l'histoire que nous allons avoir l'honneur de raconter a nos lecteurs n'ont rien de mythologique.

Y finalmente… tres. Una anécdota que circula entre la comunidad científica dice que en las ciencias físicas —una de las áreas del conocimiento más consolidadas y prestigiosas— se considera a la ocurrencia de un hecho por una sola vez como una coincidencia, si se presenta dos veces se trata entonces de una regularidad, pero si el hecho se repite tres veces estamos sin duda ante una ley de la naturaleza.

Ahora son tres revistas especializadas en la investigación de Matemática Educativa las que están incluidas en el índice internacional más influyente, el *ISI Web of Knowledge* (*ISI WoK*): *Journal for Research in Mathematics Education* (*JRME*), publicada por el National Council of Teachers of Mathematics (NCTM); *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* (*Relime*), que edita el Comité Latinoamericano de Matemática Educativa (Clame), y más recientemente el *Boletim de Educação Matemática* (*Bolema*). Las tres publicaciones están hechas en el continente americano: la primera en Estados Unidos, la segunda en México y la tercera en Brasil.

El incremento en el número de revistas incluidas en *ISI WoK* ofrece una mayor visibilidad internacional a nuestro campo de estudio. Sin embargo, no existe aún la tradición entre las tres publicaciones mencionadas de citarse entre sí. Este camino tiene que ser abierto por las actuales y, sobre todo, por las futuras generaciones de investigadores en Matemática Educativa: jóvenes que estén formados con una mirada abierta a la diversidad y con menos dependencia de las miradas centralistas. Pocos son los investigadores en nuestro campo que publican en diversas revistas del orbe y en distintas lenguas, pero muchos menos quienes citan trabajos de distintos países y en distintos idiomas… Nuestro querido amigo G. T. Bagni fue uno de ellos; su actitud se orientó al propósito de *pensar para sí, escribir para el otro y debatir con todos*.

En números anteriores hemos puesto un particular énfasis en la importancia de que las revistas científicas pertenezcan a los índices bibliométricos consolidados (Cantoral, 2009a, 2009b, 2009c). Hemos puntualizado el riesgo de que aún sean pocas las revistas especializadas en Matemática Educativa que forman parte del *ISI Web of Knowledge*. Si bien hay más publicaciones indizadas que se ocupan de difundir estudios sobre fenómenos ligados al aprendizaje de las ciencias y de las matemáticas, la historia de las ciencias y de las matemáticas, o la enseñanza de la ciencia y las matemáticas, también es cierto que el número de revistas especializadas en Matemática Educativa incluidas en el *ISI WoK* crece aritméticamente: sigue un crecimiento lento.

Durante el año anterior, pocos artículos, como el de Crespo, Farfán y Lezama (2009), citaron a una publicación incluida en el *ISI Web* que no fuera la propia *Relime* o el *JRME*. Todavía falta un largo trecho por lograr que las revistas “se comuniquen” entre sí, por lograr que “dialoguen con frecuencia”.

Referencias bibliográficas

Cantoral, R. (2009a). Relime en ISI Web: Social Science Citation Index (SSCI). *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 12*(1), 5-6.

Cantoral, R. (2009b). Identidad y desarrollo: Matemática Educativa y Relime. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 12*(2), 145-150.

Cantoral, R. (2009c). Revistas Latinoamericanas en ISI WoK, reflexiones con la comunidad. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 12*(3), 301-304.

Crespo, C., Farfán, R. y Lezama, J. (2009). Algunas características de las argumentaciones y la matemática en escenarios sin influencia aristotélica. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 12*(1), 29-66.

ÀNGEL ALSINA, MARTA DOMINGO

IDONEIDAD DIDÁCTICA DE UN PROTOCOLO SOCIOCULTURAL DE ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS

DIDACTICAL SUITABILITY OF A SOCIOCULTURAL MATHEMATICS TEACHING AND LEARNING PROTOCOL

RESUMEN. En este estudio se evalúa la adecuación de un protocolo para la enseñanza del concepto de poliedro regular, destinado a alumnos de 14 y 15 años. Este protocolo se ha diseñado desde una perspectiva sociocultural y su evaluación se basa en la aplicación de los criterios de idoneidad didáctica que ofrece el enfoque ontosemiótico. La idoneidad se estudia con la revisión de sus diferentes dimensiones: matemática, cognitiva, interaccional, mediacional, emocional y ecológica. El análisis ha permitido detectar algunos factores que favorecen la validez del protocolo y la adecuación para su empleo en el aula, como el tipo de discurso, el uso de material manipulable o el trabajo cooperativo.

PALABRAS CLAVE: Perspectiva sociocultural, enseñanza de la geometría, idoneidad didáctica, material manipulativo, prácticas matemáticas.

ABSTRACT. This study evaluates the suitability of a protocol for teaching the concept of regular polyhedra to students of 14 and 15 years of age. The protocol has been designed from a sociocultural angle and its evaluation is based on the application of didactical suitability criteria which offers an ontosemiotic approach. Suitability is studied by looking at its different dimensions: mathematical, cognitive, interactional, mediational, emotional and ecological. The analysis has enabled some factors to be identified which support the validity of the protocol and its suitability for use in the classroom, namely, the type of discourse, use of manipulable materials and cooperative work.

KEY WORDS: Sociocultural perspective, geometry teaching, didactical suitability, manipulative material, mathematics practices.

RESUMO. Neste estudo avalia-se a adequação de um protocolo para o ensino do conceito de poliedro regular, para alunos entre 14 e 15 anos. Este protocolo foi concebido a partir de uma perspectiva sociocultural e a sua avaliação assenta na aplicação de critérios de adequação didática segundo o enfoque ontosemiótico. A adequação é estudada por uma revisão das suas várias dimensões: matemática, cognitiva, interaccional, mediacional, emocional e ecológica. A análise permitiu detectar alguns fatores que favorecem a validade do protocolo e a adequação para a sua utilização em sala de aula, como o tipo de discurso, o uso de material manipulável ou o trabalho cooperativo.

PALAVRAS CHAVE: Perspectiva sociocultural, ensino da geometria, adequação didáctica, material manipulativo, práticas matemáticas.

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (2010) 13 (1): 7-32.
Recepción: Septiembre 8, 2009 / Aceptación: Febrero 1º, 2010.

RÉSUMÉ. Cette étude a pour sujet l'évaluation d'un protocole pour l'enseignement du concept de polyèdre régulier à des élèves de 14 et 15 ans. Ce protocole a été conçu à partir d'une perspective socioculturelle et son évaluation, grâce à une approche onto-sémiotique, a pu être basée sur l'application des critères propres à l'adéquation didactique. Quant à l'adéquation, on a pu procéder à son étude en examinant ses différentes dimensions : mathématique, cognitive, interrelationnelle, médiationnelle, émotionnelle et écologique. L'analyse nous a permis de détecter quelques facteurs comme le type de discours, l'emploi de matériel manipulable ou le travail en groupe_ favorisant la validité du protocole et l'adéquation pour qu'ils soient utilisés dans la salle de classe.

MOTS CLÉS: Perspective socioculturelle, enseignement de la géométrie, adéquation didactique, matériel manipulatif, stages pratiques en mathématiques.

1. Introducción

Este trabajo parte de la base de que en España existe un desequilibrio entre las orientaciones internacionales y nacionales respecto al currículum de matemáticas en la Educación Secundaria Obligatoria (ESO) y lo que ocurre en las aulas. A pesar de estos referentes, el profesorado de matemáticas continúa tendiendo a impartir clases expositivas, con ejemplos y ejercicios, y dejan poco espacio para que los estudiantes construyan de manera colectiva e individual el significado matemático, como señalan Planas (2002) y Reeuwijk (1997), entre otros.

La perspectiva sociocultural del aprendizaje humano, que se fundamenta en las aportaciones de Vygostky (1978) y en las reinterpretaciones de su obra que han hecho otros autores, tanto desde el ámbito de la psicología del aprendizaje (Ivic, 1994; Wertsch, 1985, 1991) como desde el campo de la educación matemática (Lerman, 2000; 2001; Schmittau, 2004), permite abordar la problemática expuesta con el objeto de hallar posibles soluciones. Los rasgos más característicos de esta perspectiva del aprendizaje son, de forma muy sintética, que el aprendiz construye y comprende sus conocimientos en un contexto social y cultural a través de la interacción, la negociación y el diálogo; que el pensamiento intelectual depende de la construcción autorregulada del conocimiento, y que va de un proceso interpsicológico a un proceso más intrapsicológico (Alsina y Escalada, 2008).

Domingo (2004) elaboró diversos protocolos para la enseñanza de contenidos matemáticos, apegándose a los parámetros de la perspectiva sociocultural. Estos protocolos se implementaron a un grupo de estudiantes de 3º y 4º de ESO (14 a 16 años) y se analizó su grado de eficacia. Los resultados demostraron que los alumnos que aprendieron matemáticas con los protocolos aumentaban significativamente el grado de motivación y la memoria comprensiva en comparación con los que aprendían los mismos contenidos de manera tradicional. Sin embargo, en esta investigación no se obtuvieron datos que permitieran determinar los factores que incentivan la motivación y la memoria comprensiva.

Por este motivo, la presente investigación analiza la idoneidad didáctica de un único protocolo, a partir del marco conceptual que proporciona el Enfoque Ontosemiótico (EOS). Desde esta perspectiva, los objetivos concretos del trabajo son analizar el grado de idoneidad matemática, cognitiva, interaccional, mediacional, emocional y ecológica.

2. El eos: una herramienta para evaluar un método de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas

Varios trabajos realizados en el marco del EOS (Godino, Contreras y Font, 2006; Godino, Font y Wilhelmi, 2006; Godino, Font, Wilhelmi y Castro, 2009) han propuesto cinco niveles o tipos de análisis aplicables a un proceso de estudio matemático: 1) los tipos de problemas y sistemas de prácticas (significados sistémicos); 2) las configuraciones de objetos y procesos matemáticos; 3) las trayectorias e interacciones didácticas; 4) el sistema de normas y metanormas que condicionan y hacen posible el proceso de estudio (dimensión normativa); 5) la valoración de la idoneidad didáctica del proceso de estudio.

Los cuatro primeros niveles son herramientas para una didáctica descriptiva-explicativa; es decir, sirven para comprender y responder a la pregunta *¿qué está pasando aquí y por qué?* El quinto nivel se basa en los cuatro niveles previos y constituye una síntesis final orientada a la identificación de mejoras potenciales del proceso de estudio en nuevas implementaciones; este es el objeto de nuestro trabajo, por lo cual se profundiza en él.

Godino y su equipo exponen que la idoneidad didáctica de un método para la enseñanza de las matemáticas se define en función del grado con el que resulta adecuado para su puesta en práctica en el aula. La idoneidad se estudia a través de la reflexión sobre sus diferentes componentes: *epistémico, cognitivo, interaccional, mediacional, afectivo* y *ecológico* (Godino, Batanero y Font, 2007). A continuación, se describe el objeto de análisis de cada uno de los componentes, según el EOS; en algunos casos se usan aportaciones concretas de otros autores para estudiar e interpretar los grados de idoneidad de los diferentes componentes.

2.1. *Idoneidad epistémica*

La idoneidad epistémica es el grado de representatividad que tienen los significados institucionales implementados o pretendidos respecto a un significado de referencia. Desde el punto de vista de las matemáticas y su aprendizaje es necesario analizar qué contenidos matemáticos aparecen y con qué frecuencia; asimismo, cuál es el modelo implícito que se asume en una actividad o pequeño grupo de actividades.

El documento de referencia para analizar los contenidos matemáticos que aparecen en el protocolo para la enseñanza del concepto de poliedro regular ha sido el currículum oficial de matemáticas de ESO en Cataluña, debido a su solidez teórica y práctica. Respecto al modelo implícito, se parte de los cuatro enfoques posibles que expone Baroody (2003): el de *destrezas*, centrado en la memorización de las habilidades básicas a través de la repetición; el *conceptual*, que se basa en el aprendizaje de procedimientos con comprensión; el de *resolución de problemas*, que enfatiza en el razonamiento y la resolución de problemas, y el *investigativo*, donde se considera que los estudiantes son capaces de construir activamente su conocimiento mediante actividades previamente planificadas y experiencias de investigación que surgen durante el proceso de enseñanza-aprendizaje.

2.2. *Idoneidad cognitiva*

Vygotsky (1978) señala que la idoneidad cognitiva expresa el grado en que los significados pretendidos o implementados están en la zona de desarrollo potencial de los alumnos. Vygotsky distinguió la zona de desarrollo real de la zona de desarrollo potencial, y llamó *zona de desarrollo próximo* a la distancia entre ambas. Para este autor, el papel del profesor consiste en proporcionar la ayuda ajustada y contingente al alumno dentro de la zona de desarrollo próxima para que pueda alcanzar la zona de desarrollo potencial.

Tanto Castro (2007) como Godino, Font y Wilhelmi (2006) han llevado a cabo análisis de métodos y lecciones para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en diferentes edades de escolarización; con el fin de valorar la idoneidad cognitiva se han centrado, sobre todo, en determinar si el grado de dificultad de las tareas es adecuado o no a los estudiantes.

2.3. *Idoneidad interaccional*

En el marco conceptual del EOS, un proceso de enseñanza-aprendizaje tiene mayor idoneidad desde el punto de vista interaccional si las configuraciones y trayectorias didácticas permiten, por una parte, identificar conflictos semióticos potenciales (que se puedan detectar a priori); por otra, resolver los problemas que surgen durante el proceso de instrucción.

Planas e Iranzo (2009) señalan que uno de los principios fundamentales para la enseñanza de las matemáticas consiste en promover la interacción entre el alumnado durante la clase de matemáticas. Si se identifica la práctica matemática con hacer cálculos o aprender procedimientos de memoria en un entorno individualizado será muy difícil comprender en qué consiste el aspecto comunicativo de las matemáticas. En cambio, si se conciben las matemáticas como una actividad de planteamiento y resolución de problemas que propicie la comunicación, discusión y validación de sus soluciones, la situación cambia. La comunicación adquiere un papel central en la adquisición de conocimientos.

2.4. *Idoneidad mediacional*

La idoneidad mediacional alude al grado de disponibilidad y adecuación de los recursos materiales y temporales necesarios para el desarrollo del proceso de enseñanza-aprendizaje.

Sobre el uso de recursos materiales, Baroody (1989) advierte que lo importante no es que los estudiantes manipulen activamente objetos concretos y reflexionen sobre sus acciones físicas, sino que toquen algo que les resulte familiar y mediten sobre sus acciones físicas o mentales. Y en relación con los recursos temporales, Domingo (2009) indica que hay que tener en cuenta que cuando una actividad consume la mayor parte del horario es muy probable que otra no se realice. Así, los momentos de exploración deben codearse con los de aprendizaje sobre contenidos específicos.

2.5. *Idoneidad emocional*

La idoneidad emocional concierne al grado de implicación (interés o motivación) del alumnado en el proceso de estudio. Está relacionada con los factores que dependen de la institución y con los que dependen básicamente del alumno y de su historia escolar previa.

Hay diversos trabajos que han centrado su objeto de estudio en la idoneidad emocional. Por ejemplo, en España los estudios de Gómez-Chacón (1998, 2000) señalan que las matemáticas producen ansiedad a muchos alumnos. Con frecuencia, este componente emocional negativo tiene su origen en la forma de enseñar matemáticas, por lo cual es necesario valorar los aspectos que van más allá de lo cognitivo al evaluar la adecuación de un método, especialmente si va dirigido a estudiantes de ESO. En esta misma línea, otros elementos a considerar son el autoconcepto del alumno y su confianza respecto a las matemáticas.

2.6. *Idoneidad ecológica*

La idoneidad ecológica pone de manifiesto el grado en que el proceso de estudio se ajusta al proyecto educativo del centro, la escuela y la sociedad, así como a los condicionamientos del entorno donde se desarrolla. En términos generales, alude al grado en que un método para aprender matemáticas resulta adecuado en el entorno donde se utiliza; el entorno incluye a todos los factores —tanto los de dentro como los de fuera del aula— que determinan la actividad que allí se lleva a cabo.

Este grado de idoneidad mantiene vínculos, desde nuestro punto de vista, con la Educación Matemática Realista (EMR) de Freudenthal (1991), que se caracteriza por utilizar situaciones de la vida cotidiana o problemas contextuales como punto de partida para aprender matemáticas. De manera progresiva, estas situaciones son matematizadas a través de modelos —que median entre lo abstracto y lo concreto— para formar relaciones más formales y estructuras abstractas (Heuvel-Panhuizen, 2002). En términos más generales, Chevallard (1992) establece diferentes niveles de determinación didáctica cuando explica los factores que condicionan el tipo de actividad matemática que es posible vivir en una institución:

Sociedad→Escuela→Pedagogía→Disciplina→Área→Sector→Tema→Cuestión

Los criterios de idoneidad didáctica que ofrece el EOS dan un marco adecuado para valorar cualquier proceso de estudio de las matemáticas (Godino, Font, Wilhelmi y Castro, 2009). Por ello, en este estudio se usan dichos parámetros con el objetivo de valorar el grado de validez de un protocolo sociocultural para la enseñanza y aprendizaje del concepto de poliedro regular a estudiantes de 3º de ESO (14 a 15 años) y, a la vez, encontrar datos cualitativos que permitan establecer algunos factores que incentivan la motivación y la memoria comprensiva en la clase de matemáticas.

3. Metodología

Nuestro estudio se enmarca en un paradigma de investigación sociocrítico (Godino, 1993), que va orientado a conectar la investigación con la práctica, a fin de transformar la práctica. Se parte de la base, de acuerdo con Kilpatrick (1988), que no es suficiente entrar en una clase y observar el encuentro educacional, sino también es necesario guiar directamente la práctica; esto precisa una mayor colaboración entre el profesor y el investigador.

Una de las investigadoras del estudio se desempeña también como profesora del grupo de estudiantes de 3º de ESO al que se aplica el protocolo, por lo cual se usa la investigación-acción como metodología (Carr y Kemmis, 1988; Denzin y Lincoln, 2003; Elliott, 1978). De acuerdo con estos autores, la finalidad última de la investigación-acción es mejorar la práctica, al tiempo que permite una mayor comprensión de ella y de los contextos en que se realiza. Denzin y Lincoln (2003) exponen que esta metodología analiza problemáticas de la práctica educativa con el objeto de transformarlas y solucionarlas; de ahí que implique diálogo colaborativo, toma de decisiones participativa, deliberación democrática y máxima participación de todos los agentes implicados.

Sin embargo, como algunas de las críticas más importantes a esta metodología han sido su falta de objetividad (por la implicación en la situación investigada) y las dificultades de generalización, se han triangulado las conclusiones de los procesos de investigación-acción con expertos ajenos al estudio para controlar la objetividad.

En el estudio se parte de un protocolo sobre la enseñanza-aprendizaje de los poliedros regulares en 3º de ESO, diseñado por Domingo (2004), que se mejora a partir de la auto-observación (Domingo, 2009). En este protocolo se describen los aspectos siguientes:

- *Conocimientos previos:* Curriculares y de la vida cotidiana.
- *Objetivo del protocolo:* Realizar un aprendizaje significativo del concepto de poliedro regular.
- *Propuesta de material:* Poliedros construidos, ficha y solucionario.
- *Cuadro de fases del protocolo:* Se adjunta un cuadro de fases para que la persona que tiene que llevarlo a cabo sepa los pasos que se seguirán a priori:

Fase 1	Aproximación al concepto de figura *en el espacio*, con elementos cercanos del contexto del aula.
Fase 2	Presentación de los poliedros y diferenciación respecto al conjunto total de figuras *en el espacio*.
Fase 3	Toma de conciencia de que existen 5 poliedros especiales.
Fase 4	Entrega del material y trabajo de experimentación-investigación en grupo.
Fase 5	Puesta en común de toda la clase.
Fase 6	Reflexión por escrito y consolidación (ficha).

- *Propuesta de protocolo:* Se describe una posible manera de llevar a cabo la práctica matemática en el aula.
- *Propuesta de actividad escrita*.

El protocolo se aplica a un grupo de 15 estudiantes de 3º de ESO (14 y 15 años) y se graba la práctica matemática en video (ver transcripción en el Anexo 1). Se realiza una observación a partir de la grabación, por lo cual los investigadores no interactúan con los participantes, de ahí que no se pueda calificar como observación participante.

Antes y después de la grabación se pasan cuestionarios a los estudiantes y a un grupo de profesores de matemáticas de 3º de ESO. Se usan cuestionarios semiestructurados que pueden considerarse como entrevistas por escrito, ya que las preguntas dan pie a que los colaboradores expresen lo que desean.

4. Resultados y discusión

En este apartado se presentan los resultados que obtuvimos a partir de los objetivos planteados. A medida que se muestran los datos sobre el análisis de los diferentes grados de idoneidad didáctica, surgen algunos elementos que los definen. El proceso de exposición de resultados está inspirado en Castro (2007), y se considera un buen ejemplo extrapolable al estudio de cualquier otro proceso de enseñanza-aprendizaje de diferentes conceptos matemáticos.

4.1. *Idoneidad epistémica*

Para determinar el grado de idoneidad epistémica de nuestro protocolo, se toman como referencia las competencias matemáticas que aparecen en el currículum de matemáticas de ESO en Cataluña.

TABLA I

Competencias matemáticas que incluye el currículum de matemáticas de ESO en Cataluña.

Pensar matemáticamente. Construir conocimientos matemáticos a partir de situaciones donde tenga sentido; experimentar, intuir, formular, comprobar y modificar conjeturas; relacionar conceptos y hacer abstracciones.
Razonar matemáticamente. Realizar inducción y deducción; particularizar y generalizar; identificar conceptos matemáticos en situaciones concretas; argumentar las decisiones tomadas, así como elegir los procesos seguidos y las técnicas utilizadas.
Obtener, interpretar y generar información con contenido matemático.
Comunicar a los otros el trabajo y los descubrimientos realizados, tanto oralmente como por escrito, utilizando el lenguaje matemático.

Niss (2002) dice que lograr la competencia matemática implica construir conocimientos matemáticos a partir de situaciones donde tenga sentido; por ejemplo, experimentar, relacionar conceptos y conjeturar. Por otro lado, señala que una actividad es rica competencialmente cuando cumple tres principios transversales básicos: *la contextualización*, *la globalización* y *la personalización de la práctica matemática*.

En este sentido, el protocolo trabaja de manera plena la competencia matemática, dado que se parte de un contexto (el aula) para descubrir las figuras: *"¿Me podéis decir algunas figuras que estén en el espacio de esta aula?"* (2, 0:23). Parte también de la globalización, en el sentido que los estudiantes son capaces de resolver un problema mediante la integración de experiencias y conocimientos: "*Todos [los poliedros regulares] tienen las caras iguales y las aristas a cada vértice y el número de caras a cada vértice valen igual"* (100, 29:40). Y también se fundamenta en la personalización, ya que se tiene acceso a los procesos individuales de los estudiantes al plantear buenas preguntas.

De igual manera, se analiza el modelo implícito que asume el protocolo a partir de los cuatro posibles enfoques que propone Baroody (2003). Para estudiar dicho aspecto, en la página siguiente (Tabla II), se estudian varias intervenciones de la trascripción del video (Anexo 1).

En estas trascripciones se pone de manifiesto que la práctica matemática puede situarse en el enfoque investigativo, según la clasificación de Baroody (2003), ya que la construcción es bastante mediada por la profesora y, a su vez, el alumno elabora de manera activa su conocimiento. La mediación que hace la profesora consiste básicamente en plantear buenas preguntas que fomenten la participación y la interacción. Algunos ejemplos son los siguientes: *"¿me podéis decir algunas figuras que estén en el espacio de esta aula?"* (2, 0:23); *"las* *caras son cuadrados, pero ¿qué es un cuadrado?"* (19, 1:32); *"habéis localizado todos los poliedros regulares. ¿En qué os habéis basado para decir que éstos son los cinco poliedros regulares?"* (99, 28:18). Este acompañamiento permite que los alumnos avancen desde unos primeros *niveles de concienciación* sobre lo que ya saben o son capaces de hacer a niveles superiores donde van entreviendo la manera de avanzar mejor en el aprendizaje.

TABLA II
Intervenciones en la sesión para analizar al modelo implícito del protocolo.

Intervención	Trascripción
Pautas que da la profesora en el momento de la introducción	2, 10, 15, 17, 19, 21, 22, 24, 26, 27, 28, 32, 33, 34, 38, 40, 41, 42
Acompañamiento que hace la profesora en el trabajo en grupo, la investigación y experimentación por parte del estudiante	42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49, 57, 58, 59
Acompañamiento y guía que hace en el momento de la puesta en común: intervenciones	67, 68, 69, 70, 72, 74, 76, 78, 79, 80, 81, 82, 84, 86, 87, 89, 90, 92, 93, 96, 98, 99, 101, 102, 104, 106

Romero y Rico (1999) llevaron a cabo una investigación con estudiantes de 13 y 14 años en la que destacaban el papel que ejercía el profesor en la construcción del conocimiento por parte de los estudiantes. En su trabajo concluían que dicho conocimiento es guiado y mediado por el profesor a través de actividades previamente planificadas, lo cual desde nuestro enfoque implica que el profesorado debe estar suficientemente formado desde el punto de vista didáctico para que pueda diseñar y efectuar actividades con un grado de idoneidad epistémica alto.

4.2. *Idoneidad cognitiva*

El análisis sobre el grado de idoneidad cognitiva requiere que se determine si el grado de dificultad propuesto es adecuado para el grupo de edad al que va dirigido el protocolo. De entrada, en el Primer Nivel de Concreción del Currículum de Matemáticas de ESO (Tabla III) se indica que uno de los bloques de contenido es la geometría, el cual se tiene que aprender manipulando, y dar prioridad a la geometría espacial por encima de la plana.

El protocolo implementado considera los aspectos anteriores, y enfatiza sobre todo el uso de materiales manipulables para favorecer la comprensión de las propiedades geométricas de los poliedros, como sus regularidades, un aspecto que se analiza con mayor detalle en la idoneidad mediacional.

TABLA III
Fragmentos del Primer Nivel de Concreción del Currículum de Matemáticas de ESO.

"La geometría, como conjunto ordenado de conocimientos, siempre ha tenido una presencia en los currículos escolares para los estudiantes de estas edades"(p. 51)
"… si el estudiante no ha desarrollado determinadas capacidades de percepción geométrica, le será mucho más difícil emplear, de una manera ágil, los instrumentos que la geometría analítica le pondrá al alcance en el momento adecuado" (p.51-52)
"… no sólo tiene que hacerse geometría, sino que tiene que hacerse de una manera que ayude al estudiante a desarrollar las capacidades mencionadas anteriormente. Y ésta tiene que ser una geometría experimental, que coloque a los estudiantes en situación de dibujar, construir y manipular" (p. 52)

Otro elemento significativo es que, cuando se pide la opinión de los estudiantes sobre la práctica matemática realizada, todos aseguran que a partir de ahora recordarán las propiedades de los poliedros regulares. Esto indica que han desarrollado una memoria comprensiva y, por tanto, un aprendizaje significativo ajustado a sus capacidades, como manifiesta un estudiante: *"Un trabajo así está muy bien porque te lo pasas bien y además aprendes"* (62, 22:11). Aunque este tipo de afirmaciones no son una evidencia de que se mejora la capacidad de recuerdo, inducen a pensar que para conseguir que los estudiantes hagan un aprendizaje realmente significativo, en el que se respete su zona de desarrollo próximo (Vygotsky, 1978), es necesario que el profesorado se aproxime a su realidad, y que el proceso de enseñanza-aprendizaje se base, por lo menos en sus fases iniciales, en fenómenos concretos que ya se matematizarán y escribirán de manera abstracta en etapas posteriores (Freudenthal, 1991). Parece imprescindible que los estudiantes –también los de ESO– estén en contacto con los hechos matemáticos antes de poderlos escribir para que entiendan aquello que se está formulando.

En resumen, se puede afirmar que el método empleado en el protocolo, su grado de dificultad y los contenidos que trata son adecuados para el grupo de edad al que va dirigido. Por lo tanto, existe un alto grado de idoneidad cognitiva.

4.3. *Idoneidad interaccional*

Para estudiar el grado de idoneidad interaccional es necesario determinar si el protocolo promueve o no la interacción entre el alumnado, o entre la profesora y el alumnado. El análisis de este aspecto se hizo en diferentes momentos de la trascripción del video (Anexo 1), que contiene la Tabla IV.

TABLA IV
Interacciones durante la sesión para estudiar la idoneidad interaccional.

Intervención	Trascripción
Alumno / Alumno (A / A)	51, 56, 57
Alumno / Profesor (A / P)	3, 5, 7, 9, 12, 16, 23, 29, 36, 44, 46, 48, 71, 73, 75, 77, 83, 85, 88, 91, 94, 97, 100, 103, 105
Profesor / Alumno (P / A)	2, 10, 11, 13, 15, 17, 19, 22, 24, 28, 34, 35, 43, 58, 59, 70, 72, 74, 79, 80, 82, 84, 87, 90, 93, 96, 99, 102, 104

En la Tabla IV se nota que, a lo largo de las 106 intervenciones registradas, hay muchas interacciones. Debido a las circunstancias en que se hizo la grabación, se deduce que el número de interacciones A/A queda poco reflejado en la filmación, ya que la cámara no pudo grabar de forma constante a todos los grupos durante la experimentación. Ahora bien, si se analiza la trascripción con detalle se podría decir que la sesión fue un éxito en cuanto a participación, dado que intervinieron los quince estudiantes que tomaron parte en el estudio. A modo de ejemplo, la Tabla V expone un fragmento de la transcripción donde diversos estudiantes interactúan con la profesora para definir las propiedades de un poliedro:

TABLA V
Fragmento de transcripción en que se nota la interacción entre alumnos y profesora.

43, 9:33	A12: Ésta, por ejemplo, ¿qué sería?
44, 9:39	A13: En esta figura hemos contado como aristas también a éstas. ¿Lo hemos hecho bien?
45, 9:45	P: Sí, son aristas. Las tienes que contar todas.
46, 10:00	A13: O sea, dieciocho, ¿no?
47, 10:04	P: Sí, seis más seis doce, más seis dieciocho.
48, 10:08	A13: ¿Entonces el número de aristas a cada vértice son éstas?
49, 10:36	P: ¿Cuántas hay en cada vértice?
50, 10:42	A14: Una, dos y tres…

La cantidad de interacciones que ocurrieron durante la práctica matemática analizada favoreció un clima emocional positivo. En este sentido, Lerman (2000, 2001) y Schmittau (2004), entre otros, afirman que la presencia de la conversación en las clases de matemáticas está relacionada con el ambiente del aula, ya que para promover el diálogo es preciso que los estudiantes puedan actuar con cierta autonomía.

Otros estudios recientes apuntan en el mismo sentido. Planas e Iranzo (2009) resaltan la importancia de la comunicación profesor-estudiante dentro del aula de matemáticas para asegurar que los alumnos atribuyan el significado que el profesor les ha intentado enseñar y no otro; si no hay este diálogo, el estudiante puede arrastrar significados erróneos y extraer falsas conclusiones en la construcción de su aprendizaje. La mala interpretación no detectada de una norma puede conducir al fracaso del proceso de aprendizaje. Desde este punto de vista, parece necesario que el profesor interactúe con el estudiante e intente anticipar y aclarar sus dudas continuamente, lo cual exige una buena formación no sólo disciplinar, sino también didáctica de las personas que imparten matemáticas en la ESO.

4.4. *Idoneidad mediacional*

Para analizar el grado de idoneidad mediacional se centra la atención en tres aspectos: el uso de material manipulable, el efecto sobre el grado de motivación del alumnado y la incidencia en su aprendizaje. En un estudio preliminar con estudiantes de 12 a 14 años, Domingo (2004) puso de manifiesto que el hecho de utilizar material manipulable en algunos protocolos y trabajar en grupo aumentaba significativamente la motivación del alumnado. Sin embargo, lo que se pretende ahora es obtener datos cualitativos más precisos.

El protocolo usado en este estudio, como ya hemos dicho, considera el uso de materiales manipulables como un aspecto fundamental para favorecer la comprensión de los estudiantes. En la práctica matemática que se analiza, la profesora llega a clase con una bolsa de poliedros para cada grupo de estudiantes (Anexo 1: de 42, 6:29 a 66, 22:46). Durante más de quince minutos, los grupos exploran libremente los poliedros proporcionados y llenan la siguiente tabla:

Como puede apreciarse en la Tabla VI, la exploración con los materiales permite que todos los estudiantes observen las diferentes propiedades geométricas de los poliedros. Además, la regularidad entre el número de vértices, las aristas y las caras permite que se comprenda una propiedad elemental de los poliedros: la fórmula de Euler.

Piaget e Inhelder (1975) establecieron que el uso de material manipulable para desarrollar la inteligencia en general, y el conocimiento matemático en particular, era adecuado hasta la finalización de la etapa de las operaciones concretas (12 años, aproximadamente). Hoy día, este argumento ya está muy superado. Alsina y Planas (2008), por ejemplo, señalan que el material se tiene que usar siempre que los estudiantes lo necesiten.

TABLA VI
Propiedades geométricas de los poliedros analizados.

Poliedro	vértices	Aristas	Caras	aristas en cada vértice	caras en cada vértice	v- a +c	Tipo cara	¿Todas las caras son iguales?	Nombre
1	5	8	5	3 ó 4	3 ó 4	2	cuadrados, triángulos	NO	Pirámide cuadrangular
2	12	18	8	3	3	2	hexágonos, rectángulos	NO	Prisma hexagonal
3	8	12	6	3	4	2	cuadrados	SI	Cubo o hexaedro
4	8	12	6	3	3	2	rectángulos	NO	Ortoedro
5	6	9	5	3	3	2	rectángulos y triángulos	NO	Prisma triangular
6	18	36	20	5	5	2	triángulos equiláteros	SI	Icosaedro
7	4	6	4	3	3	2	triángulos diferentes	NO	Pirámide triangular
8	6	9	5	3	3	2	rectángulos y triángulos	NO	Prisma triangular
9	6	10	6	3 ó 5	3 ó 5	2	pentágonos y triángulos	NO	Pirámide pentagonal
10	4	6	4	3	3	2	triángulos equiláteros	SI	Tetraedro
11	6	12	8	4	4	2	triángulos equiláteros	SI	Octaedro
12	10	15	7	3	3	2	rectángulos y pentágonos	NO	Prisma pentagonal
13	20	30	12	3	3	2	pentágonos regulares	SI	Dodecaedro

En esta línea, Corbalán y Deulofeu (1996) presentan una investigación en el ciclo comprendido entre los 12 y 16 años para determinar los procedimientos que utiliza el alumnado para ganar en un reto matemático o juego. Los autores ponen de manifiesto que el hecho de recurrir a materiales manipulables y de introducir juegos recreativos en el aula aumentan la motivación del alumnado, y permiten realizar mejor los procesos inductivos; es decir, una matemática “de abajo hacia arriba”. Domingo (2004) concluye también que el uso de material manipulable en la clase de matemáticas favorece el grado de motivación de los estudiantes.

Respecto al trabajo en grupo como recurso didáctico, se ha optado por organizar a los alumnos en grupos de 3 ó 4 para contar, anotar, comentar y llegar a conclusiones en equipo. Esta gestión de la actividad se debe a dos criterios: en primer lugar, porque el protocolo parte de un marco teórico sociocultural, donde la interacción es un elemento imprescindible; en segundo lugar, porque, como ya se ha indicado, Domingo (2004) confirmó que el hecho de trabajar en grupo mejoraba la motivación de los estudiantes.

Finalmente, se ha analizado también el uso del tiempo como recurso didáctico. En este sentido, de acuerdo con Castro (2007), se ha estudiado si se ha dedicado un tiempo excesivo a la manipulación, el diálogo, la negociación, etc., ya que se podría pensar que es mucho más rápido, por ejemplo, apuntar las propiedades de los poliedros regulares en la pizarra y hacer que los estudiantes las aprendan de memoria.

Sin embargo, cuando lo que se pretende es la significatividad del aprendizaje, esta forma memorística de abordar los aprendizajes no resulta la más eficaz. En este sentido, Macnab y Cuminne (1992), entre otros, apuestan por no introducir conceptos matemáticos nuevos de manera excesivamente rápida, sino por seguir un currículum en espiral que retome los conceptos presentados con anterioridad y profundice de manera progresiva en los que haya más dificultad.

4.5. *Idoneidad emocional*

Para analizar el grado de idoneidad emocional, se ha valorado la mejora del autoconcepto del estudiante y su confianza en las matemáticas, así como el grado de motivación, cuyas causas se han buscado en aquellos elementos del protocolo que lo pudieran generar.

En el estudio de tales aspectos, se parte de los resultados cuantitativos y cualitativos obtenidos por Domingo (2004) y, sobre todo, de la trascripción del video para poder lograr datos más precisos. Así, aunque esta autora corroboró que los estudiantes que habían aprendido con el programa de protocolos en el que está integrado el de poliedros regulares (grupo experimental) obtenían un grado significativamente más alto que los que no lo habían hecho (grupo control), tanto la observación del video como su trascripción permiten comprobar que los alumnos están absortos por la tarea, de forma que si la profesora no dijera *"ha llegado la hora de realizar la puesta en común"*, algunos continuarían contando y manipulando durante más tiempo, como indican Katz y Chard (2000) para referirse al interés por las tareas en función de su gestión. En el siguiente fragmento puede notarse dicho aspecto:

TABLA VII
Fragmento de transcripción.

59, 20:25	P: Encontraréis unas características comunes, buscadlas. ¿Os gusta esta manera de hacer mates?
60, 22:01	A14: Sí, porque es una manera diferente de aprender
61, 22:09	C: ¿Y tú, qué dirías?
62, 22:11	A15: No, que un trabajo así está muy bien, porque te lo pasas bien, y además aprendes.
63, 22:17	C: ¿Crees que se podría hacer así con todos los contenidos de matemáticas?
64, 22:36	A14: Sí, se podría intentar...
65, 22:42	C: Crees que si todas las clases fueran así acabaríais aprendiendo, ¿o sería mejor combinar esto con las clases tradicionales?
66, 22:46	A14: Es mejor así

En la trascripción de la Tabla VII se pone de manifiesto el alto grado de implicación de los estudiantes en la práctica matemática, lo cual permite confirmar que su motivación para aprender la noción de poliedro regular es adecuada.

Abrantes, Serrazina y Oliveira (1999) exponen que la motivación intrínseca es uno de los aspectos básicos en el aprendizaje de las matemáticas. Sin embargo, consideramos que este tipo de motivación no se da de manera natural en la mayoría de estudiantes, de ahí que se intente provocarla a través del diseño y la gestión adecuada de protocolos que respondan a las necesidades de los alumnos para aprender matemáticas (Domingo, 2004; Alsina y Domingo, 2007).

Como el alto grado de motivación implica que también lo sea el grado de idoneidad emocional, destacamos algunos elementos proporcionados por la perspectiva sociocultural del aprendizaje humano que pueden haber favorecido este tipo de idoneidad, citados por Esteve (2009): el discurso proléptico y la interacción contingente. Esta autora lleva a cabo una fuerte relación entre el discurso proléptico y el clima emocional cuando argumenta que este tipo de discurso se basa en “el tacto” necesario para favorecer un clima emocional que fomente la participación activa y, por tanto, el aprendizaje.

Resulta muy importante que en el momento de elaborar protocolos bajo esta línea se tenga en cuenta el clima que se pretende crear, a partir del tipo de discurso del profesor, así como del tipo de respuestas y de reconducción del diálogo espontáneo que surja durante la puesta en práctica del protocolo en el aula. En tal sentido, uno de los puntos fuertes de la aplicación del protocolo fue la manera de tratar el error: al analizar las respuestas dadas en el cuestionario, todas apuntan hacia una manera de abordar el error que se ajusta perfectamente a los procedimientos que menciona Esteve cuando habla del discurso proléptico. Por otro lado, coincidimos con Gómez-Chacón (1998) cuando dice que hay que prestar atención a la dimensión afectiva del individuo y, por ende, al contexto sociocultural. Esto es lo que realizan Cuadrado y Fernández (2008) al analizar los mecanismos comunicativos que emplean los docentes para favorecer el aprendizaje de los estudiantes de ESO, los cuales promueven que se establezca un clima emocionalmente positivo.

4.6. *Idoneidad ecológica*

Por idoneidad ecológica se entiende al grado en que un método para aprender matemáticas resulta adecuado en el entorno donde se utiliza. A pesar de que “entorno” se refiere a todo lo que está dentro y fuera del aula (un hecho que condiciona su actividad), el análisis realizado se centra en cuestiones más particulares: *¿Qué valoración puede hacerse del método desde el currículum de ESO? ¿Se ajusta el método al proyecto del centro?*

Para responder a estas preguntas, en primer lugar se ha analizado si el método aprovecha o no el entorno: en el protocolo implementado, y de manera más concreta durante el estudio de los conocimientos previos de los estudiantes (Anexo 1: de 1, 0:00 a 41, 6:16), la profesora formula una pregunta abierta para que los alumnos sean conscientes de las figuras que hay en el espacio concreto del aula: *"Bien, ¿me podéis decir algunas figuras que estén en el espacio de esta aula?"* Los estudiantes hacen referencia a diversos objetos, como un estuche, un libro, una caja que hay en el suelo, etc. Progresivamente, esas situaciones se van matematizando a través de modelos —que median entre lo abstracto y lo concreto— para formar relaciones más formales y estructuras abstractas (Heuvel-Panhuizen, 2002) hasta llegar, por ejemplo, a la fórmula de Euler.

En segundo lugar, si se pretende estudiar la vinculación entre el método y las bases psicopedagógicas del currículum vigente puede notarse que el método se ajusta perfectamente a la perspectiva sociocultural del aprendizaje humano, debido a que hay construcción autorregulada de un significado, el de poliedro regular, a partir de la interacción entre la profesora y los estudiantes, entre los mismos estudiantes, y entre los estudiantes y las figuras geométricas.

Respecto a los vínculos del método con el Proyecto Curricular de Centro, el protocolo se ajusta a los ejes básicos de su carácter propio. Así, el análisis confirma que el protocolo es comunicativo, tiene en cuenta a la comunidad educativa (en este caso, el aula y el entorno) y fomenta la participación y el respeto.

En términos generales, se constata que el protocolo implementado tiene un elevado grado de idoneidad ecológica a causa, sobre todo, del aprovechamiento del entorno al aula (Chevallard, 1992). Tal hecho no es novedoso, pues aparece en la mayoría de libros de texto actuales, pero es necesario e intrínseco a la perspectiva sociocultural (Vygostky, 1978; Wertsch, 1985, 1991).

5. Conclusiones

En este estudio se ha analizado la idoneidad didáctica de un protocolo para la enseñanza del concepto de poliedro regular, destinado a alumnos de 14 y 15 años. El protocolo se ha diseñado desde una perspectiva sociocultural, mientras que la evaluación se basó en la aplicación de los criterios de idoneidad didáctica que ofrece el EOS. El análisis detallado de cada una de las dimensiones ha permitido llegar a la conclusión que el protocolo implementado tiene un alto grado de idoneidad didáctica. Además, ha hecho posible la determinación de los principales factores que contribuyen a esta elevada idoneidad, los cuales destacamos a continuación:

- Es necesario que el profesor tenga una buena formación disciplinar y didáctica para alcanzar un alto grado de idoneidad epistémica, interaccional, mediacional y emocional, así como un buen conocimiento de la realidad, del contexto del centro y de sus estudiantes para impulsar las idoneidades cognitiva y ecológica.
- La perspectiva sociocultural en que se basa el protocolo ha favorecido, entre otros aspectos, el grado de idoneidad interaccional. Como se ha descrito, dicho enfoque del aprendizaje humano se sustenta en la interacción, la negociación y el diálogo como elementos fundamentales para la construcción autorregulada del conocimiento.
- El discurso proléptico y la interacción contingente, además de fomentar la idoneidad interaccional, han propiciado la idoneidad emocional del protocolo, ya que se trata de prácticas docentes que ayudan a crear un clima de aula emocionalmente positivo.
- El uso de material manipulable y el trabajo en grupo han influido también de forma positiva en la idoneidad emocional. Esta clase de recursos continúan siendo muy útiles y necesarios en la gestión de las actividades durante la ESO porque aumentan el grado de motivación de los alumnos y favorecen su aprendizaje.
- El grado de idoneidad emocional del protocolo ha permitido que los estudiantes inicien un aprendizaje significativo del concepto de poliedro regular, principal objetivo del protocolo.

Aunque los resultados obtenidos en este estudio no son concluyentes por su carácter exploratorio (muestra reducida, poco número de actividades para interiorizar el concepto de poliedro regular al tratarse de una sesión introductoria, etc.), el diseño de nuevos protocolos con base en una perspectiva sociocultural que pretendan favorecer el aprendizaje significativo de conocimientos matemáticos en la ESO deberían considerar los siguientes aspectos:

- *El discurso proléptico*: El procedimiento proléptico sitúa a los estudiantes en un contexto en el que el profesor asume que “saben más de lo que en este momento son capaces de hacer”. A partir de tal premisa, en su intervención pedagógica el profesor hace que surja el conocimiento previo de los alumnos a partir de preguntas-guía, y les ofrece ayudas para que lleguen –individual o colectivamente– a resolver la tarea. Se trata básicamente de propiciar prácticas de indagación que activen estrategias de inferencia y deducción.

- *La interacción contingente*: Concibe la educación como un proceso de reciprocidad, donde se entiende que enseñar implica conversar. En la dinámica interactiva que fundamenta una conversación destacan los deseos, intenciones y comportamientos de los participantes a lo largo de un intercambio que va conjugando las distintas aportaciones individuales en un constructo compartido.
- *El material manipulable*: La manipulación no es un valor educativo restringido a las primeras edades y propio de una educación matemática iniciática. La eficacia de la educación tiene que ver, en cualquier edad, con la satisfacción del aprendiz hacia las tareas que se le proponen. El uso de materiales, como hemos visto, beneficia tal satisfacción. Con todo, debe considerarse que, aunque se trata de una condición necesaria, no es suficiente; además, edades diferentes requieren usos distintos de los materiales.
- *El trabajo en grupo*: El aprendizaje será más rico si cada estudiante puede compartir y completar sus conclusiones con las del resto de compañeros.
- *Las inferencias inductivas y deductivas*: Hacer una matemática “desde abajo hacia arriba” permitirá partir de casos concretos y del entorno, así como realizar un proceso de abstracción a hacia hechos más generales con la mediación del profesor.

Para poder profundizar en las conclusiones anteriores será necesario llevar a cabo otras investigaciones que permitan, por ejemplo, estudiar la comprensividad de los protocolos y analizar qué variables habría que tener en cuenta en otros contextos sociales de aula, ya que es evidente que los resultados pueden ser diferentes en función del contexto. Todo ello, con el objeto de ofrecer herramientas de formación al profesorado de matemáticas de ESO que contribuyan a la consolidación de la teoría y de su operacionalización.

Referencias bibliográficas

Abrantes, P., Serrazina, L. y Oliveira, I. (1999). *A Matemática na educação básica.* Lisboa: Ministério da Educação.

Alsina, À. y Escalada, C. (2008). Educación matemática en las primeras edades desde un enfoque sociocultural. *Aula de Infantil 44,* 26-30.

Alsina, À y Planas, N. (2008). *Matemática inclusiva. Propuestas para una educación matemática accesible*. Madrid: Narcea, S.A. de Ediciones.

Alsina, À. y Domingo, M. (2007). Cómo aumentar la motivación para aprender matemáticas. *SUMA. Revista sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas 56,* 23-31.

Baroody, A. J. (1989). Manipulatives Don't Come With Guarantees. *Arithmetic Teacher 37* (2), 4-5.

Baroody, A. J. (2003). *The Development of Adaptative Expertise and Flexibility: the Integration of Conceptual and Procedural Knowledge.* In A. J. Baroody & A. Dowker (Eds.), *The Development of Arithmetic Concepts and Skills* (pp. 1-33). Mahwah, N.J.: Lawrence Erlbaum Associates.

Carr, W. y Kemmis, S. (1988). *Teoría crítica de la enseñanza. La investigación-acción en la formación del profesorado*. Barcelona: Martínez Roca.

Castro, C. de (2007). La evaluación de métodos para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en la Educación Infantil. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática 11,* 59-77.

Chevallard Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique: Perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques 12* (1), 73-112.

Corbalán F. y Deulofeu, J. (1996). Juegos manipulables en la enseñanza de las matemáticas. *UNO. Revista de Didáctica de las Matemáticas 7,* 71-80.

Cuadrado, I. y Fernández, I. (2008). ¿Cómo intervienen maestros y profesores para favorecer el aprendizaje en secundaria? Un estudio comparativo desde el análisis del discurso. *Infancia y Aprendizaje 31* (1), 3-24.

Denzin, N. y Lincoln, Y. S. (2003). *The Landscape of Qualitative Research. Theories and Issues.* California: Sage Publications, Inc.

Domingo, M. (2004) *Una aproximació a la construcció significativa del coneixement matemàtic a l'ESO*. Vic: Universidad de Vic.

Domingo, M. (2009) *La construcció significativa del coneixement matemàtic a l'ESO des d'una perspectiva sòciocultural*. Tesis de doctorado, Universidad de Vic.

Elliott, J. (1978). What is Action-Research in Schools? *Journal of Curriculum Studies 10,* 355-357.

Esteve, O. (2009) La interacción, un proceso que implica conversar. *Cuadernos de Pedagogía 391,* 56-59.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting Mathematics Education*. Dordrectht: Kluwer Academic Publishers.

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The Ontosemiotic Approach to Research in Mathematics Education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education 39* (1-2), 127-135.

Godino, J. D., Font, V. y Wilhelmi, M. R. (2006). Análisis ontosemiótico de una lección sobre la suma y la resta. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 9* (Número Especial), 133-156.

Godino, J. D., Contreras, A. y Font, V. (2006). Análisis de procesos de instrucción matemática basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques 26* (1), 39-88.

Godino, J. D. (1993). Paradigmas, problemas y metodologías de investigación en didáctica de la matemática. *Quadrante 2* (1), 9-22.

Godino, J. D., Font,V., Wilhelmi, M. R. y Castro, C. de (2009). Aproximación a la dimensión normativa en didáctica de las matemáticas desde un enfoque ontosemiótico. *Enseñanza de las Ciencias 27* (1), 59-76.

Gómez-Chacón, I. (1998). Una metodología cualitativa para el estudio de las influencias afectivas en el conocimiento de las matemáticas. *Enseñanza de las Ciencias 16* (3), 431-450.

Gómez-Chacón, I. (2000) *Matemática emocional: los afectos del aprendizaje matemático*. Madrid: Narcea, S.A. de Ediciones.

Heuvel-Panhuizen, M. (2002): Realistic Mathematics Education as Work in Progress. In Fou-Lai Lin (Eds.), *Common Sense in Mathematics Education. Proceedings of 2001 The Netherlands and*

Taiwan Conference on Mathematics Education (pp. 1-43). Taiwan: National Taiwan Normal University.

Ivic (1994). Lev Semionovick Vygotsky (1896-1934). *Perspectivas: Revista Internacional de Educación Comparada 34* (3-4), 773-799.

Katz, L. G. y Chard, S. C. (2000). *Enganging Children's Minds: The Project Approach*. Stamford, CT: Ablex.

Kilpatrick, J. (1988). Change and Stability in Research in Mathematics Education. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 5,* 202-204.

Lerman, S. (2000). The Social Turn in Mathematics Education Research. In J. Boaler (Ed.), *Multiple Perspectives on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 19-44), Westport, CT: Ablex.

Lerman, S. (2001). The Function of Discourse in Teaching and Learning Mathematics. *Research Perspective. Educational Studies in Mathematics 46* (1-3), 87-113.

Macnab, D. J. y Cuminne, J.A. (1992). *La enseñanza de las matemáticas de 11 a 16.* Madrid: Aprendizaje Visor.

Niss, M. (2002). *Mathematical Competencies and The Learning of Mathematics: The Danish Kom Project.* Roskilde, Denmark: Roskilde University.

Piaget, J. e Inhelder, B. (1975). *Psicología del niño*. Madrid: Ediciones Morata.

Planas, N. (2002). Enseñar matemáticas dando menos cosas por supuestas. *UNO. Revista de Didáctica de las Matemáticas 30,* 114-124.

Planas, N. e Iranzo, N. (2009). Consideraciones metodológicas para la interpretación de procesos de interacción en el aula de matemáticas. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 12* (2), 179-213.

Reeuwijk, M. Van (1997). Las matemáticas en la vida cotidiana y la vida cotidiana en las matemáticas. *UNO. Revista de Didáctica de las Matemáticas 12,* 9-16.

Romero, I. y Rico, L. (1999) Construcción social del concepto de número real en alumnos de secundaria: aspectos cognitivos y actitudinales. *Enseñanza de las Ciencias 17* (2), 259-272.

Schmittau, J. (2004). Vygostkian Theory and Mathematics Education: Resolving the Conceptual-Procedural Dichotomy. *European Journal of Psychology of Education 29* (1), 19-43.

Vygotsky, L. S. (1978) *Mind in Society. The Development of Hogher Psychological Processes*. Cambridge, MA: Harward University Press.

Wertsch, J. V. (1985). *Vygotsky y la formación social de la mente.* Barcelona: Paidós.

Wertsch, J. V. (1991). *Voces de la mente. Un enfoque sociocultural para el estudio de la acción mediada*. Madrid: Aprendizaje Visor.

Autores

Àngel Alsina. Facultad de Educación y Psicología. Universidad de Girona, Girona, España; angel.alsina@udg.edu

Marta Domingo. Facultad de Educación y Psicología. Universidad de Girona, Girona, España; marta_domingo_ballart@hotmail.com

Anexo 1. Transcripción de la sesión

Introducción

1, 0:00	P: Buenos días. Vamos a empezar un nuevo tema: las figuras en el espacio.
2, 0:23	P: Bien, ¿me podéis decir algunas figuras que estén en el espacio de esta aula?
3, 0:27	A1: Estuche.
4, 0:29	P: Un estuche, por ejemplo...
5, 0:31	A2: Un libro.
6, 0:32	P: Un libro...
7, 0:33	A3: Una maleta.
8, 034:	P: Una maleta...
9. 0:35	A1: Un cubo.
10, 0:36	P: Una caja con forma de cubo, ¿no?
11, 0:46	P: ¿Qué diferencia hay entre la caja y un lápiz, un estuche, una maleta, etc.?
12, 1:02	A4: La forma.
13, 1:04	P: ¿Qué significa la forma?
14, 1:07	A5: El cubo tiene caras.
15, 1:21	P: De acuerdo, un cubo está limitado por caras. ¿Cómo se llaman? ¿Qué es cada una de las caras de un cubo?
16, 1:29	A4: Son aristas.
17, 1:30	P: No. ¿Cómo son las caras?
18, 1:31	A6: Cuadradas.
19, 1:32	P: Las caras son cuadrados, pero ¿qué es un cuadrado?
20, 1:35	A7: Un polígono.
21, 1:36	P: De acuerdo. Entonces, hay algunas figuras en el espacio que tienen caras que son polígonos y otras que no. ¿Alguien se acuerda de cómo se llaman los lados de los polígonos?
22, 2:32	P: Antes alguien lo ha dicho... aristas. O sea, un cubo tiene caras, que son polígonos, y tiene aristas, que son los lados del polígono. ¿Qué más tiene un cubo?

23, 2: 36 A8: Vértices.

24, 2: 38 P: De acuerdo. ¿Qué son los vértices?

25, 2: 41 A9: (*No se entiende qué dice*).

26, 2: 45 P: Allí donde confluyen las aristas. Por lo tanto, podemos hacer un subconjunto con las figuras en el espacio que tienen caras, aristas y vértices.

27, 3:27 P: Es el subconjunto de los poliedros.

28, 3: 42 P: ¿Alguien sabría decir alguna otra figura que tenga caras, aristas y vértices?

29, 4: 02 A10: Una pirámide.

30, 4:04 P: Una pirámide...

31, 4: 05 A10: Un cono.

32, 4: 06 P: A ver, el cono no tiene aristas porque es un cuerpo de revolución, es un cuerpo diferente.

33, 4:10 P: Ocurre lo mismo con la esfera y el cilindro.

34, 4:14 P: Y quizás recordáis otros poliedros que hemos estudiado. Aparte de las pirámides, ¿no se os ocurre?

35, 4: 17 P: Cuerpos que tienen dos bases y las caras laterales.

36, 4: 30 A11: Un pentágono hexagonal.

37, 4: 33 P: Un pentágono hexagonal no, un prisma de base hexagonal. Los prismas tienen dos bases y diversas caras laterales, que son rectángulos.

38, 4:40 P: Por lo tanto, fijaos que en el subconjunto de los poliedros podríamos ir colocando muchos objetos.

39, 4: 59 P: Aquí tenemos construidos una colección de poliedros. Fijaos (*se muestra la bolsa con todas las figuras numeradas*).

40, 5: 17 P: Tienen caras, aristas y vértices. Vamos a estudiar estas figuras a partir de una tabla que iréis rellenando. Tendréis que investigar cuántas aristas tienen, cuántas caras, y escribir de qué forma son.

41, 6: 16 P: Y después, analizando las características de cada figura tendréis que deducir cuáles son regulares.

Trabajo en grupos

42, 6: 29	P: Cada grupo puede coger una bolsa de figuras. Vigilad porque están hechas con cartulina. Cuando hayáis rellenado la tabla pondremos en común lo que habéis encontrado. ¿De acuerdo? Pues va.
43, 9: 33	A12: Esta, por ejemplo, ¿qué sería?
44, 9:39	A13: En esta figura hemos contado como aristas también a éstas. ¿Lo hemos hecho bien?
45, 9: 45	P: Sí, son aristas. Las tienes que contar todas.
46, 10:00	A13: O sea, dieciocho, ¿no?
47, 10:04	P: Sí, seis más seis doce, más seis dieciocho.
48, 10:08	A13: ¿Entonces el número de aristas a cada vértice son éstas?
49, 10: 36	P: ¿Cuántas hay en cada vértice?
50, 10: 42	A14: Una, dos y tres…
51, 12: 49	A15: Ya verás, déjame a mí… Diecinueve.
52, 13:10	C: Veinte.
53, 13:12	A15: Ah, sí, veinte.
54, 13:14	A14: Pues veinte.
55, 13:17	C: Cuesta contarlas, ¿eh?
56, 14:06	A13: No, nos hemos equivocado.
57, 19:26	A12: ¡Da 10! Uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve y diez.
58, 20:18	P: Viendo todos estos números tenéis que llegar a una conclusión.
59, 20:25	P: Encontraréis unas características comunes, buscadlas. ¿Os gusta esta manera de hacer mates?
60, 22:01	A14: Sí, porque es una manera diferente de aprender.
61, 22:09	C: ¿Y tú, qué dirías?
62, 22:11	A15: No, que un trabajo así está muy bien, porque te lo pasas bien, y además aprendes.
63, 22:17	C: ¿Crees que se podría hacer así con todos los contenidos de matemáticas?
64, 22:36	A14: Sí, se podría intentar...
65, 22:42	C: Crees que si todas las clases fueran así acabaríais aprendiendo, ¿o sería mejor combinar esto con las clases tradicionales?
66, 22:46	A14: Es mejor así.

Puesta en común

67, 23:10 P: Todo el mundo al caso, por favor. Bien, vamos a comentar los resultados que hemos obtenido. A ver, teníamos una colección de figuras al espacio.

68, 23:20 P: Hemos visto un estuche, un libro, una maleta, una caja, y hemos hecho un subconjunto que son los poliedros.

69, 24:01 P: Hemos visto que los poliedros son cuerpos geométricos que tienen caras, aristas y vértices. A ver, por ejemplo, la gente de este grupo: el primer poliedro, ¿habéis descubierto qué tipo de poliedro es y qué nombre tiene?

70, 24:30 P: ¿Algún grupo sabe el nombre de este poliedro?

71, 24:36 A10: Pirámide cuadrangular.

72, 24:39 P: Vale, pirámide cuadrangular. De hecho aquí hay más de una, de pirámide... Por ejemplo, ¿algún grupo me puede decir qué otras pirámides hay?

73, 24:53 A15: Pirámide rectangular.

74, 24:57 P: Pirámide rectangular. ¿Qué número?

75, 25:00 A15: Es el número siete.

76, 25:03 P: El número siete es una pirámide, pero triangular.

77, 25:07 A9: El ocho, el ocho, el ocho.

78, 25:18 P: El ocho no es una pirámide.

79, 25:25 P: ¿Hay algún grupo que sepa qué figura es la ocho?

80, 25:40 P: Un prisma, ¿y de qué tipo?

81, 25:49 P: Es un prisma triangular. Por lo tanto, dentro los poliedros hemos encontrado pirámides y prismas.

82, 26:01 P: Aparte de estas pirámides y de estos prismas, básicamente este ejercicio estaba pensado para descubrir los poliedros regulares. A ver, ¿qué figuras habéis considerado que son poliedros regulares?

83, 26:25 A13: Ah, el número tres.

84, 26.31 P: El número tres. ¿Habéis sabido darle un nombre a esta figura?

85, 26:37 A13: El cubo.

86, 26:40 P: El cubo también se puede denominar hexaedro porque está formado por seis caras.

87, 26: 50 P: ¿Qué otro habéis encontrado?

88, 26:53 A13: El seis... el icosaedro.

89, 26:57 P: De acuerdo.

90, 27:00 P: Ya tenemos el icosaedro y el cubo. ¿Podéis decir los otros?

91, 27: 03 A7: Una pirámide... el diez.

92, 27: 10 P: El diez es una pirámide... recibe el nombre de tetraedro.

93, 27: 21 P: ¿Qué otro?

94, 27: 28 A2: El once. El octaedro.

95, 27:39 P: Muy bien.

96, 27:56 P: ¿Alguno más?

97, 27:59 A6: Sí, el trece es un dodecaedro.

98, 28:03 P: El trece, el dodecaedro.

99, 28:18 P: Habéis localizado los cinco poliedros regulares. ¿En qué os habéis basado para decir que éstos son los cinco poliedros regulares?

100, 29:40 A14: Que tienen todas las caras iguales, y que las aristas a cada vértice y el número de caras a cada vértice valen igual.

101, 29:52 P: Muy bien. O sea, estas serán las dos características a partir de las que podemos definir un poliedro como poliedro regular. El poliedro regular tiene las caras iguales, en un caso serán triángulos, en otro hexágonos, en otro caso serán cuadrados... y además en los vértices confluyen el mismo número de aristas y de caras.

102, 30:50 P: A ver, en la tabla, aparte de contar los vértices, las aristas y las caras, os hacía buscar qué número salía al restar las aristas de los vértices y sumar las caras. ¿Qué habéis observado?

103, 30:59 A13: Que todos daban igual.

104, 31:02 P: Que todos daban igual. ¿Y cuál era este número que daba igual?

105, 31:06 A13: Dos.

106, 31,08 P: Dos.

Maria Aparecida Viggiani Bicudo, Mauricio Rosa

EDUCAÇÃO MATEMÁTICA NA REALIDADE DO CIBERESPAÇO – QUE ASPECTOS ONTOLÓGICOS E CIENTÍFICOS SE APRESENTAM?

MATHEMATICS EDUCATION A REALITY OF CYBERSPACE – WHAT ARE THE ONTOLOGICAL AND SCIENTIFIC ASPECTS?

RESUMEN. La pregunta que guía este artículo es "¿Qué es este espacio virtual en el proceso de la Educación Matemática en línea?" Nos centramos en la cuestión de lo real y lo virtual donde los asuntos son tomados como constitutivos del ciberespacio. Investigamos estas nociones en la historia de la filosofía, buscando su significado en Granger, para poder entenderlos y adecuarlos en el ámbito de la Educación Matemática. Así, afirmamos, en este artículo que la teórica y la filosófica de la virtualidad del ciberespacio se sustentan en la pantalla de la información, construido por la unificación de las ciencias (Matemática), la tecnología y sus aplicaciones. Los programas de computación y las medidas adoptadas por los sujetos (Internet) actualizan la capacidad de estos programas en una variedad de características y posibilidades, así como las interconexiones del espacio-tiempo fluido, también durante el proceso matemático educativo.

PALABRAS CLAVE: Educación Matemática, ciberespacio, realidad virtual.

ABSTRACT. The question that leads this article is "What is this virtual space in the on-line mathematics education process?" We focus on the question of the real and virtual as issues taken as components of cyberspace. We investigate these notions in the history of philosophy, looking to Granger to find their meaning, to enable us to understand them and fit them into the sphere of Mathematics Education. This theoretical-philosophical article, then, claims that the virtuality of cyberspace is supported by the computer screen, built by the unification of the sciences (mathematics), technology and its applications. Software and the actions taken by Internet users update the capability of these programs in a variety of characteristics and possibilities such as space-time flow interconnections as well as during the mathematics education process.

KEY WORDS: Mathematics Education, cyberspace, virtual reality.

RESUMO. A pergunta que orienta este artigo é "O que é este espaço virtual no processo de Educação Matemática online?" Focalizamos a questão do real e do virtual enquanto aspectos tidos como constitutivos do ciberespaço. Investigamos estas noções na história da filosofia, buscando seus significados em Granger, para entendê-los e adequá-los na esfera da Educação Matemática. Assim, este artigo teórico-filosófico afirma que a virtualidade do ciberespaço está sustentada na tela informacional, construída pela unificação da ciência (Matemática), da tecnologia e suas aplicações. Os programas computacionais e as ações efetuadas pelos sujeitos (internautas) atualizam a

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (2010) 13 (1): 33-57.
Recepción: Marzo 9, 2009 / Aceptación: Febrero 1º, 2010.

potencialidade desses programas numa multiplicidade de características e possibilidades, assim como as interconexões do fluxo espaço-temporal, também durante o processo de educação matemática.

PALAVRAS CHAVE: Educação Matemática, ciberespaço, realidade virtual.

RÉSUMÉ. La question centrale de cet article est la suivante : « comment définir l'espace virtuel présent dans le processus de l'Didactique des Mathématiques en ligne? ». Nous avons basé notre réflexion sur les différences entre réel et virtuel où la problématique est considérée comme constitutive du cyberespace. Nous avons procédé à des recherches sur ces notions dans l'histoire de la philosophie et nous avons cherché leur signification chez Granger. Ceci nous a permis de les comprendre et de les adapter au domaine de l'apprentissage des mathématiques. En conséquence, nous affirmons, dans cet article, que la partie théorique et philosophique de la virtualité du cyberespace repose sur les informations affichées sur un écran, lui-même produit des sciences (Mathématiques), de la technologie et de leurs applications. Les programmes informatiques et les décisions prises par les sujets (internautes) actualisent les capacités de ces outils informatiques, les caractéristiques et les possibilités d'actualisation étant multiples ainsi que les interconnections au sein du continuum espace-temps pendant le processus éducatif des mathématiques.

MOTS CLÉS: Didactique des Mathématiques, cyberespace, réalité virtuelle.

1. Questões levantadas a respeito da realidade do espaço virtual

A pergunta que levantamos e que nos manteve no caminho da investigação deste tema é 'o que é isto, a realidade virtual no processo de Educação Matemática Online?'.

Ora o que estamos querendo dizer com essa pergunta? Nossa intenção é compreender o significado de realidade quando se trabalha em educação, notadamente a Educação Matemática, com a realidade do ciberespaço. Compreendendo que a concepção ontológica sustenta modos de proceder em geral, como na ciência, na religião, no cotidiano etc., portanto, inclusive na educação. Dessa forma, no texto trazemos considerações e argumentos sobre aspectos ontológicos da realidade em que se vive no ciberespaço e sobre questões de âmbito pedagógico.

O sentido da primeira parte dessa indagação é compreendido no conjunto dos trabalhos de autores que tratam do mundo cibernético e abordam questões sobre realidade, conhecimento, e outros temas significativos, como Castells (2005), Lévy (1995), Turkle (1989, 1997), Likauskas (2005), Lopes (2005), entre outros. Com os autores que tratam desse assunto, é apresentada a concepção de que a realidade virtual não se refere à realidade do espaço e tempo comum, mas que se trata de algo diferente. A dificuldade de nomeá-la é tão grande que o nome atribuído é Realidade Virtual (RV) seguido de descrições a respeito de suas características.

Perguntamos, então, como compreender o 'onde' ocorrem as relações intersujeitos estabelecidas no ciberespaço? Quais são suas características e como o espaço virtual é constituído? É possível trabalhar pedagogicamente em relação à matemática, situando-nos no ciberespaço? Buscamos, com essas perguntas, caracterizar a RV e, então, abordar a possibilidade de trabalhar pedagogicamente com a matemática, situando-nos no ciberespaço. Essa busca tem como norte as indagações que aparecem ao fixarmos nosso olhar sobre a segunda parte de nossa questão principal, ou seja, ao contextualizamos a Educação Matemática Online.

Para darmos conta dos questionamentos levantados, realizamos uma pesquisa em autores que escrevem sobre cibernética, em textos de filósofos que falam de aspectos do real e do atual concernentes à realidade assumida de um ponto de vista ontológico, notadamente na ciência. Lévy (1995), por exemplo, discute o que é virtual e Lévy (2000a) debate aspectos da cibercultura, a qual, segundo ele, *"[...] expressa o surgimento de um novo universal, diferente das formas culturais no sentido de que ele se constrói sobre a indeterminação de um sentido global qualquer"* (Lévy, 2000a, p.15). Esse autor levanta questões acerca de aspectos do ciberespaço como virtualidade e cibercultura, abordados em diferentes dimensões. Nós focamos ainda a Educação Matemática Online, uma vez que esse tema tem se revelado como significativo e relevante. Significativo no campo da pesquisa e da prática educacionais, na medida em que são levantadas questões sobre: aprendizagem, relação aluno-professor-computador, construção do conhecimento em rede, dentre muitos. Relevante, pois o leque de aspectos tratados por diferentes autores, ao redor do mundo, é amplo, o que pode ser constatado em Dye (2000), Hutchinson (2002), Engelbrecht & Harding (2004, 2005a, 2005b), Santos & Borba (2007), Borba & Malheiros & Santos (2007), Rosa & Maltempi (2008), Borba & Llinares (2008) e Lezama (2008), por exemplo.

Entretanto, ao falar de Educação Matemática online, entendemos que esse campo ainda se mostra como novo em termos de investigações que foquem o "como fazer" e que o transcendam, explicitando características dos modos de se estar conectado à rede de computadores (World Wide Web - WWW) em atividades que privilegiam a educação, em específico a Educação Matemática. Conforme Engelbrecht & Harding (2005a, p.253), *"Internet education in mathematics is developing as a new mode of teaching with its own characteristics and possibilities, different from any traditional way of teaching"*. Vemos que a Internet cria possibilidades e características próprias para o ensino de matemática. Borba & Llinares (2008, p.191) levantam questões sobre o processo de Educação Matemática Online ao, por exemplo, perguntarem: *"What are the different models of organizing online courses, and what are the consequences for learning* *mathematics, learning knowledge for teaching and constituted communities of learning?"*. Essas questões têm servido de base para a realização de muitas pesquisas sobre a formação de professores de matemática que atuam em ambientes online em programas de educação a distância (EaD). Além disso, as pesquisas geradas em torno dessas perguntas podem dar sustentação e alimentar discussões em cursos que já estão em operação há mais de sete anos e que, em um dado momento, passam a ser online, como a Pós-Graduação em Educação Matemática Online do Instituto Politécnico Nacional no México (Lezama, 2008).

Compreendemos que a comunicação via rede de computadores é um dos aspectos diferenciados e com características próprias trazidas pelo mundo cibernético à Educação a Distância online e, conseqüentemente, à Educação Matemática online. Especificamente, a comunicação via rede ocorre em dimensões espaços-temporais que não se deixam aprisionar em explicações da ciência positivista, pontuando o espaço e marcando o tempo. Dadas as dificuldades de se explicar essas dimensões, o tempo é abordado como intemporal, cuja idéia pode ser compreendida com Castells (2005):

> [...] a temporalidade dominante de nossa sociedade, ocorre quando as características de um dado contexto, ou seja, o paradigma informacional e a sociedade em rede causam confusão sistêmica na ordem seqüencial dos fenômenos sucedidos naquele contexto. Essa confusão pode tomar a forma de compressão da ocorrência dos fenômenos, visando à instantaneidade, ou então de introdução de descontinuidade aleatória na seqüência. A eliminação da seqüência cria tempo não-diferenciado, o que equivale à eternidade (Castells, 2005, p. 556).

A temporalidade da comunicação via rede de computadores sugere, também, uma espacialidade diferenciada, a qual se destaca como outro aspecto particular, pois segundo Machado (2005):

> A educação online torna livre o espaço no qual o conhecimento é construído. Nos ambientes virtuais e das telecomunicações praticamente não há limites impostos por políticas e legislação dos Estados. Se todos os alunos estão em um mesmo espaço virtual, mesmo que geograficamente separados, é difícil estabelecer a dimensão da distância no âmbito da educação online, mesmo porque não existe distância a ser percorrida (Machado, 2005, p. 2).

Logo, temporalidade e espacialidade, e outros aspectos relacionados a essas concepções e modos de dispormo-nos ao mundo, interferem na concepção de realidade virtual, como tratada pela literatura vigente sobre esse assunto, a qual será objeto de nossa discussão no âmbito da Educação Matemática.

Além da temporalidade e espacialidade, mencionamos também os "modos de sermos" nessa espacialidade e temporalidade, os quais se mostram em processos de relacionamentos entre pessoas via rede, que se estendem em dimensões de sociabilidade online e que são passíveis de ser compreendidos em estudos da geração net (Rosa, 2008). Há inúmeros grupos que possuem, mesmo estando à distância, vínculos sociais, os quais se mantêm de acordo com seus interesses, muitas vezes, profissionais e educacionais. Salas de bate-papo tornam-se locais para a troca de informações, para a construção de conhecimento e para o desenvolvimento de novas amizades. São locais onde são promovidos diversos encontros, os quais mantêm uma sociabilidade mediada pelo computador, via rede de computadores. Dornelles (2004) garante essa sociabilidade quando diz:

> Pesquisando a sociabilidade mediada por computador e realizada via internet, a partir de chat de comunicação, percebi uma série de questões. A principal delas talvez seja o estreitamento das dimensões on e off-line, que marca a vivência dos internautas. O chat adquire o status de lugar, como se fosse um entre tantos outros pontos de encontro da cidade. A vivência do indivíduo no ciberespaço é tão dramática, emotiva e complexa quanto à interação face a face.

Modos de viver tempo e espaço, estabelecendo interações no ciberespaço também possibilitam novas formas de diversão e entretenimento, abertas pela simulação potencializada pelo computador como fonte de aprendizagem, uma de suas muitas faces.

Segundo Turkle (2005):

> Os virtuosos dos computadores sempre tinham explorado os sistemas informáticos desta forma experimental, "lúdica". [...] tipo de aprendizagem através da exploração [...] [na qual] as pessoas aprendiam a aprender através da acção directa e das respectivas consequências (Turkle, 1997, p. 51).

Essas colocações e argumentações nos fazem debater a respeito da RV e sua presença na Educação Matemática, de forma a perguntamos "que realidade é essa?" e "em que ela influencia, mobiliza, interfere, ou seja, marca o processo de Educação Matemática?" Seguindo essa linha de raciocínio, também perguntamos "quais são os horizontes que essa 'nova' realidade vislumbra para os processos de ensino e aprendizagem de matemática?

A começar, sabemos que o que é projetado na tela de um computador e a força de ações possíveis de serem desencadeadas e efetuadas é a mesma realidade mundanamente vivida com as pessoas. Apenas nos deparamos com dimensões e características diferenciadas de o real ser.

Realidade mundana concerne à realidade vivida no mundo[1] onde sempre nos encontramos, conforme o explicitado por Heidegger (1988) em “Ser e Tempo”. Para esse autor somos “seres-aí-no-mundo-com”, expressão que conecta as palavras por hífens e cujo conceito diz de uma totalidade “ser-aí-no” – entendido como um ser de possibilidades que se efetuam no aí, abertura para modos de viver espaço e tempo na circunvizinhança onde está sempre com os outros. Mundo entendido como abertura que também se realiza espacial e temporalmente, materializando-se como um solo histórico e cultural que nos permite compartilhar experiências em diálogos diretos, dos quais a fala do corpo, pelos gestos, é importante para a compreensão do dito, do intencionado, do compreendido, do interpretado e do comunicado.

Desviando o olhar das experiências em suas diferentes modulações que ocorrem em contatos presenciais diretos e focando-as na RV vemos que entre as pessoas são estabelecidos relacionamentos de diferentes modalidades. A um primeiro olhar, nós tendemos a conceber os relacionamentos assim estabelecidos como sendo diferentes daqueles que se dão em diálogos diretos, quando o outro é percebido em seu copo-encarnado[2], ou seja, como uma totalidade, que sente, fala, se locomove intencionalmente. Totalidade essa exposta pelos gestos e palavras acompanhadas de nuanças afetivas, de amor, ódio, medo, etc. Tendemos a caracterizar a comunicação que ocorre na RV como expressa pela linguagem estruturada pela lógica que sustenta os programas computacionais, imprimindo distanciamento e objetividade à comunicação intersubjetiva.

Entretanto a um olhar mais demorado, compreendemos que essas relações são mantidas por objetivos diversificados. Tratam-se de relações diversas, como: de afeto, comerciais, de troca de informações, de busca de pares para certos objetivos, como construção de conhecimento sobre um tema específico, jogos, relações de ensino e de aprendizagem, de psicoterapia. Englobam atividades que conduzem a uma profunda percepção de si pela percepção do outro, visto como igual, ou seja, como corpo-próprio, encarnado, estando lá, junto ao seu computador e comigo, ligado pela comunicação via computador; e a minha própria percepção sobre mim

---

[1] Mundo não é um recipiente, ou uma coisa, mas um espaço que se estende na medida em que as ações são efetuadas e o horizonte de compreensão se expande, enquanto o sentido vai se fazendo Merleau–Ponty (1994) concebe o corpo-próprio como totalidade que realiza sempre um movimento intencionado, visando a dar conta de exigências percebidas ao estar junto ao mundo ou à necessidade de efetuar escolhas viáveis consideradas no âmbito do leque de “possíveis” antevistos.para cada um.

[2] Merleau–Ponty (1994) concebe o corpo-próprio como totalidade que realiza sempre um movimento intencionado, visando a dar conta de exigências percebidas ao estar junto ao mundo ou à necessidade de efetuar escolhas viáveis consideradas no âmbito do leque de “possíveis” antevistos.

mesmo, que estou aqui, junto ao meu computador e com ele, o outro, que está lá e com quem me comunico também via computador. São relacionamentos estabelecidos com tal intensidade que pessoas se envolvem, apaixonam-se pelo que estão fazendo ou pelos personagens presentes aos diálogos ou às situações vividas por meio da mídia e com a mídia (Rosa, 2008).

Compreendemos, também, que essas interações são marcadas por dimensões temporais que não seguem a lógica do tempo linear. Elas podem ocorrer em um mesmo tempo cronológico, desde que se tome algum referencial como parâmetro, como, por exemplo, 10 AM de Nova York, e em tempos cronológicos diferentes, quando as pessoas respondem aos e-mails em outros momentos horas, dias, etc., mas tendo como articulação o enredo colocado na correspondência emitida.

Nesse movimento de ser-aí-no-mundo-com-o-outro, quando o mundo é assumido como a efetivação das possibilidades que se abrem mediante ações cujas práticas, relacionamentos, compreensões, comunicações se materializam histórica e culturalmente, também são englobadas as experiências vividas em um mundo constituído por bytes. Demorando nosso olhar nesse mundo, vemos que as possibilidades de ações e compreensões ao se estar-com-o-outro e no aí, ou seja, na abertura do mundo, se desdobram e ampliam. É possível criar cenários de maneira livre, sem a presença de obstáculos que se levantam na dimensão do apenas presencial e que se configuram nas dimensões de tempo e de espaço pontuais.

Compreendemos a RV como um modo de viver a vida na dimensão do humano, cujas relações se presentificam nessa dimensão da realidade e se dão em um espaço mundano caracterizado em termos do espaço-tempo concebido nos moldes da Física Contemporânea, cuja materialização é possibilitada pelas tecnologias. Nós a compreendemos como um modo de viver a vida na dimensão do humano, como ela é, mesmo que as relações presentificadas nessa dimensão da realidade se dêem em um espaço mundano que deve ser caracterizado em termos do espaço-tempo possibilitado pelas tecnologias e concebido de modo diferente daquele que a física clássica compreende.

Focando processos educacionais online, temos que um espaço configurado pelo “ser-com-tecnologias” acolhe diferentes formas de produzir o conhecimento e, no caso específico de educadores matemáticos, conhecimento matemático. Entendemos, ainda, que há uma potencialização que age na dialética estabelecida entre sujeito (s) da aprendizagem e tecnologias. Com isso, o processo de ensino e de aprendizagem realizado no âmbito da Educação Matemática, trabalha as possibilidades ampliadas de percepção, compreensão dos objetos matemáticos e de modos de produzir conhecimento. Afirmarmos que os programas computacionais e as ações efetuadas pelos sujeitos (internautas[3]) atualizam a potencialidade desses programas em uma multiplicidade de possibilidades, de interconexões espaço-temporais fluídas, as quais na realidade do ciberespaço amplificam o processo educacional matemático.

A seguir passamos a especificar pontos importantes das afirmações acima expostas, buscando dar maior visibilidade e sustentação às idéias articuladas sobre RV em termos de aspectos ontológicos e científicos e possibilidades que se abrem à Educação. Primeiramente, desdobraremos as concepções ontológicas e científicas que se mostram ao se estudar a realidade do espaço virtual. Depois, trataremos dos aspectos concernentes à Educação.

2. Como se constitui a realidade do ciberespaço?

O 'onde', isto é, a realidade em que ocorrem as experiências subjetivas e intersubjetivas pela e com a mídia é tido pelos autores que tratam da RV como não sendo real, uma vez que não está configurado nas dimensões do espaço do mundo físico, tal como é concebido segundo as concepções da física clássica. Nessa concepção, espaço é tido como uma realidade em si, objetiva, onde estão colocadas as pessoas e as coisas e onde ocorrem os acontecimentos históricos e sociais. É concebido em três dimensões: altura, largura e profundidade. O gráfico cartesiano, com duas entradas, uma referente ao espaço e outra do tempo, viabiliza a localização exata do acontecimento ou o lugar em que um objeto se encontra.

Ponderamos que o *onde* do mundo cibernético não cabe nesse espaço assim concebido, por diferentes razões. Não se trata de um espaço físico, que acolhe pontualmente pessoas e inter-relações, pois se expande por conexões que não se encaixam no gráfico cartesiano. São conexões velozes e que se bifurcam, criando outras conexões, atingindo outros espaços físicos, gerando múltiplas possibilidades de relações, configurando realidades possíveis, projetadas, inventadas. A concepção que vai aos poucos se formando é que se trata sim de uma realidade na qual o espaço é visto como sendo diferente daquele a que se está acostumado no cotidiano e que se pauta nas concepções já mencionadas.

Por perceberem a diferença e também por entenderem que há um espaço onde *os encontros ocorrem*, os autores que falam sobre RV acabam por denominar esse

[3] Refere-se ao usuário da Internet, aquele que a usa para comunicação, pesquisa, trabalho, lazer (Kenski, 2007).

espaço como *espaço virtual*, diferenciando-o do *espaço real,* no sentido de que esse virtual é de natureza diferente daquela do real. É, assim, trazido um sentido de haver dois espaços e tempos, dois mundos – o virtual e o real. Esse sentido é corroborado por expressões, também comuns aos que estudam questões relativas ao mundo da Internet, como “novo virtual”. Mas, perguntamo-nos: haveria um “novo virtual” ou temos apenas e tão somente atualizações de uma realidade que vai se definindo à medida que se atualiza em sua materialidade e possibilidade de tornar-se? E ainda nos perguntamos: na esfera da educação, que necessariamente abrange aquela da ética, quais as compreensões que se abrem, em termos de práticas pedagógicas, ao assumir-se uma ou outra concepção?

Na história da filosofia a questão do virtual e do real é tematizada há longa data. O tema do virtual transcende os aspectos pragmáticos de focar-se o real apenas como lugar com características geofísicas e de concretude palpável e manipulável. Trata-se de uma questão ontológica, quando a interrogação que se põe é sobre ‘*o que é isto, o real*?’ E é sob esse foco que as questões do virtual, do real, do atual, do possível, do provável, da potência, do ato se colocam. Dizem, todas elas, a respeito da interrogação sobre o real ou sobre o modo de ser do real, isto é, da realidade. Filosoficamente, essa interrogação sempre foi de caráter ontológico. Entendemos que a realidade materializada pelo ciberespaço, também deva ser tratada nessa dimensão, pois o ciberespaço é um dos modos de nos colocarmos junto ao mundo e aos afazeres mundanos.

Um dos autores importantes na história do pensamento ocidental e que tem sido muito citado é Aristóteles. Os dois pares “potência e ato” e “forma e matéria” que, para ele, dão conta de explicar o real têm sido repetidamente referidos tanto na esfera da filosofia, como na da ciência, e ultimamente naquela da realidade que se mostra no ciberespaço.

Para Aristóteles o real é explicado como um movimento constante de potência e ato, forma e matéria enunciado como dois pares: “potência e ato” e “forma e matéria”. Porém esses pares não são tidos como sinônimos ou similares em termos de suas características concernentes ao “ser”. O real oscila entre uma potência pura, que não é, pois não está atualizada, e uma forma pura, que nada tem de matéria. A potência vem a ser pela força do ato e pelas especificidades da matéria que se mostram apropriadas a receber a forma. Assim, por exemplo, a forma da esfera de bronze, que é a forma esférica, não nasce quando se cria a esfera de bronze; o que nasce é a união de uma forma esférica com o bronze. “Esse ser em potência, convertido em ser em ato depois de haver recebido a forma, é propriamente o que Aristóteles chama matéria. Este é o conjunto das condições que devem ser realizadas para que a forma possa aparecer” (Brehíer, 1962, p. 375).

Um modo de se trabalhar essas relações presentes ao processo de acontecimento da realidade, abrangendo modalidades como virtual, possível e provável que tornam a relação daqueles dois pares aristotélicos mais complexos, é conceber-se a relação "atual" – o que já se atualizou mediante a força do ato que se une com especificidades da matéria – e o "não-atual", o que ainda não se tornou. Granger é um autor contemporâneo que explicita essa relação, buscando também esclarecer o pensamento objetivo e singular da ciência, abrindo, com essa sua exposição, possibilidades de compreender-se ontologicamente um sentido possível de real. Conforme nosso entendimento, o correlato "atual – não atual" e as três modalidades do não-atual – virtual, possível e provável – permitem avançar na compreensão da ciência, caminhando em direção àquela da tecnologia e da realidade do ciberespaço.

Virtual designa o não-atual, considerado essencial e progressivamente em si mesmo, do ponto de vista do seu estado negativo, sem visar à relação com o atual. O virtual é radicalmente distinguido do imaginário, em termos de sua função. Há uma articulação possível entre imaginário e virtual cognitivo, cujo exemplo pode ser dado pela literatura. Mas Granger diz que, em suas funções cognitivas, o virtual permanece em perspectiva da aureola afetiva, sobre a qual repousa os valores estéticos, como produto do espírito, desse mesmo que cria a ciência, a qual reavalia os atos da imaginação.

Possível, também caracterizado como não-atual, mas Granger nos diz que a relação do possível com o não-atual, ora é colocada como nuança da potencialidade, ora é disfarçada sob a forma do abstrato, cuja distinção é experienciada com a linguagem quando esta expressa enunciados assertóricos – hoje chove – em oposição aos modais de possibilidade – hoje poderá chover. O possível pode ser distinguido como simbólico, por exemplo $\sqrt{-1}$, e como positivo categórico, por exemplo, age com base em uma máxima que também possa ter validade como uma lei universal.

O *provável* é um não-atual passível de ser compreendido de modo mais abrangente em sua relação com a atualidade. É como se fosse uma pré-atualidade, podendo ser designado como um grau da esfera do atual. Admite efeitos em graus de atualidade. O desenvolvimento de uma concepção extensiva desses graus permite uma interpretação objetiva de onde será necessário precisar a legitimidade do alcance. Isso pode ser efetuado por meio de cálculos probabilísticos, porém estes exigem uma determinação sistêmica já presente no quadro teórico, enquanto probabilidade.

Virtual e provável aparecem como categorias fundamentais do pensamento científico sobre o mundo. A matemática, solo em que a ciência moderna ocidental assenta suas raízes, tem como base o virtual, uma vez que os conteúdos formais da lógica e da matemática tratam do virtual, pois são conteúdos não-atuais, enquanto abstratos e não realizáveis, como tal, no campo da experiência sensível. Para serem realizados, ou seja, para que se tornem atuais, precisam contar com um conjunto de condições que devem ser realizadas para que a forma (conteúdos formais da lógica e da matemática) possa aparecer. Que condições seriam essas? Isto é, qual matéria seria a apropriada para essa atualização? A resposta a essas condições exige que se compreenda a dialeticidade do movimento que efetua a passagem do não-atual ao atual. Essas condições são dadas pelo aparato instrumental e tecnológico à disposição, dada sua construção na historicidade mundana, pela força dos atos que imprimem o movimento e que se dão na esfera da procura por soluções de problemas e compreensões de ocorrências que se presentificam na esfera do atendimento à lógica da produção e de outras situações conflitantes mundanamente humanas.

Granger afirma que, nas abstrações da Matemática, as formas não são extraídas da experiência, esta tomada apenas em sua empiricidade objetiva, mas das formas em geral, constituindo um domínio mais amplo que abrange invariantes não atualizados dessas formas e, eventualmente, abrange também as formas dos objetos empiricamente atualizáveis, passíveis de atualização. Afirma ser isso "que é denominado de virtual". Por que?

Esse "porquê" é passível de ser entendido no âmbito da compreensão da constituição da idealidade dos objetos matemáticos, como exposta no pensamento fenomenológico, notadamente com Edmund Husserl (Husserl, 1970). Trata-se de uma idealidade constituída na conexão subjetividade-intersubjetividade-objetividade em que os atos da consciência se atualizam compreendendo, interpretando e organizando o percebido na relação homem-mundo e que vão se expressando pela linguagem por meio da qual se estabelecem ao mesmo tempo o diálogo entre co-sujeitos e a sedimentação em movimento, isto é, não estática disso que foi assim percebido, compreendido, interpretado e comunicado na historicidade da cultura. Nesse processo, a empiricidade objetiva dá lugar à experiência percebida que leva adiante o movimento de constituição das idealidades. Essas são geradas geneticamente no processo da constituição referida em que um dos núcleos constituintes se encontra nos atos de abstração. Estes, os atos de abstração, separam o diferente do igual e contribuem para o ato de idealizar, ou seja, de projetar formas sustentadas pelos aspectos abstraídos, abrindo espaço para a ocorrência da idealização. Porém, a idealização exige mais do que essa síntese efetuada por atos da abstração. Exige que o percebido em perfis, reunido pela abstração, desdobrado em síntese intencional, seja mantido em uma materialidade não fixa que assegure sua existência objetiva. Essa materialidade em movimento é propiciada pela linguagem e pela tradição, uma vez que carrega consigo possibilidades de compreensões e de interpretações, de abertura para o passado e para o futuro e, no presente, de ações que desencadeiam constituições de novos objetos.

As idealidades fenomenológicas diferem da concepção de idealidade concebida pela filosofia platônica, vista como realidade existente, ontologicamente, de modo perfeito no mundo supramundano ou, como denominado, mundo das idéias (Bicudo, 2003). As idealidades fenomenológicas são livres, pois independem do ato original que as constituíram pela primeira vez. Transcendem a subjetividade dos atos intencionais do sujeito; mantêm-se na temporalidade sustentada pela linguagem, e abrem possibilidades de complementaridade, aplicabilidade, de mobilidade na cadeia de suas articulações.

Portanto, afirmar que as formas matemáticas não são extraídas da experiência quer dizer que elas não decorrem diretamente da experiencia sensório-empírica dada de modo particular e individual, uma vez que aquelas formas se constituem como objetos matemáticos cujo modo de ser é o da idealidade. Na medida em que assim se comporta, a Matemática advém como a ciência das formas em geral (Husserl, 1978), o que abre possibilidades de acolher as formas particulares. Nesse aspecto, dá-se a característica de seu modo de ser virtual. Ou seja, por ela ser a ciência das formas em geral, lhe é conferido o caráter de ser virtual.

Como tal ela, a Matemática, por trabalhar com formas e suas operações, dá sustentação às práticas técnicas e produções tecnológicas e delas se nutre, constituindo, mediante abstrações e processos de idealizações, formas. Sua virtualidade diz do seu modo de ser real. Assim, ao compreender esse raciocínio também podemos compreender como se dá o modo de ser real do ciberespaço. Esse mundo é constituído por relações de subjetividade-intersubjetividade-objetividade que se sustentam e se atualizam na estrutura tecnológica a qual, por sua vez, atualiza possibilidades presentes nas formas matemáticas. Ai se encontra a complexidade que a expressão “realidade virtual”, como utilizada comumente na literatura do ciberespaço, não dá conta. Essa denominação não significa um “novo virtual”, mas apenas uma simplificação muito grande e perigosa do virtual que se opõe ao real. Seguindo o raciocínio desenvolvido, temos que a realidade vivida e produzida na dimensão do ciberespaço e o real, que abrange também as modalidades do virtual, provável e possível, não são duas idéias ou conceitos distintos. São modalidades da realidade mundana.

A mesma relação é constatada entre as formas (virtuais) matemáticas e a construção de equipamentos e de máquinas tecnologicamente complexas, como por exemplo, aviões e foguetes (materialidade), sem que sejam identificadas todas sob um nome genérico de “realidades virtuais” ou “realidades materiais”. Essa relação também se dá entre a matemática – ciências das formas em geral - e as ciências empíricas – ciências que estudam o empiricamente observado, explicado e previsto em termos de cálculos probabilísticos. Encaminhamo-nos para a constatação de que o “não-atual” solicita ações e materialidades específicas para tornar-se “atual”.

No caso das ciências empíricas, a ligação entre o virtual das formas e o atual nas ciências empíricas dá-se mediante o referencial. Este é abrangido pela reunião entre as formas em geral, matemáticas, e a situação em que um objeto é tido como unívoco e completamente referente ao quadro das formas, dadas as coordenadas. Assim, o objeto a ser determinado está enredado em um número finito de elementos. Entretanto, ainda se dando como não-atual. É completamente determinado como tal objeto no referente, carecendo, porém, de ações operacionais, de aparato material, entendido como a materialidade, de instrumentos e técnicas disponíveis para que sua atualização se dê. Donde o objeto atual não ser determinado completamente no referencial.

Desse modo, o referencial aparece como uma tela de formas meio soltas, isto é, não bem amarradas, definindo o quadro ou o formato dos elementos retidos e descritos como atuais. O fato empírico, entretanto, está amarrado aos referenciais das ciências empíricas e se deixa descrever completamente por uma rede determinada.

O referencial, o qual aparece como uma tela meio solta, se comporta como uma estrutura pressuposta de fatos virtuais, possibilitados pela reunião da realidade virtual da Matemática com o aparato material e de recursos tecnológicos. Isso quer dizer a “realidade virtual da matemática” se dá como uma forma vazia (não-atual) que se atualiza (se torna atual) mediante a sua reunião com uma materialidade apropriada à atualização em movimento pelo ato desencadeador de ocorrências.

Assim, a noção de referencial, de um lado, funciona como um quadro de descrição para a experiência e, de outro, ela se apresenta para os fatos atuais como um sistema de conceitos operatórios que permite determinar as ocorrências e possíveis relações com o virtual, levando consigo as conseqüências quanto à natureza desses fatos. A impotência radical do virtual para alcançar o atual nas ciências empíricas é compensada pelo seu pluralismo, oposto à rigidez e a unicidade do fato virtual. O próprio, ou característico do virtual em relação a essas ciências, é a multiplicidade.

A partir dessa explicação, podem ser desenvolvidas linhas de modos de relações entre o não-atual e o atual, no contexto determinístico e probabilístico da ciência, quando o provável é passível de cálculos e a atualização de eventos está submetida à estatística (estamos aqui nos referindo à física em suas diferentes teorias, incluindo a quântica).

No caso do ciberespaço, cuja característica é não ser biunivocamente determinado, sua realidade aparece como um atual realizado pela união da forma e do aparato tecnológico à disposição, atualizando-se e constituindo, ao mesmo tempo de sua atualização, uma dinâmica veloz "não-atual – atual". Essa dinâmica se movimenta na tela informacional meio solta que permite possibilidades múltiplas de ocorrências.

3. A presença da matemática na construção da tela informacional

Com o advento da Internet, a expressão ciberespaço (ou espaço virtual), utilizada somente na ficção científica, foi incorporada para designar esse novo espaço de comunicação, que vincula um espaço virtual a um tempo que também é virtual, o qual permite a sensação de se estar em outra realidade, uma realidade virtual (Lévy, 1995). Essa realidade é materializada de alguma maneira e por algum meio. O software, o gráfico, o applet, a foto, a música, o vídeo, o chat etc., são maneiras e meios que materializam as ações não-atuais que ocorrem no ciberespaço. Essas ações estão nos softwares destinados à matemática, ou mesmo em ambientes virtuais de aprendizagem que possibilitam atividades educacionais as quais podem produzir conhecimento matemático. A percepção, a observação, a visualização, o processo de efetuar conjecturas, a reflexão, assim como outras ações de aprendizagem matemática, ancoram-se no aparato tecnológico, também porque no ciberespaço os objetos são traduzidos em bits.

A materialidade desse espaço que se expõe em bits, atualiza as práticas sociais em textos, imagens, sons e em outras linguagens, permitindo que a informação aconteça por meio de uma pluralidade de meios e pela sua combinação. Isso amplia as possibilidades de informação e comunicação. A hipertextualidade, que é como essa rede de links é definida (Lévy, 1995), permite que a informação não tenha fronteiras, no sentido de que, via ciberespaço, não precisa de passaporte para se entrar em qualquer país. Há uma multiplicidade de relações, de conexões, ou seja, há uma gigantesca rede de nós (amarrações) que possibilita à informação vir de, e ser compartilhada por, diferentes pontos de vista.

As conexões do ciberespaço possuem como base a matemática, que se torna operacionalmente presente por meio de uma linguagem binária. Isso faz com que a programação de computadores seja uma arte revestida de técnica, uma vez que, não só em termos funcionais, ela necessita de uma estética toda própria que só se configura por meio de uma tradução criptográfica entre signos e números. A linguagem binária traduz aquilo que é processado em um computador (sons, imagens, vídeo, texto, etc.). Os computadores só conseguem entender se por determinado circuito está passando eletricidade ou não. Eles executam o seu trabalho, em grande velocidade, ligando e desligando micro chaves. Entretanto, a execução desse trabalho é previamente calculada e esteticamente configurada com base nos conteúdos matemáticos formais, portanto virtuais. A programação executada na máquina de um software específico faz, segundo Donatto & Portella (2008, p.5), com que essa máquina se torne uma "máquina-estética". Os autores, nessa perspectiva, revelam que:

> Nos cenários cibernético-computadorizados, as linguagens de programação são simplificações das linguagens humanas; um método organizado como um conjunto de regras sintáticas e semânticas usadas para expressar instruções para um computador; uma linguagem que permite a um programador especificar precisamente sobre quais dados um computador vai atuar, como estes dados serão armazenados ou transmitidos e quais ações devem ser tomadas sob várias circunstâncias; em sistemas de comunicações comandados por computador, as rotas para a troca de mensagens, bem como formatos e, até mesmo, o próprio conteúdo da mensagem, podem ser decididas no momento do envio; este poder de decisão computacional, que abre novas possibilidades de comunicação — um problema aparentemente técnico —, mas que, no entanto, pode determinar os limites da obra" (Donatto & Portella, 2008, p.6).

Assim, a tradução binária realizada pelo computador, referente a uma linguagem de programação, sustenta o ambiente informacional gerado pela tela do computador. Além disso, a proposição de uma estética computacional, não presencial, desenvolve-se nas regras sintáticas e semânticas da linguagem numérica, nas operações programadas pelos cálculos matemáticos, no mapa informacional das bases de dados e algoritmos que configuram e potencializam o conteúdo da 'informação' durante seu acionamento (Nunes, 2008). Logo, o sinal digital gerado na tela informacional é formado por códigos de linguagem matemática, o qual usa um código binário como transporte de informação. A leitura desse código é indireta; depende dos sistemas de interpretação e de leitura, pois a escrita é digitalizada, matematizada e formada por componentes que digitalizam a informação, isto é, que convertem o sistema decimal para sistema binário, ou para o sistema hexadecimal e vice-versa. Digitalizar é, então, manipular, converter a informação, processá-la e reconvertê-la de forma que seja entendida.

Concomitantemente a essas ações e processos, é tecida uma realidade pelo suporte técnico dado, pela produção do conhecimento matemático e pela

Matemática trazendo formas que viabilizam a estruturação e funcionamento desse suporte técnico. Essa relação concomitante mostra-se importante na medida em que entendemos a RV como hiperreal (Baudrillard, 1983), ou seja, como realidade que revela outros aspectos além daqueles comumente tratados pela ciência. Isso não significa desconsiderar o aparato da ciência, pois pela Matemática, também sustenta a própria realidade do mundo cibernético e com ela se atualiza e avança.

4. A tela informacional como suporte das ações efetuadas no ciberespaço

Para compreender as ações que são efetuadas no ciberespaço é importante focar o ciberespaço e suas características das atualizações (do virtual) e das realizações (do provável) que aí ocorrem e se efetuam. Duas afirmações de Lévy (1995) se destacaram de maneira a se constituírem foco da argumentação que a seguir apresentamos: *o virtual só eclode com a entrada da subjetividade humana no circuito,* quando em um mesmo movimento surgem a indeterminação do sentido e a propensão do texto a significar; o computador é antes de tudo um operador de potencialização de informação. Isso quer dizer que o computador torna mais ativo, mais eficaz, intensifica, aumenta os efeitos da rede informacional. Com o computador e com todo o aparato tecnológico que o sustenta, essa rede é mantida na e pela tela informacional e define o quadro ou o formato do que é expresso pela linguagem e assumido como atual. As atualizações efetuadas pelos internautas são o encontro de dois pólos “virtuais”: a subjetividade humana e a rede informacional potencializadas pelo computador.

Colocamos “virtuais” entre aspas ao designarmos a subjetividade do indivíduo, porque entendemos que não se trata somente de ações atualizadoras que ocorrem na rede informacional sustentada pela ciência e tecnologia, porém são ações efetuadas na subjetividade do sujeito, podendo ser criativas e sempre dimensionadas no seu horizonte mundano, não determinadas estritamente por referenciais científicos ou sócio-culturais. Trata-se de uma subjetividade constituída mundanamente onde nunca se é isolado, fechado em si, mas sempre já somos *com-os-outros*; na qual a individualidade subjetiva se constitui ao ser no mundo com os demais seres – pessoas, objetos científicos, ferramentas, entidades divinas, idéias expressas em linguagens diversas, inclusive os textos – sempre em processo de vir-a-ser junto com os outros. A constituição da subjetividade dá-se junto à constituição da intersubjetividade sustentada pela materialidade histórica e cultural, que abrange a linguagem e todos os produtos das produções humanas, como ciência, técnica, tecnologia e suas ferramentas.

Esse processo de vir-a-ser abrange a subjetividade, a intersubjetividade e o mundo. A disponibilidade de a subjetividade, constituída ao ser-com-os-outros-no-aí e de manter-se sendo nesse movimento, é sustentada pela intencionalidade, concebida fenomenologicamente como consciência (Husserl, 1970). Intencionalidade (consciência), nessa abordagem, é vista como movimento de estender-se em direção ao mundo, de modo atento, focalizando algo. É um movimento de ir e de vir, quando intencionalidade traz o percebido, ou seja, o visto como dados disponibilizados aos atos da consciência[4]. São movimentos dinâmicos que vão se constituindo como modos de pensar ao mesmo tempo em que se organizam em uma lógica e se expressam em linguagens possíveis. Nessa ação atualizante, o computador visto em sua ação potencializadora intensifica esse movimento, em termos de rapidez, de alcance, de mobilidade, de horizontes visualizados, de temporalização[5] e de espacialização[6], de modos de expressão, de operações efetuadas. O circuito neurológico do corpo-encarnado agora se potencializa junto ao circuito da rede informacional, com a intermediação do computador. Desse modo, as ações cognitivas, também se potencializam uma vez que têm à sua disposição, à moda dos utensílios descritos por Heidegger em Ser e Tempo (1988), a rede informacional que traz em sua estrutura modos de expressão e operacionalizações.

Corroborando essa idéia, o trabalho de Borba & Villareal (2005) elabora a noção de "seres-humanos-com-mídias", explicitando o entendimento das relações pessoais estabelecidas serem também sustentadas pela ação potencializadora do computador. A concepção "seres-humanos-com-mídias" pode ser entendida como uma interpretação da concepção heideggeriana "ser-ai-no-mundo-com-os-outros" e nessa interpretação a mídia está significando "os outros". Ao assumirem essa perspectiva, os autores mencionados passam a expor, conforme compreendemos, as características presentes na atualização do ser-humano ao estar com a mídia. Ou seja, expõem aquelas características em relação à produção de conhecimento efetuada pelo ser humano com o computador. Borba & Villarreal (2005) partem da visão teórica que explicita como computadores potencializam a cognição humana (Tikhomirov,1981), visão essa que se expande com a concepção de coletivo pensante (Lévy, 2000b) e que inclui a superação da dicotomia entre humanos e técnica. A concepção assumida por eles identifica a produção de conhecimento em

[4] São atos de, por exemplo, retenção, diferenciação, fantasia, imaginação, comparação etc.

[5] Modos de ser no tempo.

[6] Modos de ser no espaço.

um espaço compartilhado por atores humanos e não-humanos[7]. Nessa abordagem, as mídias também estão no processo de produção do conhecimento, assim como estão os seres humanos, sem que haja uma separação, nem hierarquia entre eles, uma vez que ambos, seres humanos e não-humanos são correlatos. Entretanto, a interrogação que fica é concernente à própria ação. A ação dos humanos é sempre intencional, conforme a visão fenomenológica que é aquela que se encontra na concepção heiddegeriana "ser-aí-com-os-outros". Por outro lado, quais seriam as características do modo de ser da mídia que dão sustentação ou que permitem essa correspondência?

Entendemos que a tela informacional, a produção do conhecimento matemático e a realidade do ciberespaço formam uma totalidade complexa. Os processos cognitivos desenvolvidos na efetivação da Educação Matemática que se movimenta, compreende e trabalha assumidamente com essa totalidade mostram-se em suas especificidades, atualizando-se em modos já caracterizados pela potencialização possibilitada pelo computador.

É nesse foco que consideramos importante iluminar o cenário da educação constituído na dimensão do ciberespaço.

5. A Educação Matemática no ciberespaço: um prelúdio

Assumir a concepção de que a realidade vivida no ciberespaço é apenas um dos modos possíveis de vivermos a realidade mundana modifica o modo pelo qual se trabalha pedagogicamente com recursos computacionais sustentado na concepção de que RV e realidade mundamente vividas são realidades distintas, ou como se costuma dizer, uma realidade essencialmente nova.

Ao assumir a primeira concepção afirmada no parágrafo acima, deixa-se de utilizar esses recursos como um meio para desenvolver atividades de ensino e de aprendizagem, bem como de trabalhar-se com cenários cibernéticos na sua dimensão fictícia e passa-se a desenvolver práticas educacionais conscientes da responsabilidade ética que o estar-com-o-computador (sempre abrange o outro e o solo histórico) acarreta.

---

[7] Nessa interpretação de Borba e Villarreal as mídias são vistas como co-produtoras de conhecimento com os seres-humanos. Em Heidegger as mídias, ao serem entendidas como os outros que aí estão ao mundo, com quem somos, significam o que aí está disponível às possibilidades do nosso tornar-se, constituindo também a circunvizinhança em *que* e *com* a qual as possibilidades de nosso vir-a-ser se atualizam.

Entretanto, cabe chamar a atenção para o fato de que o que estamos afirmando não se trata de algo revolucionário que refuta complementamente o que a literatura existente trata sobre esse tema, porém coloca em evidência posturas coerentes com responsabilidade que vem junto com a compreensão de que: a realidade do ciberespaço não é nova realidade diferente da concepção de realidade que trabalha com o conceito de não-atual que se atualiza por ações e por materialidades diversas; o computador age como potencializador de atos cognitivos; os recursos disponibilizados pela informática permitem expansão de redes de conexão complexas e velozes que carregam a comunicação e que colocam pessoas e sistemas em situação de diálogo; a possibilidade de estar conectado aos outros e à tela informacional traz consigo a possibilidade de produção de conhecimento veloz, efetivando um coletivo pensante; a percepção de si e do outro também se dá junto ao computador; a velocidade e quantidade de informação disponibilizada do ponto de vista educacional necessita ser processado de maneira refletida.

Vamos destacar os aspectos mencionados neste prelúdio a que nos aventuramos. Dizer que o computador age como potencializador de atos cognitivos abre para o significado de que essa ação potencializadora se dá em processo de atualização, desencadeado pela intencionalidade do sujeito que está-com o computador e pelo solo da ciência que, em seus aspectos de realidade virtual, disponibiliza formas para serem atualizadas pela junção do ato intencional do sujeito e do aparato tecnológico à disposição. As operações efetuadas pelos sujeitos individualmente são atualizadas por comandos. Essas operações respondem a solicitações de outros sujeitos que se intercomunicam por meio de linguagem específica determinada pelo sistema de referência e pela intencionalidade dos sujeitos que estão abertos e dispostos à comunicação. Assim, é característico do ciberespaço promover um leque aberto de possibilidades de atualizações pelas e com as ações virtuais que disponibiliza. Em relação à produção do conhecimento matemático e às ações que possam conduzir a essa produção, entendemos que é imprescindível a presença humana em termos de intencionalidade daquele que se lança ao espaço cibernético junto com todo seu aparato científico e tecnológico e com outros sujeitos que também estão nesse aí, sendo. O espectro de ações educacionais que podem ser criadas no ciberespaço é amplo e certamente ainda não vislumbrado em sua abrangência. Sabemos que essas ações podem atualizar o não-atual. Na medida em que são desencadeadas, os sujeitos vão se interligando entre si na e pela rede de ligações possíveis e sustentadas pela tela informacional, sendo com os programas computacionais e operando com sua lógica, ampliam modos de dizer já conhecidos, adentrando cognitivamente o processo de ensino e aprendizagem e carreando a produção de conhecimento ao modo de um pensante coletivo.

Os modos pelos quais as atualizações se dão no ciberespaço revestem-se de características próprias, inusitadas e não passíveis de determinações. Isso ocorre uma vez que o pluralismo e a multiplicidade, possibilitados pela tela informacional, são ramificados com rapidez e fluidez em redes as quais, por sua vez, também são pluralidade e que se ramificam em outras, sucessivamente, sendo atualizadas pelas ações dos sujeitos que operam nessas redes. Esses sujeitos não estão sós com seu computador, mas sempre estão com os outros, cujas presenças se fazem sentir pelas ações que desencadeiam junto à tela informacional. A rede em conexão e em constante constituição e expansão abrange a todos humanos e não humanos. Modos de sentir, maneiras de ver o mundo, de se comportar em relação a si mesmo, aos outros e à vida vão sendo estruturados também nessa dinâmica. Vivemos experiências temporais e espaciais na amplitude dessa tela informacional que se torna complexa pela amplitude dos atos intencionais que colorem as possibilidades antevistas com tonalidades variadas.

Pelos recursos disponibilizados pela tela informacional podemos apertar a mão de alguém que está em espaços e tempos diferentes (segundo a perspectiva da física moderna), mas juntas (segundo a perspectiva da física contemporânea). É um aperto de mãos que se atualiza por meio de texto, imagem, de recursos de linguagem disponíveis pela ciência e pela tecnologia. A experiência de apertarmos nossas mãos mediante um comando acionado no computador que desencadeia conexões no aparato informacional, atualizando possibilidades de ações em tempo-espaço fluído e dinâmico acontece entre duas pessoas que estão, às vezes, a milhares de quilômetros de distância, localizadas em regiões geográficas com fusos horários diferentes. São reais e mundamente vividas. Como essa experiência é percebida por aquele que a vive? Como ocorre a percepção de si nesse diálogo assim estabelecido?

Na dimensão da realidade vivida no mundo cibernético ações são efetivadas na dimensão do virtual possível. Realizam-se ações em ambientes online, não permitidas em ambientes offline como, por exemplo, voar sem qualquer equipamento, morrer e ressuscitar, transformar-se em outro ou outros. Eticamente, como podemos encaminhar a compreensão do conhecimento advindo dessas experiências vividas?

Essas são interrogações formuladas quando se assume estar-se junto ao computador e a todo aparato científico e informacional que o constitui.

No âmbito da Educação Matemática muitos são os exemplos de situação de ensino e de aprendizagem que mostram a amplitude das possibilidades abertas pelas concepções trabalhadas neste artigo.

A título de explicitação trazemos um trabalho de Rosa (2008) que cria situações de vida, visando à aprendizagem do conceito de integral definida por meio de ações explicitadas, imaginadas, mas que simulam a realidade mundana. Trata-se de um experimento de aprendizagem no qual são criados contextos que permitem que leis da natureza sejam estudadas e compreendidas sem referência a um ambiente físico, com suas características mundanas que possam impor limites. Na situção assim construída, modelos matemáticos podem ser estudados de forma a desconsiderar certas variáveis, em um modelo relacionado à física mecânica, por exemplo. Isso pode gerar estudos importantes sobre diferentes aspectos matemáticos relacionados ao assunto estudado. Podemos citar a simulação de um móvel movendo-se sem uma força contrária possível de ser configurada no ciberespaço, o que não ocorre no contexto de experimentos científicos tradicionais, ou seja, que são programados para ocorrerem em espaço e tempo específicos, ao modo da realidade concebida pela física clássica. Assim, o ensino de velocidade, aceleração, posição e outros aspectos do movimento de um móvel em termos matemáticos (taxa de variação, por exemplo) e que trabalhe com atividades possíveis de serem desenvolvidas na dimensão virtual da realidade pode lançar mão da visualização de conceitos matemáticos.

Simulação e experimentação matemática podem ser estudadas com softwares que geram imagens e movimentos, no sentido de reprodução dos fenômenos físicos, qualitativamente diferentes em relação à visualização, percepção e compreensão desses fenômenos em situações circunscritas à realidade como concebida pela física clássica. Essa diferenciação faz com que a realidade vivida na Educação Matemática efetuada na modalidade da EaD seja plástica, fluída, uma vez que acelerar um carro, em um jogo de videogame, pode ter significados característicos, diferentes daqueles que se evidenciam em experiências do cotidiano vivido, quando se acelera um carro em uma rua movimentada. Além disso, as ações em uma plataforma de interação online, por exemplo, o Second Life[8] (SL), são qualitativamente diferentes, pois “While many physical quantities have their physical counterpart in SL, certain quantities have quite different definitions in SL when compared to the Newtonian physics ones” (Santos, 2009, p.6).

Em termos de percepção do objeto matemático, podemos tocar, agir e interagir com gráficos e objetos geométricos em três ou mais dimensões. Por exemplo,

[8] “O ambiente virtual Second Life é um sistema computacional voltado principalmente para o entretenimento e pode ser encarado como um jogo, um mero simulador, um comércio virtual ou uma rede social, dependendo da forma como é utilizado” (Wikipédia, 2007) <http://pt.wikipedia.org/wiki/Second_Life>.

objetos voadores plásticos e fluídos que podem ser moldados, modificados, estudados de diversos ângulos, sem qualquer limitação do ambiente físico externo. Pode-se materializar um cubo que rapidamente se transforma em uma esfera. No entanto, esse cubo pode ainda interagir com várias pessoas, de diferentes culturas e que estejam distribuídas geograficamente pelo mundo via rede de computadores, no ciberespaço.

Assim, na Educação Matemática online, o movimento do pensamento se atualiza com o mundo cibernético, ao mesmo tempo em que mundos inseridos nesse mundo se constituem. Nessa perspectiva, pensar um conceito geométrico significa pensar com as ferramentas disponíveis no ciberespaço, com as quais esse conceito se constrói. Significa pensar com a imagem do sólido a que esse conceito se refere, por exemplo, visualizar as conexões possíveis referidas pelo plano conceitual que se configura. Imagens, sons, movimentos finitos e velocidades infinitas constituem o ciberespaço e modificam o conhecimento construído por e nesse meio.

Pode-se, com tais recursos, abrir campos de constituição de significados. Entretanto, enquanto alguns educadores vêem esse processo com olhares positivos, outros enfatizam seus obstáculos.

O processo de EaD online pode ser interpretado como uma via de comunicação em que tudo está ocorrendo como previamente planejado e desejado. Trata-se de interpretação decorrente da concepção de que há um referencial teórico que permite traçar biunivocamente os fatos que serão desencadeados. Nessa visão, há potência que conduz deterministicamente ao ato específico amarrando modos de proceder e de produzir conhecimento.

Porém, a realidade mundana vivida hoje já se constitui com todas as ações desencadeadas na rede informacional. Não há como negar e nem como ignorá-la. A concepção de que o não-atual se atualiza mediante ações desencadeadas na tela informacional solta que permite possibilidades múltiplas de ocorrências abre horizontes para esperar-se ocorrências não previstas, mas sempre totalizantes enraizadas na rede de informática que está sempre em constituição atualizante. Com isso, a interrogação sobre a ética que se coloca e que firma condutas no ciberespaço persiste e clama por estudos principalmente na esfera educacional. Mesmo que o alvo seja a aprendizagem de temas e assuntos matemáticos explícitos, o fato de se agir como um outro, por exemplo, o que significa para a percepção e constituição de si?

REFERÊNCIAS

Baudrillard, J. (1983). *Simulations. Translated by Paul Foss, Paul Patton and Philip Beitchman*. New York: Semiotext[e].

Bicudo, M.A.V. (2003). *Tempo, tempo vivido, história*. Bauru: EDUSC.

Borba, M. C.& Llinares, S. (2008). Online Mathematics Education. *Proceedings of the Joint Meeting of PME 32 and PME - NA XXX*, 1. Morelia, Mich., Mexico., p.191-191.

Borba, M. C.& Malheiros, A. P.& Santos, S. C. (2007). Virtual Center for Modeling: a place for exchange among researchers and teachers. *Proceedings of the Joint Meeting of PME 31st*. Seul, Korea., p. 276.

Borba, M. C. & Villarreal, M. E.(2005). *Humans-With-Media and the Reorganization of Mathematical Thinking: Information and Communication Technologies,Mmodeling, Visualization, and Experimentation*. New York: Springer Science.

Brehier, E. (1962). *Historia de la Filosofia*. Buenos Aires: Editorial Sudamericana.

Castells, M. (2005). A Sociedade em Rede. v. 2. Tradução: Roneide Venâncio Majer, atualização 6. ed.: Jussara Simões. The Rise of the Network Society, Blackwell Publishers: Oxford, 1996.São Paulo: Paz e Terra.

Dye, B. (2000). Interactive Mathematics Online for School and Home, *Presentation at ICME-9*, Tokyo, July 2000. Disponível em: <http://www.mathsnet.net/courses/icme9>. Acesso em 20 ago.2009.

Donato, C. & Portella, R. (2008). *A máquina estética: reflexões sobre a arte contemporânea*. Disponível em: < http://arte.unb.br/7art/textos/ricardoportella.pdf>. Acesso em: 20 ago.2009.

Dornelles, J. (2004). Antropologia e Internet: Quando o "Campo" é a Cidade e o Computador é a "Rede". *Horizontes Antropológicos, 10*(21), 241–271. Disponível em: <http://www.scielo.br/scielo.php? script=sci_arttext&pid =S0104-]71832004000100011&lng= en&nrm=iso>. Acesso em: 15 ago.2006.

Engelbrecht, J. & Harding, A. (2004). Technologies Involved in the Teaching of Undergraduate Mathematics on the Web. *Journal of Online Mathematics and its Applications*. Disponível em: <http://science.up.ac.za/muti/technologies.pdf>. Acesso em: 20 ago.2009.

Engelbrecht, J. & Harding, A. (2005a). Teaching Undergraduate mathematics on the Internet. Part 1: Technologies and Taxonomy. *Educational Studies in Mathematics 58(2)*, 235-252.

Engelbrecht, J. & Harding, A. (2005b). Teaching Undergraduate Mathematics on the Internet. Part 2: Atributes and Possibilities. *Educational Studies in Mathematics 58*(2), 253-276.

Granger, G. G. (1995). *Le probable, le possible et le virtuel*. Paris: Odile Jacob.

Heidegger, M. (1988). *Ser e Tempo*. Petrópolis:Vozes

Husserl, E.(1978). *Formal and Transcendental Logic*. The Hague: Martinus Nijhoff.

Husserl, E. (1970). *The Crises of European Science and Transcendental Phenomenology*. Evanston: Northwestern University Press.

Hutchinson, I. (2002). *Approaches to WWW Mathematics Documents*. Disponível em: <http://hutchinson.belmont.ma.us/tth/webmath.html>. Acesso em: 20 ago. 2009.

Kenski, V. M. (2007). *Educação e Tecnologia – o novo ritmo da informação*. Campinas: Papirus.

Lévy, P. (1995). *O que é virtual?* Tradução Paulo Neves. 7. re. São Paulo: Editora 34, 2005. Tradução de: Qu'est-ce que lê virtuel? Paris: Éditions La Découverte.

Lévy, P. (2000a). *Cibercultura*. Tradução: Carlos Irineu da Costa. 2. ed. São Paulo: Editora 34. Tradução de: Cyberculture.

Lévy, P. (2000b). *A Inteligência Coletiva: por uma antropologia do ciberespaço*. Tradução Luiz Paulo Rouanet. 3. ed. São Paulo: Edições Loyola. Tradução de: L'intelligence colective. Pour une anthropologie du cyberspace.

Lezama, J. A. (2008). Posgrado a Distancia en Línea en Matemática Educativa, una alternativa de formación de profesores. La propuesta del Instituto Politécnico Nacional para América Latina. *Resúmenes de la Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa 22*. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa-Clame.

Likauskas, S. (2005). MUD, MOO, RPG e Outros Bichos. O Globo. 05 jun. In.: MOOsaico: Comunidade Virtual Multilingüe. Disponível em: <http://no.moosaico. merg.ulh.as/community/press/OGlobo.html>. Acesso em: 20 ago. 2006

Lopes, E. S. (2005). A realidade do virtual. *Psicologia em Revista 11* (17), 96-112.

Machado, L. D. (2005). Concepções de Espaço e Tempo nas Teorias de Educação a Distância. In *Congresso Internacional de Educação a Distância, 12*. Florianópolis. Anais eletrônicos. Disponível em: <http://www.abed.org.br/congresso2005/por /pdf/147tcc3.pdf>. Acesso em: 14 ago. 2006.

Merleau-Ponty, M. (1994). *Fenomenologia da Percepção*. (Tradução de Carlos Alberto Ribeiro de moura). São Paulo: Martins Fontes.

Nunes, J. F. I. (2008). *Estética da Interface Computacional*. Disponível em: <http://arte.unb.br/7art/textos/joaoFernandoIgnasi Nunes.pdf>. Acesso em: 20 ago.2009.

Rosa, M. (2008) *A Construção de Identidades Online por meio do Role Playing Game: relações com o ensino e aprendizagem de matemática em um curso á distância*. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - UNESP, Rio Claro.

Rosa, M. & Maltempi, M.V. (2008). Territorialization and Deterritorialization of Online and Offline Identities: the transformation of mathematical knowledge. Borba, M. C.& Llinares, S. (2008). Online Mathematics Education. *Proceedings of the Joint Meeting of PME 32 and PME - NA XXX*, 1. Morelia, Mich., Mexico., p.276. CD-ROM.

Santos, R, P. (2009). Second Life Physics:Virtual, Real or Surreal? *Journal of Virtual Worlds Research* 2(1), 1-21. Disponível em:< http://jvwresearch.org/v2n1.html>. Acesso em: abr. 2009.

Santos, S. C. & Borba, M. C. (2007). Algumas Facetas da Produção Matemática em um Curso a Distância Online. I*X Encontro Nacional de Educação Matemática. Diálogos entre Pesquisa e a Prática Educativa, 1*. Brasil: Belo Horizonte., p. 1-15.

Tikhomirov, O. K. (1981). *The Psychological Consequences of Computerization. In.: Wertsch, J. V. The Concept of Activity in Soviet Psychology*. Tradução de: James V. Wertsch. New York: M. E. Sharpe. Tradução da Língua Russa. Soviet Copyright Agency.

Turkle, S. (1997). *A Vida no Ecrã: a Identidade na Era da Internet*. Tradução: Paulo Faria. Lisboa: Relógio D'Água Editores. Tradução de: Life on the Screen: identity in the age of the Internet. New York: Touchstone Edition.

Turkle, S. (1989). *O Segundo Eu: os computadores e o espírito humano*. Tradução: Manuela Madureira. Lisboa: Editorial Presença. Tradução de: The Second Self: computers and the Human Spirit. New York: Simon & Schuster.

Wikipédia (2007). *Second Life*. Disponível em: < http://pt.wikipedia.org/wiki/Second_>

Autores

Maria Aparecida Viggiani Bicudo. IGCE, UNESP - Universidade Estadual Paulista - Campus de Rio Claro, São Paulo, Brasil; mariabicudo@uol.com.br

Maurício Rosa. ULBRA - Universidade Luterana do Brasil - Canoas, Rio Grande do Sul, Brasil; mauriciomatematica@gmail.com

Catalina María Fernández Escalona

ANÁLISIS EPISTEMOLÓGICO DE LA SECUENCIA NUMÉRICA

EPISTEMOLOGICAL ANALYSIS OF NUMERICAL SEQUENCE

RESUMEN. La secuencia numérica requiere de un soporte conceptual ordinal para su construcción, que es posible definir a través de las relaciones dadas en un sistema de progresiones. Tener en cuenta el soporte conceptual ordinal nos lleva a integrar la secuencia numérica en un sistema conceptual e interpretativo coherente que pasa por las concepciones y creencias sobre la secuencia numérica, lo cual remite inmediatamente a consideraciones de tipo epistemológico y didáctico.

Los planteamientos epistemológicos se circunscriben al problema de la naturaleza, origen y modo de existencia del número natural y de la aritmética elemental, de manera que la construcción de la secuencia numérica va a depender, en este punto, de las conclusiones que se establezcan en torno al problema mencionado.

PALABRAS CLAVE: Epistemología de la secuencia numérica, número ordinal, número natural, Educación Matemática.

ABSTRACT. The construction of a numerical sequence requires an ordinal model of conceptual support that can be defined by the given relationships in a system of progressions. Taking into account the ordinal model of conceptual support leads us to a coherent conceptual/interpretative system which takes into consideration conceptions and beliefs regarding numerical sequencing that immediately takes us back to epistemological and didactic considerations.

Epistemological approaches are confined to looking at the nature, origin and mode of existence of the natural number and elementary arithmetic, so that construction of the numerical sequence relies, at this point, on the conclusions that are drawn in regard to the said problem.

KEY WORDS: Epistemology of numerical sequence, ordinal number, natural number, Mathematics Education.

RESUMO. A sequência numérica requer um suporte conceptual ordinal para a sua construção, que é possível definir através das relações dadas num sistema de progressões. Ter em conta o suporte conceptual ordinal leva-nos a integrar a sequência numérica num sistema conceptual e interpretativo coerente que passa pelas concepções e crenças sobre a sequência numérica, o que remete imediatamente para considerações de tipo epistemológico e didáctico.

As exposições epistemológicos circunscrevem-se ao problema da natureza, origem e forma de existência do número natural e da aritmética elementar, de maneira a que a construção da sequência numérica vá depender, neste ponto, das conclusões que se estabelecem em torno do problema mencionado.

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (2010) 13 (1): 59-87.
Recepción: Mayo 13, 2009 / Aceptación: Diciembre 18, 2009.

PALAVRAS CHAVE: Epistemologia da sequência numérica, número ordinal, número natural, Educação Matemática.

RÉSUMÉ. Un support conceptuel ordinal est nécessaire à la construction de la séquence numérique. Il est possible de définir ce support grâce aux relations données dans un système de progressions. Le fait de prendre en compte le support conceptuel ordinal nous amène à intégrer la séquence numérique dans un système conceptuel et interprétatif cohérent basé sur les conceptions et les croyances relatives à la séquence numérique. Et ce phénomène nous renvoie immédiatement à des observations d'ordre épistémologique et didactique.

Etant donné que l'approche épistémologique est circonscrite au problème de la nature, de l'origine et du mode d'existence du numéro naturel et de l'arithmétique élémentaire, la construction numérique va dépendre, à ce niveau-ci, des conclusions auxquelles on parviendra en abordant le problème qui est le nôtre.

MOTS CLÉS: Épistémologie de la séquence numérique, numéro ordinal, numéro naturel, Éducation mathématique.

1. El problema de investigación

Existen corrientes epistemológicas que consideran a las relaciones lógicas ordinales del número natural como el origen de toda la construcción matemática y el concepto primario generador de la secuencia numérica. Por consiguiente, sustentan todo el edificio matemático (Fernández, 2001). En este sentido, la construcción de número natural que vamos a considerar en este trabajo es aquella que define explícitamente la secuencia numérica a partir de las relaciones lógicas ordinales, vistas como conceptos primarios que generan series. Dichas relaciones son:

- Las asimétricas biunívocas, que definirían "el inmediato posterior al lado de".
- Las asimétricas transitivas, que darían lugar a "la clase de todos los siguientes".

Las definiciones que intervienen en esta construcción de la secuencia numérica son consistentes, ya que los dos tipos de relaciones son equivalentes.

Concebimos a la secuencia numérica como un tipo de serie que puede generarse a partir de relaciones lógicas ordinales (en el sentido que acabamos de precisarlas). Sus definiciones están dadas a partir de la construcción que Bertrand Russell (1903/1982) hace de las relaciones de orden, quien a su vez se basa en las relaciones asimétricas biunívocas especificadas por Bolzano (1851), que conlleva como concepto primario lo que él mismo denomina como *"inmediato posterior al lado de* e *inmediato anterior al lado de"* (Fernández, 2003).

Dicho método de construcción se da frente a otros, como el de Vivanti (Russell, 1982), que se caracteriza por definir fácilmente *los siguientes a un término* y *los anteriores*, los cuales son vistos como *conceptos primarios* para que, a partir de ellos, se puedan precisar el *siguiente inmediato* y el *anterior inmediato* (Fernández, 2003).

Con todo ello, nuestro *problema de investigación* es plantear una construcción lógica de la secuencia numérica en un contexto ordinal, interesándonos por el sistema de relaciones lógicas existente entre sus términos, y omitimos el significado cardinal de cada uno de ellos. En esta línea de construcción definimos la secuencia numérica en estos términos: *"La secuencia numérica es una progresión dada por la relación generatriz de Bolzano, es decir, es una progresión*[1] *en el sentido de Bertrand Russell"* (Fernández, 2001, p. 22). Será esta concepción la que consideraremos a lo largo del presente trabajo.

Frente a esta definición existen otras construcciones matemáticas del número natural. En Fernández y Ortiz (2008) hallamos que, para Mill (1917), los números son resultado de inferencias inductivas y de generalizaciones empíricas. El hecho de identificar la cantidad *tres*, con independencia de la disposición espacial o constelación, es una verdad adquirida inductivamente sobre la que se funda la ciencia de los números (p. 108).

Por su parte, Frege (1884/1972) recurre a un planteamiento lógico para afirmar que las aserciones sobre números y sobre las cosas son distintas por su carácter y su sentido, lo cual implica que quien confunda el sentido de unas y otras es que no comprende lo que es la aritmética, sino que desconoce y falsea su verdadera significación. La aportación principal de Frege es el concepto de "número cardinal", cuya más sencilla ejemplificación son los elementos de la serie 0, 1, 2, 3,…, y considera al número cardinal como la propiedad de una clase.

Cantor (1955) realiza una construcción a partir de la idea intuitiva de conjunto que va de lo general a lo particular, por lo cual se trata de un proceso deductivo y no inductivo, como ha afirmado Mill. Cantor hace uso de los números cardinales sin definirlos, ya que sólo establece una relación de equivalencia entre conjuntos mediante biyecciones para determinar cuándo dos conjuntos tienen el mismo número cardinal. Asimismo, señala cuándo el cardinal de un conjunto es menor que el de otro con llevar a cabo una aplicación inyectiva del primero en el segundo. De este modo, elabora una aritmética cardinal y otra ordinal, integradas en lo que se denominó *aritmética de conjuntos* (p. 108).

---

[1] Una progresión de Bertrand Russell es una serie discreta que tiene términos consecutivos, comienzo pero no fin, y que además es conexa.

Según Cassirer (1979), los matemáticos tienen discrepancias al elegir entre la teoría cardinal y la teoría ordinal. La cardinal parece imponerse de un modo más claro que la ordinal a todas las consideraciones en torno a los *orígenes psicológicos del número*. La clase se presenta así como lo anterior al número y forma la constante lógica de la que debe derivarse todo el contenido del concepto de número.

Ambas teorías entrañan la necesidad de una continuidad y una transición. La *ordinal* tenía que demostrar de qué modo podía hacer frente al punto de vista de la pluralidad y de la cantidad, en sentido estricto; la *cardinal* debía poner de manifiesto un principio donde pudieran enhebrarse mediante un orden fijo las cantidades definidas, de manera independiente. En las dos propuestas han colaborado destacados matemáticos: en los planteamientos ordinales podemos destacar a Hemhlotz, Kronecker, Dedekind y Peano; en los cardinales, a Cantor, Frege y Russell (Fernández y Ortiz, 2008).

En esta diversidad de paradigmas, el marco teórico que consideramos es el que ofrece la figura 1, pues explica el contexto matemático donde enmarcamos la secuencia numérica en función de las relaciones ordinales.

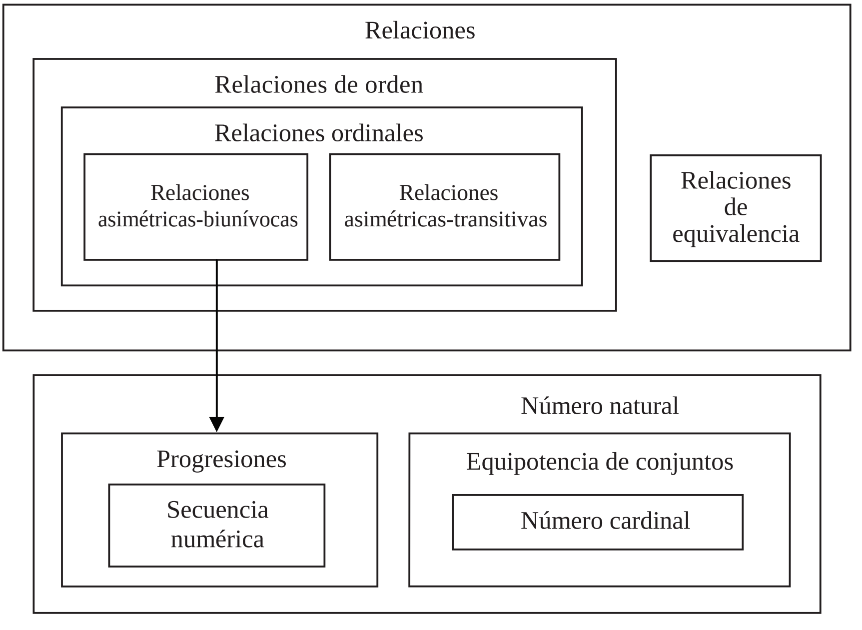

Figura 1. Contexto matemático ordinal de la secuencia numérica

Para delimitar el conocimiento lógico de la secuencia numérica dentro del marco general del número natural, en su aspecto ordinal, efectuamos una revisión epistemológica del número natural bajo la perspectiva de tres corrientes: el convencionalismo, el logicismo y la epistemología genética. Una vez hecho el análisis epistemológico de la secuencia numérica veremos cómo se ha tratado en Educación Matemática, atendiendo a periodos históricos relevantes del siglo XX: el aritmetista, el conjuntista y el postconjuntista.

2. Epistemología del número natural

En el último cuarto del siglo XIX grandes matemáticos como Dedekind, Weierstrass, Heine, Cantor y otros definieron los números reales a partir de los racionales, que eran entendidos como *parejas de números enteros*. Basta recordar que los números enteros pueden concebirse a su vez como parejas de números naturales, para concluir que son una pieza fundamental en todo el edificio matemático.

Como los números naturales tienen gran importancia en la construcción de toda la matemática, incluso en la actualidad se intenta conocer más sobre su origen, al plantearse las siguientes preguntas: *¿en matemáticas hay algo anterior a estos números? ¿cómo surgen?, ¿cómo se definen?, ¿cómo se presentan?, ¿cómo se usan?* Una cosa está clara para todos los matemáticos: *Los números naturales se presentan en secuencia*.

Por tanto, para la construcción de toda la matemática y, en concreto su aritmetización, es muy importante precisar el conjunto de los números naturales, más concretamente la secuencia numérica, ya que estamos de acuerdo con J-B. Grize (1979) cuando afirma:

> En la matemática, todo aquello que puede enunciarse en el lenguaje de los sistemas formales reposa en la noción de número natural, por medio de las funciones recursivas […]. Un primer hecho resulta importante. Tan pronto intentamos, ya sea pensar, con mayor modestia incluso, utilizar en forma totalmente práctica un número *n*, lo hacemos siempre como miembro de la serie de los números naturales. De lo cual se desprende un primer enfoque del problema, que consistiría simplemente en describir esa serie y los razonamientos que sostiene, pero del modo más preciso posible (Grize, 1979, p. 109).

Dicha cuestión la abordaremos en el sentido planteado por Grize, y buscaremos en las principales corrientes epistemológicas el entendimiento de la secuencia numérica como una componente del número natural, siguiendo el esquema de la figura 2.

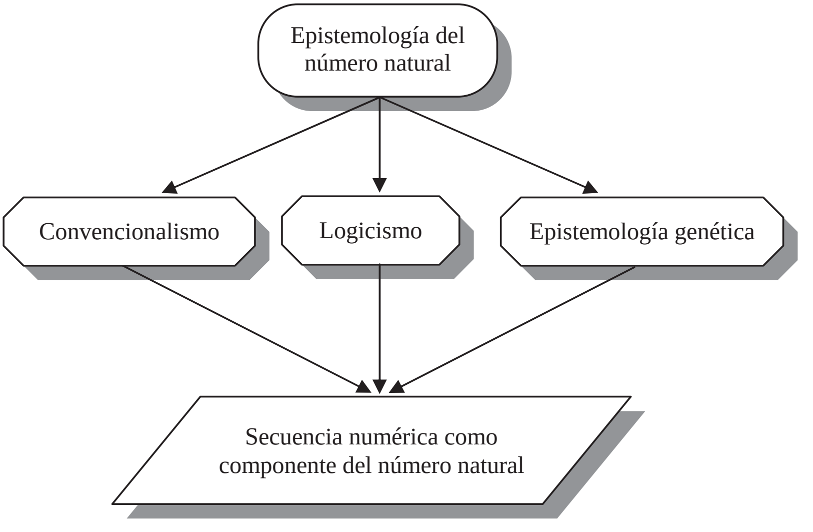

Figura 2. Secuencia numérica como componente del número natural desde la epistemología

De este modo, dentro del marco general de la epistemología del número natural estudiaremos las corrientes del convencionalismo, el logicismo y la epistemología genética, con la intención de realizar un análisis epistemológico sobre la secuencia numérica como componente del número en su aspecto ordinal.

2.1. *Convencionalismo*

En filosofía, el convencionalismo es una concepción que señala que las leyes y teorías científicas son convenciones que dependen de una libre elección entre varios modos alternativamente posibles de describir el mundo natural. La aparición de un convencionalismo sistemático en el dominio cognoscitivo se verifica sólo a finales del siglo XIX, tras el descubrimiento de la posibilidad de geometrías no euclidianas cuando desaparece el carácter evidente de los axiomas geométricos. En el ámbito de la matemática se considera a Poincaré como un gran teórico del convencionalismo (Ortiz, 1997).

El convencionalismo trae consecuencias importantes para el aprendizaje de la matemática y, en concreto, para la enseñanza del número. Según Helmholtz (1887/1945):

> Podemos considerar los números como una serie de signos arbitrarios elegidos, pero a los cuales les aplicamos un modo determinado de sucesión a título de sucesión regular o, conforme a la expresión habitual, de sucesión natural. El orden de los signos numéricos es tan convencional como el orden de las letras en las diversas lenguas; orden que, una vez adoptado y empleado de una manera constante, toma igualmente una apariencia normal y regular […]. Se evita la noción de número cardinal y la idea de unidad. La serie ordinal basta para constituir el número (Brunschvicg, 1929, p. 398).

Para los convencionalistas, la adición entra en el marco de la enumeración puramente ordinal. Por ejemplo, $a+b$ designa el término de la serie sobre el que se cae si se cuenta 1 para $a+1$, 2 para $a+2$, etc., hasta que se hayan contado b términos. Brunschvicg (1929) dice que Helmholtz fundamenta la teoría de las operaciones aritméticas sin recurrir a la intuición (*intuicionismo*) ni tampoco tiene en cuenta las teorías lógicas de las construcciones numéricas, pues no hace alusión a la idea de colección de unidades homogéneas.

De este modo, si suponemos que estamos en presencia de un grupo de términos distintos podemos hacer corresponder un signo de nuestra serie ordinal a cada uno de dichos términos. Siempre que no haya laguna ni repetición obtendremos el mismo número, sea cual sea el orden que se asigne a los términos del grupo. La acción de contar es la base de todos los cálculos (Ortiz, 1997).

Las tesis convencionalistas tienen éxito debido al reduccionismo en la tesis de Mill. En este sentido, el origen del número no es sólo la cantidad, sino también la repetición o la combinación. Por citar algunos ejemplos:

- La repetición es temporal, pero secuencial. Podemos hablar de momentos distintos, de cantidades de tiempo y de frecuencias, de tal manera que, aunque sean idénticas, podemos diferenciar en el tiempo las oscilaciones de un péndulo y contarlas; la repetición nos lleva a contar. Las unidades son totalmente idénticas y sólo se distinguen en su distribución temporal. Aquí podemos decir que la repetición y la acción de contar están en íntima relación.
- En lo que se refiere a la combinación, no hay duda que las posibles combinaciones de unos dígitos representan un número.

Helmholtz alude a un parentesco genético directo entre el número y el tiempo, idea que comparten otros grandes pensadores como Kant o Brouwer. Así, en su pequeño tratado *Contar y medir*, mostraba que el punto de partida del número se sitúa en la sucesión temporal de nuestros estados de conciencia. *"Contar es un procedimiento que descansa en nuestra facultad de recordar el orden de sucesión de nuestros estados de conciencia"* (Piaget, 1979, p. 76). Basta entonces *numerar*, mediante un procedimiento verbal convencional, los términos de esta serie para obtener una sucesión de *números de orden* que permitan definir la suma ordinal por su simple sucesión y la igualdad de los dos números ordinales.

2.2. *Logicismo*

Los modelos lógicos, que explican la construcción del número natural, tienen consecuencias relevantes para nuestro trabajo porque, a través de ellos, podemos situar la secuencia numérica en el marco conceptual de las relaciones ordinales, así como hacer un estudio intrínsecamente ordinal del número natural partiendo del ordinal, sin considerar al cardinal.

Esta corriente epistemológica ofrece un cuadro explicativo de la secuencia numérica que aparece en la siguiente página (Figura 3).

Tanto Dedekind como Peano no están interesados en definir la naturaleza de los términos numéricos, lo cual no sucede con B. Russell. Aquí la discusión central reside en establecer y determinar qué es la secuencia numérica, si bien resulta claro para todo el mundo que *son unos términos puestos en relación*. Russell, Peano y Dedekind la identifican con las progresiones que generan las relaciones biunívocas; lo único en que difieren es la naturaleza de los términos que se ponen en relación. Para Peano y Dedekind esta no es una cuestión intrínsecamente importante, pero sí lo es para Bertrand Russell, quien insiste en definir los términos que componen una progresión, en particular la de los números naturales mediante los números cardinales.

Dedekind empieza su construcción de los números naturales con la definición de los números ordinales:

> Si en la contemplación de un sistema singularmente infinito N, ordenado por una representación, no tenemos en cuenta, por completo, la naturaleza peculiar de sus elementos, reteniendo solamente la posibilidad de distinguirlos, y considerando

solamente las relaciones en que se hallan colocados por la representación ordenatriz, entonces esos elementos se llaman números naturales o números ordinales, o simplemente número (Russell, 1982, p. 290)

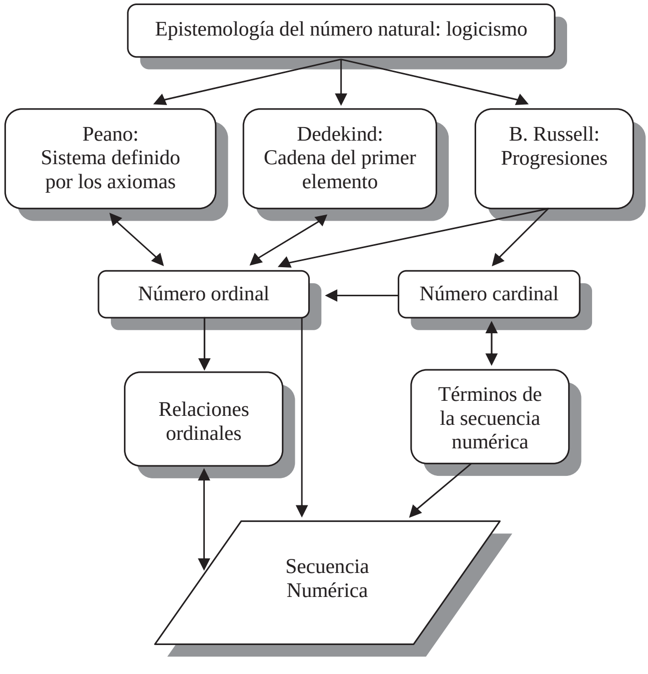

Figura 3. Cuadro explicativo del estudio hecho sobre la secuencia numérica desde el logicismo

La definición que establece Dedekind sobre sistema singularmente infinito, contenida en su libro *Was sind und was sollen die Zahlen?* (2ª edición, 1893, § 71, 1887/1988), es la siguiente:

> Es una clase que puede representarse en sí misma por medio de una relación biunívoca, y que además es tal que llega a ser la cadena, respecto a esa relación biunívoca, de un término singular de la clase no contenido en la imagen de la misma (Rusell, 1982, p.290).

Llamando R a la relación biunívoca y N a la clase, existen cuatro puntos en esta definición:

- La imagen de N está contenida en N; es decir, todo término con el que N guarde relación R está en N.

- N es la cadena de uno de sus términos.
- Este término es tal que ningún N tiene la relación R con él.
- La relación R es biunívoca. El sistema abstracto definido simplemente por la posesión de esas propiedades son los números ordinales.

La refutación de Bertrand Russell a esa construcción (que considera, por otro lado, lógicamente correcta) se basa en el hecho de la *no-definición* explícita de los términos que componen el sistema:

> Los ordinales de Dedekind no son elementos. Si no deben ser nada en absoluto deben ser intrínsecamente algo; deben diferir de otras entidades como los puntos de los instantes o los colores de los sonidos (…). Una definición formulada de ese modo indica siempre alguna clase de entidades que tiene una naturaleza genuina propia, y que no depende lógicamente del modo en que han sido definidas (…). Debe recordarse que con la teoría lógica de los cardinales se pueden demostrar tanto los axiomas de Peano como los de Dedekind (Russell, 1982, p. 290).

La teoría de Peano puede ser vista como una axiomatización de la noción de progresión que planteó Russell. Los conceptos indefinidos de Peano son *cero, entero finito* y *sucesor de*; por el último entendió *siguiente inmediato* (Russell, 1982). Su primera teoría apareció en la edición de 1896 de *Formulaire de Mathématiques*, y fueron probados dos hechos importantes:

1. Hay interpretaciones de los tres conceptos indefinidos que hacen verdaderos todos los cinco axiomas. La primera ley de la aritmética y los teoremas que le siguen también son ciertos (el sistema de Peano fundamenta la aritmética).
2. Peano y uno de sus colaboradores, Padoa, demostraron que los cinco axiomas en cuestión son absolutamente necesarios para elaborar o hacer posible la aritmética. Cada axioma puede ser revisado independientemente de los otros cuatro. Peano y Padoa lo comprobaron por muestreo, al seleccionar grupos de cuatro axiomas entre los cinco propuestos.

Peano reconoce que cualquier colección de términos que cumpla los siguientes requisitos: *1) tiene un primer elemento; 2) no tiene último término; 3) no repite término alguno, y 4) es tal que cualquier término puede ser alcanzado desde el primero en un número finito de pasos*, haría verdaderos todos los axiomas. Un sistema que integre una colección de términos y cumpla estas propiedades es lo que llamaremos *progresión*.

El resultado general de la teoría de Peano es el mismo que el de Dedekind, el primer matemático moderno que propuso una teoría completa sobre las relaciones numéricas en *Was sind und was sollen die zahlen* (1887). Dedekind identificó los números naturales con los números ordinales, a los que definió como una abstracción de términos a partir de lo que todas las progresiones tienen en común: *"Estos elementos se llaman números naturales o números ordinales, o simplemente números"* (Dedekind 1988, p. 36).

Históricamente existen objeciones contra la caracterización precedente de los números naturales. La más popular fue planteada por Russell, al señalar que cualquier progresión puede ser tomada como la base de la matemática pura. Nosotros podemos dar el nombre "0" a su primer término, el nombre "número" a todo el conjunto de términos y el nombre "sucesor" al próximo en la progresión. Cada progresión diferente dará una interpretación distinta de toda matemática pura tradicional. En el sistema de Peano no hay nada que distinga a las interpretaciones diferentes de sus ideas primitivas.

La teoría de las progresiones de Bertrand Russell se encuentra estrechamente ligada con la aritmética de Peano. Tratar la secuencia numérica como una progresión supone que todos los términos están entrelazados por relaciones asimétricas transitivas obtenidas a partir de relaciones asimétricas biunívocas y todo estaría dado en términos de "posición relativa", sin entrar a formar parte del sistema la noción de cantidad o cardinalidad de los números. Así, todo lo relacionado con la aritmética finita se puede deducir de tales progresiones:

Suma[2]

$a + 0 = a$

$a + s_i\,(n) = s_i\,(a + n)$

Multiplicación

$a \times 0 = 0$

$a \times s_i\,(n) = (a \times n) + a$

A partir de estas definiciones se continúa con la sustracción, división, términos positivos y negativos y fracciones racionales; fácilmente queda demostrado que entre dos fracciones racionales cualesquiera existen siempre una tercera. Así,

[2] Por $s_i\,(n)$ se entiende el siguiente inmediato de n que sería $n + 1$

resulta fácil continuar con los irracionales y con los números reales. Esta es la razón por la que algunos matemáticos como Helmholtz, Dedekind y Kronecker plantearon que los números ordinales son previos a los cardinales, pues se entiende que el número ordinal asociado con cualquier término en una progresión da por perdido el número cardinal de una colección, incluidos los términos dados. Este es el hecho más importante de la teoría de Dedekind, y sugiere que, por lo que pueda ser el número natural, constituye ante todo una progresión.

Sin embargo, Russell afirma que puede demostrarse toda la aritmética tanto de los cardinales como de los ordinales sin mencionar al otro, ya que las proposiciones son simbólicamente idénticas, pero difieren en su significado. Asimismo, dice que no hay ninguna prioridad entre uno y otro porque ambos pueden definirse independientemente, mas una vez definidos uno implica al otro.

Bertrand Russell defiende la idea de que todas las propiedades ordinales o las de las series de números finitos sólo se emplean en la matemática común, y a través de un procedimiento de abstracción se llega a deducir toda la aritmética. Los números forman una progresión, pero no son los que se usan en la vida diaria; el hecho de que sean cardinales los hace verdaderamente importantes.

2.3. *Epistemología genética*

La perspectiva genética del conocimiento es una visión evolutiva sobre los estados de conocimientos, más que de los conocimientos en sí mismos. Desde un punto de vista ontogenético, los conocimientos evolucionan en los sujetos al pasar por diferentes estados que manifiestan competencias operatorias cada vez más completas (Ortiz, 1997).

El sujeto transita de unos estados de conocimiento más primitivos a otros más evolucionados, debido a una progresión hacia una completitud de estructuras: *pasa de no poder establecer relaciones con cierta complejidad lógica o matemática a poder establecerlas*. La evolución genética individual podemos caracterizarla, desde un punto de vista lógico-matemático, como un pasaje de un no poder establecer una relación a poder establecerla.

Las posturas empiristas, aprioristas o convencionalistas sobre la naturaleza del número no satisfacen a Piaget, quien señala:

> Desde las acciones iniciales, las relaciones entre el sujeto y los objetos es un testimonio de un fenómeno mucho más complicado de lo que dejan suponer las interpretaciones empiristas, aprioristas o convencionalistas [...]. La

> acción de enumerar no puede estar determinada únicamente por los objetos, puesto que ella los estructura en función de un esquema operatorio, que es asimilación de las cosas al doble acto de reunir y ordenar, y puesto que asimilar significa agregar a los objetos caracteres nuevos que no estaban incluidos anteriormente a la acción del sujeto, así la reunión elemental 1+1=2 añade a cada uno de los objetos contados como unidades 1, 1, la nueva propiedad de constituir un todo 2 (Piaget, 1983, p. 128).

Para Piaget, en la evolución de la aritmética son importantes las aportaciones de las acciones intencionadas que realiza el sujeto sobre los objetos. Dichas acciones presentan la doble vertiente de la adaptación cognitiva: asimilación y acomodación. También es primordial captar en sus raíces las conexiones de las construcciones matemáticas nacientes con las estructuras operatorias del sujeto (Piaget, 1983).

La epistemología genética considera, por una parte, que las ideas lógicas sirven como un eficaz punto de partida para elaborar los números; por otra, que la matemática es un sistema de construcciones que apoya sus puntos de partida en las coordinaciones de las acciones y las operaciones del sujeto, las cuales avanzan mediante una sucesión de abstracciones reflexivas de niveles cada vez más elevados (Piaget, 1987).

Piaget apunta que el número es producto de la coordinación de las dos estructuras lógicas: *clasificación* y *seriación*. Del mismo modo que ignoramos las diferencias entre los objetos al clasificar un conjunto de ellos, también lo hacemos cuando asignamos al conjunto su número cardinal. Por ejemplo, si vamos a cardinar las muñecas que hay sobre una mesa las consideramos todas iguales, aunque entre ellas haya diferencias de color o tamaño; esto también se realizaría para construir la clase de las muñecas. Así, el número en su aspecto cardinal encierra de manera una componente de clase (Piaget y Szeminska, 1982).

La seriación consiste en contar los objetos del conjunto para calcular su número cardinal. Si bien en el proceso de recuento los objetos son tratados como si fuesen iguales, obviando las características que los diferencian unos de otros, no ocurría si no se tuviera en cuenta un aspecto que hace que los objetos sean tratados como diferentes. En el proceso de determinar el valor cardinal por medio de la enumeración debemos ordenar los objetos: contar primero uno, luego el siguiente y así sucesivamente. Resulta obvio que el orden de la enumeración no tiene importancia, pero sí está claro que debe haber algún orden al momento que se realiza el recuento. Es preciso contarlos en alguna forma de sucesión y tener en cuenta cuáles fueron enumerados en un momento determinado con el fin de no contar más de una vez un mismo objeto.

Este proceso de *ordinación*[3] no es una componente de clase, sino se vincula con la estructura lógica de seriación. Si distribuimos los objetos en el orden en que fueron enumerados estaremos frente a una verdadera serie, ya que los objetos constituyen un encadenamiento aditivo de relaciones asimétricas exactamente análogo a cualquier otra serie. En el caso que nos ocupa, las diferencias entre los objetos que determinan la serie es de posición ordinal (*primer objeto contado, segundo objeto contado*); determinar cuáles son las diferencias permite llevar a cabo el proceso de recuento, aplicándolo a una colección de objetos tratados desde dos puntos de vista. En un principio todos los objetos son equivalentes o iguales, y por eso una unidad se añade a la otra (igual que una clase se reúne con otra); en un segundo lugar, todos los objetos son vistos como diferentes, lo que nos permite ponerlos en secuencia o serie al aplicarles la enumeración.

De esta concepción del número obtenemos la interrelación entre el aspecto cardinal y ordinal, según la teoría piagetiana de construcción del número natural:

> Los números finitos son necesariamente cardinales y ordinales al mismo tiempo, y ello resulta de la naturaleza misma del número, que es ser un sistema de clases y relaciones asimétricas fusionadas en un mismo todo operatorio. Los cardinales resultan así de una abstracción de la relación y esa abstracción no modifica la naturaleza de sus operaciones, puesto que todos los órdenes posibles que pueden atribuirse a *n* términos se resuelven en la misma suma cardinal *n*. Por su parte, los ordinales resultan de una abstracción de la clase, abstracción que es también legítima, y por esta misma razón el *n-ésimo* término finito corresponderá siempre a un conjunto cardinal *n*. Pero esta doble abstracción de ninguna manera impide que el número entero finito siga siendo uno, ni que implique la indisociable solidaridad de las totalidades y del orden (Piaget y Szeminska, 1982, p. 187).

Hay una correlación entre el desarrollo del aspecto cardinal y el ordinal, de tal forma que si un niño se encuentra en la primera etapa, según la génesis del cardinal, también está en la primera etapa de la correspondiente al ordinal y viceversa. Lo mismo sucede con las etapas sucesivas.

> A la primera etapa de la seriación, que es pre-ordinal, puesto que el niño no comprende espontáneamente el orden progresivo de los elementos, corresponde (tanto por el promedio de edad en que se efectúa como desde el

[3] El término ordinación pertenece a la terminología piagetiana: *ordinación* versus *cardinación*.

> punto de vista estructural) la primera etapa de la cardinación, o sea, aquella en que no hay ninguna conservación de las cantidades, y en que el niño, cuando debe reproducir una hilera o una figura, no establece una correspondencia término a término sino que se limita a construir otra hilera de la misma longitud u otra de conjunto semejante globalmente a la primera (Piaget y Szeminska, 1982, p. 176).

La convergencia entre el aspecto cardinal y el ordinal del número natural se establece atendiendo, fundamentalmente, a dos cuestiones:

i) La serie numérica (aspecto ordinal) se aplica a una colección de elementos para obtener el número cardinal. A su vez, esa colección de elementos puede estar constituida por una serie, en cuyo caso se establecería una correspondencia serial entre la secuencia numérica y la serie de la que se quiere conocer el número de elementos que posee.

ii) La segunda cuestión que liga el cardinal con el ordinal se basa en que cualquier serie está constituida por un encadenamiento de unidades de esta forma: 1, (1+1), (1+1+1)... Esto implica que avanzar una posición (aspecto ordinal) supone aumentar en uno la cantidad (aspecto cardinal), y recíprocamente, al aumentar en uno la cantidad se avanza una posición.

En los estudios de Piaget se pone a prueba la capacidad del niño para distinguir la posición ordinal en una serie, los valores cardinales que son determinantes de esta posición y determinados por ella, así como la relación entre los valores y la posición.

Cabe aclarar que Piaget y Szeminska (1941/1982) restan todo interés al conteo memorístico y al uso de la secuencia numérica en el niño preescolar porque el concepto de número piagetiano es abstracto (surge del funcionamiento de la abstracción reflexionante) y muy distinto, por tanto, del concepto práctico o empírico que suele adquirirse precozmente por la abstracción simple. En consecuencia, el conteo conceptual u operatorio es una habilidad que el niño alcanza después de haber consolidado lógicamente la correspondencia biunívoca, la conservación y el número.

Si en nuestro trabajo queremos estudiar el desarrollo de la secuencia numérica en el niño bajo la perspectiva de las teorías lógicas, entonces la trataremos como una serie que tiene la estructura de seriación; aplicaremos el estructuralismo de

Piaget a la secuencia numérica como serie (Fernández, 2001). Debido a que el estudio de la estructura lógica de seriación es un análisis genético, el tratamiento de la secuencia numérica como una serie en el sentido piagetiano implica ahondar en las capacidades necesarias que el niño debe manifestar para llegar a establecer las relaciones intrínsecas de un elemento de la secuencia (posición relativa) con todos los demás. Se trataría de estudiar el paso de la seriación a la sistematización de la secuencia mediante las capacidades seriales que el niño necesita aplicar para llegar a dicha sistematización. La expresión *sistematización de la secuencia* se traduce en la terminología piagetiana como alcanzar el éxito operatorio de la serie, que consiste en construir las relaciones ordinales entre los términos de la secuencia numérica (Fernández, 2001, p. 89).

De manera esquemática, todas las explicaciones sobre la construcción del número natural según la epistemología genética, y cómo quedaría enmarcado el estudio de la secuencia numérica en esta corriente, quedan recogidos en el cuadro de la figura 4:

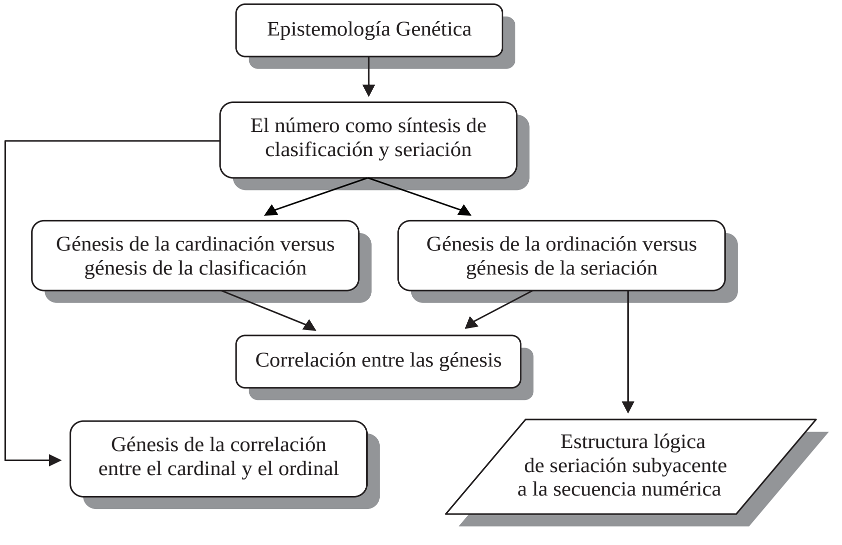

Figura 4. Secuencia numérica contextualizada en la epistemología genética

3. Secuencia numérica en educación matemática

Los distintos planteamientos sobre los orígenes y naturaleza del número natural implican consideraciones didácticas en las que, algunas ocasiones, prevalece el número ordinal sobre el cardinal, mientras que en otras pasa lo contrario.

Con base en los estudios hechos por Ortiz (1997), la transmisión de la aritmética en España durante el siglo XX contempla tres periodos:

> Un primer periodo aritmetista con fundamentación inductivista, pero con un planteamiento didáctico convencionalista; un segundo periodo conjuntista con origen estructuralista, que es deductivista, y un tercer periodo post-conjuntista con intenciones constructivistas. En el período aritmetista se considera la naturaleza inductiva del número natural, primando el aspecto ordinal, y en el periodo conjuntista la naturaleza lógica del número natural prima las clases y el aspecto cardinal. No hemos profundizado en el periodo post-conjuntista, ya que al ser muy reciente aún se encuentra en fase de implantación (Ortiz, 1997, p. 299).

Con respecto a la secuencia numérica (acción de contar) y los periodos encontrados, Ortiz señala:

> La acción de contar es resaltada en los periodos estudiados como fundamental en la construcción escolar del número natural, siendo aún más patente en el periodo aritmetista (Ortiz, 1997, p. 299).
>
> Entendiendo el aritmetismo como aquella corriente que considera que el origen del número natural es inductivo, predominando el aspecto ordinal ante el aspecto cardinal (Ortiz, 1997, p. 298).

Con base en el aritmetismo, en Educación Matemática podemos encontrar a autores que fundamentan la didáctica de la aritmética en la secuencia numérica (Abellanas, 1960). Dentro de una tendencia post-conjuntista identificamos la línea de Razonamiento Inductivo Numérico (Ortiz, 1997), que considera a la secuencia numérica como la serie numérica básica por excelencia; en este sentido, la didáctica de la misma se presentaría de acuerdo con el esquema inclusivo (Figura 5).

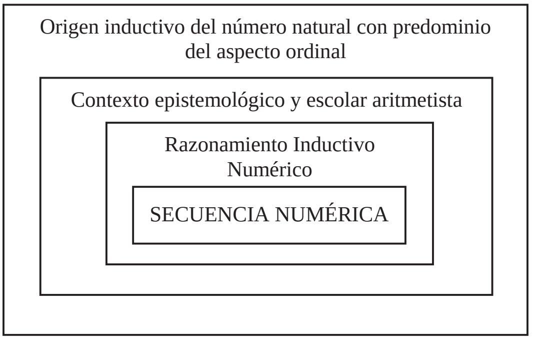

Figura 5. Esquema inclusivo de la secuencia numérica en un contexto de Razonamiento Inductivo Numérico

Por otra parte, en el periodo conjuntista, que coincide con el *movimiento de las matemáticas modernas*, hallamos dos concepciones distintas para la enseñanza del número natural. Una de ellas es la de Freudenthal (1973 y 1983), quien aboga por la secuencia numérica como base de la didáctica, y la otra es de Dienes (1970), que se basa en el aspecto cardinal.

La figura 6 sintetiza las tendencias en Educación Matemática sobre la didáctica del número natural, basada en la secuencia numérica.

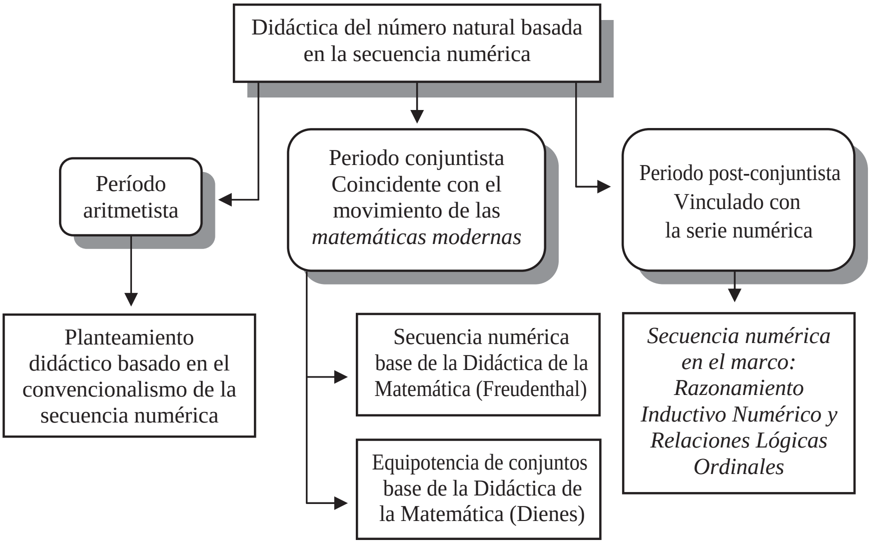

Figura 6. Secuencia numérica en Educación Matemática

La didáctica del número natural en el periodo aritmetista ya ha sido tratada en este mismo apartado. Podemos añadir lo que se indicó en el punto relativo a la corriente epistemológica del convencionalismo, cuando especificamos que la acción de contar es la base de todos los cálculos, al partir de una serie de signos arbitrariamente elegidos, pero ordenados (Helmholtz, 1945).

El periodo post-conjuntista, donde nos encontramos en la actualidad, marca el predominio del aspecto ordinal del número natural en un contexto epistemológico y escolar totalmente aritmetista. Debemos resaltar en Educación Matemática las investigaciones hechas en la Universidad de Málaga sobre Razonamiento Inductivo Numérico (Ortiz, 1997) y Relaciones Lógicas Ordinales entre los términos de la secuencia numérica (Fernández, 2001). Para el inductivismo numérico, el origen ontogenético debe estar en la construcción individual de la secuencia numérica en su perspectiva ordinal; para el marco de las relaciones lógicas ordinales, la didáctica del número natural tiene que basarse fundamentalmente en el aspecto ordinal, y generar toda la secuencia a partir de dichas relaciones.

Es importante destacar cómo en el periodo conjuntista se ha abordado el número natural en Educación Matemática desde dos frentes distintos: uno el aspecto ordinal y otro el aspecto cardinal. Dentro del ámbito escolar se ha desarrollado fundamentalmente el aspecto cardinal, pero en este punto son relevantes las declaraciones de Freudenthal (1983) cuando manifiesta que esto precisamente llevó al fracaso de las matemáticas modernas en el periodo señalado; él aboga por el *número para contar* como base para toda la Didáctica de la Matemática. Por otra parte, Dienes (1970) es un claro defensor del aspecto cardinal para la enseñanza-aprendizaje del número natural.

Para Freudenthal, la secuencia numérica es el pilar fundamental de las matemáticas. Por tanto, entre las distintas concepciones del número que atienden a su fenomenología prevalece con gran relevancia *el número para contar,* al que se considera como el *devanado en el tiempo de la secuencia de números naturales*. *"El número para contar es matemáticamente llamado el número ordinal; es formalizado mediante la inducción completa y los axiomas de Peano"* (Freudenthal, 1983).

Freudenthal prefiere al *número para contar* en Educación Matemática en vez del *número para cardinar* por los siguientes motivos: 1) contar llega pronto a convertirse en una necesidad teórica para el niño, quien llega a utilizar el conteo más allá de lo que sus propias necesidades prácticas le exigen; 2) contar es la base de la aritmética más elemental; 3) el contar es una actividad no sólo para obtener el número cardinal de un conjunto, sino también una actividad rítmica en el tiempo; 4) el concepto *y así sucesivamente* es operatorio en toda la instrucción aritmética, así como en todas las reglas que se aprenden; 5) el número para cardinar es matemáticamente insuficiente; 6) el aspecto cardinal de los números naturales es irrelevante en comparación con el aspecto del conteo; 7) el aspecto cardinal es insuficiente para la didáctica de los números naturales.

No hay ninguna duda de que la importancia del aspecto cardinal en la psicología se ha debido a Piaget, aunque Freudenthal (1983) lo critica con base en los siguientes puntos:

- Piaget estudió el concepto de número bajo el aspecto cardinal. Creía que el concepto de número natural se puede derivar totalmente de las potencias; matemáticamente puede ser esto cierto, pero creyó que también lo era psicológicamente. No obstante, aquí interviene la cuestión, ya planteada, de que el aspecto cardinal del número natural es matemáticamente insuficiente.

- Cuando trata el número ordinal bajo este enfoque no tiene nada que ver con el número ordinal ni con el número para contar. Es tal su indiferencia hacia el conteo que no menciona si los niños entrevistados saben contar y hasta dónde pueden llegar.

En consecuencia, las didácticas basadas en la teoría de Piaget, según Freudenthal, no consideran el número para contar, con lo que dejan de lado a los juegos de conteo en el afán de calcular sistemáticamente el número de objetos de las colecciones, que no varía ante las transformaciones espaciales, debido a la exagerada importancia que se otorga al aspecto cardinal. De este modo, un primordial eslabón entre la aritmética mental y la escrita, como el hecho de interpretar las sumas al contar hacia adelante y las restas al contar hacia atrás, es simplemente olvidado.

Otra visión diferente es la de Dienes, quien aboga por una didáctica basada en el aspecto cardinal. Su teoría de Dienes parte de la siguiente concepción de número: "El número es una propiedad de los conjuntos" (1970, p. 32). Por tanto, siguiendo a Bertrand Russell, cuando Dienes ocupa el término *númer*o en realidad está haciendo mención a *número cardinal*; su didáctica está basada en la cardinalidad o aspecto cardinal del número natural, cuya base es el concepto de equipotencia de Cantor.

La didáctica de Dienes se sustenta en la equipotencia entre conjuntos, es decir, en el aspecto cardinal del número. Plantea que la secuencia numérica debe ser aprendida desde la perspectiva cardinal, de ahí que se deba hacer caso omiso al conocimiento que los niños pudieran tener sobre su recitado. Indica que hay que comparar dos términos consecutivos a través de la cantidad de elementos que representa cada uno para comprobar que difieren en un único elemento (noción igualmente cardinal). Por tanto, el siguiente de un término en la secuencia representa aumentar en uno la cantidad precedente.

En el periodo post-conjuntista es preciso tomar en cuenta las teorías de Procesamiento de la Información, donde el análisis de la secuencia numérica pasa a ser considerada como una componente del conteo. La teoría cardinal parece se sobrepone de manera más clara que la ordinal en todos los razonamientos en torno a los *orígenes psicológicos del número.*

Las investigaciones realizadas en psicología han demostrado que los niños manejan la secuencia numérica desde muy temprano (Fuson, 1988; Gelman y Gallistel, 1978; Sarnecka y Gelman, 2004), pero es posible que sólo sepan que la secuencia de conteo se compone de números y que éstos han de repetirse siempre en el mismo orden (Baroody, 1988), sin que por ello se infiera una cierta comprensión conceptual como, por ejemplo, que el orden de emisión de los términos de la secuencia se mantiene constante a lo largo de sucesivas aplicaciones de la misma, o que cada elemento de la lista es único (Fuson, 1988).

Un gran número de investigaciones (Fuson, 1988; Fuson y Hall,1983; Gelman y Gallistel, 1978; Saxe, 1979; Song y Ginsburg, 1988; Wagner y Walters, 1982) se dirigen a estudiar la adquisición y conceptualización de la secuencia numérica por parte del niño pequeño. Otros trabajos han demostrado que la habilidad de contar no tiene una meta en sí misma, sino se trata de un comportamiento instrumental, esto es, de una estrategia extraordinariamente potente en el desarrollo matemático del niño. En tal sentido, se ha investigado la capacidad de los niños para resolver problemas donde el conteo se usa como procedimiento (Cowan, 1996; Fuson y Hall, 1983; Sophian, 1995).

En esta línea de trabajo hemos de destacar los estudios que observan cómo el niño utiliza la secuencia numérica para determinar el cardinal de una colección o conjunto: Gelman y Gallistel (1978) establecen el principio de cardinalidad; Klarhr y Wallace (1973) analizan al conteo como "operador cuantificador", mientras que Schaeffer, Eggleston y Scott (1974) determinan cuatro estadios diferenciados hasta que el niño logra el uso funcional del conteo para calcular el cardinal de un conjunto con menos de 10 elementos.

Las investigaciones en las teorías procesuales tratan profundamente el aspecto cardinal del número natural y no atienden al aspecto ordinal. La mayoría de los trabajos con relación al carácter funcional del conteo en su "ordinalidad" llevan como soporte mental la "cardinalidad", ya que estudian comparaciones ordinales cuantitativas. Cada número de la secuencia representa *a priori* el cardinal de un conjunto para que después se realice la comparación entre los términos. Dicha comparación se da entre magnitudes, no en cuanto a su posición en la secuencia numérica (Fernández, 2001).

4. Posicionamiento de la autora

Como se ha indicado anteriormente, los modelos lógicos —que explican la construcción del número natural— tienen consecuencias muy importantes para nuestro trabajo, ya que a través de ellos podemos situar la secuencia numérica en el marco conceptual de las relaciones ordinales, así como realizar un estudio intrínsecamente ordinal del número natural que parte del ordinal, sin considerar el cardinal.

Con base en estos modelos he definido a la secuencia numérica del siguiente modo: “Es una progresión dada por la relación generatriz de Bolzano, es decir, una progresión en el sentido de Bertrand Russell” (Fernández 2001, p. 22). La definición se emplea para alcanzar la solución del problema planteado: *llegar a una construcción lógica de la secuencia numérica en un contexto ordinal dado por un sistema de relaciones lógicas existente entre sus términos, que omita el significado cardinal de cada uno de ellos*.

Esta caracterización de la secuencia se elige frente a las que puedan extraerse de otras posturas aquí presentadas, ya que nos permite concretar las relaciones lógicas ordinales, mediante las relaciones asimétrica y biunívocas de Bolzano, y las asimétricas transitivas de Vivanti: *siguiente inmediato, siguiente, entre, entre inmediato, primer elemento, primer* y *último elemento* (Fernández, 2001, p. 24).

Por otra parte, el origen del conteo en el niño está supeditado a relaciones lógicas-ordinales que se desarrollan en el proceso de construcción mental del número natural, y están implícitas en todas las construcciones matemáticas de la aritmética. Ahora bien, muchas de esas relaciones se han considerado en las investigaciones en psicología infantil sin la trascendencia que precisan, ya que el aspecto cardinal del número natural se ha entendido como soporte del aspecto ordinal. El conteo se ha utilizado para obtener el cardinal de colecciones numerables, no para lograr el término de una serie o el lugar que ocupa un término en relación con otro; su empleo ha sido tratado básicamente desde un punto de vista acumulativo (Fernández y Ortiz, 2008).

5. Conclusiones/ síntesis

Si recapacitamos en la relación entre la interpretación y la construcción del conocimiento ordinal de la secuencia numérica en el niño (Geary, 2006; Geary, Hoard, Byrd-Craven y Desoto, 2004), los modelos ordinales del número natural y los casos notables de las relaciones que generan series, se llega a la conclusión de que dicho conocimiento no se aplica en el vacío. Es decir, subyace en la sucesión de términos numéricos un entramado de relaciones lógicas ordinales que hacen posible la construcción del número natural en su aspecto ordinal.

Como se ha puesto de manifiesto en el análisis logicista de la secuencia numérica, a ella se llega mediante las relaciones ordinales que surgen en un sistema de progresiones. Por tanto, la secuencia numérica, independientemente de la naturaleza de sus términos, tienen un soporte conceptual ordinal para construirla.

Varios planteamientos epistemológicos coexisten sobre el número natural que condicionan el significado de construcción de la secuencia. Estos son:

- La postura convencionalista, basada en los aspectos ordinales para construir el número natural. El soporte inicial es la acción de contar y la verbalización de la secuencia numérica. Para este enfoque, que parte de la estructura superficial sin considerar a la estructura profunda, los numerales y los signos numéricos son convenciones o normas que actúan mediante unos criterios.
- La secuencia numérica en el seno de la corriente logicista se desarrolla dentro del sistema de progresiones que, según Bertand Rusell (1982), coincide con el sistema de Peano y con el de Dedekind. Las relaciones ordinales y el número ordinal bastan para desarrollar la secuencia y el número natural. Existen modelos para construir la secuencia numérica que no precisan de la definición previa de los términos numéricos y, por tanto, son independientes del número cardinal.
- Para la epistemología genética, el número natural es una síntesis de dos estructuras operatorias: clasificación y seriación. Como consecuencia, el número es cardinal y ordinal, de ahí que se construyan ambos aspectos de modo simultáneo; por ello hay la correlación entre ambas génesis. La estructura operatoria de seriación deriva en la ordinación[4] y, entonces, el tratamiento de la secuencia numérica es el de una serie.

Las diferentes posiciones epistemológicas ante el número natural condicionan la transmisión escolar de la aritmética, pero en todos los casos la secuencia numérica resulta importante para su aprendizaje. Aquí nos encontramos con prioridades opuestas:

[4] Terminología usada por Piaget para referirse al aspecto ordinal.

- *Prioridad del número ordinal*. Con base en la fenomenología de Freudenthal, el *número para contar* es el pilar en el que se sustenta toda la matemática y también su didáctica, mientras que el *número para cardinar* resulta matemática y didácticamente insuficiente (Freudenthal, 1973, p. 171).
- *Prioridad del número cardinal*. Se intenta una construcción lógica de la aritmética a partir de las nociones previas a la de número; por ejemplo, la de conjuntos. La secuencia numérica se obtiene como una sucesión de números cardinales, mientras que el tratamiento didáctico de *siguiente de un número* aumenta en uno la cantidad. Dienes defiende este modelo.

Las principales conclusiones de nuestro estudio se pueden resumir en los siguientes puntos:

I. *Secuencia numérica y relaciones lógicas ordinales en el origen del número natural.*

C1 Que los números naturales están dados en secuencia es el único punto incuestionable en todas las teorías explicativas del origen del número. La interpretación de su papel elaborador depende de la concepción epistemológica del número natural.

C2 Para el convencionalismo, el principio del número radica en la secuencia numérica y en la acción de contar; la serie ordinal es suficiente para construir el número.

C3 Para los logicistas existen conceptos primarios que determinan la secuencia numérica y, por tanto, el número. Estos tienen como referencia a las relaciones seriales[5], como las asimétrica-biunívocas de Bolzano o las asimétricas-transitivas de Vivanti-Gilman.

C4 Desde la epistemología genética, el problema tocante a la construcción de la secuencia numérica sólo puede ser resuelto en función de su desarrollo.

---

[5] Relaciones que generan series o progresiones.

II. *Secuencia numérica y enseñanza del número en la escuela.*

C5 Las distintas interpretaciones epistemológicas sobre la secuencia numérica se han reflejado en la enseñanza del número en la escuela. Así, los planteamientos conjuntistas introducen los conceptos de cardinal y de correspondencia, con lo cual se producen intentos por reducir la aritmética a la lógica y el número natural a las clases, mientras que los planteamientos aritmetistas abogan por el número ordinal (Ashcraft, 1982; Brannon, 2002).

C6 En cuanto al número cardinal, se intenta una construcción lógica de la aritmética a partir de la noción de conjuntos. La secuencia numérica se obtiene como una sucesión de números cardinales, y el tratamiento didáctico de *siguiente de un número* aumenta en uno la cantidad.

C7 Con respecto al número ordinal, se intenta que la secuencia numérica[6] sea matemática y didácticamente suficiente.

Con todo ello podemos indicar que se cumple lo siguiente:

- Existen corrientes epistemológicas que consideran a las relaciones lógicas ordinales del número natural como el origen de toda la construcción matemática (Dedekind, 1988; Peano, 1979; Russell, 1982).
- Hay líneas en Didáctica de la Matemática que privilegian el aspecto ordinal del número natural frente a su aspecto cardinal.

En definitiva, podemos considerar algunos objetivos clave para la didáctica del número natural con escolares de 3 a 6 años:

- Conseguir la integración de las habilidades y rutinas presentes en la acción de contar en estrategias que manifiesten algún tipo de relación lógica ordinal entre los términos numéricos.
- Estudiar el tipo de relaciones que los niños utilizan para secuenciar los números.
- Analizar la correlación real entre el recitado correcto de la secuencia numérica y la construcción de las relaciones lógicas ordinales en el niño.

[6] Se identifica, según la fenomenología de Freudenthal, con el *número para contar*.

- Establecer las operaciones aritméticas con base en un recuento progresivo que se base en las relaciones ordinales presentes en la secuencia numérica.

Por último, para abordar la *operacionalización didáctica* de las definiciones de *secuencia numérica* y *relaciones lógicas ordinales*, nos remitimos a la investigación que presentan Fernández y Ortiz (2008).

Siempre es posible encontrar un contexto ordinal adecuado para explorar la secuencia numérica y las relaciones ordinales en niños de temprana edad. Hemos de buscar situaciones que nos permitan observar un empleo ordinal de la acción de contar por parte de los niños para poder demostrar que, *paralelamente* a una construcción cardinal, hay una ordinal del número natural. Se trata de hacer un uso ordinal de la secuencia.

Ahora bien, si proponemos al niño tareas donde tenga que determinar la posición ordinal de un elemento en un conjunto contable a través de la secuencia numérica, sólo evaluaremos las competencias ordinales del sistema mediante su uso. Dichas tareas son relevantes para nuestro estudio frente a otras en las que el recitado de la secuencia numérica puede ser memorístico, ya que si ponemos al niño simplemente a contar objetos nos resultará difícil evaluar si establece o no relaciones lógicas entre sus términos. O bien, si proponemos las habituales tareas de comparación de magnitudes evaluaremos el *isomorfismo* entre la cardinalidad y la ordinalidad (a es mayor que b si y sólo si a es posterior a b, y a es menor que b si y sólo si a es anterior a b), pero nos alejaríamos de nuestro objetivo, que consiste en comparar de dos términos cualesquiera de la secuencia a través de su posición ordinal.

Este tipo de tareas sobre el uso funcional ordinal de la secuencia numérica supone la aplicación práctica, mediante la acción de contar las propiedades internas del sistema: los términos de la secuencia numérica y operaciones lógicas ordinales entre ellos. En Fernández y Ortiz (2008) se analiza la evolución de las relaciones lógicas-ordinales en un grupo reducido de niños seleccionados al azar, donde se proporcionan las siguientes orientaciones a los maestros, teniendo en cuenta para cada edad las competencias o habilidades a conseguir en función de las relaciones lógicas ordinales:

Clase de 3 años: Los niños de 3 años en general no tienen en cuenta el dato, por ello la competencia o habilidad lógica ordinal sería *localizar posiciones ordinales*. Una actuación concreta en el aula, atendiendo a la competencia dada, sería: *“Se* *presentan filas de objetos. El niño tiene que averiguar el primero, el quinto, etc. Recíprocamente, se dan unas posiciones ordinales y el niño tiene que distinguir a qué objeto de la fila corresponden".*

Clase de 4 años: Estos niños tienen en cuenta el dato, por lo que pueden desarrollar la competencia de *"localizar posiciones lógicas ordinales"*.

Clase de 5 años: La característica fundamental en esta clase es que ya no dependemos de objetos tangibles. No se presentan filas de objetos, sino se manejan con la secuencia numérica, ya que los niños han conseguido el éxito operatorio en las relaciones lógicas ordinales que hay entre los términos de la secuencia numérica, lo cual permite realizar estas actuaciones en el aula:

- Localizar el siguiente y el anterior de cualquier número entre 1 y 10.
- Contar a partir de un término.
- Contar a partir de un término hasta llegar a otro.
- Contar a partir de un término *a* n-términos.

En definitiva, nuestra investigación cambia las competencias básicas en el aspecto de conteo. Así, la habilidad "recitado memorístico de la secuencia numérica" se cambia por las competencias en función de las relaciones lógica-ordinales que se dan entre los términos numéricos: "si en *a* ocurre tal cosa, ¿qué ocurre en *b*?" Algunas de estas competencias serían:

- Determinar todos los posteriores de *a* hasta llegar a *b* (primer y último elemento).
- Determinar todos y cada uno de los términos de la secuencia del tramo *a*, *b* (entre).
- Tener un elemento generatriz de la serie sobre el cual razonar inductivamente (primer elemento).
- Determinar los "siguientes" mediante el "siguiente inmediato", y recíprocamente.
- Determinar el "siguiente inmediato" conociendo los siguientes.

El dominio de la secuencia numérica es significativo desde el punto de vista que concierne a los modelos ordinales de la lógica formal del número natural: las competencias ordinales que manifiestan los niños están en relación con los axiomas de los modelos ordinales del número natural.

De acuerdo con los resultados descritos, hemos dado un pequeño paso aclaratorio en la dirección que plantea Geary D. C. (2006, p. 804) para conocer cómo los niños aprenden matemáticas en la escuela (Fernández y Ortiz, 2008, p. 129).

Referencias bibliográficas

Abellanas, P. (1960). *Introducción a la matemática*. Madrid: Saeta.

Ashcraft, M. H. (1982). The Development of Mental Arithmetic: a Chronometric Approach. *Developmental Review 2*, 213-136.

Baroody, A. J. (1988). *El pensamiento matemático de los niños*. Madrid: Aprendizaje Visor.

Bolzano, B. (1851). *Paradoxien des Unendlichen.* Lepizig: C.H. Reclam.

Brannon, E. M. (2002). The Development of Ordinal Numerical Knowledge in Infancy. *Cognition. International Journal of Cognitive Science 83* (2), 223-240.

Brunschvicg, L. (1929). *Las etapas de la filosofía matemática*. Buenos Aires: Lautaro.

Cantor, G. (1955). *Contributions to the Founding of the Theory of Transfinite Numbers*. New York: Dover.

Cassirer, E. (1979). *El problema del conocimiento*. México: Fondo de Cultura Económica.

Cowan, R. (1996). Even More Precisely Assessing Children's Understanding of the Order-Irrelevance Principle. *Journal of Experimental Child Psychology 62* (1), 84-101.

Dedekind, R. (1988). *Was sind und was sollen die Zahlen?* Veweg: Braunschwieg (versión original: 1887).

Dienes, Z. P. (1970). *La construcción de las matemáticas*. Barcelona: Vicens Vives.

Fernández, C. (2001). *Relaciones lógicas-ordinales entre los términos de la secuencia numérica en niños de 3 a 6 años*. Tesis de doctorado no publicada, Universidad de Málaga.

Fernández, C. (2003). *Pensamiento numérico y su didáctica (3-6 años).* Málaga: Dykinson, S. L.

Fernández, C. y Ortiz, A. (2008). La evolución del pensamiento ordinal en los escolares de 3 a 6 años. *Infancia y Aprendizaje 31* (1), 107-130.

Frege, G. (1972). *Fundamentos de la artimética*. Madrid: Laia (versión original: 1884).

Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phonomenology of Mathematical Structures*. Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematicsas as an Educational Task*. Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.

Fuson, K. (1988). *Children's Counting and Concepts of Number*. New York: Springer-Verlag.

Fuson, K. & Hall, J. (1983). The Acquisition of Early Number Word Meanings: A Conceptual Analysis and Review. In H. Ginsburg (Comp.), *The Development of Mathematical Thinking* (pp. 49-107). New York: Academic Press.

Geary, D. C. (2006). Development of Mathematical Understanding. In W. Damon & R. Lerner et al. *Handbook of Child Psychology. Cognition, Perception and Language* (Vol. 2, pp. 777-810): New York: Wiley.

Geary, D. C., Hoard, M. K., Byrd-Craven, J. & Desoto, M. C. (2004). Strategy Choices in Simple and Complex Addition: Contributions of Working Memory and Counting Knowledge for Children with Mathematical Disability. *Journal of Experimental Child Psychology 88* (2), 121-151.

Gelman, R. & Gallistel, C. R. (1978). *The Child's Understanding of Number.* Cambridge: Harvard University Press.

Grize, J. B. (1979). Observaciones sobre la epistemología matemática de los números naturales. En J. Piaget, et al., *Tratado de lógica y conocimiento científico* (Vol. II, Epistemología de la lógica, pp. 109-120). Buenos Aires: Paidós.

Helmholtz, F. (1945). *Las etapas de la filosofía matemática*. Buenos Aires: Lautaro (versión original: 1887).

Klhar, D. & Wallace, J. G. (1973). The Role of Quantification Operators in the Development of Conservation. *Cognitive Psychology 4*, 301-327.

Mill, J. S. (1917). *Sistema de lógica inductiva y deductiva*. Madrid: Daniel Jorro Editor.

Ortiz, A. (1997). *Razonamiento Inductivo Numérico. Un estudio en educación primaria.* Tesis de doctorado no publicada, Universidad de Granada.

Peano, G. (1896). *Formulaire de mathématiques*. Turín: Bocca Fréres, Ch. Clausen.

Peano, G. (1979). *Los principios de la arimética*. Oviedo: Clásicos El Basilisco.

Piaget. J. (1987). *La epistemología genética*. Madrid: Debate.

Piaget. J. (1983). *Introducción a la epistemología genética* (Tomo I, El pensamiento matemático). Buenos Aires: Paidós.

Piaget, J. (1979). *Tratado de lógica y conocimiento científico. Epistemología de la matemática*. Buenos Aires: Guadalupe.

Piaget, J. y Szeminska, A. (1982). *Génesis del número en el niño*. Buenos Aires: Guadalupe (versión original: 1941).

Russell, B. (1982). *Los principios de la matemática*. Madrid: Espasa-Calpe (versión original: 1903).

Sarnecka, B. W. & Gelman, S. A (2004). Six does not Just Mean a lot: Preschoolers see Number Words as Specific. *Cognition 92*, 329-352.

Saxe, G. (1979). Developmental Relations Between Notational Counting and Number Conservation. *Child Development 50*, 180-187.

Schaeffer, B., Eggleston, V. H. & Scott, J. L. (1974). Number Development in Young Children. *Cognitive Psychology 6*, 357-379.

Song, M. J. & Ginsburg, H. P. (1988). The Effect of the Korean Number System on Young Chidren's Counting: a Natural Experiment in Numerical Bilingulism. *Internatinal Journal of Psychology 23*, 319-332.

Sophian, C. (1995). Representation and Reasoning in Early Numerical Development: Counting, Conservation and Comparisons Between Sets. *Child Development 66* (2), 559-577.

Wagner, S. & Walters, J. A. (1982). A Longitudinal Analysis of Early Number Concepts: From Numbers to Number. In G. Forman (Comp.). *Action and Thought* (pp. 137-161). New York: Academic Press.

Autora

Catalina María Fernández Escalona. Departamento de Didáctica de las Matemáticas, de las Ciencias Sociales y de las Ciencias Experimentales, Universidad de Málaga, España; cfernandez@uma.es

Solange Roa-Fuentes, Asuman Oktaç

CONSTRUCCIÓN DE UNA DESCOMPOSICIÓN GENÉTICA: ANÁLISIS TEÓRICO DEL CONCEPTO TRANSFORMACIÓN LINEAL

CONSTRUCTING A GENETIC DECOMPOSITION: THEORETICAL ANALYSIS OF THE LINEAR TRANSFORMATION CONCEPT

RESUMEN. El objetivo de este trabajo es dar a conocer el procedimiento que seguimos para diseñar una descomposición genética sobre el concepto transformación lineal, mostrando los pasos seguidos en su construcción y las dificultades para realizarlo. El diseño se determina por la elaboración y desarrollo del análisis teórico que plantea el ciclo de investigación de la teoría APOE. Asimismo, proponemos dos descomposiciones genéticas que describen los posibles caminos para construir el concepto: uno determinado por el mecanismo de interiorización, y el otro por el de coordinación.

PALABRAS CLAVE: Transformación lineal, descomposición genética, álgebra lineal, teoría APOE.

ABSTRACT. The aim of this paper is to present the process that we followed in order to prepare a genetic decomposition of the concept of linear transformation, showing the steps we took in its construction and the difficulties that we encountered. The design is based on a theoretical analysis determined by the research cycle related to APOS theory. We propose two genetic decompositions that describe two possible ways to construct this concept, one that uses the mechanism of interiorization and another that uses coordination.

KEY WORDS: Linear transformation, genetic decomposition, linear algebra, APOS theory.

RESUMO. O objetivo deste trabalho é dar a conhecer o procedimento que seguimos para projetar uma decomposição genética do conceito transformação linear, mostrando as etapas seguidas na sua construção e as dificuldades para o realizar. O projeto consiste na elaboração e desenvolvimento de análise teórica apresentada pelo ciclo de investigação da teoria APOE. Além disso, propomos duas decomposições genéticas que descrevem os possíveis caminhos para construir o conceito: uma determinada pelo mecanismo da interiorização, e outro pelo de coordenação.

PALAVRAS CHAVE: Transformação linear, decomposição genética, álgebra linear, teoria APOE.

RÉSUMÉ. Le but de cet article est de présenter le chemin que nous avons suivi pour préparer une décomposition génétique sur le concept de transformation linéaire, en montrant les pas que nous avons pris, et les difficultés trouvées. La conception de cette décomposition génétique se base sur une analyse théorique déterminée par le cycle de recherche relié à la théorie APOS. Nous proposons deux décompositions génétiques qui décrivent deux possibles chemins pour la construction de ce concept, l'une déterminé par le mécanisme d'intériorisation et l'autre par celui de coordination.

MOTS CLÉS: Transformation linéaire, décomposition génétique, algèbre linéaire, théorie APOS.

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (2010) 13 (1): 89-112.
Recepción: Junio 16, 2009 / Aceptación: Noviembre 23, 2009.

1. INTRODUCCIÓN

Durante los últimos 20 años se han publicado varios estudios que toman como marco de referencia a la teoría APOE (Acción-Proceso-Objeto-Esquema). Los investigadores que han hecho estos trabajos, principalmente miembros del Grupo RUMEC (Research in Undergraduate Mathematics Education Community), han centrado sus análisis en diferentes áreas de las matemáticas como cálculo, álgebra abstracta, matemáticas discretas, estadística y teoría de números, en los que han enfocado su atención en algunos de sus conceptos (Dubinsky & McDonald, 2001) y en nociones de álgebra lineal, que fueron estudiadas para diseñar el texto *Learning linear algebra with ISETL* (Weller, Montgomery, Clark, Cottrill, Trigueros, Arnon, & Dubinsky, 2002). En nuestro grupo, se ha considerado el análisis de conceptos particulares del álgebra lineal, entre ellos los sistemas de ecuaciones (Trigueros, Oktaç & Manzanero, 2007), espacio vectorial (Oktaç, Trigueros & Vargas, 2006; Parraguez & Oktaç, 2010; Trigueros & Oktaç, 2005), base (Kú, Trigueros y Oktaç, 2008) y transformación lineal (Roa, 2008).

Debido a la naturaleza abstracta del álgebra lineal y las dificultades que afrontan los estudiantes cuando intentan construir conceptos como los mencionados, hemos encontrado en la teoría APOE una herramienta potente para explicar el porqué de esos problemas, mediante la aplicación de su ciclo de investigación (Asiala, Brown, DeVries, Dubinsky, Mathews & Thomas, 1996). Este ciclo consta de tres componentes: 1) análisis teórico; 2) diseño e implementación de enseñanza, y 3) observación, análisis y verificación de datos. En este trabajo nos centraremos en el desarrollo de la primera componente, que describe las construcciones (acciones, procesos, objetos y esquemas) y los mecanismos mentales (interiorización, coordinación, encapsulación, asimilación) que puede realizar un estudiante para construir un concepto matemático determinado. La segunda y tercera componentes, que conciernen al diseño de situaciones con base en el análisis teórico y su aplicación, las consideraremos en un próximo escrito donde determinaremos la validez del primer análisis, a la luz de los datos empíricos obtenidos.

Cada uno de los trabajos hechos con la teoría APOE ha ido fortaleciéndola y enriqueciéndola, en la medida en que los análisis reflejan un mejor entendimiento sobre las construcciones y mecanismos usados por dicho marco de referencia para explicar la construcción del conocimiento matemático. Ahora bien, las investigaciones publicadas generalmente proponen una descomposición genética terminada y, en algunos casos, muestran cómo se refinó según los datos empíricos, pero no hay estudios que muestren de manera explícita el camino que se puede seguir en su construcción, aunque mencionan que el análisis se basa en la experiencia y resultados anteriores.

En esta investigación nos enfocamos en describir los pasos que hemos seguido para proponer una descomposición genética sobre el concepto transformación lineal, así como las dificultades que tuvimos que afrontar. Con ello queremos revelar el trabajo que hay detrás de este análisis y evidenciar su importancia, al ahondar en conceptos matemáticos avanzados que se tratan desde su propia naturaleza: la abstracción. Esto nos permite considerar las interrelaciones que un individuo puede establecer entre un nuevo concepto y sus construcciones previas, con lo cual genera un proceso de asimilación o construcción del nuevo objeto y las nuevas relaciones que puede instaurar.

En la siguiente sección, con base en una reflexión sobre la teoría APOE donde consideramos algunas ideas que fundamentan su construcción, formuladas por Piaget y García (2004), realizamos una descripción de sus elementos básicos y, desde nuestro punto de vista, referimos sus alcances y limitantes. En la tercera sección exponemos el procedimiento para diseñar la descomposición genética y, a partir de la descripción de los elementos que consideramos en el análisis teórico, presentamos dos descomposiciones genéticas del concepto que representan caminos diferentes para construir el mismo objeto matemático. Finalmente, en la sección cuatro reflexionamos sobre el trabajo efectuado y la pertinencia de su continuación.

2. Una reflexión sobre la teoría APOE

2.1. *Antecedentes de la teoría APOE*

La teoría APOE es una interpretación de la teoría constructivista que se basa principalmente en el concepto de abstracción reflexiva, introducido por Piaget, para describir el desarrollo del pensamiento lógico en los niños, y extiende la idea a nociones matemáticas más avanzadas (Dubinsky, 1991). Dubinsky usa la abstracción reflexiva para describir cómo un individuo logra ciertas construcciones mentales sobre un concepto determinado, partiendo de la siguiente idea del conocimiento matemático:

> El conocimiento matemático de un individuo es su tendencia a responder a las situaciones matemáticas problemáticas en un contexto social, y construyendo acciones, procesos y objetos y organizándolos en esquemas con el fin de manejar las situaciones y resolver los problemas (Dubinsky & McDonald, 2001, p. 276).

En este comienzo se enfatiza en la necesidad de enfrentar al individuo con situaciones matemáticas que promuevan su reflexión. El razonamiento que logre hacer el estudiante sobre cierta situación depende del tipo de preguntas que se le planteen, orientándolas al objetivo de que generen un nuevo conocimiento que se integre al conjunto de construcciones previas. Piaget y García mencionan que *"el desarrollo del conocimiento no se realiza por la agregación continua de nuevos conocimientos (…), sino por etapas que representan niveles cognoscitivos característicos; y en cada etapa hay una reorganización de los conocimientos adquiridos en la etapa anterior"* (2004, p. 134). Dichas etapas, que caracterizan los autores como *intra*, *inter* y *trans* determinan la evolución del conocimiento matemático de un individuo y sus posibilidades de razonamiento frente a ciertos conceptos matemáticos.

La construcción de un concepto está asociada con las estructuras previas de un individuo y las ideas que pueda hacerse del objeto durante su experiencia con éste. A esto Piaget y García (2004) llaman *asimilación*, un mecanismo que consiste en apreciar al conocimiento matemático como una relación indisociable entre el sujeto y el objeto, donde el objeto es el contenido al cual el sujeto le impone una forma extraída de sus estructuras anteriores, pero ajustadas al contenido, y modifica el esquema asimilador por medio de acomodaciones o las diferenciaciones en función del objeto que acaba de asimilar (Piaget y García, 2004). De esta manera, asimilar es equivalente a estructurar, y responde principalmente a la construcción de nuevos esquemas en función de los precedentes o acomodación de los anteriores.

Un individuo construye su conocimiento matemático por medio de un proceso de abstracción. Piaget caracterizó tres tipos de abstracción: *empírica*, *pseudoempírica* y *reflexiva*. La abstracción reflexiva depende de la empírica y la pseudoempírica, ya que la abstracción empírica le permite al individuo abstraer propiedades comunes de varios objetos y realizar acciones sobre ellos, a través de la interiorización y coordinación de las acciones en nuevas y crear nuevos objetos (Dubinsky, 1991). Así, cuando un individuo enfrenta una situación matemática debe recurrir a sus ideas sobre los conceptos involucrados en ella, haciendo una reconstrucción de su conocimiento como resultado de la reflexión sobre las condiciones del problema planteado. De esta manera puede reestructurar su conocimiento mediante una reorganización de las estructuras en un nivel más elevado, donde el nuevo conocimiento es asimilado.

En este sentido, las estructuras que un individuo posee de manera previa determinarán su construcción del nuevo concepto. Por tanto, una meta clara dentro de este marco teórico es ayudar a los estudiantes a que construyan las estructuras apropiadas para cada nuevo concepto, estableciendo las conexiones adecuadas con las estructuras previas. De esta manera las estructuras, denominadas *acciones*, *procesos*, *objetos* y *esquemas*, están relacionadas de tal modo que sus conexiones determinan el conocimiento matemático de un individuo.

2.2. *Descripción general de la teoría APOE*

Sin duda, los trabajos que pueden encontrarse en la literatura muestran que la teoría APOE es útil para analizar conceptos matemáticos avanzados. Los estudios hechos por diferentes investigadores, entre ellos los miembros del Grupo RUMEC, encabezados por Dubinsky [McDonald (2000) presenta una lista muy amplia de trabajos hechos con base en la teoría APOE], y los académicos mexicanos han enriquecido este marco teórico. Hoy tenemos una mejor comprensión de sus fundamentos y contamos con gran cantidad de conceptos matemáticos analizados que son una potente herramienta para la comunidad académica.

La teoría APOE apoya la existencia de una relación cercana entre la naturaleza de los conceptos matemáticos y su desarrollo en la mente de un individuo (Piaget, 1970, p. 13; tomado de Dubinsky, Weller, McDonald & Brown, 2005); por tanto, sus explicaciones son de orden epistemológico y psicológico. En este sentido, la teoría APOE puede ser ocupada para explicar las dificultades de los estudiantes ante un concepto y plantear caminos de construcción para su aprendizaje, con lo que arroja resultados concretos respecto a las estrategias pedagógicas pertinentes para motivar la elaboración de dicha noción.

Como dijimos en la sección anterior, el interés principal de la teoría APOE reside en describir la manera como se construye el conocimiento matemático, y la principal herramienta para tal fin es la descomposición genética porque describe los aspectos constructivos de una porción de conocimiento matemático que, a su vez, se espera que determinen aspectos metodológicos relacionados con la enseñanza del conocimiento (Asiala et al., 1996).

En su teoría, Dubinsky considera cinco tipos de abstracción reflexiva: la *interiorización*, la *coordinación*, la *encapsulación*, la *generalización* y la *reversión*. Estos son considerados mecanismos que dan lugar a las construcciones llamadas acciones, procesos y esquemas. Los esquemas son las construcciones más amplias que podemos determinar de una porción de conocimiento matemático, ya que forman una colección coherente de acciones, procesos, objetos y otros esquemas, así como de las relaciones entre ellos en función del concepto. Asimismo, son estructuras inacabadas que evolucionan por la asimilación de un nuevo objeto y la reacomodación de las estructuras por las nuevas relaciones que entabla el objeto.

Una característica fundamental de los esquemas es su coherencia, que alude a la capacidad del individuo para establecer si un esquema le permite solucionar un problema particular. Como menciona Dubinsky (1994), un esquema puede ocuparse para resolver una situación matemática y ser tematizado en un objeto para realizarle nuevas transformaciones (acciones y procesos). Esta cualidad fractal (Meel, 2003) de considerar los esquemas como nuevos objetos que entran a ser parte de otros esquemas permite hacer múltiples conexiones entre los elementos previos y los nuevos conceptos que un individuo busca integrar a sus estructuras.

Sin embargo, ¿cómo se logra la construcción de esquemas? Ya que los esquemas son colecciones de otros elementos como acciones, procesos y objetos, describiremos cómo se logran este tipo de construcciones y los mecanismos necesarios para elaborarlos. Cuando un individuo está frente a una situación matemática puede utilizar ciertos mecanismos para construir estructuras matemáticas que puedan ser aplicadas para solucionar dicha situación. Las estructuras más elementales son las acciones y los procesos, que están relacionadas con los mecanismos de interiorización y encapsulación, respectivamente. Esta teoría señala que cuando un individuo inicia la construcción de un concepto matemático realiza transformaciones (acciones y procesos) sobre otros objetos construidos previamente, a fin de generar el nuevo objeto (Dubinsky et al., 2005). Entonces, cuando realiza ciertas transformaciones sobre objetos, las cuales obedecen a estímulos externos, decimos que tiene una concepción *acción* del nuevo concepto; esto le permite realizar transformaciones paso a paso, determinadas por algún conector externo. Por ejemplo, al trabajar con una situación que involucre el concepto transformación lineal, necesitará de una fórmula explícita que le indique cómo verificar las propiedades de linealidad. Esto debe estar seguido de la pregunta prototipo: *¿es T una transformación lineal?* En este caso, las acciones se determinan por la repetición de un algoritmo y la notación de los objetos, sin la consciencia de la naturaleza de los elementos involucrados.

Según la teoría APOE, cuando un individuo repite y reflexiona sobre una acción, ésta puede ser *interiorizada* en un proceso mental. La interiorización de una acción consiste en construir una estructura mental que hace el mismo trabajo que el de la acción externa; decimos que el individuo posee una concepción *proceso* del concepto cuando puede reflexionar sobre el concepto, sin realizar acciones específicas sobre él. En el caso de la transformación lineal, una evidencia de la interiorización para las funciones conocidas o sencillas es que el estudiante puede reconocer si es o no una transformación lineal al verificar mentalmente la preservación de la suma vectorial y el producto por un escalar, o la preservación de combinaciones lineales. En esta concepción es muy importante que las condiciones se consideren como equivalentes; esto lo discutiremos con más detalle en las siguientes secciones.

Como ya mencionamos, un proceso puede ser resultado de la interiorización de una acción. Ahora bien, un proceso también puede generarse por la *coordinación* de dos o más procesos; este mecanismo permite establecer relaciones entre los procesos (por ejemplo mediante conectores lógicos) para determinar un nuevo proceso. Las acciones y procesos son transformaciones dinámicas que pueden transformar otro tipo de construcciones, denominadas *objetos*, que son estáticas como resultado de la *encapsulación* de un proceso. Cuando un individuo piensa en el proceso como un todo, y realiza y construye transformaciones sobre su totalidad, decimos que posee una concepción *objeto* al aplicar el mecanismo de encapsulación, que se considera como el más importante para construir el conocimiento matemático, pero el más difícil de lograr.

Dicho mecanismo consiste básicamente en la conversión de una estructura dinámica (el proceso) en una construcción estática (el objeto), que se genera cuando el individuo debe transformar al objeto para resolver una situación. En el caso del concepto transformación lineal, al realizar preguntas específicas sobre esta función, como *si T es una transformación lineal, ¿es siempre* T^{-1} *una transformación lineal?*, o al considerar $L(U,V)$ como el conjunto de transformaciones lineales definidas entre los espacios vectoriales U y V, donde cada función g definida entre los espacios vectoriales es una transformación lineal y conforma un vector del espacio vectorial $L(U,V)$, las transformaciones lineales son consideradas como objetos.

Tan importante como el mecanismo de encapsular es el de *desencapsular*, que consiste en regresar sobre el proceso que determinó un objeto; es decir, 'desempacar' el objeto y determinar el proceso que lo precede. Esto es indispensable para construir nuevas estructuras, ya que el proceso permite la coordinación con otros procesos y la generación de nuevos procesos para la encapsulación en nuevos objetos. Si se considera el caso de transformación lineal, cuando hay dos transformaciones lineales f y g (este tipo de situaciones permite hacer hincapié en las transformaciones lineales como funciones, independientemente de su notación) y se quiere determinar la transformación $f + g$, es necesario que el individuo tenga una concepción objeto del concepto que le permita pensar en generar un nuevo objeto, en este caso $f + g$. Pero para determinar el nuevo objeto es preciso que determine los procesos que generaron cada una de las transformaciones lineales, así como al nuevo proceso para que sea encapsulado en el nuevo objeto.

Esta descripción sobre la construcción de nuevos objetos que se integran a las estructuras previas de un individuo genera, como ya mencionamos, la evolución de sus esquemas previos y la generación de nuevas relaciones que enriquecen su conocimiento matemático. Con ello, amplía su horizonte de posibilidades al abordar situaciones que involucran los conceptos relacionados, y enriquece su coherencia al establecer las relaciones que crea el nuevo objeto en los esquemas donde es integrado. Generar constantemente este ciclo continuo de reconstrucción y reacomodación de las estructuras matemáticas de los estudiantes debe ser, desde nuestro punto de vista, el principal interés de los maestros en el aula de clase de matemáticas.

2.3. *Ciclo de investigación planteado por la teoría APOE*

La teoría APOE proporciona un ciclo de investigación que integra tres componentes: análisis teórico, diseño e implementación de enseñanza, y observación, análisis y verificación de datos.

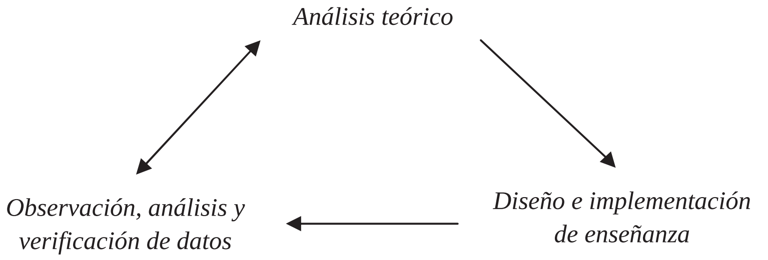

Figura 1. Ciclo de investigación (Asiala et al., 1996)

La aplicación de este ciclo permite obtener una descripción más detallada y cercana a la construcción de los conceptos matemáticos. Cada vez que es aplicado con base en la descomposición genética de un concepto, ésta se refina como resultado del análisis sobre los datos empíricos que se obtuvieron en el desarrollo de la tercera componente.

El análisis teórico, componente que nos ocupa en este artículo, es la base que fundamenta los resultados que se logran en la aplicación total del ciclo. Toma en cuenta el análisis de libros de texto, la experiencia de los investigadores y los resultados de estudios previos, entre otros aspectos que pueden contribuir al diseño de un camino viable en la construcción de un concepto determinado. Asimismo, por medio de la descripción de las construcciones mentales, permite modelar la epistemología y la cognición del concepto matemático estudiado.

Asiala et al. (1996) plantean dos preguntas que deben guiar el trabajo en esta componente: *¿Qué significa comprender un concepto matemático? ¿Cómo esa comprensión puede ser alcanzada por un individuo?* El planteamiento promueve la reflexión sobre qué es comprender un concepto determinado y las implicaciones que tiene en la forma como un estudiante puede concebirlo. Va mucho más allá de la repetición mecánica de algoritmos o la supuesta construcción de un concepto aislado.

El objetivo principal del análisis teórico consiste en diseñar una descomposición genética del concepto que determine un camino viable en términos de construcciones y mecanismos mentales, de tal manera que un estudiante pueda seguirlo para construir dicho concepto de manera exitosa. Cabe mencionar que no hay una única descomposición genética del concepto, ya que dependen de los caminos de construcción y las estructuras mentales previas del individuo.

3. Descripción del análisis teórico: el caso de la transformación lineal

Con base en lo descrito en las secciones anteriores, presentamos un ejemplo de cómo se construye y desarrolla el análisis teórico que plantea el paradigma de investigación de la teoría APOE. Explicaremos las fases que comprenden el análisis del concepto para la construcción de la descomposición genética mostrando la forma en que esta componente de investigación fue desarrollada en nuestro trabajo.

3.1. *Elementos para el análisis teórico*

En nuestra investigación decidimos analizar el concepto de transformación lineal, con el objetivo de diseñar una descomposición genética viable que describa un modelo cognitivo que fundamente el diseño de material docente y apoye la reflexión sobre el aprendizaje de tal concepto. Planteamos las siguientes preguntas: *¿Qué elementos previos debe poseer un estudiante para poder abordar de manera exitosa el concepto transformación lineal?¿Qué construcciones y mecanismos mentales están asociados a dicho concepto?* (Roa, 2008).

En este trabajo referimos la manera como realizamos una descomposición genética, describiendo cada uno de los elementos que consideramos en su diseño como resultado de la primera componente del ciclo de investigación. En un escrito posterior daremos a conocer la parte empírica. A continuación, explicamos cada uno de los elementos que tomamos en cuenta para nuestro análisis, siguiendo las preguntas de investigación.

3.1.1. *Análisis anteriores*

El concepto de transformación lineal fue analizado previamente por miembros del Grupo RUMEC para elaborar el texto *Learning linear algebra with ISETL* (Weller et al., 2002). La descomposición genética describe un camino para construir el concepto que incluye la realización de actividades con el software ISETL. A continuación, describimos los elementos principales de este análisis que, de alguna manera, son un antecedente de nuestro trabajo.

Esta descomposición genética se basa fundamentalmente en la construcción del concepto de transformación como una función definida entre dos espacios vectoriales, donde los procesos de espacio vectorial y función se coordinan para construir una transformación. Con una concepción *acción de transformación*, un individuo necesita de una fórmula explícita que le permita tomar un vector del dominio y transformarlo con una regla de asignación definida para obtener un vector de salida. Cuando un individuo logra interiorizar dichas acciones en un proceso puede verificar la condición de linealidad para cada función dada. Es importante aclarar que la condición de linealidad no se puede averiguar mediante una concepción *acción*, ya que requiere de visitar mentalmente todos los vectores de un espacio vectorial.

Los miembros del Grupo RUMEC señalan que con una concepción *proceso* un individuo puede programar un algoritmo, al cual han llamado *func is_linear* (la mayoría de las actividades se basan en el software ISETL), que le permita determinar si una transformación dada de ${Z_p}^n \to {Z_p}^m$ es lineal, averiguando las condiciones de linealidad. La encapsulación de este proceso se presenta cuando construye una acción o proceso para aplicarlo al concepto; por ejemplo, al aplicar el algoritmo *func is_linear.* Esta es una función booleana que determina si, dada una transformación, es o no lineal; dicha concepción también puede observarse cuando un individuo toma una transformación lineal específica, la multiplica por un escalar dado y verifica su linealidad.

3.1.2. *Observación de un curso*

Uno de los aspectos que consideramos muy importante es observar al grupo de estudiantes, cuyos conocimientos harán parte de los datos empíricos al trabajar con álgebra lineal. Por ello, decidimos asistir a un curso que ofrecía la universidad donde hicimos el estudio, el cual iba dirigido a estudiantes de Estadística y Matemáticas. A este curso asistían regularmente entre 8 y 10 alumnos dos veces por semana, en sesiones de dos horas; la observación se efectuó durante un semestre académico. El contenido del curso estaba dividido principalmente en cuatro capítulos: matrices (11 sesiones), espacios vectoriales reales (8 sesiones), transformaciones lineales (7 sesiones) y vectores propios y diagonalización (4 sesiones).

Antes de cada examen, la docente hizo una sesión de preguntas sobre la temática a evaluar; asimismo, se resolvieron los problemas de una guía de trabajo que fue diseñada para cada contenido. Ahora bien, hacemos la mención de que los temas vistos en el curso no se abordaron de manera muy formal; sólo se realizaron algunas demostraciones o generalizaciones sobre algunos conceptos.

Durante la investigación se llevaron a cabo una prueba diagnóstica y una entrevista. Estas pruebas fueron transcritas y analizadas desde nuestro marco teórico, lo cual permitió reformular una de las descomposiciones genéticas planteadas preliminarmente, que analizaremos con detalle más adelante.

3.1.3. *Análisis de los libros de texto*

Como menciona Trigueros (2005), una característica muy importante de la teoría APOE es que parte de la reflexión de los conceptos desde la definición matemática. Por lo tanto, es necesario tener claro qué definición esperamos que los estudiantes finalmente tengan y sus alcances en la construcción del conocimiento matemático.

En este punto reparamos que estudiaríamos el concepto de transformación lineal sin tener en cuenta su representación geométrica ni matricial. Por ser ésta la primera investigación que se realiza del concepto desde APOE, decidimos analizar la construcción del concepto en su forma analítica. La integración de la construcción del concepto de transformación lineal con sus diversas representaciones puede ser un proyecto de estudio interesante que puede realizarse en un futuro.

A continuación, presentamos la definición del concepto transformación lineal como aparece en uno de los textos guía ocupado por los estudiantes del curso que observamos:

(Hoffman y Kunze, 1973). Sean V y W dos espacios vectoriales sobre un campo F. Una transformación lineal de V en W es una función T de V en W, tal que $T(c\alpha + \beta) = cT(\alpha) + T(\beta)$ para todos los vectores α y β de V y todos los escalares c de F.

En esta definición se utiliza sólo un escalar c en F para precisar la combinación lineal, aunque una más estándar toma dos escalares, por ejemplo c y d, para definirla: $T(c\alpha + d\beta) = T(c\alpha) + T(d\beta)$. Cabe aclarar que Hoffman y Kunze usan una notación diferente a la introducida en el curso; la notación empleada en los cursos es la que utilizaremos de ahora en adelante. Los autores caracterizan a la transformación lineal como una función entre espacios vectoriales que preserva combinaciones lineales. Consideramos que esta definición permite percibir la esencia del concepto porque las condiciones se ponen juntas y enfatiza la idea de conservación de las combinaciones lineales, aunque al principio del aprendizaje podría ser más didáctico separar las condiciones para ahondar en cada una de las condiciones de linealidad.

El concepto de transformación lineal muchas veces forma parte de la lista de nuevas definiciones y teoremas que los estudiantes no logran asimilar. Como muestra Dorier (2002), esto parece ser resultado de la naturaleza abstracta de los conceptos del álgebra lineal, que son percibidos por los estudiantes como algo extraño y desconocido, lo cual genera en algunas instituciones educativas el diseño y ejecución de cursos donde se hace énfasis en la memorización y aplicación de algoritmos y tareas que se reducen al tratamiento de vectores en R^2 y matrices.

Desde nuestra perspectiva, este fenómeno puede ser consecuencia de la desconexión que se da entre los elementos básicos del álgebra lineal. Los alumnos no poseen las estructuras previas para abordar dichos elementos y, por tanto, no es posible que logren avanzar en el desarrollo de sus construcciones mentales, ya que éstas sólo se ciñen a la aplicación de ciertas acciones limitadas por una orden externa. Por ejemplo, en el caso de la transformación lineal, un estudiante por lo general ejecuta la acción de verificar dos propiedades que ha memorizado, en la mayoría de los casos, sin el uso de cuantificadores, existenciales, conectores lógicos o la pertenencia o contenencia de elementos y conjuntos, respectivamente. Cuando aborda una situación relacionada con el tema fuera de un contexto particular o con una notación diferente, sus construcciones no le permiten comprenderla. Incluso la notación de transformaciones lineales como T con una notación diferente, como f y g, crea conflictos en sus acciones con el concepto, ya que parece exclusiva de las funciones y, de acuerdo con sus construcciones, no están relacionadas con el concepto de transformación lineal.

3.1.4. *Construcciones previas necesarias para la construcción del nuevo concepto*

Una de las nociones fundamentales para construir el concepto de transformación lineal es la de función. Debido a que consideraremos funciones $f: U \rightarrow V$, cuyo dominio U y V son espacios vectoriales sobre un campo K, donde la función f asigna a cada vector u en U un vector v en V, esperamos que el objeto espacio vectorial sea asimilado por el esquema de función; es decir, que el alumno sea consciente de la posibilidad de establecer funciones cuyo dominio y codominio sean espacios vectoriales. Esto permitirá que considere que las transformaciones lineales son fundamentalmente funciones.

Bajo el esquema de función, el estudiante puede recurrir a las funciones como objetos, desencapsulando el proceso por el que dicho objeto fue construido para aplicarlo frente a una determinada situación. De esta manera, podrá sin mayor dificultad utilizar los elementos del proceso u objeto, según sea necesario. Como mencionan Breidenbach, Dubinsky, Hawks & Nichols (1992), una concepción proceso del concepto de función involucra una transformación dinámica de objetos donde, dado un objeto inicial, se produce una transformación de él. Así, un estudiante podrá determinar la imagen de los vectores de V bajo una función f. Podrá pensar en dicha transformación como un todo que toma objetos y, al hacer algunas cosas sobre ellos, da origen a objetos de alguna clase. Una vez que el estudiante encapsule dicho proceso podrá considerar a las funciones como objetos, logrará tomar dos objetos y obtendrá uno nuevo mediante una operación binaria definida; por ejemplo, la composición. Para esto, el individuo debe desencapsular los dos objetos y coordinar los procesos en un nuevo proceso que, al ser encapsulado, determina una nueva función, un nuevo objeto que resulta al componer los objetos iniciales (Dubinsky, 1991).

De la misma manera, consideramos que los conceptos de operación binaria y combinación lineal están íntimamente relacionados con los conceptos de espacio vectorial y de vector, que se desprende de este último. Por tanto, pensamos que una concepción previa de espacio vectorial como esquema permite el acceso a estos conceptos, en particular a las construcciones de vector y combinación lineal como objeto y a la operación binaria como proceso. Para nuestro análisis resulta de gran importancia evidenciar las operaciones definidas en los espacios vectoriales que se involucran en las transformaciones, con un mayor énfasis en la forma como la preservación de tales operaciones determinan la linealidad de una transformación. Por esto, tomaremos en cuenta el trabajo hecho por Brown, DeVries, Dubinsky & Thomas (1997), quienes reportan que un estudiante tiene una concepción proceso de operación binaria cuando puede pensar a la operación binaria genérica como un proceso con dos objetos de entrada, y al realizar algo sobre ellos logra un nuevo objeto de salida.

Trigueros y Oktaç (2005) dicen que, para construir un esquema de espacio vectorial, un individuo debe poseer como elementos previos el esquema de conjunto y de operación binaria. Aunque no se considera el concepto de vector y combinación lineal de manera explícita, resulta claro que en un determinado momento dichos conceptos son asimilados como objetos por el esquema de espacio vectorial, al tomar a los vectores como elementos del espacio o generar nuevos vectores como combinaciones lineales.

Con todos los elementos descritos en esta sección, iniciaremos la construcción de la descomposición genética preliminar.

3. 2. *Descomposición genética del concepto transformación lineal: un análisis preliminar*

En la descripción de nuestra descomposición genética preliminar consideramos dos posibles caminos para construir el concepto transformación lineal que describiremos con más detalle en esta sección. En el primer camino, suponemos que un individuo primero construye el concepto general de transformación (entenderemos por transformación a las funciones definidas entre los espacios vectoriales que se especifican sobre un campo). Puede considerarse que el individuo debe poseer una concepción objeto del concepto transformación, ya que las propiedades de preservación de suma vectorial y producto por un escalar son transformaciones sobre T, donde es posible determinar si dicho objeto cumple o no con las propiedades. En el segundo camino, el objeto espacio vectorial es asimilado por el esquema de función; de esta manera, el individuo generaliza su esquema de función y acepta que las funciones pueden definirse entre espacios vectoriales.

Una característica fundamental y común entre los dos caminos que presentamos en nuestra descomposición genética es concebir a la construcción de las dos propiedades de linealidad de manera independiente. La definición que ocupamos para cada una es la siguiente:

Propiedad 1. Sean U y V espacios vectoriales sobre un campo K y $T:U\rightarrow V$ una función tal que para todo $u_1, u_2, \in U$ se tiene que $T(u_1 + u_2)=T(u_1) + T(u_2)$.

Propiedad 2. Sean U y V espacios vectoriales sobre K y $T:U\rightarrow V$ una función tal que para todo $u\in U$ y para todo $c\in K$ se tiene que $T(cu)=cT(u)$.

3. 2. 1. *Camino 1: Objeto transformación como elemento preliminar*

En este camino pensamos que, si el estudiante posee de manera previa una concepción objeto de transformación, es posible que desencapsule dicho objeto y trabaje con el proceso que lo generó. Así, mediante la coordinación entre el proceso de transformación y de operación binaria (adición vectorial), por el cuantificador universal $\forall$, podrá generar un nuevo proceso que le permitirá determinar si la transformación T cumple o no con la propiedad 1. Esta coordinación se presenta cuando el estudiante considera que la transformación T puede ser aplicada a todo elemento de U, y que al adicionar dos vectores cualesquiera, u_1 y u_2, el vector resultante $u_1 + u_2$ está en U (por ser U espacio vectorial); por tanto, es posible determinar su imagen bajo T. Diremos que el estudiante posee una concepción proceso de la propiedad 1 si puede considerar el cumplimiento de ella para todo par de vectores en U. Cabe enfatizar que en este camino de construcción los procesos de las propiedades se construyen mediante una coordinación de dos procesos, no como la interiorización de acciones.

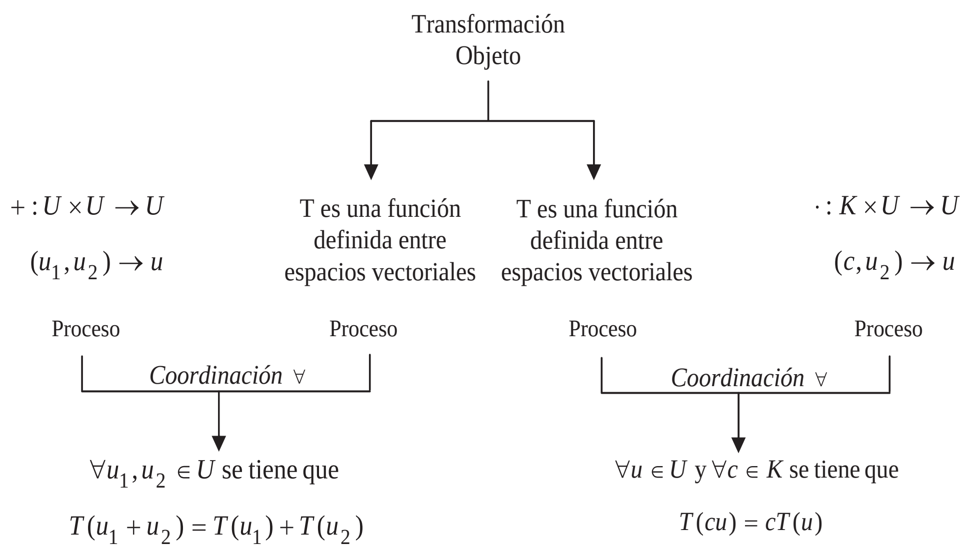

Figura 2. Objeto transformación como elemento preliminar

Del mismo modo, por la coordinación que se realiza mediante el cuantificador universal $\forall$ entre los procesos transformación y multiplicación por un escalar, un estudiante puede lograr una concepción proceso de la propiedad 2 (ver Figura 2).

Esta coordinación a través del cuantificador se presenta específicamente cuando el estudiante compara los vectores $T(cu)$ y $cT(u)$, y piensa de manera general en el cumplimiento de la propiedad para todo elemento u en U y todo c en K.

3. 2. 2. *Camino 2: Asimilación del objeto de espacio vectorial por el esquema de función*

En este camino planteamos la construcción de las dos propiedades a partir de acciones específicas, como resultado de la interiorización de una acción.

La primera propiedad involucra a la operación (+) definida entre elementos de un espacio vectorial, que genera nuevos elementos del espacio. Mediante la asimilación del espacio vectorial por el esquema de función, el estudiante podrá determinar que la suma de dos elementos cualesquiera de U es un nuevo vector de U y, por tanto, es posible determinar su imagen en V. De manera similar, podrá determinar que al sumar dos vectores cualesquiera en V el nuevo vector es un elemento de V. Así establecerá en este momento de manera consciente que el dominio y codominio de la función T son espacios vectoriales y, por ende, son cerrados respecto a la operación binaria (+) definida en cada espacio vectorial.

Con una concepción acción, el estudiante puede tomar dos vectores particulares de U y sumarlos mediante la adición definida en este espacio, determinar su imagen bajo T como elemento de V, obtener un nuevo elemento de V y comparar los vectores resultantes, bajo una concepción objeto de los nuevos elementos hallados como vectores. Cabe mencionar que por medio de una concepción acción el estudiante sólo puede verificar el cumplimiento de tal propiedad para casos específicos de U, y no puede considerar que se compruebe sobre todos los elementos de U de manera general bajo la transformación T. Si empieza a pensar en la forma general de los elementos que incluye el espacio vectorial U y ya no considera casos específicos, sino vectores en general; diremos que esas acciones se han interiorizado y el estudiante posee una concepción proceso de la propiedad 1 que le permite determinar si una transformación T cumple o no dicha propiedad, sin actuar de manera directa sobre ella. Es decir, puede pensar en el cumplimiento o no de la propiedad para todos los vectores del espacio U y la manera como T actúa sobre ellos, sin tener que realizar cálculos.

Pensamos que es posible que haya un estado intermedio entre la construcción de la acción y el proceso: un estudiante podría verificar la propiedad sobre la forma general de los vectores sin pensar en todos los vectores del espacio U, o que sólo esté realizando acciones de manera mecánica sobre un objeto familiar. Por tanto, podría tener muchos procesos y no lograr coordinarlos mediante el cuantificador universal $\forall$. En este caso, consideraremos que el alumno se encuentra en transición entre las concepciones acción y proceso de la propiedad 1 (figura 3).

La segunda propiedad está relacionada con la operación producto por un escalar, entre un vector del espacio vectorial U y un escalar del campo K. Mediante su concepción de espacio vectorial, un estudiante podrá determinar que el producto entre elementos cualesquiera del espacio U y del campo K son nuevos elementos en el espacio U y, por tanto, considerará la cerradura del producto para U y de manera similar para el producto definido en V.

Acción
Fijados un par de vectores u y w en U
$T(u+w)=T(u)+T(w)$

$\downarrow$

$T(u+w)=T(u)+T(w)$
Estado intermedio

$\downarrow$

Proceso
$\forall u_1, u_2 \in U$ se tiene que
$T(u_1+u_2)=T(u_1)+T(u_2)$

Interiorización
$\forall$

Acción
Fijados u en U y c en K
$T(cu)=cT(u)$

$\downarrow$

$T(cu)=cT(u)$
Estado intermedio

$\downarrow$

Proceso
$\forall u \in U$ y $\forall c \in K$ se tiene que
$T(cu)=cT(u)$

Figura 3. Construcción del concepto transformación lineal mediante asimilación del objeto espacio vectorial por el esquema de función

Mediante la asimilación del espacio vectorial por el esquema de función, el estudiante podrá verificar el cumplimiento de esta propiedad como el resultado de transformar los elementos de un espacio vectorial en otro. Si comprueba la propiedad para casos concretos; es decir, si toma un vector particular de U y un escalar específico de K y verifica tal propiedad, diremos que posee una concepción acción de ella, pues sólo considera el cumplimiento de la propiedad sobre elementos particulares de U y K. Cuando pueda pensar en el vector u en U de manera general como un representante de todos los elementos del espacio y determine $T(cu)$ y $cT(u)$ como elementos de V, los compare bajo una concepción objeto de vector y establezca si se cumple o no de la propiedad para todo elemento de U y para todo elemento de K, diremos que el alumno tiene una concepción proceso de la propiedad 2, que le permite pensar que se comprueba la propiedad para todo elemento del dominio de U.

Es posible, a pesar de la manipulación de la forma general de un vector como representante de todos los elementos de un espacio vectorial, que el estudiante no pueda generalizar el cumplimiento de esta propiedad para todos los elementos de U. Diremos que está transitando entre la concepción acción y la concepción proceso de la propiedad 2 (el estado intermedio que ilustra la figura 3). En este caso, tiene muchos procesos que se cumplen, pero no puede considerar el cumplimiento de la propiedad mediante el cuantificador universal $\forall$.

Hasta el momento hemos descrito la construcción de las propiedades de linealidad. Es preciso aclarar que en la segunda construcción el alumno debe determinar de manera consciente la existencia de funciones entre espacios vectoriales, que puede establecerse por la asimilación del objeto de espacio vectorial por el esquema de función.

$\forall u_1, u_2 \in U$

$T(u_1 + u_2) = T(u_1) + T(u_2)$

Proceso

$\forall u \in U$ y $\forall c \in K$

$T(cu) = cT(u)$

Proceso

Coordinación $(\wedge)$

$\forall u_1, u_2 \in U$ y $\forall b, c \in K$

$T(bu_1 + cu_2) = bT(u_1) + cT(u_2)$

Proceso
Transformación lineal

Figura 4. Construcción del proceso transformación lineal

Una vez que logra una concepción proceso de ambas propiedades deben coordinarse mediante el conector lógico $\wedge$ (figura 4), ya que la verificación simultánea determinará que la función es una transformación lineal. Como resultado de la construcción de las propiedades 1 y 2, el estudiante ha considerado dentro de su universo de transformaciones aquellas que cumplen con la propiedad 1 o la propiedad 2; ahora debe identificar aquellas que cumplen con las dos propiedades simultáneamente. La coordinación de los procesos 1 y 2 se consigue cuando puede considerar su cumplimiento de manera simultánea. Estas dos propiedades se pueden compactar en una: $T(bu_1 + cu_2) = bT(u_1) + cT(u_2)$ para todo par de vectores en U y para todo par de elementos en K.

El estudiante tiene que reconocer que el cumplimiento de esta propiedad equivale a determinar la linealidad de la transformación. En este momento diremos que posee una concepción proceso del concepto transformación lineal como resultado de coordinar los procesos 1 y 2. Consideramos que para un estudiante que no ha logrado construir el objeto función será muy difícil lograr la construcción del concepto transformación lineal como un proceso.

La concepción proceso de transformación lineal pone en juego un concepto fundamental: el de *combinación lineal*. Por tanto, un estudiante con una concepción objeto de combinación lineal puede pensar que el vector $(bu_1 + cu_2)$ en U puede ser transformado bajo T; esto le permite determinar que $bT(u_1) + cT(u_2)$ es un vector de V. Mediante la comparación de estos vectores, que son el resultado de aplicar las operaciones definidas en cada espacio vectorial, el estudiante determinará la preservación de combinaciones lineales. Una vez que logra ver la transformación T como una función que preserva combinaciones lineales; es decir, que conserva la adición vectorial y el producto escalar definido en su dominio y codominio, consideraremos que está preparado para encapsular este proceso en un objeto.

La encapsulación sucede cuando hay una necesidad de aplicar acciones sobre el proceso. Entonces, el estudiante puede pensar en la transformación lineal como un todo y lo modifica de manera consciente. Las dos maneras como podemos caracterizar la construcción de este objeto en los estudiantes de un curso básico de álgebra lineal están determinadas por la generación de nuevas transformaciones lineales mediante las operaciones suma, producto o composición definidas para estos objetos, al igual que a través del análisis de preguntas específicas sobre las características o propiedades de este concepto. A continuación, haremos una descripción más específica de este tipo de acciones sobre el objeto transformación lineal.

Construcción de nuevos objetos: Al definir dos transformaciones lineales $T_1{:}V\rightarrow W$ y $T_2{:}U\rightarrow V$ para definir $T_1 \circ T_2{:}U\rightarrow V$ como una nueva transformación lineal, o un nuevo objeto que resulta al componer dos objetos de la misma naturaleza, es necesario que el estudiante posea una concepción objeto de transformación lineal y mediante el uso de su esquema de función determine la nueva transformación $T_1 \circ T_2$. Al mismo tiempo, por la desencapsulación del objeto transformación lineal, será capaz de determinar el proceso por el cual construyó dicho objeto y usarlo para construir la composición, como en el caso de la composición de funciones (Ayers, Davis, Dubinsky & Lewin, 1988).

De esta manera, a través de un proceso de generalización el alumno podrá pensar en nuevas transformaciones lineales como resultado de componer dos transformaciones lineales bajo las condiciones requeridas sobre sus dominios y recorridos. Incluso puede considerar al conjunto $L(U,U) = \{T{:}U \rightarrow U \mid T$ es una *transformación lineal*$\}$ como un conjunto cerrado respecto a la operación composición. La multiplicación de una transformación lineal por un escalar, o bien la suma de transformaciones lineales, le permite al estudiante realizar acciones sobre las transformaciones como objetos de un conjunto que pueden operarse con elementos de otro conjunto o con los que contiene.

De igual manera, si el estudiante considera la transformación lineal $T{:}U \rightarrow V$, donde U y V son espacios vectoriales sobre un campo K y a es un escalar en K, puede definir una nueva transformación aT, que asigna a cada vector u en U un vector $aT(u)$ en V. Si generaliza este resultado podrá crear nuevas transformaciones lineales como resultado de la multiplicación por los escalares del campo K, encapsulando como nuevos objetos de su conjunto de transformaciones lineales a las transformaciones múltiplos por escalares de transformaciones lineales dadas. Considerar a las transformaciones lineales como elementos que pueden operarse mediante la suma precisa que el alumno recurra a su esquema de función y considere el proceso a través del cual se define la suma de dos funciones. Así, dadas dos transformaciones lineales $T_1{:}U \rightarrow V$ y $T_2{:}U \rightarrow V$ podrá definir una nueva transformación $T_1 + T_2 {:} U \rightarrow V$. Al aplicar el proceso por el que determina la linealidad de una transformación podrá comprobar que la nueva transformación $T_1 + T_2$ es una transformación lineal.

Propiedades o características del objeto: Una forma de caracterizar a las transformaciones lineales como un objeto es concebirlas como elementos de un conjunto. Por ejemplo, bajo las operaciones de suma y producto escalar descritas arriba, podríamos considerar al conjunto $L(U,V)$ como un espacio vectorial y a las transformaciones lineales como elementos de dicho conjunto; mejor aún, como vectores. Esta caracterización de las transformaciones lineales no es elemental para los estudiantes de un curso introductorio, pero puede generar que desarrollen una concepción objeto de este concepto.

Por otro lado, preguntas como *¿bajo qué condiciones una transformación lineal es invertible?* requieren pensar en las propiedades del concepto y, por ende, se necesita una concepción objeto para considerarlas de manera adecuada.

Con lo anterior, podemos concluir que la encapsulación del proceso transformación lineal en un objeto, tal como lo hemos descrito, implica que el estudiante analice situaciones que motiven su reflexión sobre las propiedades del objeto. Esto en su momento puede llevarlo a establecer fuertes conexiones con los conceptos que se construyen de manera simultánea a él, como inicio para la construcción de un esquema. Como resultado de dichas conexiones podrá transformar el objeto transformación lineal mediante la aplicación de nuevas acciones o procesos sobre él.

4. Reflexiones finales

En este trabajo planteamos una descripción detallada sobre la forma de construir una descomposición genética como resultado del desarrollo del análisis teórico, primera componente del ciclo de investigación de nuestro marco de referencia. Este análisis ha sido muy representativo, ya que nos permitió describir dos caminos para construir el concepto transformación lineal, que fueron determinados por mecanismos mentales diferentes: uno por el de coordinación, el otro por el de interiorización.

El primer camino está determinado por el objeto transformación como un elemento del esquema de función. La desencapsulación de este objeto le permite a un individuo pensar en el proceso que lo generó: *una función definida entre espacios vectoriales* que, al coordinarse con el proceso de operación binaria (suma vectorial o producto por un escalar), genera un nuevo proceso que hace que el individuo piense en una función entre espacios vectoriales que preserva una operación. Esta consiste en la suma vectorial o producto por un escalar con los escalares sobre el campo de los espacios vectoriales definidos.

El segundo camino de construcción está determinado por acciones específicas que un individuo puede realizar sobre vectores particulares de un espacio vectorial, al transformarlos bajo una función dada. Este camino permite la interiorización de las acciones cuando el individuo considera el cumplimiento de las propiedades (suma vectorial o producto por un escalar) para todos los elementos del espacio vectorial. En este caso, el objeto de espacio vectorial es asimilado por el esquema de función, ya que el individuo puede pensar en trabajar con funciones cuyo dominio y codominio sean espacios vectoriales. La construcción de las propiedades de linealidad por uno u otro camino resaltan la importancia de los espacios vectoriales y del concepto de función en la elaboración del nuevo concepto. Esto es de gran importancia porque el concepto transformación lineal se construye con base en elementos que han sido hechos previamente, lo cual permite que el individuo establezca de manera consciente las relaciones específicas con los elementos previos, y reconozca que una transformación es básicamente una función con ciertas características.

Los caminos de construcción descritos para las propiedades de linealidad los dirigimos hacia la construcción del concepto transformación lineal, visto como un único proceso. Al coordinar estas dos propiedades por medio del conector lógico $(\wedge)$ buscamos construir un único proceso que nos permitiera, por un lado, encapsularlo en un objeto; por otro, concebir las transformaciones lineales como funciones definidas entre espacios vectoriales que preservan combinaciones lineales. Esto, como lo mostraremos en un próximo artículo, permite la relación directa de este concepto con otros; por ejemplo, el de base. La construcción de esta índole es fundamental para generar la construcción y evolución del esquema de transformación lineal, así como de las relaciones que puede establecer con otros esquemas existentes y con los que se construyen de manera paralela a él.

La descripción que presentamos en este escrito muestra la importancia de considerar los elementos necesarios para construir un concepto determinado, así como la importancia de enfatizar en los elementos involucrados con el concepto que en algunos casos son imperceptibles para los estudiantes, aunque resultan muy obvios para nosotros. El análisis del concepto transformación lineal como lo hemos planteado indica que, teóricamente, los alumnos pueden construir este concepto para percatarse de que en general una transformación lineal es una función con ciertas características determinadas por las operaciones definidas en su dominio y codominio; además, que su preservación bajo dicha función le da una nueva categoría, de transformación lineal o función lineal.

De igual manera, resalta la importancia de considerar a las operaciones de suma vectorial y producto por un escalar en una, la *preservación de combinaciones lineales*, ya que su construcción permite que evolucione el concepto. Por ejemplo, se considera que la construcción del conjunto $L(U,V)$, cuyos elementos son transformaciones lineales, propicia en los individuos un razonamiento más profundo de sus construcciones, al concebir a las transformaciones lineales como vectores de un espacio vectorial. Todo esto nos señala de manera clara elementos pedagógicos o didácticos sobre cómo el concepto de transformación lineal puede ser presentado en un salón de clase, y da pistas clave sobre los elementos que deben considerarse en el diseño de materiales para construirla.

Como se puede ver, la descripción de los mecanismos y las construcciones mentales que un individuo desarrolla alrededor de una pequeña porción de conocimiento matemático promueve su reflexión sobre muchos aspectos que hay detrás de su construcción, al igual que sobre los obstáculos cognitivos y en algunos casos epistemológicos que debe afrontar al intentar construir de manera exitosa un concepto matemático. Al reflexionar de esta manera y plantear caminos posibles de construcción vamos haciendo un intento por sopesar estas dificultades no sólo para entenderlas, sino para pensar sobre la manera como pueden ser superadas por los estudiantes.

Con base en todo lo que hemos presentado, mostraremos próximamente una descomposición genética refinada, que se fundamentará principalmente en el análisis de datos empíricos que señalan la viabilidad de este análisis, y dará indicaciones específicas sobre cómo los individuos construyen este concepto.

Reconocimiento

El trabajo presentado en este artículo ha sido parcialmente financiado por el proyecto *Conacyt 60763-H*.

Referencias bibliográficas

Asiala, M., Brown, A., DeVries, D., Dubinsky, E., Mathews, D. & Thomas, K. (1996). A Framework for Research and Curriculum Development in Undergraduate Mathematics Education. In J. Kaput, A. H. Schoenfeld & E. Dubinsky (Eds.), *Research in Collegiate Mathematics Education II* (pp.1-32). U.S.A.: American Mathematical Society.

Ayers, T., Davis, G., Dubinsky, E. & Lewin, P. (1988). Computer Experiences in Learning Composition of Functions. *Journal for Research in Mathematics Education 19* (3), 246-259.

Breidenbach, D., Dubinsky, E., Hawks, J. & Nichols, D. (1992). Development of the Process Conception of Function. *Educational Studies in Mathematics 23* (3), 247-285.

Brown, A., DeVries, D., Dubinsky, E. & Thomas, K. (1997). Learning Binary Operations, Groups and Subgroups. *Journal of Mathematical Behavior 16* (3), 187-239.

Dorier, J.-L. (2002). Teaching Linear Algebra at University. In Tatsien Li (Ed.), *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, ICM* (Vol. III, pp. 875-884). Beijing, China: Higher Education Press.

Dubinsky, E., Weller, K., McDonald, M. & Brown, A. (2005). Some Historical Issues and Paradoxes Regarding the Concept of Infinity. An APOS Analysis (Part I). *Educational Studies in Mathematics 58* (3), 335-359.

Dubinsky, E. & McDonald, M. A. (2001). APOS: A Constructivist Theory of Learning in Undergraduate Mathematics Education Research. In D. Holton (Ed.), *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level: An ICMI Study* (pp. 273-280). Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Dubinsky, E. (1994). A Theory and Practice of Learning College Mathematics. In A. Schoenfeld (Ed.), *Mathematical Thinking and Problem Solving* (pp. 22-247). Hillsdale, NJ: Erslbaum.

Dubinsky, E. (1991). Reflective Abstraction in Advanced Mathematical Thinking. In D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 95-123). Dordrecht: Kluwer.

Hoffman, K. y Kunze, R. (1973). *Álgebra lineal*. Bogotá: Prentice-Hall International.

Kú, D.,Trigueros, A. y Oktaç, A. (2008). Comprensión del concepto de base de un espacio vectorial desde el punto de vista de la teoría APOE. *Educación Matemática 20* (2), 65- 89.

McDonald, M. (2000). http://galois.oxy.edu/mickey/APOSbib.html

Meel, D. (2003). Modelos y teorías de la comprensión matemática: comparación de los modelos de Pirie y Kieren sobre el crecimiento de la comprensión matemática y la teoría APOE. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 6* (3), 221-271.

Oktaç, A., Trigueros, M. & Vargas, X. N. (2006). Understanding of Vector Spaces. A Viewpoint from APOS Theory. *CD-ROM Proceedings of the 3rd International Conference on the Teaching of Mathematics*. Istambul, Turkey: Turkish Mathematical Society.

Parraguez, M. & Oktaç, A. (2010). Construction of the Vector Space Concept from the Viewpoint of APOS Theory. *Linear Algebra and its Applications*, 432, 2112-2124.

Piaget, J. (1970). *Genetic epistemology*. New York & London: Columbia University Press.

Piaget, J. y García, R. (2004). *Psicogénesis e historia de la ciencia*. México: Siglo XXI Editores.

Roa, D. (2008). *Construcciones y mecanismos mentales asociados al concepto transformación lineal*. Tesis de maestría, Cinvestav, México.

Trigueros, M., Oktaç, A. & Manzanero, L. (2007). Understanding of Systems of Equations in Linear Algebra. Demetra Pitta – Pantazi & George Philippou (Eds.), *Proceedings of the 5th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education, CERME* (pp. 2359-2368). Larnaca, Cyprus: University of Cyprus.

Trigueros, M. & Oktaç, A. (2005). La Théorie APOS et l'Enseignement de l'Algèbre Linéaire. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives 10*, 157-176.

Trigueros, M. (2005). La noción del esquema en la investigación en matemática educativa a nivel superior. *Educación Matemática 17* (1), 5-31.

Weller, K., Montgomery, A., Clark, J., Cottrill, J., Trigueros, M., Arnon, I. & Dubinsky, E. (2002). *Learning Linear Algebra with ISETL*. Obtenido de http://homepages.ohiodominican.edu/~cottrilj/datastore/linear-alg/LLAWI-P3.pdf.

Autoras

Solange Roa-Fuentes. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, México. Grupo Educación Matemática *EDUMAT* de la Universidad Industrial de Santander *UIS*, Colombia; roafuentes@gmail.com

Asuman Oktaç. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, México: oktac@cinvestav.mx

La Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (*Relime*) es la publicación oficial de investigación del Comité Latinoamericano de Matemática Educativa (Clame AC). Se edita tres veces por año. Acepta artículos en español, portugués, inglés y francés. Está dirigida a investigadores en Matemática Educativa, a profesores de matemáticas y ciencias, y estudiantes de licenciatura y posgrado interesados en conocer los resultados recientes de las investigaciones y en profundizar en el conocimiento de un tema en particular.

Objetivos:

1. *Relime* pretende ser un foro abierto a las diversas escuelas del pensamiento (paradigmas, teorías, metodologías, métodos, enfoques) en nuestra disciplina, la Matemática Educativa, sin definir perspectivas únicas y con un profundo respeto a las tradiciones educativas y los contextos de los diversos sistemas educativos de nuestra región.
2. Dar a conocer resultados de investigación original en Matemática Educativa que se realizan en América Latina y el Caribe y en el resto del mundo.
3. Contribuir al proceso de profesionalización de la Matemática Educativa en nuestra región.
4. Fomentar una cultura de divulgación e investigación entre los distintos grupos de investigación en nuestra región.
5. Propiciar el debate y la reflexión profunda sobre problemas de investigación que fortalezca la disciplina en nuestra área geográfica.
6. Fortalecer la calidad de la investigación en Matemática Educativa y la vinculación entre comunidades nacionales e internacionales.

INSTRUCCIONES TÉCNICAS PARA AUTORES

Las contribuciones

Toda contribución propuesta a Relime se somete a un estricto proceso de arbitraje. Las contribuciones deberán ser resultado de investigaciones teóricas o experimentales, estudios de caso, etnográficos, etc., en formato de artículo. Estas contribuciones deberán ser trabajos inéditos de investigación, no estar en arbitraje en otra revista ni tratarse de traducciones previamente publicadas en su lengua original.

Características de los manuscritos

Relime publica artículos en castellano, portugués, inglés y francés. Acepta ensayos teóricos originales así como propuestas que sean resultado de estudios experimentales, de casos, de observación, etnográficos, etc.

Los artículos deberán tener un máximo de nueve mil palabras, incluyendo referencias, figuras, cuadros y anexos. En caso de que su propuesta exceda esta extensión, el Comité de Redacción decide si considera la posibilidad de publicarlo siempre que tal propuesta no ocupe todo el espacio disponible en un número de la revista.

En el caso de reportes de estudios experimentales, de casos, de observación, etnográficos, etcétera, recomendamos que los escritos contengan:

1) Resumen del trabajo, deberá tener un máximo de 10 renglones escrito en español, portugués, inglés y francés y de 5 palabras clave en las cuatro lenguas. Resumen, título y palabras claves deben ser escritos en los cuatro idiomas.

2) Una exposición del problema de investigación (su pertinencia y relevancia en el tema que se aborda).

3) Indicaciones globales acerca de la estructura teórica del reporte.

4) Justificación de la metodología usada.

5) Desarrollo de algunos ejemplos y análisis de resultados.

6) Referencias bibliográficas.

Si se trata de ensayos teóricos y filosóficos, nuestra recomendación es la siguiente:

1) Iniciar con una exposición del problema de investigación (su pertinencia y relevancia en el tema que se aborda).

2) Revisión de la literatura que incluya trabajos importantes que sustenten la investigación, en el que se refleje una variedad de resultados actuales. Esta revisión debe incluir investigaciones internacionales pertinentes y no limitarse a estudios de un solo país.

3) Ofrecer indicaciones sobre la estructura teórica o filosófica en la cual se desarrolla el tema del artículo.

4) Exposición detallada de la posición del autor dentro del tema o los temas de exposición. Esto debe reflejarse a través del desarrollo de ideas, más que de una lista de reflexiones.
5) Implicaciones o consecuencias de la investigación en el área.
6) Referencias bibliográficas.

PROCESO DE EVALUACIÓN EN RELIME

Los artículos propuestos a Relime serán leídos por dos miembros del Comité de Redacción, y si el contenido atiende a la originalidad y satisface los criterios anteriores, así como a la claridad de la presentación e interés para la comunidad de matemática educativa, serán evaluados en forma "ciega" por dos investigadores reconocidos y con experiencia dentro del área. En el proceso de evaluación se garantizará el anonimato de autores y evaluadores.

El resultado del dictamen puede ser:

A. Sugerencia de publicar el artículo sin modificaciones.
B. Sugerencia de publicar el artículo bajo reserva de hacer ligeras modificaciones.
C. Sugerencia de reestructurar el artículo atendiendo a los comentarios, lo que precisaría una nueva revisión.
D. Sugerencia de rechazo del artículo.

FORMATO DE LAS CONTRIBUCIONES

Todas las contribuciones deberán estar escritas en procesador de texto Word 6.0 o superior, tipo de letra Times New Roman, tamaño 11 y utilizar un espacio anterior y posterior de 4 pt, lo que significa que no se requiere dar espacio entre un párrafo y otro. Los cuatro márgenes de la página deberán ser de 2.5 cm. Para las expresiones matemáticas debe usarse el editor de ecuaciones.

ENCABEZADOS PRINCIPALES

El estilo de letra para los encabezados principales es tipo VERSALES en formato minúsculas, utilizando un espacio anterior de 36pt y el posterior de 12pt, lo que significa que no se requiere dar espacio entre un encabezado y los párrafos subsecuentes. Enumerar las secciones de los encabezados principales (usando 1, 2, 3, etc.) y utilizar el estilo de alineación centrada.

Subtítulos

El estilo de letra para los subtítulos del artículo es tipo Times New Roman, tamaño 11 y cursiva. La primera letra debe escribirse con mayúsculas. Utilizar un espacio anterior de 24 pt y el posterior de 10 pt, lo que significa que no se requiere dar espacio entre un subtítulo y los párrafos subsecuentes. Los subtítulos deberán enumerarse 1.1., 1.2, 1.3, etc., según corresponda en estilo tipo Normal. Los subtítulos posteriores a un encabezado principal deben tener un espacio anterior y posterior de 6 pts.

Estilo para las tablas

Las tablas deben tener una alineación centrada. El estilo de letra del texto en el interior de la tabla debe ser tipo Times New Roman, Normal, tamaño 10 y con un espacio anterior y posterior de 2 pto. Enumerar las tablas, usando tipo de letra VERSALES tamaño 10, en formato minúscula: TABLA I, TABLA II, TABLA III, etc., utilizando un espacio anterior de 6 pto y posterior de 0 pto. El número de la tabla debe escribirse en la parte superior y su título debajo, utilizando un estilo de alineación centrada y tipo de letra normal tamaño 10.

Estilo para las figuras e imágenes

Las figuras e imágenes deben tener una alineación centrada. El estilo de letra debe ser tipo Times New Roman, tamaño 10 y tipo Cursiva y Normal. Escribir el número de la figura o imagen en formato tipo cursiva y el título en formato tipo normal. Utilizar un espacio anterior de 2 pt y el posterior de 4 pt. Las imágenes y figuras deberán adjuntarse en un archivo independiente al manuscrito en formato de alta resolución.

Transcripciones

Para las transcripciones usar el estilo de letra normal, tipo Times New Roman tamaño 10. Utilizar un interlineado sencillo.

Usar estilos de transcripción como los siguientes:

Estudiante: Para graficar utilicé uno de los métodos que vimos en clase. Me pareció que era el más simple para resolverlo

Profesor: ¿Por qué consideras que ese método es más simple?

Si las líneas de la transcripción requieren ser numerados, entonces usar el estilo de transcripción enumerada como sigue:

[122] Entrevistador: En la primera actividad se te propuso determinar la función velocidad ¿Podrías explicar cómo la hallaste?
[123] Alumno: Hum... pues...

En el caso de que no se requiera hacer referencia a los números, se sugiere usar el primer estilo de transcripción (indicada párrafos arriba).

Reconocimientos

Los reconocimientos a personas, fondos, asociaciones,etc. deberán colocarse en una sección separada antes de las referencias bibliográficas. Los nombres de organizaciones financieras deberán escribirse completos.

Bibliografía, referencias y notas

Solicitamos emplear el estilo de la APA (Publication Manual of the American Psychological Association, 4th ed., 1994) para las citas de pie, notas, referencias textuales y bibliografía.

La bibliografía deberá escribirse en forma de lista sin enumerar y en orden cronológico. El estilo de letra debe ser Times New Roman 9. Para escribir una referencia debe usarse alineación justificada para el primer renglón. A partir del segundo renglón deberán establecer una sangría especial de 0.63 cm.

Las notas deberán escribirse al final de cada página del documento. El estilo de letra que deberá usarse es Times New Roman 9 en formato normal.

Información complementaria

1) No se devolverán los artículos originales.
2) El editor se reserva el derecho de hacer algunas modificaciones necesarias para mantener el estilo de la publicación.
3) Los textos pueden ser publicados en otro órgano editorial previo permiso expreso, por escrito, y haciendo referencia explícita de la fuente.
4) Los autores recibirán gratuitamente dos ejemplares del número en que se haya publicado su artículo.

5) No se realizarán pagos a los autores por los artículos que se publiquen en *RELIME*. Para mayores informes, puede visitar la página web: http://www.clame.org.mx/relime.htm o bien el correo electrónico:

relime@clame.org.mx

Suscripción a Relime

Costo del volumen 13 (tres números)
Suscripción institucional: 120 dls
Suscripción individual: 50 dls
Suscripción para miembros de Clame: 20 dls
Costo por un número: 15 dls

Las suscripciones deberán solicitarse al correo electrónico:
relime@clame.org.mx

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa

Volumen 13, Número 1

Edición digital / webmaster
Emilio Serna Hernández
www.emilioserna.com.mx

Se imprimió en los talleres de
Editorial Progreso S.A. de C.V.
Sabino # 275
Col. Santa María la Ribera
Delegación Cuauhtémoc
06400 México, D. F.

Marzo de 2010
Tiraje: 2000 ejemplares más sobrantes