RELIME 26-2

9 771665 243002 02602

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa

Vol. 26, Núm. 2, julio 2023

ISSN 1665-2436

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa

RELIME

Vol. 26, Núm. 2, 2023

Clame Comité Latinoamericano de Matemática Educativa

Publicación oficial de investigación del Comité Latinoamericano de Matemática Educativa

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa

Departamento de Matemática Educativa – Cinvestav
AP 14-740, México 07000, CDMX
M É X I C O

Coordinación técnica: Janet Ramírez Sandoval
Martha Maldonado Rosales

Formación y diseño: Emilio Serna Hernández
Portada: «Opus 1» de Oscar Reutersvärd en 1934. Reproducida con permiso de los herederos del artista.

Publicación oficial de investigación del Comité Latinoamericano de Matemática Educativa, Clame A.C. Consejo Directivo: *Presidenta:* Dra. Carmen Evarista Matías Pérez; *Secretaria:* Lic. Elizabeth Mariscal Vallarta; *Tesorera:* Mg. Santa Daysi Sánchez González; *Vocal Norteamérica:* Dra. Evelia Reséndiz; *Vocal Caribe:* Dra. Anelys Vargas Ricardo; *Vocal Centroamérica:* Rodolfo Fallas Soto; *Vocal Sudamérica:* Mg. Mónica Marcela Parra - Zapata.

Publicación cuatrimestral, se publica en los meses de marzo, julio y noviembre. Editada por el Colegio Mexicano de Matemática Educativa A.C., con reservas de derechos al uso exclusivo, con No. 04-2016-110914351000-102, del ISSN: 1665-2436 y, con No. 04-2016-110413025500-203, del e-ISSN: 2007-6819, otorgados por el Instituto Nacional del Derecho de Autor en México.

Contribuciones e información: editorial@relime.org

Relime es una revista indizada en:
ISI Web of Knowledge, SSCI – Social Sciences Citation Index y Journal Citation Reports • ERIH – European Reference Index for the Humanities • Conacyt – Índice de Revistas Mexicanas de Investigación Científica y Tecnológica - Scopus – Elsevier Database • International Bibliography of Periodical Literature in the Humanities and Social Sciences • Clase – Citas Latinoamericanas en Ciencias Sociales y Humanidades • Iresie – Índice de Revistas de Educación Superior e Investigación Educativa • Latindex – Sistema Regional de Información en Línea para Revistas Científicas de América Latina, el Caribe, España y Portugal • Redalyc – Red de Revistas Científicas de América Latina y el Caribe, España y Portugal • EBSCO – Information Services • Dialnet • Scielo-México.

2023 Impresa en México

Volumen 26 – Número 2 – 2023

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa

Clame Comité Latinoamericano de Matemática Educativa

Publicación oficial del Comité Latinoamericano de Matemática Educativa

2023

Volumen 26 Número 2 Julio de 2023

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa

EDITORIAL

ARTÍCULOS

REVISTA LATINOAMERICANA DE INVESTIGACIÓN EN MATEMÁTICA EDUCATIVA, RELIME, es la publicación de investigación oficial del Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C., editada por el Colegio Mexicano de Matemática Educativa, A. C., Dirección fiscal: Norte 79-A, No. 221. Col. Clavería, Alcaldía Azcapotzalco, C. P. 02080. Ciudad de México, México., www.relime.org. Directora responsable: Gisela Montiel-Espinosa, direccion@relime.org.

Reservas de Derechos al Uso Exclusivo, No. 04-2016-110914351000-102, con ISSN: 1665-2436, para el formato impreso; y No. 04-2016-110413025500-203, con e-ISSN: 2007-6819, para el formato digital; otorgados por el Instituto Nacional del Derecho de Autor. Derechos Reservados © Colegio Mexicano de Matemática Educativa, A. C. RFC: CMM 040505 IC7. Publicación cuatrimestral. Se publica en los meses de marzo, julio y noviembre, con el financiamiento del Clame.

Las opiniones expresadas por los autores no necesariamente reflejan la postura del editor de la publicación.

EDITORIAL

EL ROL EDITORIAL. UNA MIRADA DE EQUIPO CON DIRECCIÓN ACADÉMICA Y PROFESIONAL

THE EDITORIAL ROLE. A TEAM LOOK WITH ACADEMIC AND PROFESSIONAL DIRECTION

GISELA MONTIEL-ESPINOSA
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados, México

En las dos editoriales previas me propuse hacer una reflexión sobre dos de las figuras centrales en la comunicación que se logra en una revista académica: autores y revisores. Hablé de autoría y revisión, para poner énfasis en los roles porque con toda certeza estos los llevan a cabo las mismas personas en distintos momentos, de hecho, parte de la actualización de las políticas editoriales de la Relime incorporará el compromiso de que quienes participen como autores lo hagan también como revisores cuando la revista requiera de la experiencia y perspectiva de su especialidad en la disciplina. Además de estas dos, hay una tercera figura, el equipo editorial, cuya característica es que se conforma por personas que juegan roles muy distintos unos de otros. Quizá el rol más visible, porque es con el que tienen contacto directo tanto autores como revisores, es el de la mediación entre la autoría y la revisión; sin embargo, debido al ecosistema en el que vive actualmente una revista como la Relime resulta relevante visibilizar y fortalecer el rol de cada colaborador.

En comunicaciones previas, vía la página web de la Relime, hemos buscado sensibilizar a la comunidad respecto a las características de la Relime debido a las dificultades que hemos atravesado en los últimos años. Que la Relime no cuente con la infraestructura editorial de una universidad o una empresa, sino con la que va construyendo a través de su comunidad académica, conformada por quienes

Montiel-Espinosa, G. (2023). El rol editorial. Una mirada de equipo con dirección académica y profesional. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 26*(2), 143-146. https://doi.org/10.12802/relime.23.2620

hemos participado de la *Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa* (Relme), del *Comité Latinoamericano de Matemática Educativa* (Clame) y de su revista (Relime), ha repercutido en que una sola persona ha llevado a cabo más de un rol dentro del equipo editorial y en que aún no contemos con profesionales de la edición científica en el equipo central. Sin embargo, con ello hemos podido sostener el proyecto inicial y central: *diseminar nuevo conocimiento y resultados de investigación en Matemática Educativa, en una revista de Acceso Abierto Diamante.* En el contexto actual de la comunicación de la ciencia, sostener el acceso abierto en Latinoamérica es un gran reto; hacerlo sin que el costo recaiga en los autores o en sus instituciones, sino sea respaldado por una comunidad académica, es una especie de acto revolucionario. Nuestro objetivo es continuar en esta dirección, fortaleciendo al equipo editorial, a la Relime y, en consecuencia, a su comunidad académica.

La Relime es una revista catalogada en el campo de la Educación, por lo tanto, en el área de las Ciencias Sociales y Humanidades; compartimos características y problemáticas con otras disciplinas de esta área, a la vez que nos distinguimos por la naturaleza multidisciplinar de la Matemática Educativa. Da cuenta de esto que en nuestro Comité Científico y nuestra base de revisores contemos también con la participación de investigadores especialistas de áreas de las Ciencias Naturales y Exactas, y Ciencias de la Ingeniería. Es común que el equipo editor deba entablar un diálogo mediador entre investigadores de distintas disciplinas porque el objeto de estudio de la investigación que se comunica incide en tópicos de interés académico y social de dichas disciplinas y éstas sean de relevancia para el objetivo a comunicar. Dentro del equipo, quienes llevan a cabo este diálogo deben ser especialistas de la Matemática Educativa, entender su desarrollo y la orientación de la revista para cumplir con ella, sin perder de vista el ecosistema editorial en el que se vive y que demanda también de cuidar los aspectos tecnológicos, bibliotecológicos, administrativo-financieros y legales –identificados por Voutssas (2012)–, para sostenerla en el largo plazo.

Por fortuna, el campo de la edición científica se ha ampliado y fortalecido, quizá en buena medida por la transición que se dio al contexto editorial digital y, considero, se ha dado fuertemente en defensa de lo abierto –fuertemente en Latinoamérica, pese a que los sistemas de evaluación académica en sus instituciones no vayan en la misma dirección–; y hoy día se cuenta con gran diversidad de reportes y manuales (véanse, por ejemplo, Aparicio et al., 2016; Ascorra et al., 2018; European Commission. Directorate General for Research and Innovation, 2019; Jiménez Yañez, 2020; Rus y Pinto Duran, 2018) que sirven de guía y apoyo en la toma de decisiones. Estos reportes y manuales apuntan en su conjunto a la *profesionalización* de quienes participamos en el campo, pues tenemos la tarea de darle *la calidad* y *el rigor* al medio con el que las instituciones evalúan el trabajo de los miembros de una comunidad académica: el artículo científico.

Sin embargo, como reportan Díaz-Pérez et al. (2023) se dan *Roles difusos y sexuados de los equipos editoriales de Revistas Científicas.* Estas autoras, en un análisis que realizaron a 44 revistas mexicanas dentro del Catálogo Latindex 2.0 en las Ciencias Sociales y Humanidades, identifican que no existe claridad sobre una estructura organizativa que sea común a la muestra que tomaron, y aunque quizá no tendría que haberla porque cada una responde al espacio donde nace y va creciendo la revista, destacan la importancia de transparentar los roles y las funciones de sus miembros. Del análisis se derivan siete roles persistentes y cuatro personas en promedio en cada equipo, de donde se infiere el fenómeno *multitarea* como componente común de la actividad editorial. Los siete roles identificados son: dirección, coordinación, asistencia, diseño editorial, traducción y otros; y en los últimos se considera al *marcaje* y a los becarios.

Si bien el rol de dirección es compartido por todas las revistas y tiene un perfil y funciones comunes en todas ellas, cómo y con quiénes dirige son preguntas pertinentes si tomamos en consideración que todas las revistas cuentan con Comités Científicos y algunas con Comités de Redacción o Editorial. A decir de Rogel-Salazar (Seminario Permanente de Editores, 2016) estos comités no solo tienen participación constante para actualizar y promover la revista, si no que se renuevan periódicamente para cubrir las regiones geográficas y campos disciplinares que interesa impactar a la *Institución Editora*. Es decir, en tanto proyecto académico, la revista crece en concordancia con los miembros que lo respaldan y lo acompañan, de ahí la relevancia por la participación y renovación de sus miembros.

En esta dirección, la Relime ha comenzado un proceso de renovación, delimitación y optimización de los recursos humanos y materiales con los que cuenta, con el objetivo de cuidar la calidad y el rigor del proceso editorial. Claramente la orientación disciplinar y los intereses regionales serán la prioridad de nuestro enfoque, pero entendemos que una vez que la Relime publica un número los resultados de investigación son para el mundo y en ese sentido nuestra comunicación de la ciencia debe reconocer los estándares internacionales, para lo cual vamos a considerar al campo editorial científico como eje orientador en la toma de decisiones. Lograr la profesionalización de los miembros del equipo editorial de la Relime sería una señal del futuro que quiere el Comité Latinoamericano de Matemática Educativa sobre la revista… y ese es un camino que tenemos que construir, espero estar yendo en esa dirección.

REFERENCIAS

Ascorra, P., Costa-Roldán, I., Cyarno, M., Muñóz-Cornejo, A., Muñóz-Riveros, G., Palma, S., Parodi, G. y Parra-Araya, A. (2018). *Manual de buenas prácticas editoriales.* Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. http://librosonline.ucv.cl/index.php/pucv/catalog/book/6

European Commission. Directorate General for Research and Innovation. (2019). *Future of scholarly publishing and scholarly communication: report of the Expert Group to the European Commission*. Publications Office. https://doi.org/10.2777/836532

Aparicio, A., Banzato, G. y Liberatore, G. (2016). *Manual de gestión editorial de revistas científicas de ciencias sociales y humanas: buenas prácticas y criterios de calidad.* Consejo Latinoamericano de Ciencias Sociales. https://www.clacso.org.ar/libreria-latinoamericana/contador/sumar_pdf.php?id_libro=1212

Díaz-Pérez, G., Domínguez-Gómez, L., Hernández-Sánchez, V. y Ayala-Rogel, M. A. (2023, octubre). *Equipos editoriales de revistas científicas: roles difusos y sexuados*. Póster presentado en el IV Congreso Internacional de Editoras/es Redalyc en Cumbre Global sobre Acceso Abierto Diamante, Toluca, México. https://globaldiamantoa.org/posters/index.html?id=37

Jiménez Yañez, C. (Coord.). (2020). *Revistas académicas en ciencias sociales y humanidades en México: realidades, experiencias y expectativas.* Universidad Autónoma de Baja California, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, El Colegio de Sonora y Universidad Autónoma de Yucatán. https://libros.colson.edu.mx/index.php/colson/catalog/book/228

Rus, J. y Pinto Duran, A. M. (Coords.). (2018). *Revistas científicas mexicanas. Retos de calidad y visibilidad en acceso abierto.* Universidad de Ciencias y Artes de Chiapas. https://repositorio.unicach.mx/handle/20.500.12753/1330

Seminario Permanente de Editores [@SeminarioPermanentedeEditores]. (30 de mayo de 2016). *8va sesión del Seminario Permanente de Editores* [Video]. YouTube. https://www.youtube.com/live/fNJz2xD_2jE?si=nccAyfd4C0MmYbsW

Voutssas, M. J. (2013). Aspectos para el desarrollo de una revista científica digital. *Investigación Bibliotecológica: Archivonomía, bibliotecología e información*, *26*(58), 71–100. https://doi.org/10.22201/iibi.0187358xp.2012.58.35253

Autora

Gisela Montiel-Espinosa. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional (Cinvestav), México. gmontiele@cinvestav.mx

https://orcid.org/0000-0003-1670-9172

Rosa Isela González-Polo, Apolo Castañeda

APRENDER FUNCIONES COMO UN PROCESO DE MATEMATIZACIÓN PROGRESIVA: ESTUDIANTES DE SECUNDARIA ENFRENTADO UNA SECUENCIA DIDÁCTICA DE CAÍDA LIBRE

Learning functions as a process of progressive mathematization: high school students facing a didactic sequence on free fall

RESUMEN

Esta investigación analiza cómo los estudiantes de secundaria comprenden y desarrollan el concepto de función a través de una secuencia didáctica que utiliza la caída libre como fenómeno de estudio. Enmarcada en la Educación Matemática Realista, la secuencia promueve un aprendizaje activo y motiva la transición desde el conocimiento informal hacia el formal. La metodología comprende etapas de anticipación, experimentación, análisis mediante el software Tracker y formulación algebraica. Este diseño didáctico motiva a que los alumnos transiten desde una percepción intuitiva hacia una comprensión abstracta y general de las funciones. Los resultados destacan avances en la habilidad de los estudiantes para vincular distintas representaciones de funciones, gráficas, algebraicas, tabulares o descriptivas. El uso de la herramienta Tracker fue fundamental al apoyar la visualización y análisis de los datos. La investigación concluye que la matematización progresiva y el aprendizaje activo son útiles para una comprensión integral y versátil de las funciones.

PALABRAS CLAVE:

- *Matematización progresiva*
- *Modelación matemática*
- *Uso de tecnología*
- *Aprendizaje de las funciones*
- *Educación Matemática Realista*

ABSTRACT

This research examines how high school students understand and develop the concept of function through a didactic sequence that uses free fall as the phenomenon of study. Framed within Realistic Mathematics Education, the sequence fosters active learning and encourages the transition from informal to formal knowledge. The methodology includes stages of anticipation, experimentation, analysis using Tracker software, and algebraic formulation. This didactic design motivates students to move from an intuitive perception to an abstract and general

KEY WORDS:

- *Progressive mathematization*
- *Mathematical modeling*
- *Use of technology*
- *Learning of functions*
- *Realistic Mathematics Education*

González, R. y Castañeda, A. (2023). Aprender funciones como un proceso de matematización progresiva: estudiantes de secundaria enfrentado una secuencia didáctica de caída libre. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 26*(2), 147 - 175. https://doi.org/10.12802/relime.23.2621. Recepción: Abril 12, 2022 / Aceptación: Enero 30, 2024.

understanding of functions. The results highlight students' progress in linking different representations of functions, whether graphical, algebraic, tabular, or descriptive. Using the Tracker tool was fundamental in supporting the visualization and analysis of the data. The research concludes that progressive mathematization and active learning are helpful for a comprehensive and versatile understanding of functions.

RESUMO

Esta pesquisa analisa como os estudantes do ensino médio compreendem e desenvolvem o conceito de função através de uma sequência didática que utiliza a queda livre como fenômeno de estudo. Enquadrada na Educação Matemática Realista, a sequência promove uma aprendizagem ativa e motiva a transição do conhecimento informal para o formal. A metodologia compreende etapas de antecipação, experimentação, análise por meio do software Tracker e formulação algébrica. Este desenho didático motiva os alunos a passarem de uma percepção intuitiva para uma compreensão abstrata e geral das funções. Os resultados destacam avanços na habilidade dos estudantes de vincular diferentes representações de funções, sejam gráficas, algébricas, tabulares ou descritivas. O uso da ferramenta Tracker foi fundamental para apoiar a visualização e análise dos dados. A pesquisa conclui que a matematização progressiva e a aprendizagem ativa são úteis para uma compreensão integral e versátil das funções.

PALAVRAS CHAVE:

- *Matematização progressiva*
- *Modelagem matemática*
- *Uso de tecnología*
- *Aprendizagem das funções*
- *Educação Matemática Realista*

RÉSUMÉ

Cette recherche examine comment les élèves du secondaire comprennent et développent le concept de fonction à travers une séquence didactique qui utilise la chute libre comme phénomène d'étude. Encadrée dans l'Éducation Mathématique Réaliste, la séquence favorise un apprentissage actif et encourage la transition de la connaissance informelle vers la connaissance formelle. La méthodologie comprend des étapes d'anticipation, d'expérimentation, d'analyse à l'aide du logiciel Tracker et de formulation algébrique. Ce design didactique motive les élèves à passer d'une perception intuitive à une compréhension abstraite et générale des fonctions. Les résultats soulignent des progrès dans la capacité des étudiants à relier différentes représentations de fonctions, graphiques, algébriques, tabulaires ou descriptives. L'utilisation de l'outil Tracker a été fondamentale pour soutenir la visualisation et l'analyse des données. La recherche conclut que la mathématisation progressive et l'apprentissage actif sont utiles pour une compréhension intégrale et polyvalente des fonctions.

MOTS CLÉS:

- *Mathématisation progressive*
- *Modélisation mathématique*
- *Utilisation de la technologie*
- *Apprentissage des fonctions*
- *Éducation Mathématique Réaliste*

1. Introducción

En la educación secundaria se inicia el estudio de las funciones, un concepto esencial de la matemática avanzada y una base fundamental para el cálculo. En la enseñanza más tradicional se suele pedir a los estudiantes que reconozcan y registren las propiedades de las funciones a través de la observación de ejemplos, llevando a una generalización implícita (Bloch, 2003). En este enfoque no se hace énfasis en las reglas o principios fundamentales que subyacen en estos ejemplos; por ende, los estudiantes pueden identificar ciertas características o comportamientos al ver su aplicación en situaciones específicas, pero sin una comprensión profunda o formalizada de por qué estas propiedades son universales o cómo se derivan de principios matemáticos más fundamentales, como la idea de relación entre variables (Falcade et al., 2007).

El enfoque procedimiental de enseñanza matemática a menudo resulta en un entendimiento básico de sus conceptos. Los estudiantes pueden ser hábiles en la identificación de patrones o en la aplicación de reglas en escenarios familiares, pero no poseen las habilidades necesarias para explicar o justificar estos conceptos, ni para aplicarlos en contextos más desafiantes. Cuando se requiere una comprensión integral del concepto de función es necesario desarrollar habilidades para la interpretación cualitativa de funciones (Best y Bikner-Ahsbahs, 2017), para discernir el comportamiento de las gráficas, y para transferir y aplicar conocimientos sobre las funciones en diversas formas de representación (Duval, 2006).

Por otra parte, la enseñanza procedimental de las funciones suele centrarse o hacer énfasis en una sola representación, generalmente la algebraica, lo cual puede resultar en una comprensión parcial del concepto por parte de los estudiantes. Esta limitación se debe a una enseñanza que no promueve el tránsito entre diferentes formas de representación, y que lleva a los alumnos a percibir las funciones meramente como fórmulas o ecuaciones, sin comprender su significado más amplio. Esta visión obstruye la habilidad de los estudiantes para aplicar el concepto de función en diversos contextos matemáticos. Una comprensión integral de las funciones implica la habilidad de conectar y convertir entre representaciones gráficas, algebraicas, tabulares y verbales, así como identificar sus conexiones (Andrade y Saraiva, 2012).

En respuesta a estos desafíos, la adopción de nuevas metodologías de enseñanza es fundamental para trascender la comprensión fragmentaria de los conceptos matemáticos y promover un entendimiento más integral y flexible. El estudio de las funciones matemáticas debe ser producto de una síntesis de distintos escenarios donde se establezcan relaciones funcionales y de representaciones matemáticas. Para ello se requiere una metodología que fomente en los estudiantes la conexión entre su conocimiento previo y las experiencias con el contenido matemático, permitiéndoles comprender las funciones no como entidades autónomas, sino como conceptos aplicables en una variedad de contextos y representaciones, incluyendo gráficos, ecuaciones y tablas. La flexibilidad, en este marco educativo, alude a la habilidad y la disposición de los estudiantes para transitar entre distintas perspectivas interpretativas de las relaciones funcionales y para manejar diversas representaciones.

Un enfoque emergente para la enseñanza de las funciones es la modelación matemática que plantea Ortega y Puig (2017), perspectiva que se centra en la aplicación práctica de conceptos matemáticos para entender y resolver problemas del mundo real. De acuerdo con estos autores, la modelación no solo se enfoca en encontrar la solución a un problema, sino también en el proceso de llegar a esa solución. Esto incluye la formulación del problema, la selección de herramientas matemáticas adecuadas, la interpretación de resultados y la validación del modelo. Por otra parte, la modelación fomenta el pensamiento crítico y la reflexión sobre el propio aprendizaje, ya que los estudiantes no solo aplican conceptos matemáticos, sino que también reflexionan sobre su elección de modelos y métodos, lo cual desarrolla habilidades metacognitivas. Finalmente, este enfoque propicia la colaboración entre los estudiantes al compartir ideas, cuestionar supuestos y llegar a un entendimiento más profundo del problema y de las matemáticas involucradas.

Ortega y Puig (2017) destacan que entre las cualidades relevantes de la modelación matemática está la oportunidad de emplear datos reales para explorar fenómenos mediante funciones. Esta característica tiene implicaciones pedagógicas importantes al promover el desarrollo de habilidades de investigación y de análisis crítico, ya que los estudiantes deben recolectar, procesar y examinar datos para la construcción de modelos matemáticos. El uso de datos auténticos evidencia la relevancia de las matemáticas en situaciones reales y puede potenciar el interés y la motivación de los estudiantes, además de que favorece la identificación de variables y la forma en que se relacionan.

La investigación de Arzarello y Robutti (2004) constituye un punto de referencia en la enseñanza de funciones mediante la modelación. En su investigación reportan una experiencia educativa donde los estudiantes usan sensores de movimiento y calculadoras gráfico-simbólicas para generar y representar datos en gráficas y tablas numéricas, en las que se expresan distintos tipos de movimiento, como los uniformes y acelerados. Esta práctica permite a los estudiantes visualizar la aplicación de funciones matemáticas en la modelación de movimientos reales. En una línea similar, Ortega et al. (2019) emplean la modelación para estructurar fenómenos físicos, integrando magnitudes físicas para fomentar el aprendizaje matemático y las prácticas científicas. Modelar un fenómeno, según estos autores, implica la creación de un modelo que sea descriptivo, explicativo y predictivo, sin excluir otras posibles interpretaciones de este. En su estudio desarrollaron recursos didácticos para estudiar funciones lineales y cuadráticas usando tabletas electrónicas y modelación matemática de fenómenos físicos. Los estudiantes utilizaron aplicaciones de tabletas para recolectar datos experimentales y buscaron expresiones algebraicas que describieran óptimamente los fenómenos. Este proceso incluyó la interpretación y validación del modelo con relación al fenómeno real, motivando a los estudiantes a definir funciones y a reflexionar sobre su aplicabilidad en el mundo real.

La metodología de modelado en la educación matemática, según Rodríguez-Gallegos y Quiroz-Rivera (2016), se fundamenta en la resolución de problemas situados en contextos significativos que justifican la formulación de representaciones matemáticas como gráficos, figuras y diagramas. Estos problemas también deben motivar razonamientos matemáticos específicos y evocar el uso de herramientas y conceptos matemáticos relevantes (Gravemeijer, 2007). Bajo la óptica de Freudenthal (2002), se considera a las matemáticas como una construcción de la actividad humana, lo cual respalda que la enseñanza mediante modelación fomente una reinvención guiada. En este proceso, los estudiantes emulan la matematización histórica de la humanidad, partiendo de sus estrategias informales, ideas e intuiciones estrechamente vinculadas al contexto para avanzar hacia formulaciones cada vez más abstractas y formales.

1.1. *Propósito de la investigación*

El objetivo de esta investigación es analizar el proceso de matematización progresiva llevado a cabo por estudiantes de secundaria al realizar la modelación de un experimento de caída libre de un balón, utilizando el software Tracker como herramienta de apoyo. La principal contribución de este estudio consiste en desarrollar un marco analítico que permita identificar a detalle el proceso de matematización y su relación con el aprendizaje del concepto de función.

2. Marco teórico

La Educación Matemática Realista (EMR) se caracteriza principalmente por enfocarse en el estudiante y por la importancia que le otorga a su desarrollo personal (van den Heuvel-Panhuizen, 2020). Este enfoque se caracteriza por el respeto y la consideración de las concepciones y experiencias individuales de los estudiantes, utilizándolas como puntos de partida para la enseñanza y el aprendizaje.

En EMR, los estudiantes desarrollan diversas estrategias dentro de contextos específicos, lo que les ayuda a comprender lo que están haciendo más allá de los términos matemáticos formales. El proceso de alcanzar un nivel formal en matemáticas puede extenderse a lo largo de varios años, permitiendo a los estudiantes adquirir una comprensión conceptual profunda acerca de cómo funcionan los procedimientos, dónde se aplican y cómo se conectan con otras áreas de las matemáticas. Se observa que este enfoque puede cambiar la actitud de los estudiantes frente a las matemáticas a una más positiva al proporcionar situaciones naturales y actividades que fomentan la participación activa y diversa (van den Heuvel-Panhuizen, 2020).

De acuerdo con Kaur et al. (2020), la EMR se sustenta en seis principios fundamentales que guían el proceso de enseñanza y aprendizaje. En primer lugar, destaca el principio de actividad, que concibe a los estudiantes como agentes activos en su propio proceso educativo. Enseguida, el principio de realidad enfatiza la importancia de iniciar la educación matemática con problemas prácticos, preparando a los estudiantes para aplicarla en contextos reales. El principio de nivel reconoce la progresión en el aprendizaje matemático, desde su comprensión informal hasta el entendimiento formal de las relaciones entre conceptos y estrategias. Por su parte, el principio de entrelazamiento enfatiza en la integración de los diversos dominios matemáticos en problemas complejos en lugar de tratarlos como capítulos aislados. El principio de interactividad resalta el carácter social del aprendizaje matemático. Finalmente, el principio de orientación subraya el papel activo de los docentes en dirigir y apoyar el aprendizaje de los estudiantes a través de programas basados en trayectorias coherentes y a largo plazo.

Selter y Walter (2020) señala que en la EMR el aprendizaje es consecuencia de la matematización progresiva. Este proceso se refiere a la actividad de integrar, organizar y estructurar los conocimientos y habilidades adquiridos para descubrir regularidades, conexiones y estructuras desconocidas hasta entonces. Esto debe ser natural y debe permitir que los estudiantes contribuyan tanto como sea posible al proceso de enseñanza y aprendizaje. Se enfatiza que la matematización debe ser una actividad (re)constructiva estimulada por la integración de ideas, un proceso a largo plazo desde lo concreto a lo abstracto, facilitada por la reflexión sobre los procesos de pensamiento propios y los de los demás participantes, y siempre enmarcada en un contexto sociocultural.

La matematización progresiva en la EMR tiene dos componentes interrelacionados: la matematización horizontal y la vertical. La matematización horizontal se describe como un puente desde el mundo real a las matemáticas formales y simbólicas, en otras palabras, se refiere al proceso de conectar las experiencias y el conocimiento del mundo real con las matemáticas formales.

Este proceso implica traducir situaciones de la vida real a un lenguaje y modelos matemáticos, sirviendo como un puente entre el mundo real y el mundo de las matemáticas formales y simbólicas. La matematización horizontal se refiere esencialmente a cómo los estudiantes aplican su conocimiento matemático en contextos prácticos, cómo extraen y formulan problemas a partir de situaciones reales. Este proceso implica identificar los aspectos matemáticos relevantes de una situación real, formular preguntas matemáticas, y usar representaciones matemáticas (como gráficos, tablas o ecuaciones) para analizar y resolver las situaciones.

Por otra parte, la matematización vertical se refiere a actividades dentro del ámbito formal y simbólico, es decir, se refiere a cómo los estudiantes profundizan y refinan su comprensión de los conceptos matemáticos, pasando de una superficial o procedimental a una más estructurada y abstracta. Es importante destacar que un estudiante solo podrá alcanzar un nivel superior de matemáticas mediante la matematización vertical, lo que incluye actividades como reorganizar, sistematizar y vincular estructuras matemáticas. Se trata de un proceso de desarrollo y conexión de ideas matemáticas más abstractas y avanzadas a partir de los conocimientos existentes. Sin embargo, no debe haber una distinción estricta entre las actividades de matematización horizontal y vertical, ya que estos procesos pueden entrelazarse y dependen de la situación específica, la persona involucrada y su entorno. (Selter y Walter, 2020).

De acuerdo con van den Heuvel-Panhuizen (2020), este enfoque busca que los estudiantes no solo apliquen fórmulas y procedimientos de manera mecánica, sino que comprendan y descubran las matemáticas a través de sus propias experiencias y razonamientos. Al utilizar sus propias palabras y estrategias personales, los estudiantes construyen una base sólida de comprensión antes de moverse hacia el aprendizaje de técnicas más formalizadas. Esta integración respeta y aprovecha la capacidad del estudiante para hacer sentido de su entorno y desarrollar su pensamiento matemático de una manera significativa y contextualizada.

En la EMR, las representaciones juegan un papel fundamental como herramientas mediadoras en el proceso de aprendizaje. En esta perspectiva se busca que los estudiantes aprendan matemáticas a través de una variedad de representaciones y establezcan conexiones entre ellas. Las primeras representaciones en la EMR son cruciales porque constituyen el punto de partida para el desarrollo del pensamiento formal. Al comenzar con representaciones que son significativas y contextualizadas en experiencias reales, los estudiantes pueden construir gradualmente una comprensión formal. Este proceso comienza con lo concreto y tangible, lo que permite que los estudiantes vean la matemática como algo relevante y aplicable a sus vidas antes de moverse hacia una abstracción y formalización más profundas (Kaur et al., 2020).

De acuerdo con Bressan et al. (2016), en el proceso de matematización progresiva los estudiantes atraviesan un proceso que implica el desarrollo y evolución de los modelos matemáticos a través de cuatro niveles de compresión: situacional, referencial, general y formal. En el nivel situacional, los modelos funcionan como “modelo de”, estando estrechamente ligados a situaciones problemáticas específicas. Estos modelos representan las situaciones a las que se enfrentan los estudiantes de manera directa y concreta. A medida que avanzan al nivel referencial, estos modelos comienzan a despegarse ligeramente de las situaciones particulares, manteniendo todavía un carácter de “modelo de”, pero mostrando signos de generalización. La transición hacia el “modelo para” se hace más evidente en el nivel general. Aquí, los modelos no sólo representan situaciones específicas, sino que también sirven como herramientas para razonar matemáticamente en un espectro más amplio de contextos. Estos modelos se convierten en medios generales y formales para la comprensión y aplicación matemática, extendiendo su utilidad más allá de las situaciones particulares iniciales. Finalmente, en el nivel formal los modelos son herramientas matemáticas abstractas y generalizables, aplicables tanto dentro como fuera de la matemática. Los estudiantes utilizan estos modelos para comprender, operar y explorar conceptos matemáticos, aplicándolos en una variedad de contextos y situaciones. Este progreso refleja el desarrollo desde una comprensión concreta y situacional de los problemas matemáticos hacia una comprensión más abstracta y generalizada donde los modelos sirven como poderosas herramientas para el razonamiento y la aplicación matemática. La Figura 1 muestra la relación de los cuatro niveles de comprensión y sus rasgos de acuerdo con Bressan et al. (2016).

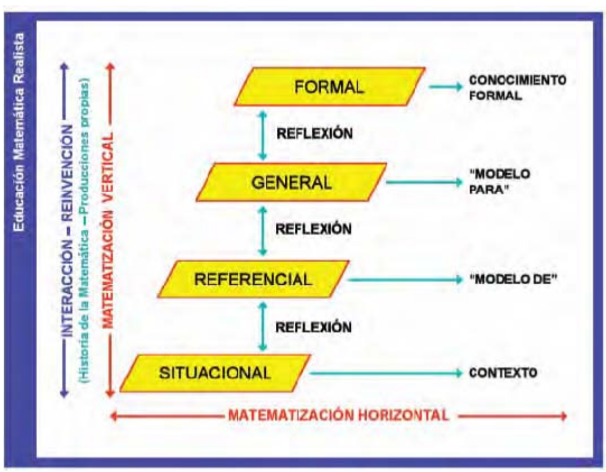


Figura 1. Descripción del proceso de matematización progresiva
Nota. Fuente: Tomado de Bressan et al. (2016, p. 7)

3. Metodología

3.1. *Diseño de la actividad*

En la EMR, las situaciones o problemas utilizados para la enseñanza tienen características distintivas. Primero se ofrece a los estudiantes espacio para emplear notación y razonamiento informal. Además, los contextos de las tareas están diseñados para ser motivadores y de apoyo, permitiendo a los estudiantes explorar sus habilidades sin las restricciones que a menudo impone la notación formal. Otro aspecto importante es el uso de problemas abiertos que permiten a los estudiantes responder con estrategias individuales y trabajar a diferentes niveles, revelando así lo que son capaces de hacer. Finalmente, se promueve que los estudiantes razonen sobre sus respuestas y escriban notas o reflexiones.

Teniendo en cuenta las características mencionadas, se desarrolló una secuencia didáctica de modelación de la caída libre de un balón, el cual es un experimento que no requiere una explicación adicional. A pesar de que el análisis de este experimento en términos de cinemática involucra conceptos abstractos como movimiento uniformemente acelerado, constante de gravedad y velocidad, la actividad se basa exclusivamente en la relación entre el tiempo y la posición para estudiar el movimiento. La secuencia didáctica permite a los estudiantes la oportunidad de expresar ideas intuitivas y conocimientos de una manera más detallada a través de la formulación de representaciones matemáticas, el análisis de condiciones iniciales y la formulación de conjeturas.

Siguiendo con el planteamiento de Selter y Walter (2020), en esta secuencia didáctica los estudiantes son considerados como productores de matemáticas en lugar de ser simplemente receptores pasivos de conocimientos matemáticos preestablecidos. Se motiva a que los estudiantes desarrollen sus propias estrategias para resolver problemas, y luego profundizar y mejorar esos métodos a través de la interacción con otros estudiantes y con el docente. El proceso de aprendizaje se describe como una transición de “invenciones a convenciones”, lo que significa que se estimula a los estudiantes a innovar y, posteriormente, sus métodos pueden convertirse en parte del conocimiento matemático convencional compartido.

La secuencia didáctica se integra de cuatro fases. En la primera fase, el profesor inicia la actividad proporcionando una breve introducción verbal que describe la situación de un balón en caída libre desde una altura específica. En esta etapa se solicita a los estudiantes crear una gráfica cartesiana en papel blanco con total libertad para seleccionar las variables, definir el sistema de referencia y dar forma a la gráfica. El objetivo principal es que los estudiantes utilicen sus conocimientos previos, ideas y concepciones para anticipar la forma de la gráfica. En la segunda fase se lleva a cabo el experimento real y se graba utilizando un dispositivo móvil. Este vídeo se emplea posteriormente para realizar mediciones precisas y construir una tabla de datos. La finalidad de esta fase es fomentar la reflexión sobre el significado de las variables y analizar su relación a partir de la información recopilada en la tabla de datos. En la tercera fase se repite el experimento y se introduce el uso del software Tracker, lo que simplifica la obtención de las coordenadas de posición-tiempo y facilita el análisis cualitativo de la gráfica resultante, este último se hace en comparación con la gráfica inicial en la cuarta fase. En esta fase también se exploran métodos para la formulación algebraica de una función cuadrática.

La secuencia didáctica se diseñó considerando dos momentos para la validación interna de los resultados obtenidos por los estudiantes. El primero tiene lugar cuando el software genera la gráfica del experimento, lo que brinda a los estudiantes la oportunidad de comparar sus propias gráficas, examinar sus particularidades, evaluar su ubicación en el sistema de referencia y reflexionar sobre posibles errores. El segundo momento se presenta al final del proceso, cuando se hace la confrontación de las tres gráficas y se realiza un análisis exhaustivo, tanto cualitativo como cuantitativo, de sus características.

3.2. *Procedimiento para la obtención de datos*

Con el propósito de analizar el proceso de matematización progresiva durante la implementación de la secuencia didáctica, se llevaron a cabo diversas acciones de recopilación de datos. Estas incluyeron la recolección de hojas de trabajo completadas por los estudiantes, la grabación de videos de las sesiones colectivas, grabaciones de audio de conversaciones de los equipos, la obtención de fotografías del contenido en el pizarrón y la recopilación de archivos generados por el software Tracker.

3.3. *Categorías de análisis*

Para estudiar el proceso de matematización progresiva se construyó una matriz que integra los cuatro componentes fundamentales de la EMR, los principios fundamentales que guían la enseñanza, los componentes de la matematización progresiva, los niveles de comprensión y las fases de la actividad. Esta matriz proporciona una visión integral y estructurada de la EMR, y ayuda a identificar cómo se aplican y se interrelacionan los principios fundamentales en cada etapa de la secuencia didáctica.

TABLA I

Matriz que integra el marco de la EMR y la secuencia didáctica

Fases de la Actividad / Componentes	*Principios Fundamentales*	*Matematización Progresiva*	*Niveles de Comprensión*
Fase 1: Introducción y Anticipación	Principio de actividad y realidad: Los estudiantes se involucran activamente en problemas prácticos y realistas, lo cual despierta su interés y curiosidad, fomentando una actitud proactiva en el aprendizaje.	Matematización horizontal: Conectar conocimientos previos con la realidad matemática promueve la relevancia y aplicabilidad de las matemáticas, facilitando una comprensión más intuitiva.	Nivel situacional: La anticipación basada en situaciones reales ancla el aprendizaje matemático en experiencias concretas, lo que ayuda a los estudiantes a construir significado.
Fase 2: Experimento y Datos	Principio de nivel y entrelazamiento: La observación y análisis de datos concretos permite a los estudiantes ver la matemática en acción, integrando diferentes áreas matemáticas de manera natural.	Matematización horizontal y vertical: La transición de lo concreto a lo simbólico es crucial para desarrollar la habilidad de abstracción y representación matemática.	Nivel referencial: El análisis de datos reales proporciona una base para que los estudiantes comiencen a generalizar y a ver patrones, fomentando la transición a un razonamiento más abstracto.
Fase 3: Uso de Tracker y Análisis Cualitativo	Principio de interactividad y orientación: El trabajo colaborativo en el análisis de datos y el uso de herramientas tecnológicas como Tracker refuerzan la naturaleza social del aprendizaje y permiten la guía del docente.	Matematización vertical: El uso de software especializado para analizar datos refina las habilidades de abstracción y formalización de conceptos matemáticos.	Nivel general: La manipulación de datos con herramientas tecnológicas permite a los estudiantes razonar y aplicar modelos matemáticos en una variedad de contextos, ampliando su comprensión.
Fase 4: Comparación y Formulación Algebraica	Principio de nivel y orientación: La formulación algebraica y el análisis crítico de los resultados reflejan la aplicación de conocimientos formales y el rol del docente en la orientación reflexiva del aprendizaje.	Matematización vertical: La construcción de modelos matemáticos abstractos y su generalización es el pináculo de la matematización, permitiendo a los estudiantes operar en el ámbito formal de las matemáticas.	Nivel formal: El desarrollo de herramientas abstractas y la aplicación de modelos matemáticos a nuevos problemas muestra una comprensión profunda y flexible de las matemáticas.

Nota. Fuente: Elaboración propia

Cada celda de la Tabla I no es una entidad aislada, sino que representa la intersección de un componente teórico de la EMR con una etapa práctica de la secuencia didáctica, en la que se detalla cómo se manifiestan los principios de la EMR durante una fase específica del proceso de enseñanza y aprendizaje. Durante la primera fase, la introducción y anticipación de la actividad se basan en el principio de actividad y realidad, donde los estudiantes son participantes activos y se conectan con problemas matemáticos que tienen relevancia concreta. Aquí, la matematización progresiva empieza con el establecimiento de conexiones entre la experiencia del mundo real y las matemáticas, y los estudiantes utilizan modelos concretos que reflejan directamente la situación problemática que enfrentan.

La segunda fase se centra en el experimento y la recolección de datos, se observa la integración de conocimientos matemáticos aplicados a datos concretos, representando así los principios de nivel y entrelazamiento de la EMR. Durante esta etapa, los estudiantes evolucionan en la matematización, tanto horizontal como vertical, traduciendo situaciones concretas a representaciones simbólicas y comenzando a generalizar desde los datos específicos que han observado. La tercera fase implica el uso de Tracker y análisis cualitativo, destacando la interactividad y la orientación docente. El uso de tecnología apoya la matematización vertical, ya que los estudiantes abstraen y formalizan las relaciones de variables a través del software. Finalmente, la cuarta fase conduce a la comparación y formulación algebraica. En esta fase, los estudiantes aplican conocimientos formales y realizan reflexiones críticas sobre sus procesos y resultados, lo cual es la esencia de los principios de nivel y orientación. La matematización vertical se completa con la construcción de un modelo abstracto y generalizable, y los estudiantes alcanzan el nivel formal de comprensión, demostrando su capacidad para aplicar conceptos matemáticos de manera flexible y en diversas representaciones.

A partir de esta matriz se establecieron descriptores específicos referentes a aspectos concretos del trabajo de los estudiantes que pueden ser medidos o identificados durante la aplicación de la secuencia didáctica.

El primer descriptor se denomina “elección y justificación de variables”, este se alinea con el principio de realidad y el nivel situacional, donde los estudiantes comienzan a conectar su comprensión intuitiva con situaciones reales y matemáticas formales. Este paso es esencial en la fase de anticipación, donde los estudiantes usan su conocimiento previo para predecir el comportamiento de la función y establecer una notación específica (Sakja, 2003). El segundo es “construcción y análisis de representaciones gráficas”, el cual emerge del principio de entrelazamiento y el nivel referencial. En la fase de experimentación, donde los estudiantes observan y registran datos, la habilidad para interpretar estas representaciones gráficas (Duval, 2006) y extraer significados matemáticos demuestra una matematización progresiva hacia una comprensión más abstracta

(Eisenberg, 2002). El tercero, “uso de herramientas tecnológicas para el modelado”, refleja el principio de interactividad y el nivel general, particularmente durante la fase de análisis con el software Tracker. Aquí los estudiantes aplican sus conocimientos en un contexto tecnológico, facilitando la transición de lo concreto a lo simbólico (Best y Bikner-Ahsbahs, 2017), una característica esencial de la matematización vertical. Cuarto: “formulación y manipulación de funciones algebraicas”, se justifica por el principio de orientación y el nivel formal. Durante la fase de comparación y formulación algebraica, los estudiantes muestran su capacidad para operar dentro del ámbito formal de las matemáticas, lo que indica una comprensión matemática avanzada y la habilidad para generalizar y aplicar conceptos matemáticos abstractos. El quinto es la “interpretación y aplicación de conceptos”, que se relaciona con todos los principios y niveles de comprensión a lo largo de las fases. Este descriptor se centra en la habilidad de los estudiantes para reconocer y utilizar relaciones proporcionales y patrones de cambio en el contexto de funciones lineales y cuadráticas. Finalmente, “la comunicación y argumentación” encapsula el principio de interactividad y todos los niveles de comprensión. La habilidad de los estudiantes para comunicarse matemáticamente es fundamental para el aprendizaje colaborativo y la reflexión sobre su propio proceso de aprendizaje, lo cual es fomentado en todas las fases de la actividad didáctica.

3.4. *Participantes*

La secuencia didáctica se implementó en una sesión de dos horas con un grupo compuesto por 21 estudiantes de tercer grado de secundaria en un entorno rural en México. Previamente, los estudiantes tenían experiencia en la resolución y el estudio de problemas relacionados con modelos de variación lineal en cursos anteriores. Además, habían trabajado en otro experimento similar bajo el mismo enfoque y metodología que se describe en este artículo. Dicho experimento consistió en llenar recipientes con agua y analizar la variación de la altura del líquido en función del tiempo, lo cual condujo a la formulación de un modelo lineal.

El profesor organizó a los estudiantes en 7 equipos de trabajo, identificados como E1, E2, …, E7, cada uno conformado por tres integrantes numerados como A1, A2 y A3. Los estudiantes se distribuyeron las responsabilidades dentro de sus respectivos equipos, encargándose de la instalación y la recopilación de datos del experimento. Además, se proporcionaron materiales específicos a cada equipo para llevar a cabo el experimento.

El profesor encargado de implementar la secuencia didáctica forma parte del equipo de autores de esta investigación. Consciente de la importancia de no influir en las decisiones de los estudiantes ni imponer procedimientos, su rol se centró en la organización y coordinación de las sesiones colectivas, con el objetivo de fomentar el intercambio de ideas y guiar las discusiones de manera orientativa. En la primera fase, el profesor introdujo verbalmente el planteamiento del experimento, limitándose a describir las condiciones de variación sin sugerir una interpretación. En la siguiente fase, su función se orientó a coordinar la instalación del experimento, permitiendo que los estudiantes lo desarrollaran de manera autónoma. Durante la revisión del video, el profesor guio la discusión para identificar y resaltar las condiciones de variabilidad, la duración del experimento y otros aspectos relevantes. En la tercera fase, el profesor coordinó la discusión con el propósito de establecer conexiones entre la forma de la gráfica y el experimento en sí. También propuso la "lectura de la gráfica" para que los estudiantes pudieran identificar y describir las variaciones presentes. Asimismo, promovió el análisis de la tabla de datos para identificar la posición correspondiente en el video. En la cuarta fase, el rol del profesor consistió en coordinar la discusión destinada a la construcción del modelo algebraico del experimento; además, organizó la validación de los resultados utilizando el software Geogebra como una herramienta de apoyo.

4. Resultados

En la Tabla II se presenta el concentrado de descriptores y los observables en la implementación de la secuencia didáctica. Para la construcción de la tabla se analizaron los datos obtenidos en cada fase, enseguida, los autores de la investigación trabajaron de forma independiente para generar un concentrado y finalmente se trabajó en colectivo para la construcción de la tabla.

TABLA II
Descriptores y observables registrados después de la implementación de la secuencia didáctica

Descriptores	*Fase 1: Introducción y Anticipación*	*Fase 2: Experimento y Datos*	*Fase 3: Uso de Tracker*	*Fase 4: Análisis y Formulación*
Elección y Justificación de Variables	- Estudiantes identifican tiempo y distancia como variables relevantes. - Justifican su elección con base en el referente físico.	- Confirman o ajustan sus variables iniciales con datos reales. - Distinguen entre variables dependientes e independientes.	- Utilizan Tracker para medir las variables seleccionadas. - Discuten la precisión y relevancia de las variables.	- Relacionan las variables con una función matemática específica. - Justifican la forma de la función basada en la relación de las variables.

Construcción de Representaciones Gráficas	- Crean gráficos anticipados de la función basándose en suposiciones. - Discuten posibles formas y tendencias de la gráfica.	- Construyen gráficos basados en datos experimentales. - Analizan los puntos relevantes de la gráfica.	- Correlacionan gráficos de Tracker con predicciones iniciales. - Mejoran la interpretación de la gráfica con datos precisos.	- Comparan gráficos iniciales y finales. - Interpretan discrepancias y patrones consistentes.
Modelado Matemático con Herramientas Tecnológicas	- Discuten cómo Tracker podría ayudar en el modelado del fenómeno.	- Observan el fenómeno y plantean cómo modelarlo con Tracker.	- Utilizan Tracker para generar un modelo matemático del fenómeno. - Evalúan la efectividad del software en la representación del modelo.	- Refinan el modelo matemático usando Tracker y otros recursos matemáticos. - Validan la precisión del modelo con la teoría y los datos.
Formulación de Funciones Algebraicas	- Hipotetizan la forma de la función que modela el fenómeno.	- Desarrollan una función inicial basada en datos experimentales.	- Ajustan la función con base en el análisis de Tracker.	- Formulan la función cuadrática final que modela la caída libre. - Demuestran la habilidad para manipular la función algebraicamente.
Interpretación de Conceptos Matemáticos	- Predicen el comportamiento de la función basándose en conocimientos previos.	- Aplican la idea de relación entre variables en el análisis de datos.	- Relacionan el movimiento del balón con la naturaleza de las funciones.	- Usan conceptos matemáticos para explicar el fenómeno físico de manera abstracta.
Comunicación y Argumentación Matemática	- Explican sus predicciones y la selección de variables.	- Argumentan sobre las tendencias observadas en los datos y gráficos.	- Discuten el modelado en Tracker y la interpretación de los resultados.	- Presentan y defienden sus conclusiones matemáticas finales.

En la Tabla II se puede apreciar cómo los estudiantes identificaron y justificaron las variables relevantes, además de cómo avanzaron en la construcción y análisis de representaciones gráficas, pasando de hacer suposiciones basadas en su conocimiento previo a ajustar sus gráficos para reflejar los datos obtenidos y analizados con la ayuda del software Tracker. Además, la tabla evidencia la habilidad de los estudiantes para integrar la tecnología, utilizándola no solo para recopilar datos, sino también para modelar el fenómeno físico en estudio. A lo largo de la secuencia didáctica, los estudiantes desarrollaron y refinaron sus habilidades de modelado y formulación matemática, lo cual culminó con la formulación de una función algebraica que refleja la caída libre del balón. Finalmente, se evidenció la capacidad de los estudiantes para comunicar sus procesos y resultados matemáticos, así como para defender sus conclusiones, lo cual indica que la secuencia didáctica fomentó la comunicación y la argumentación matemática.

4.1. *Momentos de la matematización progresiva*

En la fase 1, los estudiantes se enfrentaron a la tarea de representar la caída libre de un balón desde una altura específica a través de una gráfica cartesiana; en esta etapa se les dio la libertad de elegir las variables. Los estudiantes pusieron en juego sus conocimientos previos y concepciones intuitivas sobre el movimiento para anticipar el movimiento del balón. Se observaron diferentes enfoques en la selección de variables: mientras que algunos estudiantes identificaron el tiempo (*t*) y la altura (*h*) como variables clave, otros incluyeron factores menos relevantes como la masa del balón o la velocidad del viento, lo que reflejaba una comprensión menos precisa del fenómeno físico a modelar.

Figura 2. Grafica de un equipo para representar la caída libre del balón

Los errores en las gráficas iniciales variaron ampliamente, evidenciando las diferencias individuales en la comprensión del movimiento en caída libre. Algunos estudiantes dibujaron gráficas lineales decrecientes (Figura 2), presuponiendo una relación directa y constante entre la altura y el tiempo, sin considerar la aceleración debido a la gravedad. A su vez, el proceso de definir el sistema de referencia presentó desafíos. Se notó que algunos estudiantes situaron el origen de su sistema de coordenadas en la parte superior, donde se suelta el balón, y otros en el suelo, donde el balón termina su caída. Esto afectó la dirección en la que se dibujaban las gráficas: algunas empezaban en el punto más alto y disminuían hacia abajo (en el primer caso), mientras que otras se dibujaban ascendiendo desde el origen (en el segundo caso). La elección del origen del sistema de coordenadas es fundamental, ya que establece el punto de partida para interpretar la gráfica y puede conducir a errores de interpretación si no se elige de manera coherente con las convenciones físicas y matemáticas.

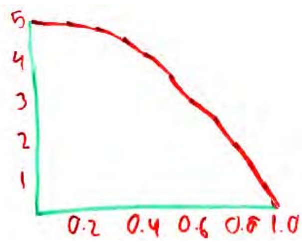


Figura 3. Curva conformada por segmentos rectos

En el análisis cualitativo de la gráfica de la caída libre, el equipo 3 presentó una interesante interpretación que ellos llamaron “linealidad de la curva”. Esta noción surgió de la suposición inicial de que el balón caía a una velocidad constante, implicando que, por cada unidad de tiempo transcurrida, el balón recorrería la misma distancia. Esta idea llevó al equipo a prever una gráfica con una recta de pendiente negativa, un indicador común de velocidad constante en un gráfico distancia-tiempo. A pesar de la inexactitud de esta hipótesis —dado que en la caída libre la velocidad aumenta debido a la aceleración constante de la gravedad—, esta suposición inicial fue útil para introducir el concepto de aceleración en la discusión. El equipo propuso una serie de segmentos lineales sucesivos, cada uno representando el movimiento del balón en intervalos de tiempo muy breves. Al unir estos segmentos, se visualizó una curva que reflejaba el aumento progresivo de la velocidad, como se ilustra en la Figura 3. Esta explicación intuitiva sobre el movimiento fue analizada en la plenaria donde el equipo 3 expuso sus ideas.

E3-A1: *suponga que [el balón] está en 5, y si en el primer segundo avanza 10 centímetros, en el segundo otros 10, lo que se obtiene es una recta para abajo*

P: *Entonces ¿están de acuerdo con que se obtiene una recta con pendiente negativa?*

E3-A2: *no, no, es que… si está bien para un corto tiempo, entonces está ahí el cambio a otra velocidad y otra recta más para abajo* [mayor inclinación]

E3-A1: *la idea es que la gráfica se puede ver como la unión de esas rectas, claro que si comparas con una curva, debes hacer las rectitas más pequeñas.*

Durante la fase 2 de la secuencia didáctica, los estudiantes se enfrentaron al desafío de la experimentación directa y la obtención de datos empíricos sobre el balón en caída libre. Después de haber especulado sobre la forma de la gráfica en la primera fase, tuvieron la oportunidad de contrastar sus ideas previas con mediciones reales. Se realizó el experimento y se grabó el movimiento del balón utilizando dispositivos móviles, lo que proporcionó un recurso visual que los estudiantes utilizaron para recopilar datos cuantitativos. Con estas grabaciones, los estudiantes midieron intervalos de tiempo específicos y la altura del balón en esos momentos, construyendo una tabla de datos que serviría como base para su análisis matemático (Figura 4).

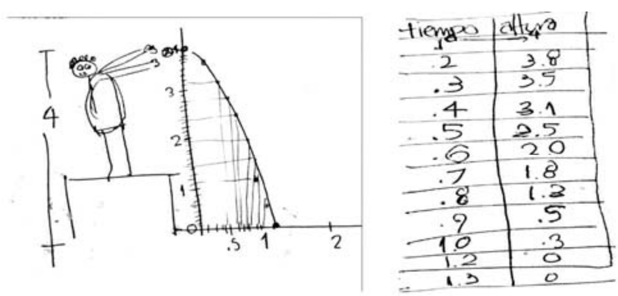


Figura 4. Gráfica y tabla obtenidas del equipo 1 a partir del análisis del video

Al analizar la tabla de datos, los estudiantes debían reconocer la relación entre el tiempo (*t*) y la altura (*h*) del balón, lo que resultó en una variedad de interpretaciones. En esta fase, algunos estudiantes pudieron identificar la naturaleza cuadrática de la relación, es decir, que la altura era proporcional al cuadrado del tiempo transcurrido, un reflejo de la ecuación de movimiento bajo aceleración debida a la gravedad. Sin embargo, se observaron errores comunes en la interpretación de los datos. Algunos estudiantes, por ejemplo, persistieron en el error de la fase anterior y continuaron modelando la relación entre altura y tiempo como lineal, en lugar de cuadrática (ver Figura 2). Esto se evidenció en tablas de datos donde la disminución de la altura no se aceleraba con el tiempo. Otros estudiantes reconocieron la aceleración, pero se confundieron al intentar representarla en sus gráficos, lo que llevó a curvas con la concavidad en la dirección incorrecta o a líneas quebradas que no reflejaban la suavidad de la curva parabólica real. Además, algunos estudiantes lucharon con la interpretación de los datos a nivel más fundamental, como confundir los ejes al asignar la altura al eje horizontal y el tiempo al vertical, o no reconocer la importancia de comenzar el registro del tiempo desde el momento en que el balón comenzaba a caer, lo que introducía errores sistemáticos en sus mediciones. La fase 2 permitió a los estudiantes confrontar y corregir sus concepciones erróneas, utilizando la experimentación y la evidencia para desarrollar una comprensión más precisa del concepto matemático de función y su relación con fenómenos físicos.

En la plenaria, el profesor propició una reflexión sobre la información que aportan las tablas de valores sobre el experimento. El equipo 1 compartió la siguiente información.

E1-A3: Viste, era otra la… nuestra gráfica, lo datos que obtuvimos dan otra gráfica
E1-A2: la relación entre la altura y el tiempo no era como pensábamos. Definitivamente no, no es una línea recta.
E1-A3: ¿recuerden lo que preguntó el profesor? [¿A qué altura está el balón en el tiempo cero?]. Todo comenzaba a partir de los 4 metros, en el tiempo cero.
E1-A3: Es cierto lo que dijo el equipo 4, el experimento solo ocurrió en un intervalo de tiempo y espacio específicos, de 4 metros a cero metros y de 0 a 1.2 segundos.
E1-A1: fuera de esos valores no sabemos qué pasó porque nuestro experimento sólo está en esos valores. No tenemos información sobre el balón antes o después.
E1-A2: Bueno, antes del tiempo cero, el balón estaba en la mano de [nombre del alumno], así que no estaba cayendo aún. Después de los 1.2 segundos, ya habría tocado el suelo.

En el diálogo anterior, los estudiantes reflexionan sobre los resultados de la segunda fase del experimento, donde se observa un claro proceso de reconocimiento y corrección de concepciones previas. Se discuten las discrepancias entre sus expectativas iniciales y los datos reales, señalando que la relación entre altura y tiempo no se corresponde con la línea recta que habían anticipado. Esto es un hecho muy relevante, ya que indica un ajuste en su concepción sobre el movimiento de caída libre. La conversación revela que el punto de partida del experimento (el balón a 4 metros de altura en el tiempo cero) fue comprendido y aceptado por los estudiantes después de considerar las preguntas orientadoras del profesor. Además, se muestra una conciencia creciente de las limitaciones de su experimento, reconociendo que su análisis solo es válido dentro de un intervalo específico –de 4 metros a cero metros y de 0 a 1.2 segundos—, y que fuera de esos valores no tienen información. Esta reflexión demuestra una madurez en su pensamiento científico al ser conscientes de que cualquier afirmación sobre el comportamiento del balón más allá de esos parámetros sería especulativa.

Durante la tercera fase de la secuencia didáctica, los estudiantes repitieron el experimento de caída libre del balón y se adentraron en el uso del software Tracker para analizar el movimiento. Esta fase marcó un avance significativo en el proceso de matematización vertical, donde el enfoque se trasladó hacia la abstracción y la generalización de los modelos matemáticos. Una vez que el Tracker estuvo en uso, los estudiantes pudieron grabar el movimiento del balón con mayor precisión y extraer las coordenadas de posición-tiempo a partir del vídeo (Figura 5). Con esta tecnología comenzaron a visualizar el movimiento del balón en términos de una serie de puntos a lo largo de un eje temporal y espacial, con la posición en el eje vertical y el tiempo en el horizontal. La gráfica resultante mostró, para muchos, una parábola que representaba la aceleración constante debida a la gravedad, un reflejo de la relación cuadrática entre el tiempo y la posición.

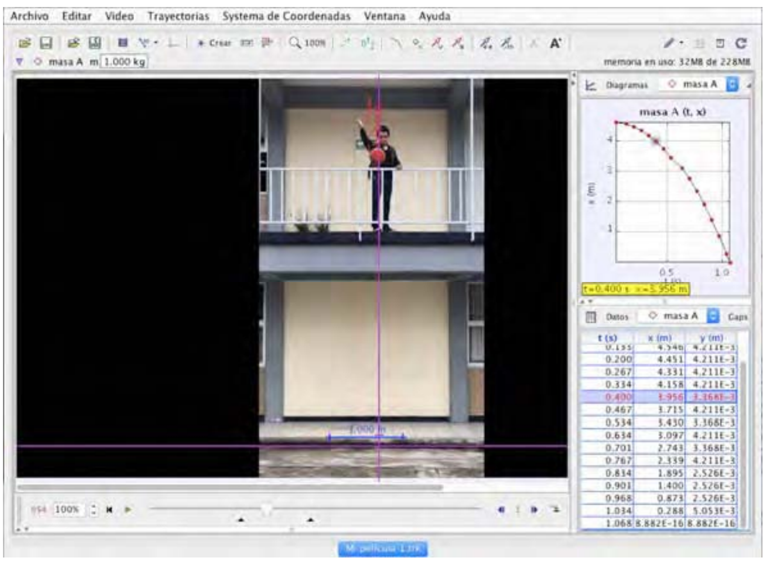


Figura 5. Experimento de caída libre de un balón, tabla de valores y gráfica generadas con el software

Sin embargo, no todos los estudiantes interpretaron correctamente estos resultados. Algunos errores observados incluyen la confusión entre las coordenadas del eje *x* y *y*, lo que llevaba a gráficos donde se representaba de manera incorrecta el tiempo en el eje vertical y la posición en el horizontal (Figura 6). Además, algunos estudiantes tuvieron dificultades con el concepto de aceleración constante, pues esperaban ver una línea recta en lugar de una curva parabólica. Otro error común fue la mala interpretación de la escala de tiempo. Algunos estudiantes configuraron incorrectamente la escala temporal en Tracker, lo que resultó en una gráfica que no reflejaba la realidad del experimento. En algunos casos, se observaron parábolas demasiado “aplanadas” o “comprimidas” debido a una mala elección de la escala temporal o espacial, lo que distorsionaba la relación cuadrática. La transición de una representación gráfica basada en conjeturas y observaciones simples a una más precisa y cuantitativa marcó un paso importante en su camino hacia la abstracción matemática y la formulación de un modelo matemático sólido de la caída libre.

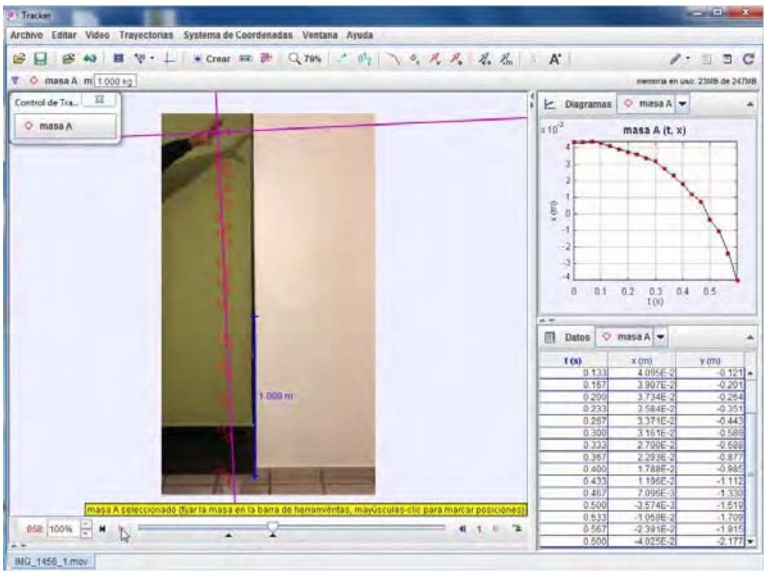


Figura 6. Análisis del video del equipo 7, con altura de 2m y un ajuste distinto del plano cartesiano

El diálogo entre los estudiantes del equipo 3 refleja el proceso de reconocimiento y definición del punto de partida para el análisis del movimiento del balón en la fase 3 de la secuencia didáctica.

E7-A3: *Ok, si, entonces, viendo el vídeo otra vez, el balón empieza a caer desde arriba de la pantalla.*

E7-A1: *Sí, y eso lo que hemos marcado como la altura física, el punto desde donde empieza a caer, ¿sí?*

E7-A2: *sí, sí, y según el software, ese es nuestro punto de referencia. Es como el punto de partida para todo el experimento.*

E7-A3: *Bueno, es el punto inicial, ¿no? En el vídeo, la tabla y la gráfica, todos comienzan en cero tiempo. Pero no en cero distancia porque está a unos 4 metros de altura.*

E7-A2: *¿Importa ese punto? ¿es importante para la tabla… y la gráfica?*

E7-A1: *Pues claro que sí, es donde inicia todo el experimento. Si no sabemos el punto de inicio, ¿cómo vamos a seguir el movimiento del balón?*
E7-A1: *Entonces, ese punto... es como el origen de los ejes en la gráfica.*
E7-A2: *Sí, y todos los puntos en la gráfica que vienen después indican cómo cambia la altura con el tiempo a medida que el balón cae.*
E7-A3: *Es como poner las piezas del rompecabezas juntas. El vídeo nos da una imagen visual, la tabla de valores traduce eso en números y la gráfica los pone en una imagen que podemos analizar matemáticamente.*

En este diálogo se discuten conceptos importantes relacionados con la matematización vertical y la interpretación de datos en el marco de un experimento de caída libre. Los estudiantes identifican la "altura física" como el punto desde donde el balón empieza a caer, lo cual es crucial porque establece la condición inicial del experimento en términos de altura y tiempo. Reconocen que, aunque el tiempo empieza en cero, la altura no es cero debido a que el balón se suelta desde una altura determinada, en este caso mencionan "unos 4 metros".

El diálogo también revela la comprensión de que el punto de inicio es esencial tanto para seguir el movimiento en el vídeo como para registrar los datos en una tabla y representarlos en una gráfica cartesiana. Además, la discusión subraya la importancia de la coherencia entre las diferentes representaciones de datos: visual (vídeo), numérica (tabla de valores) y gráfica (gráfica cartesiana). Esta coherencia es esencial para la interpretación y análisis matemático del fenómeno físico.

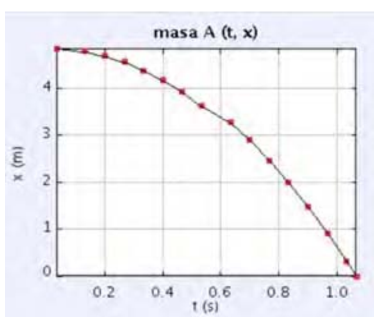


Figura 7. Gráfica obtenida en la fase 4

Durante la cuarta fase de la secuencia didáctica, los estudiantes emprendieron la tarea de analizar cualitativamente las gráficas resultantes, comparándolas con sus gráficas iniciales y explorando métodos para la formulación algebraica de una función cuadrática que modelara la caída libre del balón (Figura 7). Esta etapa representó la culminación de la matematización vertical, donde los conceptos matemáticos se abstraen y generalizan. Los estudiantes revisaron las gráficas generadas con Tracker, notando las diferencias entre sus predicciones iniciales y los datos reales. A través de la discusión, identificaron que la forma parabólica de la gráfica de posición-tiempo reflejaba la aceleración constante debida a la gravedad. Se dieron cuenta de que, a diferencia de sus gráficos anticipados lineales o incorrectamente curvados, la gráfica real mostraba una curva simétrica que representaba la relación cuadrática entre el tiempo y la distancia recorrida por el balón en caída.

De todos los equipos, únicamente cuatro consiguieron formular una ecuación algebraica, de los cuales tres lo hicieron de manera correcta. Dos grupos optaron por un enfoque práctico utilizando Geogebra, donde experimentaron con diferentes valores de los coeficientes dentro de una función cuadrática hasta que la curva se alineó adecuadamente con los datos experimentales. No obstante, el equipo 3 adoptó un procedimiento más analítico, aplicando un método algebraico que habían estudiado previamente para obtener una expresión algebraica a partir de un conjunto de puntos dados (SEP, 1999; página 112). En este episodio, se destaca la introducción de una notación específica para describir la función. En primer lugar, se seleccionaron tres pares de puntos (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3). Luego, se empleó la ecuación general de segundo grado $y = ax^2 + bx + c$ para establecer un sistema de ecuaciones de 3 x 3. De esta manera, se construyó el siguiente sistema de ecuaciones:

$$y_1 = ax_1 + bx_1 + c$$

$$y_2 = ax_2 + bx_2 + c$$

$$y_3 = ax_3 + bx_3 + c$$

La complejidad del cálculo los abrumó rápidamente, momento en el cual el profesor intervino recomendando el uso de Alpha Wolfram para simplificar la tarea y obtener los coeficientes. Varios meses después de la experimentación de la secuencia didáctica, un estudiante del equipo 6 compartió con el profesor una reflexión sobre cómo habían llegado a la ecuación de su función: utilizaron la plataforma Alpha Wolfram, introduciendo una instrucción directa para que les devolviera la fórmula basada en tres puntos específicos (Figura 8). Su justificación para este procedimiento se apoyó en una discusión previa de una clase donde se comentó que una única parábola puede definirse a través de tres puntos dados no colineales. Esta idea les permitió aplicar la tecnología digital para resolver el problema matemático que se les había presentado. En su momento, este equipo no compartió su procedimiento por temor a que se invalidara su procedimiento o se les sancionara por no usar los procedimientos convencionales.

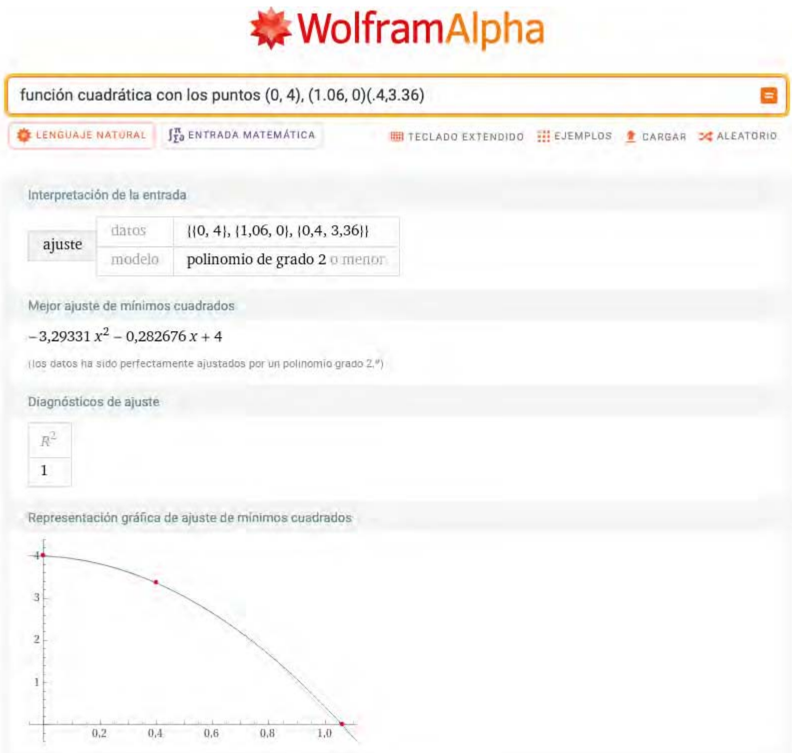


Figura 8. Reconstrucción del estudiante del procedimiento para obtener la función

En el debate colectivo, el equipo 5 se enfocó en cómo una función matemática puede ser vista como un concepto que expresa la realidad física, los datos numéricos, las representaciones gráficas y las formulaciones algebraicas, subrayando así la conexión entre la experiencia tangible y su interpretación matemática.

E5-A2: *¿o sea que todo lo que hicimos con la caída del balón estaba interconectado? Es decir, el experimento, la tabla de datos, las gráficas y la fórmula... todo habla de lo mismo.*

E5-A1: *…al principio, todo parecía separado, pero al final, al mirar la función se vió cómo se unía todo.*

E5-A2: *si, como dijo [nombre de otro estudiante] si, la función representar la situación. No es solo algo que graficas y ya.*

E5-A3: *…cuando estábamos tratando de encontrar la función me sentí un poco perdido, como si estuviera haciendo trampa al no hacer los cálculos a mano. Pero luego entendí que lo importante era comprender la relación, no quedarnos en las operaciones.*

E5-A2: *ja ja, creo que las funciones no es encontrar puntos y graficar, sino de entender qué representan esas gráficas y fórmulas en el mundo real.*
E5-A1: *¡sí! es más más que números y ecuaciones, es para entender lo que ocurre en la realidad*
E5-A2: *Y usar la tecnología para ayudarnos.*

El diálogo entre los estudiantes refleja una reflexión colectiva sobre la integración de diferentes representaciones matemáticas y cómo estas se relacionan con el fenómeno físico de la caída del balón. En la fase 4, la conclusión central es que todas las partes del proceso —el experimento físico, la recopilación de datos, la representación gráfica y la formulación de la función cuadrática— no son actividades aisladas, sino diferentes expresiones de un mismo fenómeno físico. Los estudiantes inicialmente percibían estos componentes como separados, pero al final comprendieron que la función cuadrática no es solo una abstracción para graficar, sino una representación concreta de la realidad física que estaban estudiando. La discusión indica un cambio de enfoque, de la realización mecánica de operaciones matemáticas hacia una comprensión conceptual más profunda.

El diálogo también sugiere que los estudiantes reconocieron el valor de la tecnología como una herramienta para facilitar la comprensión matemática. La sensación inicial de uno de los estudiantes de estar "haciendo trampa" al utilizar herramientas computacionales para calcular la función refleja una tensión entre los métodos tradicionales de cálculo manual y los métodos modernos que emplean la tecnología. Sin embargo, llegaron a la conclusión de que lo importante es la comprensión de la relación matemática y su aplicación en el mundo real, no el método de cálculo.

5. Conclusiones

En el marco educativo tradicional se observa que los estudiantes a menudo desarrollan una comprensión superficial de los conceptos matemáticos. Esta comprensión limitada se debe, en gran medida, a un enfoque que pide a los estudiantes observar ejemplos de funciones y notar sus propiedades, lo que los lleva a una generalización implícita y no a una comprensión profunda de los principios matemáticos subyacentes. Este enfoque convencional, que a menudo se centra en una representación predominantemente algebraica, puede resultar en que los estudiantes no desarrollen una comprensión completa de conceptos como el de función. La falta de énfasis en la transición entre diferentes representaciones puede llevar a interpretar una función solo como una fórmula o ecuación, sin comprender su significado más amplio. Esto limita su capacidad para aplicar el concepto de función en diferentes contextos y situaciones matemáticas; una comprensión integral requiere la capacidad de conectar y transformar entre representaciones gráficas, algebraicas, tabulares y verbales, así como identificar sus conexiones.

Ante este escenario, la principal motivación para abordar nuevas metodologías de enseñanza de las funciones es superar la comprensión fragmentada de los conceptos matemáticos y avanzar hacia una comprensión más integrada y flexible. El aprendizaje de las funciones requiere la integración de varios aspectos y representaciones matemáticas, y para lograr esto se necesita una metodología que permita a los estudiantes conectar sus experiencias previas y vivencias con el contenido matemático.

Esta investigación propone un enfoque alternativo en la enseñanza de funciones, centrado en la modelación matemática en el contexto de la Educación Matemática Realista (EMR). Este enfoque busca aplicar conceptos matemáticos en la resolución de problemas reales, poniendo énfasis en el proceso de modelación, que incluye desde la formulación del problema hasta la validación del modelo matemático. Esta investigación analiza cómo los estudiantes de secundaria avanzan en su comprensión de las funciones a través de la modelación de un experimento de caída libre con el soporte del software Tracker.

La integración de la teoría y la secuencia didáctica se estableció en la matriz desarrollada para el estudio. Esta matriz ofrece una visión integral y estructurada de la EMR, facilitando la identificación y la interrelación de los principios fundamentales en cada etapa de la secuencia didáctica. Por ejemplo, en la primera fase, el principio de actividad y realidad se manifiesta a través de la participación activa de los estudiantes en problemas prácticos y realistas, iniciando así el proceso de matematización horizontal, donde conectan conocimientos previos con la realidad matemática. Esta fase se corresponde con el nivel situacional de comprensión donde los estudiantes usan situaciones reales para anclar su aprendizaje matemático.

En fases sucesivas se observa una transición hacia la matematización vertical, donde los estudiantes profundizan y refinan su comprensión de los conceptos matemáticos, pasando de una comprensión superficial a una más estructurada y abstracta. Esto se ve claramente en la fase de uso de Tracker y análisis cualitativo, donde el principio de interactividad y orientación se enfoca en el trabajo colaborativo y el uso de tecnología para analizar datos, lo que eleva el nivel de comprensión al general. En la fase final, la comparación y formulación algebraica reflejan la aplicación de conocimientos formales y análisis crítico, alineándose con el nivel formal de comprensión.

La matriz utilizada en el estudio es una contribución que proporciona un marco analítico para examinar el proceso de matematización progresiva. Este marco posibilita una evaluación sistemática y detallada de cómo los estudiantes avanzan en su comprensión matemática a través de diferentes etapas, desde la comprensión concreta y contextualizada hasta el pensamiento abstracto y generalizado. En este enfoque, la matriz actúa como una herramienta que descompone el proceso de aprendizaje en componentes más pequeños y específicos, lo que permite a los docentes y a los investigadores observar de manera más puntual el impacto de la enseñanza basada en la EMR.

El estudio mostró un avance en la comprensión de los estudiantes sobre las funciones matemáticas. En la primera fase, los estudiantes aplicaron sus conocimientos previos para anticipar el comportamiento de una función, mientras que en la segunda fase, la experimentación y recolección de datos reales permitieron a los estudiantes explorar la relación entre variables y empezar a generalizar sus observaciones. El uso del software Tracker en la tercera fase ayudó a un análisis más detallado y preciso de los datos, lo que permitió a los estudiantes pasar de una comprensión intuitiva a una más abstracta y estructurada. Este proceso de matematización vertical se intensificó en la cuarta fase, donde los estudiantes compararon sus gráficos iniciales con los resultados finales y formularon funciones algebraicas que reflejaban el fenómeno físico estudiado.

El estudio también ha mostrado la importancia de la integración de diferentes representaciones de funciones (gráficas, algebraicas, tabulares y verbales) y el uso de tecnologías como el software Tracker. Esta integración resultó fundamental para la comprensión y el análisis de datos, permitiendo a los estudiantes articular las diferentes representaciones y desarrollar significados matemáticos.

Esta investigación resalta la trascendencia de un proceso de enseñanza de las matemáticas centrado en la matematización progresiva, particularmente dentro del contexto de la Educación Matemática Realista (EMR). La práctica de iniciar el aprendizaje con la matematización horizontal, donde los estudiantes establezcan conexiones directas entre los conceptos matemáticos y situaciones reales, demostró ser un punto de partida importante al recuperar las ideas previas y permitir el uso de ideas intuitivas, así como de diversas representaciones. Al avanzar hacia la matematización vertical, los estudiantes son guiados para transitar de lo concreto a lo abstracto, de lo intuitivo a lo formal. Esta habilidad para pasar de lo vivencial y práctico a la abstracción favorece que los estudiantes desarrollen una flexibilidad cognitiva, lo que los prepara para enfrentar desafíos matemáticos en diversos contextos.

Referencias

Andrade, J. M. y Saraiva, M. J. (2012). Múltiplas representações: Um contributo para a aprendizagem do conceito de função. *RELIME - Revista Latinoamerica de Investivación en Matemática Educativa, 15*(2), 137-169. https://www.relime.org/index.php/relime/article/view/236/203

Arzarello, F. y Robutti, O. (2004). Introduction. Approaching functions through motion experiments. *Educational Studies in Mathematics, 57*(3), 305-308. https://doi.org/10.1007/s10649-004-5933-4

Best, M. y Bikner-Ahsbahs, A. (2017). The function concept at the transition to upper secondary school level: tasks for a situation of change. *ZDM - Mathematics Education, 49*(6), 865-880. https://doi.org/10.1007/s11858-017-0880-6

Bloch, I. (2003). Teaching functions in a graphic milieu: what forms of knowledge enable students to conjecture and prove? *Educational Studies in Mathematics, 52*(1)**,** 3-28. https://doi.org/10.1023/A:1023696731950

Bressan, A., Gallego, M., Pérez, S. y Zolkower, B. (2016). *Educación Matemática Realista. Bases teóricas* [Manuscrito no publicado]. Grupo Patagónico de Didáctica de la Matemática. https://documen.site/download/educacion-matematica-realista-bases-teoricas_pdf

Duval. R. (2006). Cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *61*(1-2), 103-131. https://doi.org/10.1007/s10649-006-0400-z

Eisenberg, T. (2002). Functions and Associated Learning Difficulties. En D. Tall (Ed) *Advanced Mathematical Thinking*, pp.140–152. Springer. https://doi.org/10.1007/0-306-47203-1_9

Falcade, R., Laborde, C. y Mariotti, M. A. (2007). Approaching functions: Cabri tools as instruments of semiotic mediation. *Educational Studies in Mathematics, 66*(3), 317-333. https://doi.org/10.1007/s10649-006-9072-y

Freudenthal, H. (2002). *Revisiting mathematics education. China lectures.* Springer. https://doi.org/10.1007/0-306-47202-3

Gravemeijer, K. (2007). Emergent modelling as a precursor to mathematical modelling. En W. Blum, P. L. Galbraith, H. W. Henn y M. Niss (Eds.), *Modelling and applications in mathematics education. The 14th ICMI Study* (pp. 137-144). Springer. https://doi.org/10.1007/978-0-387-29822-1_12

Kaur, B., Wong, L. F. y Govindani, S. N. (2020). Graphing Linear Equations—A Comparison of the Opportunity-to-Learn in Textbooks Using the Singapore and the Dutch Approaches to Teaching Equations. En M. van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *International Reflections on the Netherlands Didactics of Mathematics Visions on and Experiences with Realistic Mathematics Education* (pp. 97-111). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-20223-1_7

Ortega, M. y Puig, L. (2017). Using Modelling and Tablets in the Classroom to Learn Quadratic Functions. En G. A. Stillman, W. Blum y G. Kaiser (Eds.), *Mathematical Modelling and Applications* (pp. 565-575). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-62968-1_47

Ortega, M., Puig, L. y Albarracin, L. (2019). The Influence of Technology on the Mathematical Modelling of Physical Phenomena. En G. A. Stillman y J. P. Brown (Eds.), *Lines of Inquiry in Mathematical Modelling Research in Education. ICME-13 Monographs* (pp. 161-177). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-14931-4_9

Rodríguez-Gallegos, R. y Quiroz-Rivera, S. (2016). El papel de la tecnología en el proceso de modelación matemática para la enseñanza de las ecuaciones diferenciales. *RELIME - Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 19*(1), 99-124. http://dx.doi.org/10.12802/relime.13.1914

Sajka, M. (2003). A secondary school student's understanding of the concept of function: A case study. *Educational Studies in Mathematics, 53*(3), 229-254. https://doi.org/10.1023/A:1026033415747

Selter, C. y Walter, D. (2020). Supporting Mathematical Learning Processes by Means of Mathematics Conferences and Mathematics Language Tools. En M. van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *International Reflections on the Netherlands Didactics of Mathematics Visions on and Experiences with Realistic Mathematics Education* (pp. 229-254). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-20223-1_13

Secretaría de Educación Pública (1999). *Fichero de actividades didácticas Matemáticas. Educación Secundaria*. SEP

van den Heuvel-Panhuizen, M. (2020). Seen Through Other Eyes—Opening Up New Vistas in Realistic Mathematics Education Through Visions and Experiences from Other Countries. En M. Van Den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *International Reflections on the Netherlands Didactics of Mathematics Visions on and Experiences with Realistic Mathematics Education* (pp. 1-20). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-20223-1_1

Autores

Rosa Isela González-Polo. Universidad Autónoma del Estado de México, México. rosselgonzalezp@gmail.com

https://orcid.org/0000-0002-8252-5796

Apolo Castañeda. Instituto Politécnico Nacional, México. acastane@ipn.mx

https://orcid.org/0000-0002-7284-8081

Miriam Criez Nobrega Ferreira, Valdir Alves da Silva,
Marcel Messias Gonçalves, Alessandro Jacques Ribeiro

TAREFAS DE APRENDIZAGEM PROFISSIONAL NA FORMAÇÃO DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA

Professional Learning Tasks in mathematics teachers' professional development

RESUMEN

El artículo presenta los resultados de un estudio que tuvo como objetivo comprender cómo el diseño e implementación de una Tarea de Aprendizaje Profesional contribuyó a la identificación de conocimientos matemáticos y didácticos de los docentes de matemáticas en un proceso de formación. Se enmarca en una perspectiva cualitativo-interpretativa, en la que la recolección de datos provino de los audios de la planificación, el diseño, audios y videos de las discusiones en los subgrupos y la plenaria de la segunda reunión. Los resultados muestran que, a partir de la tarea de aprendizaje profesional planificada e implementada fue posible elevar el conocimiento de los docentes, además de mostrar la articulación entre los componentes de las Tareas de Aprendizaje Profesional.

PALABRAS CLAVE:

- *Tareas de aprendizaje profesional*
- *Formación de profesores de matemáticas*
- *Aprendizaje profesional de profesores de matemáticas*
- *Enseñanza de álgebra*

ABSTRACT

The article presents the results of a study that aimed to understand how the design and implementation of a Professional Learning Task contributed to the identification of mathematical and didactic knowledge of mathematics teachers as participants in a professional development. It fits into a qualitative-interpretive perspective, in which data collection came from the planning audios, its design, audios and videos of the discussions in the subgroups and the plenary of the second meeting. The results show that, from the professional learning task planned and implemented, it was possible to raise the knowledge of teachers, in addition to showing the articulation between the components of the Professional Learning Tasks.

KEY WORDS:

- *Professional learning tasks*
- *Mathematics teacher professional development*
- *Professional learning of mathematics teachers*
- *Teaching algebra*

Ferreira, M., da Silva, V., Gonçalves, M. y Ribeiro, A. (2023). Tarefas de aprendizagem profissional na formação de professores de matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 26*(2), 176 - 200. https://doi.org/10.12802/relime.23.2622. Recepción: Noviembre 14, 2021 / Aceptación: Agosto 16, 2023

RESUMO

O artigo apresenta resultados de um estudo que se propôs a compreender de que forma o *design* e a implementação de uma Tarefa de Aprendizagem Profissional contribuíram para a identificação de conhecimentos, matemático e didático, de professores de matemática enquanto participantes de um processo formativo. Enquadra-se em uma perspectiva qualitativo-interpretativa, em que a recolha de dados foi proveniente dos áudios do planejamento, de seu *design*, de áudios e vídeos das discussões dos subgrupos e da plenária do segundo encontro. Os resultados mostram que, a partir da tarefa de aprendizagem profissional planejada e implementada, foi possível suscitar a identificação de conhecimentos de professores, além de evidenciar a articulação entre os componentes das Tarefas de Aprendizagem Profissional.

PALAVRAS CHAVE:

- *Tarefas de aprendizagem profissional*
- *Formação de professores de matemática*
- *Aprendizagem profissional de professores de matemática*
- *Ensino de álgebra*

RÉSUMÉ

L'article présente les résultats d'une étude visant à comprendre comment la conception et la mise en œuvre d'une tâche d'apprentissage professionnel ont contribué à l'enquête sur les connaissances mathématiques et didactiques des enseignants de mathématiques en tant que participants à un processus de formation. Il s'inscrit dans une perspective qualitative-interprétative, dans laquelle la collecte de données est venue des audios de planification, de sa conception, des audios et des vidéos des discussions dans les sous-groupes et la plénière de la deuxième réunion. Les résultats montrent qu'à partir de la tâche d'apprentissage professionnel planifiée et mise en œuvre, il a été possible d'élever les connaissances des enseignants, en plus de montrer l'articulation entre les composantes des tâches d'apprentissage professionnel.

MOTS CLÉS:

- *Tâches d'apprentissage professionnel*
- *Formation des professeurs de mathématiques*
- *Formation professionnelle des professeurs de mathématiques*
- *Enseignement de l'algèbre*

1. Introdução

O campo da investigação em Educação Matemática tem produzido, ao longo das últimas décadas, consensos acerca das aprendizagens necessárias aos alunos da educação básica (Gibbons & Cobb, 2017) que, em uma visão conjuntural, perfazem a proficiência em matemática: compreensão de conceitos, fluência em procedimentos, competências em estratégias, adequação de raciocínio e atitude positiva (National Council of Teacher of Mathematics

[NCTM], 2014). Tais aprendizagens demandam implicações para o ensino e, entre elas, estão as que requerem do professor que ensina matemática uma acentuada compreensão acerca do conteúdo matemático, da forma de ensinar matemática, do raciocínio dos alunos (Koellner et al., 2011), entre outros.

Nos dias atuais existe uma abrangente literatura acerca dos elementos que compõem um processo formativo eficaz de professores que vão na direção de provocar mudanças em sua prática: foco no conteúdo matemático e didático (Borko et al., 2005); foco em como os alunos aprendem (Gibbons & Cobb, 2017); duração sustentada que ofereça aos professores tempo adequado para aprender (Desimone, 2009); presença de registros de prática (Ribeiro & Ponte, 2020); oportunidades para aprendizagem ativa, bem como troca de experiência entre professores (Fundação Carlos Chagas [FCC], 2017); e a prática diária do professor como contexto privilegiado de reflexão (Ball & Cohen, 1999). Contudo, poucos são os estudos que analisam "como" esses elementos, de modo integrado, ao serem colocados em ação em um processo formativo, podem contribuir para a aprendizagem profissional de professores (Watson & Mason, 2007). Portanto, faz parte de uma agenda de pesquisas em Educação Matemática investigar como essas características, ao serem operacionalizadas em um processo formativo, podem, de fato, constituir-se como oportunidades de aprendizagem profissional.

Considerando a função docente como de alta complexidade (Opfer & Pedder, 2011), neste artigo adotamos o modelo Professional Learning Opportunities for Teachers (PLOT) (Ribeiro & Ponte, 2020) que, ao se constituir como um modelo teórico metodológico, busca fornecer parâmetros para organizar e desenvolver processos formativos a partir de três domínios: (i) o Papel e as Ações do Formador (PAF), o qual enfatiza o papel do formador no *design* e na implementação dos momentos formativos; (ii) as Interações Discursivas entre os Participantes (IDP), momento de discussões coletivas em que, de forma colaborativa, os professores trocam experiências; (iii) as Tarefas de Aprendizagem Profissional (TAP), que se constituem em tarefas desenhadas e implementadas em processos formativos (Contexto) no intuito de contribuir na geração de Oportunidades de Aprendizagem Profissional (OAP):

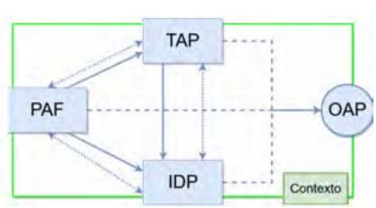


Figura 1. Modelo PLOT (Ribeiro & Ponte, 2020, p. 4)

Este modelo, não exclusivo da Educação Matemática, parte do princípio de que a aprendizagem do professor se situa em sua prática diária, na troca entre os pares a partir de tarefas preparadas especificamente para sua formação. Assim, com o propósito de compreender melhor como o modelo PLOT contribui para a criação de Oportunidades de Aprendizagem Profissional (OAP), o presente artigo aprofunda as discussões acerca do domínio Tarefas de Aprendizagem Profissional (TAP). Para tal, será analisado o *design* de uma TAP e sua implementação, desenvolvida em um processo formativo para professores de matemática, intitulado "Padrões e Regularidades na Matemática Escolar", que busca responder *Como o* design *de uma TAP contribui para a identificação de conhecimentos, matemáticos e didáticos, de professores?* E, ainda, *Como a implementação desta TAP proporciona a identificação de conhecimentos, matemáticos e didáticos, de professores?*

Para responder as questões delineadas, apresentamos um enquadramento teórico que envolve características da TAP relacionadas ao modelo PLOT e discorremos também sobre padrões e regularidades no ensino da matemática. Em seguida, delineamos os procedimentos metodológicos, tendo como pontos de observação os componentes da TAP no modelo PLOT. Por fim, expomos as discussões dos resultados, seguidas das conclusões.

2. Enquadramento teórico

A aprendizagem dos alunos é decorrente das tarefas matemáticas que lhes são atribuídas e da forma como elas são conduzidas pelo professor (Ponte, 2005). De forma análoga, segundo Watson e Mason (2007), pode-se fazer uma relação entre o papel desempenhado pela tarefa matemática na aprendizagem dos alunos e o papel das tarefas de aprendizagem profissional na formação de professores, em que estes também são fortemente influenciados pelas tarefas que lhes são oferecidas em um processo formativo.

Considerando o domínio TAP segundo o modelo PLOT, destacamos que tal domínio é composto por duas dimensões: conceitual e operacional. Enquanto a dimensão conceitual, constituída pelas componentes, *conhecimento profissional* e *ensino exploratório,* se vale da organização de um corpo de conhecimentos teóricos e práticos que favorecem a aprendizagem profissional, a dimensão operacional, constituída pela *tarefa matemática* e pelos *registros de prática*, indica os instrumentos e meios pelos quais se busca atingir esta aprendizagem (Ribeiro & Ponte, 2020). Na sequência explicitamos as características das quatro componentes dessas dimensões e apresentamos uma subseção específica sobre padrões e regularidades no ensino da matemática.

2.1. *Componentes do domínio “Tarefas de Aprendizagem Profissional”*

2.1.1. *Conhecimento profissional*

Esta componente, pertencente à dimensão conceitual do domínio TAP do modelo PLOT, caracteriza-se pela exploração dos conhecimentos, matemáticos e didáticos, de professores de forma integrada, contrapondo-se à prática dominante em processos formativos, de que a matemática e a forma de ensinar são vistos separadamente (Silver et al., 2007; Watson & Mason, 2007).

Vários autores vêm dedicando seus estudos a compreender o conhecimento dos professores que ensinam matemática. Entre eles estão as pesquisas de Ball e colaboradores, com o modelo *Mathematical Knowledge for Teaching* (MKT) (Ball et al., 2008), que divide o conhecimento matemático para o ensino em conhecimento do conteúdo e conhecimento pedagógico do conteúdo.

Na busca de entender quais são e como esses conhecimentos estão dispostos, Ponte (2012) divide em quatro dimensões os conhecimentos necessários à docência, e que intervêm diretamente na prática do professor: Conhecimento da matemática para o seu ensino, que envolve os conceitos matemáticos e seus respectivos procedimentos, suas especificidades e conexões internas e externas; Conhecimento do aluno e da aprendizagem, que implica saber como o aluno aprende matemática, “seus interesses, gostos, formas habituais de comportar-se e reagir, valores, referências culturais, modos de aprender” (Ponte, 2012, p. 88); Conhecimento da prática educativa, que, segundo o autor, se constitui como o núcleo do conhecimento do professor, incluindo o planejamento a curto, médio e longo prazo, a elaboração das tarefas matemáticas a serem trabalhadas com os alunos, a avaliação e a regulação da aprendizagem; Conhecimento do currículo, que se refere àquele conhecimento que abrange compreender tanto a disposição do currículo ao longo da escolaridade, como os materiais necessários e mais profícuos para desenvolver a aprendizagem dos alunos.

Neste artigo denominamos “conhecimentos matemáticos” aqueles referentes aos conteúdos matemáticos e “conhecimentos didáticos”, os que se relacionam à forma de ensinar os conteúdos matemáticos, no qual estão incluídos, por exemplo, o conhecimento do aluno e de sua aprendizagem. Contudo, ambos os conhecimentos se constituem como elementos interdependentes dentro de um processo formativo, de modo a contribuir para a compreensão e aprofundamento do ensino da matemática.

2.1.2. *Ensino exploratório*

Outra componente da dimensão conceitual de uma TAP, no modelo PLOT, se refere à forma de sua operacionalização, em que os professores consigam explorar e investigar a própria prática e de outrem. No trabalho de Ponte et al. (2017), os autores afirmam que os professores aprendem por processos muito semelhantes à forma como os alunos aprendem. O que diferencia um processo de outro são os objetos da atividade, uma vez que, enquanto os alunos têm por objeto de estudo as diferentes disciplinas, o professor deve aprender sobre a atividade dos alunos no desenvolvimento de tarefas, bem como sobre questões relacionadas a sua aplicação. Portanto, as características do ensino exploratório, direcionadas aos alunos da educação básica, podem também ser consideradas no desenvolvimento de um processo formativo com os professores.

O ensino exploratório é composto por uma organização em três etapas (Canavarro, 2011; Stein et al., 2008): introdução, realização e discussão. Transpondo para a formação de professores, consideramos a *introdução* como a etapa inicial, na qual o formador apresenta a TAP aos professores participantes do processo formativo, estabelece o tempo necessário à sua consecução e assegura-se de que todos tenham compreendido o que deve ser feito (Ponte et al., 2013). A *realização* envolve o trabalho em pequenos grupos, na resolução do que foi proposto pelo formador, e é quando este deve assegurar o acesso às discussões e contribuir para o desenvolvimento das soluções (Canavarro et al., 2012). Por fim, a *discussão* é o momento – baseado na etapa da realização – em que o formador se utiliza das soluções apontadas pelos pequenos grupos para, em uma plenária (momento de compartilhamento das diferentes resoluções), promover os debates que culminarão com a sistematização das aprendizagens previstas no objetivo da TAP (Ribeiro & Ponte, 2019). Como um maestro ao reger um concerto, o formador deve orquestrar as discussões e a realização da TAP, buscando o equilíbrio de suas intervenções, a fim de não direcionar demais o trabalho nos pequenos grupos e, no momento da plenária, não fornecer caminhos ou respostas (Canavarro et al., 2012). Deve, ademais, envolver explicitamente o grupo nas ideias matemáticas e didáticas, por meio de questões de aprofundamento, considerando seu propósito de ensino (Elliott et al., 2009). Esta natureza interativa em que se privilegiam a troca de experiências entre os pares e a participação ativa dos professores em todas as fases, rompendo com o isolamento tradicional do trabalho do professor (Ball & Cohen, 1999), é uma das características principais do ensino exploratório, sendo considerada também um dos elementos de formações eficazes (Desimone, 2009).

2.1.3. *Tarefa matemática*

Retomando a ideia de que a aprendizagem ocorre a partir da tarefa realizada e da forma como esta é conduzida (Ponte, 2005), cabe ao formador desenhar tarefas potencialmente significativas e propulsoras de aprendizagem (Christiansen & Walther, 1986). Uma das componentes da dimensão operacional de uma TAP no modelo PLOT é a presença, em seu *design*, de tarefas matemáticas de alto nível cognitivo. Para Ponte (2005), as tarefas podem se enquadrar em categorias, de acordo com a abertura e o nível de desafio que oferecem. Uma tarefa pode ser considerada fechada quando é "claramente dito o que é dado e o que é pedido e uma tarefa aberta é que comporta um grau de indeterminação" (Ponte, 2005, pp. 17-18). Já o nível de desafio tem relação com a percepção da dificuldade da tarefa. O nível de demanda cognitiva de uma tarefa matemática também está associado à maneira como é proposta, conduzida e discutida, fazendo com que esse nível possa ser aumentado, mas também reduzido (Stein & Smith, 1998).

A presença deste tipo de tarefa matemática em uma TAP se justifica, pois propicia "múltiplas abordagens, entre as quais o uso de diferentes representações e ferramentas"[1] (NCTM, 2014, p. 17), oportunizando a resolução das tarefas por diferentes estratégias. Vale notar que este componente se relaciona intimamente com o ensino exploratório, uma vez que, no momento da discussão coletiva, o formador pode se valer das múltiplas resoluções feitas pelos professores, a partir de uma tarefa de alto nível cognitivo, para promover o debate por meio da socialização dos diferentes raciocínios presentes na resolução da tarefa matemática. Outro aspecto é que essas tarefas matemáticas, operacionalizadas, discutidas e refletidas em um processo formativo, podem servir de modelo para que os professores possam desenvolvê-las com seus alunos.

Assim, a elaboração, a adaptação ou a escolha de uma tarefa matemática tem destaque no processo formativo como instrumento potencializador de aprendizagens, oferecendo aos professores em formação a oportunidade de falar e discutir a matemática que propõem aos seus alunos (Silver et al., 2007).

2.1.4. *Registros de prática*

Ainda que a experiência vivenciada pela prática contribua para a aprendizagem profissional, a diversidade de situações que podem ocorrer em sala de aula faz com que nem todas as aprendizagens sejam abrangidas em sua totalidade. Desta

[1] Todas as traduções do inglês, ao longo do texto, devem ser consideradas como "tradução nossa".

forma, torna-se necessária uma aprendizagem compartilhada (Ball et al., 2014) em que as experiências vivenciadas possam ser discutidas e aperfeiçoadas, por meio dos registros de prática.

Os registros de prática se configuram como uma componente do domínio TAP no modelo PLOT, uma vez que trazem para o espaço formativo, elementos do cotidiano do professor como planos de aula, tarefas propostas aos alunos, análise de vídeos, entre outras ações realizadas, que se constituem como documentações que possibilitam o resgate de diferentes momentos (Ball et al., 2014), em contextos diversos, para um público além daquele que vivenciou a experiência da prática.

Considerando todos os componentes de uma TAP: conhecimento profissional e ensino exploratório (dimensão conceitual), tarefa matemática e registros de prática (dimensão operacional), é possível definir Tarefas de Aprendizagem Profissional como situações intencionalmente planejadas para serem desenvolvidas em processos de formação inicial e continuada, que consideram a aprendizagem de professores numa perspectiva situada, fundamentada na prática diária do professor (Ball & Cohen, 1999). Por conseguinte, uma TAP deve ter um objetivo claro (Smith, 2001), na perspectiva de gerar Oportunidades de Aprendizagem Profissional (OAP) (Ribeiro & Ponte, 2019); focar, simultaneamente, nos conhecimentos matemáticos (conteúdo matemático) e didáticos (formas de ensinar) de forma indissociada (Ponte, 2012); apoiar a reflexão sobre a prática (Silver et al., 2007) e estabelecer uma relação direta com a forma como é realizada (ensino exploratório) (Stein et al., 2008), tendo por base registros de prática (Ball et al., 2014), em que os professores analisam de forma compartilhada situações reais da prática docente, levando em conta seus conhecimentos prévios e sua experiência (Ball & Cohen, 1999).

2.2. *Padrões e regularidades em processos formativos de professores*

Dentre os vários conhecimentos matemáticos necessários à docência, o trabalho com padrões é um componente importante no ensino e na aprendizagem da álgebra, pois inclui o trabalho com conjecturas, argumentações, generalizações e regularidades (Vale & Pimentel, 2011). Por conseguinte, cabe aos processos formativos "integrar TAP que explorem diferentes tipos de padrões e regularidades, nos quais se utilizem de diferentes representações para se expressar as generalizações de professores de matemática" (Ribeiro et al., 2020, pp. 5-6).

Dentre os diferentes tipos de padrões que podem ser usados em processos formativos, em especial, Ribeiro et al. (2020) apontam os padrões figurativos como excelentes para desenvolver o pensamento matemático, pois contribuem para mobilizar e ampliar o conhecimento de professores de matemática de modo a compreender o pensamento algébrico dos alunos.

Em complemento a esses autores, Vale e Pimentel (2011) ressaltam a importância dos padrões de crescimento para o desenvolvimento da abstração. Para esses autores, “nos padrões de crescimento, cada termo muda de forma previsível em relação ao anterior. Este tipo de padrão, em particular, fornece uma grande diversidade de situações que proporcionam explorações muito ricas e variadas” (p. 24). A escolha de um ou mais tipos de padrões a ser utilizado em processos formativos de professores de matemática vai depender do objetivo da proposta e deve ser sempre levada em conta, para proporcionar aprendizagens diversificadas aos professores.

3. Metodologia

Este estudo insere-se em uma abordagem qualitativo-interpretativa (Bogdan & Biklen, 1994), uma vez que busca analisar e interpretar o *design* e a implementação de uma TAP que tinha o objetivo de identificar os conhecimentos, matemáticos e didáticos, de professores de matemática que participaram de um processo formativo[2]. O referido processo teve uma carga horária de 60 horas e contou com a participação de 33 professores de matemática (atuantes em instituições públicas e particulares do estado de São Paulo, Brasil) e foi elaborado pelos formadores, Alessandro e Marcia, membros do grupo de pesquisa ForMatE, os quais buscaram desenvolver essa TAP a partir dos princípios teóricos explorados na seção anterior.

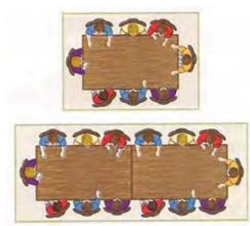
O foco a ser considerado neste artigo compõe o segundo encontro do processo formativo, o qual contou com quatro momentos distintos: o primeiro, individual, em que os professores resolveram uma das três tarefas matemáticas (Figuras 2, 3 e 4) destinadas a alunos do 6.º ano, do 9.º ano e do 1.º ano do Ensino Médio[3], respectivamente. Cada professor resolveu apenas uma tarefa, a qual se relacionava a sua maior experiência profissional na escola básica. No segundo momento, os professores, também individualmente, responderam

[2] “Padrões e Regularidades na Matemática Escolar”, coordenado pelo grupo de pesquisa ForMatE, realizado no ano de 2018.

[3] No Brasil, alunos do 6o ano possuem, em média, 11 anos; os do 9º ano, 14 anos; os do 1º ano do Ensino Médio, 15 anos.

cinco questões de caráter didático (Figura 5) que se referiram à tarefa matemática correspondente. O terceiro momento ocorreu em subgrupos (designados por cores), com quatro ou cinco professores agrupados de acordo com a tarefa matemática realizada individualmente, para que respondessem cinco questões referentes ao conhecimento matemático (Figura 6). E, por fim, no último momento foi realizada a plenária para que os professores expusessem e discutissem o trabalho ocorrido nos subgrupos. A plenária tinha por objetivo compartilhar com os demais professores e formadores da turma, os conhecimentos matemáticos e didáticos provenientes da resolução individual e das discussões em subgrupos.

Observe as figuras e responda:



a) Juntando 3 mesas dessa maneira, quantas pessoas se acomodam?

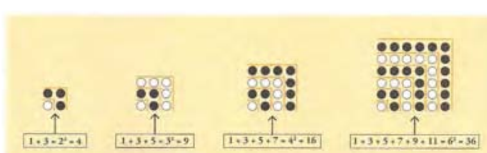
b) Escreva uma expressão que dê o número de pessoas acomodadas em 13 mesas.

c) Complete a conclusão geral: *O número de pessoas acomodadas é*
(Dica: Não esqueça que o número de pessoas depende do número de mesas.)

d) Escreva a conclusão numa fórmula em que a letra *p* represente o número de pessoas, e a letra *m*, o número de mesas.

Figura 2. Tarefa matemática – 6º ano (Dados da Pesquisa)

Observe os quadrados a seguir e a estratégia usada para calcular a soma dos primeiros números ímpares, a partir de 1.

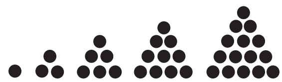


a) Inspirado na ideia apresentada, calcule a soma dos 9 primeiros números ímpares.

b) Generalize uma fórmula para o cálculo da soma dos n primeiros números ímpares a partir de 1.

Figura 3. Tarefa matemática – 9º ano (Dados da Pesquisa)

Esta figura apresenta os primeiros elementos de uma sequência de números chamados números triangulares:



a) Escreva a sequência numérica correspondente a essa figura, considerando o número de bolinhas que formam cada triângulo:

1, 3, ..., ..., ..., ..., ..., ...,

b) Que regularidade você observou na construção desses números triangulares?

c) Escreva uma fórmula que permita calcular um termo qualquer dessa sequência, utilizando a recorrência, ou seja, definindo um termo a partir de seu precedente.

d) Construa uma fórmula que calcule um termo qualquer dessa sequência, sem necessariamente recorrer ao termo anterior.

Figura 4. Tarefa matemática – 1º ano Ensino Médio (Dados da Pesquisa)

Tomando-se por base a sua experiência em sala de aula e considerando a tarefa matemática resolvida anteriormente, responda as seguintes perguntas:

1) Se os seus alunos fossem resolver essa tarefa matemática, quais estratégias você imagina que eles utilizariam?
2) Quais as dificuldades você imagina que seus alunos possam ter, ao resolver esse tipo de tarefa?
3) Você acha que este tipo de tarefa é apropriada para qual ano da escolaridade básica?
4) Você já se deparou com tarefas dessa natureza nos materiais didáticos que você usa em sala de aula? Se sim, qual tipo de material didático?
5) Você costuma utilizar tarefas matemáticas desta natureza nas suas aulas de matemática? Se sim, em quais anos (turmas) da Educação Básica? Se não, justifique quais as suas razões.

Figura 5. Questões de caráter didático (Dados da Pesquisa)

Para o presente estudo foram analisados (i) os áudios do planejamento da TAP realizado pelos formadores, (ii) o *design* das TAP (Figuras 2, 3 e 4), bem como as questões descritas nas figuras 5 e 6, e (iii) os áudios e vídeos da formação durante o trabalho nos subgrupos e das discussões coletivas na plenária. Na análise dos dados utilizamos um processo dedutivo, em que os focos de análise foram definidos *a priori*, a partir da revisão de literatura e das características das componentes da TAP no modelo PLOT (Ribeiro & Ponte, 2020), a saber: (i) a forma como os conhecimentos matemáticos e didáticos foram explorados; (ii) de que maneira a estrutura da TAP propiciou um ambiente de ensino-aprendizagem exploratório; (iii) se e como foi observada a presença de tarefas matemáticas de alto nível cognitivo; (iv) quais registros de prática compunham a TAP.

Tomando por base o trabalho individual de cada membro do grupo, discutam os resultados encontrados e respondam as questões a seguir:

1) Identifiquem se as resoluções matemáticas da tarefa que vocês trabalharam são semelhantes ou divergentes. Escrevam, se for o caso, quais foram as diferenças identificadas em relação às resoluções matemáticas encontradas.
2) Vocês conseguem encontrar outra maneira de resolução, diferente daquelas encontradas individualmente? Descrevam-na.
3) Vocês encontraram semelhanças entre as possíveis estratégias de resolução dos alunos e as dos professores do grupo? Se sim, qual (quais) foi (foram) a(s) estratégia(s) que teve(tiveram) maior incidência? Apareceu alguma estratégia “não usual” que vocês queiram compartilhar?
4) Vocês encontraram, entre os professores do grupo, dificuldades semelhantes às dos alunos? Se sim, qual (quais) foi (foram) a(s) dificuldade(s) que teve(tiveram) maior incidência? Apareceu alguma dificuldade “menos comum” que vocês queiram compartilhar?
5) Os professores do seu grupo costumam utilizar tarefas matemáticas desta natureza em suas aulas de matemática? Se sim, como e para que turmas tais tipos de tarefas são utilizadas? Se não, justifique quais as suas razões.

Figura 6. Questões de caráter matemático (Dados da Pesquisa)

4. Resultados

Em nossas análises, considerando os focos apresentados na seção anterior, buscamos compreender como o *design* da TAP e sua posterior implementação no processo formativo contribuíram para a identificação de conhecimentos matemáticos e didáticos dos professores participantes. Para tanto, esta seção está distribuída em três subseções: (i) a análise do *design* da TAP; (ii) a análise das questões respondidas individualmente pelos professores; e (iii) a análise do trabalho nos subgrupos, recorrendo também aos momentos de discussões efetivadas na plenária.

4.1. *Planejando o design de uma TAP*

No planejamento da TAP é possível observar que os formadores organizam o encontro, considerando duas das fases do ensino exploratório: a *realização*, composta pelo trabalho individual e pelo trabalho em subgrupo, e a *discussão em uma plenária*.

Formador

Alessandro: Talvez o que a gente possa falar é assim: das duas às três [horas da tarde] para o individual, das três às quatro, pequenos grupos. Se a gente perceber que eles ainda estão em discussão, a gente fala: "Ó, pessoal, nós vamos fazer um intervalo de trinta minutos; quando vocês voltarem, vocês ainda vão ter até uns vinte ou trinta minutos para terminar", e aí depois a gente faz uma hora de discussão geral.

Este trecho revela que os formadores planejam a fase de realização da TAP, considerando o trabalho individual e em pequenos grupos, que se constituem como elementos importantes de reflexão em que, em um primeiro momento, o professor trabalha por si mesmo, a partir de seu próprio conhecimento e experiências e, em um segundo momento, em subgrupo, em que a discussão com os pares pode propiciar uma reflexão mais aprofundada. A plenária, momento de discussão coletiva com a apresentação do trabalho dos subgrupos, também foi considerada: *"aí depois a gente faz uma hora de discussão geral"*.

Para além das fases do ensino exploratório, uma parte considerável do planejamento foi destinada à estruturação da formação, incluindo: (i) a organização temporal do encontro, (ii) a preocupação com a formação dos subgrupos, (iii) a elaboração das questões a serem respondidas pelos professores, (iv) a exploração dos conhecimentos matemáticos e didáticos, e (v) uma formação que busca oferecer modelos à ação didática do professor.

No que se refere à organização temporal, os formadores, ao discutir as fases do ensino exploratório, levam em consideração o tempo necessário a cada uma delas:

Formadora

Marcia: Então, a gente tinha marcado das duas às três [horas] o trabalho individual, das três às quatro em pequenos grupos, aí eles iam para o intervalo; na volta, a plenária.

Alessandro: Ah, não, então tem que fazer diferente, então a gente tem que entregar pra eles às duas [horas]... quando for três horas, a gente avisa que a gente precisa que eles se formem em grupos pelo tipo de tarefa.

Marcia: Eu acho este tempo curto.

Alessandro: Eu também acho...

É possível perceber a preocupação dos formadores em garantir o tempo suficiente para que os professores realizem a tarefa proposta. A relação da tarefa com a sua duração é um conhecimento necessário ao formador, em que o tempo pode ser um aliado para permitir prazo suficiente para que todos os professores terminem suas ações ou, por outro lado, um dificultador, interrompendo raciocínios importantes para o surgimento de oportunidades de aprendizagem.

Outra discussão realizada entre os formadores durante o planejamento se refere à formação dos subgrupos:

Marcia: A gente não quer saber a quantidade, a gente quer saber sobre "o professor"... que grupo a gente encaixa...
Alessandro: ... para a gente ter uma ideia se a pessoa já fez cursos de formação..., quanto tempo ele já dá aula e quais séries, quais anos do fundamental e do médio, se é escola pública e particular.

A discussão girou em torno da tabulação de um questionário inicial preenchido no primeiro encontro, o qual tinha por objetivo, entre outras ações, a organização do trabalho nos subgrupos. Segundo Marcia, a coleta de informações sobre cada participante no processo formativo se faz necessária para a formação dos agrupamentos de professores no momento do trabalho nos subgrupos, em que Alessandro define as características que precisam ser levadas em conta, considerando que as necessidades formativas não apenas são diferentes para professores novatos e experientes, mas variam também segundo sua vivência em determinados anos da escolaridade. A criação de grupos heterogêneos de professores para o trabalho em subgrupos é um critério importante da organização do ensino exploratório, pois contribui para uma maior circulação de informações e troca de experiências.

A elaboração de questões a serem respondidas pelos professores também foi motivo de discussão e análise entre os formadores em seu planejamento:

Alessandro: Porque neste começo, é mais fácil eles falarem nos pequenos grupos do que no geral, porque é o segundo encontro ainda.
Marcia: É, eu acho assim, não dá para ter um questionário de dez questões.
Alessandro: Não!
Marcia: Eu lembro que no outro curso [realizado pelo grupo no ano anterior] tinha muitas questões e aí ficam respostas sim, não, sim, não.

O planejamento de questões para o desenvolvimento de uma TAP envolve aspectos qualitativos, considerando quais questões podem suscitar maior discussão, reflexão e oportunidades de aprendizagem aos professores, mas abrange também os aspectos quantitativos, que devem ser considerados, de forma a contribuir para que os professores respondam o que lhes foi solicitado. Perguntas podem se constituir como poderosas ferramentas na criação de oportunidades de aprendizagem profissional, ao suscitar reflexões necessárias.

No que se refere à exploração dos conhecimentos matemáticos, é possível perceber a preocupação dos formadores em colocar, nas tarefas matemáticas que irão compor as TAP, tipos diferentes de padrões (geométrico e numérico):

Alessandro: Essa seria do sexto ano? Esse aqui seria com padrão geométrico...

Marcia: Uhum...
Alessandro: Este também é geométrico, e qual seria pelo menos um numérico?

Porque os subgrupos iriam se debruçar em tarefas matemáticas diferentes, conforme ilustram as figuras 2, 3 e 4, a preocupação de Alessandro é pertinente, pois no momento da plenária os diferentes tipos de padrões – geométrico e numérico – poderiam desencadear discussões aprofundadas, a depender da condução do formador para relacionar as diferentes representações. Transitar por diferentes tipos de representação, como sugere Alessandro, permite que o professor tenha a possibilidade de perceber conexões existentes entre essas representações, apoiando o raciocínio matemático. Além disso, essas tarefas matemáticas, por terem sido retiradas e adaptadas de livros e manuais didáticos, representam a relação com a prática diária do professor (registros de prática).

Considerando a semelhança entre as tarefas matemáticas, destinadas a alunos da educação básica, e as tarefas de aprendizagem profissional, destinadas a professores, Alessandro explicita essa relação:

Alessandro: Sim, deixar [a TAP] no TIDIA [ambiente de aprendizagem virtual], porque se eles quiserem pegar essa tarefa [referindo-se à tarefa matemática] e adaptá-la pra trabalhar com seus alunos ... lógico, eles não [vão] fazer as questões de natureza didática para os alunos, mas eles usam a tarefa do jeito que nós usamos e eles têm o nosso roteiro das discussões coletivas pra adaptar, porque eles podem fazer a mesma coisa... selecionar os grupos que tiveram soluções diferentes, discutir as soluções, selecionar as dificuldades ou as soluções incorretas que apareceram; então, o que a gente fez, eles podem adaptar para depois eles fazerem…

Nesse trecho, Alessandro evidencia aspectos importantes de uma das fases do ensino exploratório – a discussão em plenária: "*... selecionar os grupos que tiveram soluções diferentes, discutir as soluções, selecionar as dificuldades ou as soluções incorretas que apareceram*". Essas são ações que, tanto o professor em sala de aula, quanto o formador com um grupo de professores, devem trabalhar, considerando a analogia dos processos do trabalho do professor com os do formador. Importante notar que, usualmente, os processos formativos se valem de situações de sala de aula, porém, aqui fica evidenciado o movimento contrário, em que uma situação do processo formativo pode ser utilizada, com as devidas adaptações, nas salas de aula com alunos da educação básica.

4.2. *O que as questões individuais exploraram sobre os conhecimentos dos professores*

No que se refere ao conhecimento matemático, as três tarefas matemáticas, expostas nas figuras 2, 3 e 4, ainda que considerem conteúdos específicos de cada série/ano, focam na análise do comportamento de padrões, buscando expressões algébricas, além de possuir figuras e representações que contribuem para a abstração. As questões colocadas abaixo de cada "tipo de padrão" nas referidas figuras, são designadas como questões abertas, uma vez que cada professor pode chegar ao resultado por uma diversidade de resoluções e representações. Além disso, é possível constatar que se trata de tarefas matemáticas de alto nível cognitivo, pois exploram a natureza dos conceitos, relações e processos matemáticos, como na questão b da segunda tarefa: *Que regularidade você observou na construção desses números triangulares?*

No conjunto das questões relacionadas aos aspectos didáticos, para cada tarefa matemática existem cinco questões, apresentadas na Figura 5, relacionadas à experiência dos professores em sala de aula, dentre as quais as duas primeiras se referem à identificação de conhecimentos sobre o aluno:

1) Se os seus alunos fossem resolver essa tarefa matemática, quais estratégias você imagina que eles utilizariam?
2) Quais as dificuldades você imagina que seus alunos possam ter, ao resolver esse tipo de tarefa?

Embora as duas questões se relacionem à identificação do conhecimento que os professores têm sobre os alunos, elas diferem em pontos fundamentais: a primeira possibilita verificar as possíveis *estratégias* que os alunos podem ter, ao se depararem com uma tarefa matemática; a segunda, por sua vez, relaciona-se com as *dificuldades* que os alunos teriam, ao resolver a tarefa matemática. No que se refere à primeira questão, antecipar as estratégias que os alunos utilizam na resolução de uma determinada tarefa matemática é um conhecimento importante, na medida em que pode levar os professores a prestarem atenção aos procedimentos que os alunos utilizam, indo para além das respostas certas ou erradas, procurando romper com uma forma de ensino pautado em resultados. Dessa forma, procura valorizar o processo, compreendendo o raciocínio dos alunos. Além disso, quando os professores conhecem diferentes estratégias de resoluções, sentem-se mais seguros na aula, pois a imprevisibilidade da prática fica reduzida e suas intervenções podem ser mais assertivas em relação ao conhecimento do aluno.

Por outro lado, a segunda questão se relaciona às dificuldades que os alunos possam apresentar diante da tarefa matemática a ser realizada. Conhecer os possíveis obstáculos da aprendizagem matemática e os que se relacionam à própria condução da tarefa é necessário ao professor, para que possa prever ações e incluir, em seu planejamento, suporte contingente às possíveis dificuldades. Ainda que necessário, esse é um desafio, uma vez que exige do professor conhecer o conteúdo profundamente, de forma a pensar em estratégias e representações das mais variadas.

As questões de número três e quatro podem ser agrupadas ao conhecimento que o professor deve ter com relação ao currículo:

3) Você acha que este tipo de tarefa é apropriada para qual ano da escolaridade básica?
4) Você já se deparou com tarefas dessa natureza nos materiais didáticos que você usa em sala de aula? Se sim, qual tipo de material didático?

Saber para qual ano determinada tarefa é destinada (questão 3) e conhecer o material didático (questão 4) fazem parte de uma visão completa da diversidade de temas e tópicos da escolaridade da educação básica. No entanto, a resposta à questão 3 já estava descrita no rodapé da própria tarefa, o que não configurou desafio para os professores. Portanto, uma possível reestruturação desta questão poderia ser: *Você acha que o nível de desafio desta tarefa está apropriado ao ano/série para o qual está proposta?* de modo a levar os professores a refletir sobre a pertinência da tarefa ao currículo prescrito e a levantar qual o seu conhecimento do currículo e como efetivá-lo na prática de ensino.

A questão 4 suscita reflexões importantes, se considerarmos que o livro didático está presente e é utilizado pelos professores de matemática em suas aulas. Por essa razão, buscar uma relação entre a tarefa matemática proposta pela TAP e o material didático utilizado pelos professores é importante para que os professores possam refletir criticamente sobre esse poderoso material de apoio ao ensino.

Já a quinta questão suscita à identificação de conhecimentos sobre o ensino no que diz respeito, não a forma de trabalhar, mas sim, se este tipo de tarefa matemática faz parte do cotidiano do trabalho do professor:

5) Você costuma utilizar tarefas matemáticas desta natureza nas suas aulas de matemática? Se sim, em quais anos (turmas) da Educação Básica? Se não, justifique quais as suas razões?

Esta questão busca compreender em que medida os professores têm familiaridade com tarefas desta natureza. Para o desenvolvimento de um processo formativo, é importante levantar quais conhecimentos, bem como quais ações, os professores já realizam com seus alunos, para que estes conhecimentos sirvam de base para o planejamento dos encontros subsequentes.

4.3. *Discussões nos subgrupos e na plenária*

Nesta seção, diferentemente das anteriores, consideramos para análise a interlocução entre o trabalho realizado nos subgrupos e as discussões ocorridas na plenária a partir do *design* completo da TAP, composto pelas Figuras 2, 3, 4, 5 e 6.

As duas primeiras questões, que se referem às informações de ordem matemática (Figura 6), fomentam o compartilhamento, entre os integrantes do subgrupo, das estratégias de resolução da tarefa matemática que cada professor adotou:

1) Identifiquem se as resoluções matemáticas da tarefa que vocês trabalharam são semelhantes ou divergentes. Escrevam, se for o caso, quais foram as diferenças identificadas em relação às resoluções matemáticas encontradas.
2) Vocês conseguem encontrar outra maneira de resolução, diferente daquelas encontradas individualmente? Descrevam-na.

Por meio destas questões é possível (i) levantar o conhecimento matemático que cada professor utilizou na resolução da tarefa matemática, verificando em que medida foi usado um conhecimento mais próximo da matemática acadêmica ou mais próximo da matemática escolar, e (ii) levar os professores a conhecer e compreender as resoluções dos colegas, contribuindo para sua própria aprendizagem.

Na plenária, durante a apresentação da discussão da primeira questão, os subgrupos amarelo e vermelho, que estavam com a tarefa das mesas e cadeiras (Figura 2), encontraram as expressões numéricas: *p = 6m + 2* e *(13m x 6p) + 2 = 80*.

Na apresentação do subgrupo vermelho, o professor P1 fez uma afirmação:

P1: As expressões p = 6m + 2 e (13m x 6p) + 2 = 80 são iguais.
Alessandro: Por que as duas expressões são equivalentes?
P2: Eles não estão usando as letras m e p como unidade de medidas? [se referindo a 13m como sendo 13 mesas e 6p como sendo 6 pessoas].
Alessandro: E o 80 é o quê, então?
P2: É a quantidade de pessoas.
Alessandro: Mas mesas vezes pessoas não dá mesas nem dá pessoas.

Importante notar que em sua afirmação, P1 não utilizou o termo “equivalente”, o que foi notado por Alessandro, que ao questionar a afirmação de P1, insere o termo “equivalente”, introduzindo uma linguagem matematicamente adequada. Além disso, diante de uma afirmação equivocada de P1 (*p = 6m + 2 e (13m x 6p) + 2 = 80 são iguais)*, o formador colocou uma questão de forma a discutir sua validade: *“E o 80 é o quê, então?”*, descompactando o significado da ideia matemática presente na expressão.

Uma das professoras da sala (P2), olhando para a expressão (13m x 6p) + 2 = 80, pergunta: *“Eles não estão usando as letras m e p como unidade de medidas?”*. Após uma longa discussão entre os professores, um professor da sala (P3) disse ao subgrupo vermelho que retirasse o número “13” e a letra “p” da expressão. Ao fazer isso, o subgrupo vermelho concluiu que a afirmação dada anteriormente pelo professor (P1) não era verdadeira, ou seja, as expressões numéricas não eram equivalentes. Esse diálogo revela que a intervenção do formador: *“Por que as* *duas expressões são equivalentes?*” foi fundamental para promover a discussão sobre a equivalência de expressões numéricas e para explorar os conhecimentos matemáticos dos professores.

A terceira e quarta questões da Figura 6 são iguais, exceto pelo fato de a terceira focar nas semelhanças entre as *estratégias* dos alunos e dos professores e, a quarta, nas semelhanças entre as *dificuldades* dos alunos e dos professores:

3) Vocês encontraram semelhanças entre as possíveis estratégias de resolução dos alunos e as dos professores do grupo? Se sim, qual (quais) foi (foram) a(s) estratégia(s) que teve(tiveram) maior incidência? Apareceu alguma estratégia “não usual” que vocês queiram compartilhar?
4) Vocês encontraram, entre os professores do grupo, dificuldades semelhantes às dos alunos? Se sim, qual (quais) foi (foram) a(s) dificuldade(s) que teve(tiveram) maior incidência? Apareceu alguma dificuldade “menos comum” que vocês queiram compartilhar?

Estas questões fomentam a discussão nos subgrupos, levando os professores a compartilhar o que haviam respondido individualmente e destacam o conhecimento acerca das possíveis estratégias e dificuldades que os alunos da educação básica teriam na resolução da tarefa matemática. Além disso, buscam comparar as resoluções dos professores e as dos alunos: *Vocês encontraram semelhanças...*

A partir do áudio do subgrupo vermelho, em que foi discutida a tarefa das mesas e cadeiras, por exemplo, fica evidente que a discussão dos professores recai na resolução que os alunos poderiam ter feito, e não em uma comparação entre as possíveis resoluções dos alunos e o que eles efetivamente fizeram:

P1: Alguém acha que os alunos fariam outra coisa?
P2: A gente... acho que eles iam contar 6 mesas… cada mesa, 6 mais dois, que seria o padrão ou eles fariam o desenho.
P1: Ou contariam a partir da primeira mesa, contando seis, seis, seis até chegar na décima terceira mesa.
P2: Ou fariam até o desenho.
P1: Fazendo o desenho, eles poderiam cair no erro de multiplicar três vezes 8.

Esse trecho evidencia que os professores focam nas estratégias que os alunos usariam, desconsiderando um possível levantamento das *semelhanças entre as possíveis estratégias de resolução dos alunos e a dos professores do grupo*, como é solicitado na questão 3. Elaborar questões que possam efetivamente provocar reflexões e discussões entre os participantes e a troca de experiências é uma das ações do formador, que envolve ter um objetivo claro a alcançar, mas também um conhecimento profundo da matemática e da didática da matemática, além da forma como os professores poderiam interpretar as questões construídas.

5. Discussão dos resultados

Como as formações de professores têm um papel fundamental na promoção de novos e aprofundados conhecimentos (FCC, 2017), faz-se necessário discutir se, e como, elas podem promover esses conhecimentos aos professores envolvidos.

A TAP planejada e implementada apresentou em seu *design* elementos que a literatura indica serem importantes para a formação de professores que ensinam matemática, de forma a oportunizar aprendizagens profissionais. Um deles se refere à abordagem de ensino exploratório adotada para a condução da formação (Canavarro, 2011), em que a participação ativa e coletiva dos professores é priorizada. Foi possível verificar que, em momentos de discussões em plenária, tendo em conta o papel do formador, houve, além da identificação dos conhecimentos matemáticos, uma tomada de consciência por parte dos professores, que conseguiram perceber a inveracidade de uma afirmação matemática fornecida por um dos subgrupos, quando da expressão de generalização de padrões naquela sequência (Vale & Pimentel, 2011).

Ainda que se entenda que a prática reflexiva do professor pode ocorrer entre pares (Ball et al., 2014), reflexões individuais também se constituem como momentos em que são oferecidas "oportunidades aos professores para se engajar diretamente na resolução de um problema matemático, a qual tem o potencial de provocar um pensamento profundo de sua parte relacionado a pelo menos uma ideia matemática" (Silver et al., 2007, p. 264). Com efeito, a TAP proporcionou, além das reflexões coletivas – no trabalho nos pequenos grupos e na plenária –, momentos em que os professores, na execução da tarefa matemática, resolvessem individualmente e refletissem sobre questões relacionadas à dimensão didática.

A literatura tem apontado que, em um processo formativo, a duração que respeita tempo suficiente para que os professores possam refletir sobre sua própria prática é um dos elementos que caracterizam uma formação eficaz (Borko et al., 2005). No *design* da TAP foi possível perceber a preocupação dos formadores quanto ao tempo destinado à sua implementação, o que, em nosso entendimento, possibilitou o compartilhamento de conhecimentos e experiências, que se caracterizou como um elemento promotor de discussões profícuas e um aliado no sucesso da formação (Desimone, 2009).

Para além de selecionar uma tarefa matemática aberta (Ponte, 2005) e de alto nível cognitivo (Stein & Smith, 1998) na preparação da TAP, os formadores elaboraram questões relacionadas tanto ao conteúdo matemático (conhecimento matemático, ver Figura 6) quanto às formas de ensinar (conhecimento didático, ver Figura 5). Ademais, demonstraram preocupação em selecionar tarefas matemáticas semelhantes às que os professores usam – ou poderiam usar – com seus alunos, de modo que discuti-las no coletivo pudesse contribuir com o desenvolvimento do conhecimento matemático sobre um determinado conceito (Ball et al., 2008; Ponte, 2012).

Especificamente no que tange aos conhecimentos profissionais necessários ao ensino da matemática, as questões que abrangem os conhecimentos didáticos estavam direcionadas ao conhecimento que o professor precisa ter dos alunos, à forma como esses aprendem as ideias matemáticas e também ao conhecimento dos materiais que podem apoiar o trabalho de sala de aula. Esses conhecimentos, importantes para o ato de ensinar, exploram a prática educativa (Ponte, 2012), buscando a melhor forma de desenvolvê-la, observando as vantagens e as desvantagens de utilizar uma determinada representação para ensinar uma ideia específica (Ball et al., 2008).

A partir das análises aqui apresentadas, percebemos que o modelo PLOT (Ribeiro & Ponte, 2020) tornou-se útil para o *design* e a implementação de uma TAP que contemplou conhecimentos desafiadores, levou os professores a se envolverem com o conhecimento do ensino da matemática (Jaworski & Huang, 2014) e ofereceu oportunidades de aprendizagem acerca do ensino de álgebra, em especial, sobre o tema padrões e regularidades.

6. Conclusão

Este estudo buscou contribuir e ampliar a necessária discussão acerca de como desenhar e implementar um processo formativo que possa apoiar a criação de oportunidades de aprendizagem profissional a professores. Assim, neste artigo analisamos o *design* e a implementação de uma Tarefa de Aprendizagem Profissional realizada em um dos encontros de um processo formativo, tomando-se o modelo teórico-metodológico PLOT (Ribeiro & Ponte, 2020), com o intuito de responder: *Como o design de uma TAP contribui para a identificação de conhecimentos, matemáticos e didáticos, de professores?* e, ainda, *Como a implementação desta TAP proporciona a identificação de conhecimentos, matemáticos e didáticos, de professores?*

Ao ter por foco as tarefas de aprendizagem profissional, um dos domínios do modelo PLOT (Ribeiro & Ponte, 2020), percebemos que as quatro componentes do domínio TAP conseguiram apoiar a identificação de conhecimentos, matemáticos e didáticos, dos professores participantes, objetivo que os formadores tinham definido para a referida TAP.

Muito embora o foco escolhido neste artigo tenha sido o papel desempenhado pela TAP no processo formativo, foi possível também observar, ao longo das análises, o papel integrador do modelo PLOT, considerando a TAP, as interações discursivas entre os participantes e o papel e as ações do formador, tanto no *design* da formação quanto em sua implementação. Em um processo formativo com professores, o *design* de uma tarefa de aprendizagem profissional em que os professores são chamados a comunicar e argumentar suas ideias é fundamental. Mas, também o é, a presença de um formador bem preparado, que não reduz o nível de demanda cognitiva da tarefa, não dá respostas diretas, mas sim, provoca a reflexão dos professores, avançando na compreensão da tarefa. Isso foi identificado, por exemplo, na discussão sobre a validade ou não da expressão $p = 6m + 2$ *e* $(13m \times 6p) + 2 = 80$. Por outro lado, em uma formação em que seja previsto trabalho em subgrupos e discussões coletivas em plenária, uma tarefa de aprendizagem profissional também tem papel fundamental na criação dessas mesmas oportunidades, como sustentado pelo modelo PLOT.

Dada a importância da introdução (uma das fases do ensino exploratório) para o sucesso do desenvolvimento da TAP (Jackson et al., 2012), não foi possível aferir, nos dados coletados, uma organização específica para a realização da introdução. Importante ressaltar que, embora existam estudos que contemplem a importância e a forma de operacionalizar a introdução de uma tarefa matemática quando destinada a alunos da educação básica, a introdução de uma TAP destinada a professores ainda carece de ter elencadas e conhecidas suas caraterísticas principais e sua real importância em um processo formativo.

Finalmente, foi possível depreender que o papel do formador foi fundamental no *design* e na implementação da TAP, levando-nos a concluir que a característica de interdependência dos domínios do modelo PLOT, como preconizam seus idealizadores (Ribeiro & Ponte, 2020), traduziu-se como favorecedora de reais possibilidades de criação de oportunidades de aprendizagem profissional para os professores envolvidos. Além disso, destaca-se o papel integrador das diferentes componentes do domínio TAP, que se fizeram visíveis no *design* e na implementação da TAP, permitindo explorar os conhecimentos, matemáticos e didáticos, dos professores, por meio do uso de registros de prática e de tarefas matemáticas que contribuíssem para desenvolver o seu raciocínio matemático. Por fim, entendemos que estas três componentes (presença de conhecimentos matemáticos e didáticos, tarefas matemáticas de alto nível cognitivo e registros de prática) só puderam ser operacionalizadas por uma abordagem de ensino (exploratório), a qual requereu participação ativa dos professores e troca de experiência a partir da prática, principal alicerce do modelo PLOT.

Referências

Ball, D. L., Ben-Peretz, M., & Cohen, R. B. (2014). Records of practice and the development of collective professional knowledge. *British Journal of Educational Studies, 62*(3), 317–335. https://doi.org/10.1080/00071005.2014.959466

Ball, D. L., & Cohen, D. K. (1999). Developing practice, developing practitioners. Em L. Darling-Hammond, & G. Sykes (Eds.), *Teaching as the learning profession. Handbook of policy and practice* (pp. 3–32). Jossey-Bass.

Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: what makes it special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389–407. https://doi.org/10.1177/0022487108324554

Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação. Uma introdução à teoria e aos métodos.* Porto Editora.

Borko, H., Frykholm, J., Pittman, M., Eiteljorg, E., Nelson, M., Jacobs, J., Koellner-Clark, K., & Schneider, C. (2005). Preparing teachers to foster algebraic thinking. *ZDM Mathematics Education, 37*(1), 43–52. https://doi.org/10.1007/BF02655896

Canavarro, A. P. (2011, novembro/dezembro). Ensino exploratório da Matemática: Práticas e desafios. *Educação e Matemática,* 11–17.

Canavarro, P., Oliveira, H., & Menezes, L. (2012). Práticas de ensino exploratório da matemática: O caso de Célia. Em P. Canavarro, L. Santos, A. Boavida, H. Oliveira, L. Menezes, & S. Carreira (Orgs.), *Actas do Encontro de Investigação em Educação Matemática 2012: Práticas de Ensino da Matemática*. Sociedade Portuguesa de Investigação em Educação Matemática.

Christiansen, B., & Walther, G. (1986). Task and activity. Em B. Christiansen, A. G. Howson, & M. Otte (Eds.), *Perspectives on mathematics education. Mathematics Education Library (vol. 2,* pp. 243–307). Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-009-4504-3_7

Desimone, L. M. (2009). Improving impact studies of teachers' professional development: Toward better conceptualizations and measures. *Educational Researcher, 38*(3), 181–199. https://doi.org/10.3102%2F0013189X08331140

Elliott, R., Kazemi, E., Lesseig, K., Mumme, J., Carroll, C., & Kelley-Petersen, M. (2009). Conceptualizing the work of leading mathematical tasks in professional development. *Journal of Teacher Education, 60*(4), 364–379. https://doi.org/10.1177/0022487109341150

Fundação Carlos Chagas (2017). *Formação continuada de professores: contribuições da literatura baseada em evidências.* Relatório de Pesquisa. Recuperado de http://publicacoes.fcc.org.br/ojs/index.php/textosfcc/issue/viewIssue/340/169

Gibbons, L. K., & Cobb, P. (2017). Focusing on teacher learning opportunities to identify potentially productive coaching activities. *Journal of Teacher Education, 68*(4), 411–425. https://doi.org/10.1177/0022487117702579

Jackson, K., Shahan, E., Gibbons, L., & Cobb, P. (2012). Launching complex tasks. *Mathematics Teaching in the Middle School, 18*(1), 24–29. https://doi.org/10.5951/mathteacmiddscho.18.1.0024

Jaworski, B., & Huang, R. (2014). Teachers and didacticians: key stakeholders in the processes of developing mathematics teaching. *ZDM Mathematic Education, 46*(2), 173–188. https://doi.org/10.1007/s11858-014-0574-2

Koellner, K., Jacobs, J., Borko, H., Roberts, S., & Schneider, C. (2011). Professional development to support students' algebraic reasoning: An example from the problem-solving cycle model. Em J. Cai, & E. Knuth (Eds.). *Early algebraization: A global dialogue from multiple perspectives* (pp. 429-452). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-642-17735-4_23

National Council of Teacher of Mathematics (2014). *Princípios para a ação: Assegurar a todos o sucesso em Matemática.* APM.

Opfer, V. D., & Pedder, D. (2011). Conceptualizing teacher professional learning. *Review of Educational Research*, *81*(3), 376–407. https://doi.org/10.3102/0034654311413609

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. En Grupo de Trabalho de Investigação (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Associação de Professores de Matemática.

Ponte, J. P. (2012). Estudiando el conocimiento y el desarrollo professional del professorado de matemáticas. Em N. Planas (Ed.), *Teoria, crítica y prática de la educación matemática* (pp. 83–98). Graó.

Ponte, J. P., Brocardo, J., & Oliveira, H. (2013). A aula de investigação. Em J. Brocardo, L. Serrazina, & I. Rocha (Orgs.), *Investigações matemáticas na sala de aula* (pp. 25–54). Autêntica.

Ponte, J. P., Mata-Pereira, J., Quaresma, M., & Velez, I. (2017). Formação de professores dos primeiros anos em articulação com o contexto de prática de ensino de Matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *20*(1), 71–94. https://doi.org/10.12802/relime.17.2013

Ribeiro, A. J., Aguiar, M., & Trevisan, A. L. (2020). Oportunidades de aprendizagem vivenciadas por professores ao discutir coletivamente uma aula sobre padrões e regularidades. *Quadrante, 29*(1), 52–73. https://doi.org/10.48489/quadrante.23010

Ribeiro, A. J., & Ponte, J. P. (2019). Professional learning opportunities in a practice-based teacher education programme about the concept of function. *Acta Scientiae*, *21*(2), 49–74. https://doi.org/10.17648/acta.scientiae.v21iss2id5002

Ribeiro, A. J., & Ponte, J. P. (2020). Um modelo teórico para organizar e compreender as oportunidades de aprendizagem de professores para ensinar matemática. *Zetetiké, 28*, 1–20. https://doi.org/10.20396/zet.v28i0.8659072

Silver, E. A., Clark, L. M., Ghousseini, H. N., Charalambous, C. Y., & Sealy, J. T. (2007). Where is the mathematics? Examining teachers' mathematical learning opportunities in practice-based professional learning tasks. *Journal of Mathematics Teacher Education, 10(4-6)*, 261–277. https://doi.org/10.1007/s10857-007-9039-7

Smith, M. S. (2001). *Practice-based professional development for teachers of mathematics.* NCTM.

Stein, M. K., Engle, R. A., Smith, M. S., & Hughes, E. K. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: Five practices for helping teachers move beyond show and tell. *Mathematical Thinking and Learning, 10,* 313–340. http://dx.doi.org/10.1080/10986060802229675

Stein, M. K., & Smith, M. S. (1998). Mathematical tasks as a framework for reflection: From research to practice. *Mathematics Teaching in the Middle School, 3*(4), 268–275. https://doi.org/10.5951/MTMS.3.4.0268

Vale, I., & Pimentel, T. (2011). *Padrões em matemática: Uma proposta didática no âmbito do novo programa para o ensino básico.* Texto Editores.

Watson, A., & Mason, J. (2007). Taken-as-shared: A review of common assumptions about mathematical tasks in teacher education. *Journal of Mathematics Teacher Education, 10* (4-6), 205–215. https://doi.org/10.1007/s10857-007-9059-3

Autores

Miriam Criez Nobrega Ferreira. Universidade de Lisboa, Portugal. criezmiriam@gmail.com
https://orcid.org/0000-0001-8122-1136

Valdir Alves da Silva. Universidade Federal do ABC, Brasil. valdir.silva@ufabc.edu.br
https://orcid.org/0000-0003-4767-7089

Marcel Messias Gonçalves. Universidade Federal do ABC, Brasil. marcel.gonçalves@ufabc.edu.br
https://orcid.org/0000-0002-1404-1060

Alessandro Jacques Ribeiro. Universidade Federal do ABC, Brasil. alessandro.ribeiro@ufabc.edu.br
https://orcid.org/0000-0001-9647-0274

Álvaro Antón-Sancho

LA ANSIEDAD HACIA LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS EN MAESTROS EN FORMACIÓN INICIAL

Anxiety toward mathematics teaching in spanish teacher education students

RESUMEN

En este trabajo se estudian los niveles de ansiedad hacia la enseñanza de las matemáticas en un grupo de estudiantes españoles de magisterio de Educación Primaria a través de la encuesta MATAS. Los datos recopilados con la escuesta se analizan para determinar si hay diferencias significativas entre los niveles de ansiedad cuando se clasifica la muestra según tres criterios: si han cursado alguna asignatura previa de matemáticas, si poseen alguna titulación anterior en educación y si tienen experiencia como docentes de matemáticas. Como resultado se obtiene que la mayoría del grupo de estudiantes presentan niveles medios o altos de ansiedad hacia la enseñanza de las matemáticas y que quienes no tienen experiencia docente o no tienen ninguna titulación anterior presentan niveles medios de ansiedad significativamente superiores.

PALABRAS CLAVE:

- *Ansiedad*
- *Educación Matemática*
- *Formación inicial del profesorado*

ABSTRACT

In this paper we study the levels of anxiety towards mathematics teaching in a group of Spanish students for primary education teaching through the MATAS survey. The data collected in the survey is analyzed to determine if there are significant differences between the levels of anxiety when the sample is differentiated according to three criteria: if they have taken any previous mathematics subject, if they have any previous degree in education and if they have teaching experience in mathematics. As a result, it is obtained that most of the group of students present medium or high levels of anxiety towards the teaching of mathematics and that those who have no teaching experience or no previous degree present significantly higher mean levels of anxiety.

KEY WORDS:

- *Anxiety*
- *Mathematics Education*
- *Preservice teacher education*

RESUMO

Neste artigo estudamos os níveis de ansiedade face ao ensino da Matemática num grupo de estudantes espanhóis do ensino primário, utilizando o inquérito MATAS. Os resultados são analisados para determinar se existem diferenças significativas nos níveis de ansiedade quando a amostra é diferenciada de acordo com três critérios: se já tiveram uma disciplina de

PALAVRAS CHAVE:

- *Ansiedade*
- *Educação em matemática*
- *Formação inicial de professores*

Antón-Sancho A. (2023). La ansiedad hacia la enseñanza de las matemáticas en maestros en formación inicial. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 26*(2), 201 - 232. https://doi.org/10.12802/relime.23.2623.
Recepción: Agosto 24, 2021 / Aceptación: Noviembre 22, 2023

matemática, se têm uma licenciatura anterior em educação e se têm experiência de ensino da matemática. Como resultado, verificou-se que a maioria do grupo de estudantes apresentava níveis médios ou elevados de ansiedade em relação ao ensino da matemática e que os que não tinham experiência de ensino nem habilitações anteriores apresentavam níveis médios de ansiedade significativamente mais elevados.

RÉSUMÉ

Dans cet article, nous étudions les niveaux d'anxiété à l'égard de l'enseignement des mathématiques dans un groupe d'étudiants espagnols se destinant à l'enseignement primaire en utilisant l'enquête MATAS. Les résultats sont analysés afin de déterminer s'il existe des différences significatives dans les niveaux d'anxiété lorsque l'échantillon est différencié en fonction de trois critères: s'ils ont déjà suivi une matière mathématique, s'ils ont déjà obtenu un diplôme en éducation et s'ils ont une expérience de l'enseignement des mathématiques. Il en résulte que la majorité du groupe d'étudiants présente des niveaux d'anxiété moyens ou élevés à l'égard de l'enseignement des mathématiques et que ceux qui n'ont pas d'expérience de l'enseignement ou de qualifications antérieures présentent des niveaux moyens d'anxiété significativement plus élevés.

MOTS CLÉS:

- *Anxiété*
- *Enseignement des mathématiques*
- *Formation initiale des enseignants*

1. Introducción y justificación del problema

1.1. *Revisión de la literatura*

Son abundantes los estudios que avalan la influencia que tiene el dominio afectivo en el aprendizaje en general y en la educación matemática en particular (Saadati et al., 2023). Para McLeod (1989), el dominio afectivo es la familia de estados de ánimo que trasciende la pura cognición. Entendido de este modo, Pérez-Tyteca et al. (2011) explica que, en el ámbito del aprendizaje de las matemáticas, el dominio afectivo admite tres descriptores básicos. Por un lado, las creencias hacia las matemáticas, referidas al conocimiento de los contenidos matemáticos, constituyen componentes cognitivas de carácter subjetivo del individuo, son estables, pero de baja intensidad. En segundo lugar, la actitud hacia el aprendizaje de las matemáticas, relativas al tipo de respuesta, positiva o negativa, del individuo hacia las situaciones matemáticamente problemáticas que debe resolver y que combinan una dimensión cognitiva y una afectiva; son menos estables que las creencias, pero más intensas. Finalmente, las emociones, que son respuestas de alta intensidad, baja estabilidad, organizadas y significativas, también condicionan la experiencia de aprendizaje de las matemáticas.

El desajuste de alguno de los descriptores básicos del dominio afectivo puede provocar consecuencias negativas en el rendimiento del alumnado en la asignatura de matemáticas en todos los niveles educativos (Sánchez Mendías et al., 2011). Pero también resultan decisivos en el rendimiento académico, las creencias y los factores emocionales y actitudinales del profesorado hacia las matemáticas y hacia el ejercicio de la enseñanza de las matemáticas (Auzmendi, 1992; Fennema y Sherman, 1976; Gamboa Araya y Moreira-Mora, 2017; Jackson y Leffingwell, 1999).

La ansiedad hacia las matemáticas es uno de los más relevantes y estudiados descriptores del dominio afectivo que influyen en el rendimiento académico en la asignatura de matemáticas. Esta puede definirse como un sentimiento de tensión que surge en el contacto con los objetos matemáticos (Richardson y Suinn, 1972) o un miedo irracional hacia las matemáticas (Gresham, 2010) que genera en quien la padece sentimientos de inseguridad e impotencia (Hembree, 1990). La ansiedad hacia las matemáticas se manifiesta a través de tensión, inquietud, preocupación, impaciencia y provoca bloqueos en el desarrollo de las actividades con contenido matemático, dificulta la conversación sobre temas matemáticos y genera obstáculos para el cálculo o la resolución de problemas (Hembree, 1990; Gresham, 2010). De hecho, se ha demostrado que la ansiedad matemática influye negativamente en los resultados académicos del estudiantado (Maloney et al., 2013; Živković et al., 2023).

La medida de la ansiedad matemática y el análisis de sus causas y efectos en el profesorado en ejercicio y en formación han captado la atención de numerosos estudios. En cuanto a los efectos, algunos autores explican que la ansiedad matemática en el profesorado genera ansiedad matemática en el estudiantado (ver Furner y Berman, 2004; Martínez-Sierra y García González, 2014). Esta influencia resulta especialmente intensa en torno a los 11 años al finalizar la Educación Primaria (Mato, 2010); aunque la ansiedad matemática puede empezar a desarrollarse desde edades tempranas (Perry, 2004). Sin embargo, como argumentan McLean et al. (2023), la influencia de los maestros no es específica del área de las matemáticas, sino que se da en diversas áreas de conocimiento, específicamente en las áreas científicas.

Precisamente en el profesorado en ejercicio y en formación se da un fenómeno singular, que consiste en la confluencia de la ansiedad matemática con la ansiedad hacia la enseñanza de las matemáticas, es decir, la ansiedad derivada del proceso de enseñanza de los aspectos conceptuales asociados a la matemática y a la resolución de problemas (Patkin y Greenstein, 2020; respecto de la correlación entre ambas, ver Levine, 1996; Peker y Halat, 2008; Peker, 2006; Peker, 2009; Patkin y Greenstein, 2020; Bosica, 2022).

Por un lado, la ansiedad que le provoca la perspectiva de su futura labor didáctica en matemáticas es el condicionante más influyente de dominio afectivo del profesorado de educación primaria en formación (Marbán et al., 2020). En esta misma línea, la ansiedad hacia la enseñanza de las matemáticas del profesorado de educación primaria en formación afecta negativamente a la valoración de su propia acción didáctica (Peker, 2016) y a su eficacia didáctica (Gresham, 2008). Por otro lado, una mayor ansiedad hacia la enseñanza de las matemáticas en el profesorado conlleva a un descenso en el rendimiento académico del alumnado (Awofala et al., 2024), incrementa su ansiedad matemática (Furner y Berman, 2004) y afecta negativamente en su percepción sobre la ayuda que reciben por parte del profesorado (Luo et al., 2023).

El estudio de la ansiedad hacia la enseñanza de las matemáticas del profesorado en ejercicio y en formación radica, por tanto, en que está correlacionada con su futuro desenvolvimiento en el aula, con su ansiedad matemática, y con la ansiedad matemática que, probablemente, proyectará en su alumnado. Además, la identificación de los factores ansiógenos del profesorado ayudará a proporcionar estrategias para la formación del estudiantado que permitan reducir estos niveles de ansiedad (Stoehr y Olson, 2023).

Existen estudios que identifican factores –particularmente de naturaleza académica–, vinculados con la formación del profesorado, que explican su ansiedad hacia la enseñanza de las matemáticas (Marbán et al., 2016; Peker y Halat, 2009; Boyd et al., 2014). Marbán et al. (2016) analiza la influencia de la superación de asignaturas de didáctica de las matemáticas en el comportamiento de la ansiedad hacia la enseñanza de las matemáticas del estudiantado. Por su parte, Boyd et al. (2014) hacen algo análogo con el desarrollo de prácticas curriculares. Sin embargo, no se encuentran estudios que discutan y pongan en comunicación diversos de estos factores de tipo académico. Además, una gran parte de los estudios sobre ansiedad del profesorado en formación hacia la enseñanza de las matemáticas se sitúan en Turquía, esto se puede deber a que el profesor Peker, pionero en este campo es de nacionalidad turca. Sin embargo, dada la divergencia entre los planes formativos del profesorado en diferentes países, resulta relevante desarrollar estudios en otras regiones geográficas. Concretamente, en el contexto de España (y, en general, hispanohablante) donde este tipo de investigación es escaza, más allá de los estudios de Marbán et al. (2016) y Marbán et al. (2020).

Peker (2006, 2009) desarrolló la *Mathematics Teaching Anxiety Scale* (MATAS) para la medición de la ansiedad hacia la enseñanza de las matemáticas que consta de 23 ítems distribuidos en cuatro subescalas: (i) conocimiento matemático; (ii) confianza en sí mismo; (iii) actitud hacia la enseñanza de las matemáticas; y (iv) habilidades didácticas para la enseñanza de las matemáticas. Gómez del

Amo y Caballero Carrasco (2015) validaron una traducción de la escala MATAS al español. Esta escala ha sido empleada, literalmente tomada o adaptada a regiones geográficas específicas (Hunt y Sari, 2019; Alkan et al., 2019), en numerosos estudios recientes en el profesorado en ejercicio y en formación (Gómez del Amo y Caballero Carrasco, 2015; Peker y Ertekin, 2011). En en caso de Peker y Ertekin (2011), aplicaron la escala MATAS para confirmar la correlación positiva que existe entre la ansiedad matemática y la ansiedad hacia la enseñanza de las matemáticas en una población turca de estudiantes de magisterio de educación primaria o secundaria. En consecuencia, esta escala constituye un instrumento fuertemente contrastado, por tal razón, será utilizado en el presente estudio como instrumento para la obtención de datos.

La literatura especializada ha demostrado que diferentes dimensiones vinculadas con la ansiedad hacia la enseñanza de las matemáticas del profesorado en formación están, a su vez, correlacionadas con el desarrollo en ellos de ansiedad matemática. Así, Guillory Bryant (2009) identifica como factores ansiógenos el estereotipo social negativo de la matemática y la falta de conocimiento matemático. Por su parte, Sánchez Mendías et al. (2011), exploran el fenómeno de la ansiedad hacia las matemáticas en el profesorado de educación primaria en formación vinculándola con la autoconfianza mediante el diseño de una encuesta propia de dominio afectivo. En concreto, los autores demuestran que el 80,00% del grupo de estudiantes encuestados, que son todos ellos de primer curso, presentan niveles medios o altos de ansiedad matemática. Mientras que en Sánchez Mendías et al. (2011) se distinguen la ansiedad hacia las matemáticas como disciplina, hacia la resolución de problemas y hacia la evaluación; sin concluir niveles significativamente bajos de ansiedad en ninguna de las tres dimensiones. Asimismo, Sánchez Mendías et al. (2011) señalan que las experiencias negativas en la enseñanza de las matemáticas ayudan a explicar los niveles de ansiedad matemática detectados, sobre todo en la resolución de problemas.

En Sánchez Mendías et al. (2020) se analizan los niveles de ansiedad matemática y de autoconfianza en un conjunto de estudiantes de magisterio de la Universidad de Granada (España) usando la escala de Fennema y Sherman (1976). En ese trabajo se demuestra que es mayoritaria la proporción de estudiantes que presentan ansiedad matemática y que existe una correlación negativa entre esta ansiedad y los niveles de autoconfianza de los encuestados. Esta misma observación ha sido corroborada por Karakose et al. (2023) y por Bursal y Paznokas (2006), cuyo estudio se extiende al ámbito de las ciencias. Por consiguiente, las dimensiones de falta de conocimiento matemático, autoconfianza, actitud hacia la enseñanza de las matemáticas, y conocimiento didáctico (medidas en el MATAS) son predictores de la ansiedad matemática del estudiantado.

La literatura presenta resultados divergentes en cuanto a los niveles de ansiedad hacia la enseñanza de las matemáticas por parte del profesorado en formación. Específicamente una población de estudiantes de magisterio turcos manifiesta niveles bajos o moderados de ansiedad hacia la enseñanza de las matemáticas (Tunç-Pekkan et al., 2023). Sin embargo, Karakose et al. (2023) reporta niveles altos de ansiedad hacia la enseñanza de las matemáticas en una población de estudiantes de magisterio también turcos. Peker (2009) expone niveles moderados de ansiedad hacia la enseñanza de las matemáticas en una población de estudiantes de magisterio turcos. Además, Peker (2009) explica que existe una fuerte divergencia entre los niveles de ansiedad hacia la enseñanza de las matemáticas del profesorado en formación. También identifica el estilo de aprendizaje de las matemáticas de los participantes como una de las razones explicativas de esta divergencia. En ámbito anglosajón, Brown et al. (2011) reportan niveles bajos o moderados de ansiedad hacia la enseñanza de las matemáticas en un conjunto de 53 estudiantes de magisterio estadounidenses.

Existe una corriente que buscan identificar las variables que influyen en los niveles de ansiedad hacia la enseñanza de las matemáticas en estudiantes de magisterio. En concreto, Peker y Halat (2008) concluyen que no hay una brecha de género en lo que se refiere a la ansiedad hacia la enseñanza de las matemáticas entre los estudiantes de magisterio.

Peker (2009), por su parte, estudia la ansiedad hacia la enseñanza de las matemáticas poniéndola en relación con las preferencias de los encuestados sobre estilos metodológicos en didáctica de las matemáticas. El trabajo concluye que hay una dependencia significativa entre la preferencia de estilo educativo y los niveles de ansiedad hacia la enseñanza de las matemáticas, siendo la preferencia por el estilo convergente la que se vincula con niveles más bajos de ansiedad. Asimismo, Sloan et al. (2002) relacionan la ansiedad hacia la enseñanza de las matemáticas con los hábitos de estudio de los encuestados. Los autores deducen que hay una dependencia significativa de los niveles de ansiedad respecto del estilo de aprendizaje (presentan mayor ansiedad quienes estudian las matemáticas con una visión global, es decir, que no estudian las distintas áreas de las matemáticas de manera independiente); conlusiones análogas reportan Ertekin et al. (2009). Finalmente, Gómez del Amo y Caballero Carrasco (2015) midieron la ansiedad hacia la futura enseñanza de las matemáticas en una muestra de alumnado en Educación Primaria de diferentes especialidades y sexos, concluyendo que ninguna de estas dos variables condiciona de manera significativa la presencia de niveles medios o altos de ansiedad hacia la enseñanza de las matemáticas.

Buscando factores ansiógenos de naturaleza académica, Peker y Halat (2009) analizan la dependencia de los niveles de ansiedad hacia la enseñanza de las matemáticas respecto de la metodología didáctica empleada por el grupo de estudiantes de magisterio encuestados durante sus prácticas curriculares. En concreto, se diferenciaron dos grupos, el primero de los cuales empleó WebQuests y el segundo hojas de cálculo. Los autores concluyeron que el primer grupo presentaba niveles significativamente más bajos de ansiedad hacia la enseñanza de las matemáticas. En efecto, se ha demostrado que la integración de recursos digitales en educación matemática ayuda a reducir la ansiedad (Hanifah et al., 2023).

A partir de un estudio realizado con una muestra de estudiantes de magisterio de diferentes universidades públicas españolas, Marbán et al. (2016) concluyeron que no es posible establecer una correlación significativa entre la ansiedad hacia la enseñanza de las matemáticas de los participantes y la formación previa recibida en didáctica de las matemáticas. Más aún, Marbán et al. (2016) comprobaron que la formación universitaria no reduce la ansiedad que el grupo de estudiantes manifiesta. A partir de esto, los autores abren interesantes líneas de investigación, como el diseño de intervenciones, específicamente para reducir los niveles de ansiedad hacia la enseñanza de las matemáticas que expresan los estudiantes de magisterio. A diferencia de los resultados anteriores, Meryem (2021) constata, en una población de estudiantes turcos de magisterio, que una mayor superación de asignaturas conlleva a un descenso de la ansiedad hacia la enseñanza de las matemáticas. En concreto, prueban que, cuanto más avanzado es el curso en el que se encuentra el estudiante de magisterio, menor es su ansiedad. Sin embargo, Meryem (2021) no concreta si el descenso en la ansiedad se deriva de la superación de asignaturas teóricas o de la paulatina acumulación de experiencia práctica de aula.

En la línea anterior, Boyd et al. (2014) demuestran que la ansiedad hacia la enseñanza de las matemáticas de un conjunto de 223 estudiantes australianos de magisterio desciende cuando hacen prácticas curriculares. El resultado anterior es confirmado por Patkin y Greenstein (2020) en una población de 59 mujeres israelíes estudiantes de magisterio. Esto sugiere que sería la parte práctica, y no tanto la formación teórica, lo que influiría en la ansiedad hacia la enseñanza de las matemáticas. En el mismo sentido, Lavidas et al. (2023) probaron que la ansiedad matemática y la experiencia docente son los principales predictores de la ansiedad hacia la enseñanza de las matemáticas en una población de 164 estudiantes griegos de magisterio. Sin embargo, Tunç-Pekkan et al. (2023) demuestran que, cuando la experiencia docente se lleva a cabo en entornos online, no hay una reducción significativa de los niveles de ansiedad hacia la enseñanza de las matemáticas. Por tanto, la reducción de la ansiedad observada por Boyd et al. (2014) y Lavidas et al. (2023) estaría ligada a la experiencia presencial.

1.2. *Marco teórico*

El concepto de ansiedad se refiere a la reacción emocional generada ante la presencia o inminencia del objeto o situación entendidos como amenazantes por el sujeto (Vargas Ríos, 2010). Por tanto, para que aparezca la ansiedad es necesario que existan factores que la desencadenen. Estos factores pueden ser situaciones puntuales concretas (por ejemplo, momentos de una carga laboral excesiva, en el caso de los adultos, o de gran cantidad de tareas escolares, en el caso de la niñez). Pero también la ansiedad puede ser desencadenada por una situación extendida en el tiempo, como una incertidumbre laboral prolongada o la sensación de incapacidad de superar un curso o materia (American Psychiatric Association, APA, 2022).

La ansiedad es una reacción normal ante una situación potencialmente estresante. De hecho, cuando el nivel de ansiedad es bajo, esta puede ayudar a gestionar la situación que la está provocando. Sin embargo, unos niveles altos y largamente prolongados de ansiedad pueden derivar en el desarrollo de un trastorno. Se entiende que hay un desorden o trastorno de ansiedad cuando la respuesta emocional y afectiva es desproporcionada a la situación o esta respuesta conduce al bloqueo o inacción (Vargas Ríos, 2010).

Según la extensión de la respuesta afectiva, los trastornos de ansiedad pueden ser generalizados o específicos (APA, 2022). Un trastorno de ansiedad generalizado consiste en una preocupación excesiva y persistente que afecta a gran parte o la totalidad de las actividades cotidianas. Sin embargo, cuando la ansiedad es específica, esta se presenta en situaciones concretas y bien definidas (por ejemplo, hablar en público, realizar un examen o tomar un vuelo de avión). Cuando la respuesta de miedo es excesiva y persistente hasta el punto de que el sujeto acaba sintiéndose incapaz de afrontar la situación en cuestión, el trastorno de ansiedad deriva en una fobia.

Ligadas a las situaciones propias del proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, existen dos formas de ansiedad: la ansiedad hacia las matemáticas y la ansiedad hacia la enseñanza de las matemáticas. Ambos tipos de ansiedad se distinguen, tanto por la población afectada, como por sus dimensiones y sus efectos.

La ansiedad hacia las matemáticas consiste en la sensación de nerviosismo o estrés que la persona siente ante una situación que requiere del empleo de sus habilidades de razonamiento matemático (Hembree, 1990). Esta puede surgir en situaciones muy diversas, como la necesidad de hacer algún cálculo cotidiano, por ejemplo, para realizar un pago. De hecho, el Informe Cockcroft establece como una de sus tesis principales que pueden aparecer sentimientos de ansiedad cuando el sujeto se enfrenta a cualquier tarea matemática, incluso las más sencillas y cotidianas (Cockcroft, 1985). La ansiedad hacia las matemáticas puede afectar a personas de cualquier edad, pero su incidencia es muy notable entre el estudiantado que deben aprender matemáticas, debido a que la cantidad y complejidad de las situaciones matemáticas es mayor entre ellos.

Entre las razones que subyacen en el fenómeno de la ansiedad hacia las matemáticas se encuentran habitualmente los prejuicios acerca de la complejidad de las matemáticas y sobre las propias capacidades para aprenderlas o emplearlas, la existencia de experiencias negativas en torno al aprendizaje de las matemáticas en la niñez, el uso de metodologías de enseñanza de las matemáticas que generan aprendizajes poco significativos o la existencia de dificultades específicas de aprendizaje de las matemáticas como la discalculia (Hembree, 1990). Asimismo, el principal efecto de la ansiedad hacia las matemáticas es la huida o alejamiento de las situaciones que requieren el uso de habilidades matemáticas y, en el caso del estudiantado, el consiguiente descenso en el rendimiento académico que, a su vez, alimenta la ansiedad hacia las matemáticas (Maloney et al., 2013).

El fenómeno de ansiedad hacia la enseñanza de las matemáticas está muy relacionado con la ansiedad hacia las matemáticas, pero en esencia difieren. La ansiedad hacia la enseñanza de las matemáticas es una forma de ansiedad hacia la enseñanza, entendida como la ansiedad que experimenta la población de maestros ante la tarea de diseñar actividades didácticas por miedo a no ser eficaces en su tarea educativa (Gardner y Leak, 1994). Cuando esta ansiedad hacia la enseñanza se centra específicamente en la enseñanza de las matemáticas resulta un tipo de ansiedad experimentada por el profesorado hacia la enseñanza de conceptos matemáticos, definiciones, teoremas y estrategias de resolución de problemas (Peker, 2006). Por tanto, a diferencia de la ansiedad hacia las matemáticas, la ansiedad hacia la enseñanza de las matemáticas es un fenómeno específico del profesorado de matemáticas y estudiantes de magisterio.

Además, la ansiedad hacia la enseñanza de las matemáticas aparece ligada al proceso de enseñanza del objeto matemático y a la eficacia en la acción educativa, y no tanto debido al objeto matemático en sí, como en el caso de la ansiedad matemática. Pero, como en la ansiedad hacia las matemáticas, la falta de confianza en las propias habilidades de pensamiento matemático constituye uno de los principales factores de aparición de la ansiedad hacia la enseñanza de las matemáticas de los maestros (Levine, 1993). Sin embargo, aquí aparecen otros factores ansiógenos que no suelen ser considerados en la ansiedad hacia las matemáticas, como la confianza en uno mismo, más allá de las habilidades matemáticas, o el conocimiento didáctico y la actitud hacia la enseñanza de las matemáticas (Peker, 2006).

1.3. *Objetivos de investigación*

En la presente investigación se pretende realizar un análisis cuantitativo de los niveles de ansiedad hacia la enseñanza de las matemáticas en una muestra de 51 estudiantes de magisterio de Educación Primaria de una universidad privada española. El objetivo principal es identificar factores de tipo académico (es decir, que tienen que ver con la formación en educación matemática de los participantes) que afectan a la ansiedad hacia la enseñanza de las matemáticas de los estudiantes de magisterio. En concreto, los niveles de ansiedad hacia la enseñanza de las matemáticas son estudiados en relación con tres variables de naturaleza académica:

- Haber superado previamente, o no, alguna asignatura de matemáticas y su didáctica.
- Estar en posesión de alguna titulación universitaria anterior en el campo de la educación.
- Tener experiencia docente previa en el área de matemáticas en enseñanza reglada (por ejemplo, en prácticas curriculares).

2. Método

2.1. *Diseño, variables y análisis estadístico*

Se trata de un estudio cuantitativo descriptivo de los datos obtenidos acerca de los niveles de ansiedad hacia la enseñanza de las matemáticas en estudiantes españoles de magisterio de Educación Primaria. En el estudio se consideran tres variables independientes, todas ellas de naturaleza nominal dicotómica cuyos posibles valores son sí o no:

1. V1: Haber superado previamente alguna asignatura de matemáticas y su didáctica.
2. V2: Poseer estudios superiores previos en el ámbito de la educación.
3. V3: Tener experiencia previa en enseñanza reglada de las matemáticas (prácticas curriculares o experiencia profesional).

Asimismo, las variables dependientes consideradas son las siguientes:

1. Nivel auto-percibido de conocimiento matemático.
2. Confianza auto-percibida en sí mismo.

3. Actitud hacia la enseñanza de las matemáticas.
4. Nivel auto-percibido de habilidades en matemática educativa.

Todas las variables dependientes son cuantitativas ordinales y están medidas en una escala de Likert de 1 a 5, donde 1 indica el nivel más bajo y 5 indica el nivel más alto. Adicionalmente, se han clasificado los valores de cada variable en valores que manifiestan alta ansiedad, si el valor es menor que la media de ese ítem menos su desviación típica; ansiedad media, si está entre la media menos la desviación típica y la media más la desviación típica; y ansiedad alta, si es mayor que la media más la desviación típica.

Para el análisis estadístico, tras haber verificado que no pueden asumirse las condiciones de normalidad exigidas por la prueba t de Student en la distribución de datos obtenida, el estudio de comparación de valoraciones medias de las diferentes variables dependientes se ha llevado a cabo mediante la prueba no paramétrica U de Mann-Whitney-Wilcoxon con nivel de significación igual a 0,05. La finalidad de este análisis es verificar o descartar las hipótesis nulas sobre igualdad de valoraciones medias de cada variable dependiente, diferenciando la muestra de estudiantes según los valores de las tres variables independientes. Previamente se ha empleado el test de comparación de proporciones de Pearson para variables categóricas, nuevamente con nivel de significación 0,05, para corroborar si las variables independientes V1, V2 y V3 son independientes entre ellas (en el sentido de que la distribución de los participantes entre los diferentes valores de cada una de ellas es independiente, o no, de la distribución respecto de los diferentes valores de las otras) o, por el contrario, alguna de ellas se explica a partir de las demás. Todos los análisis estadísticos se llevaron a cabo empleando el software R-Commander™.

2.2. *Participantes y recogida de datos*

La muestra se compone de 51 estudiantes de magisterio de Educación Primaria seleccionados mediante un proceso de muestreo no probabilístico de tipo consecutivo de entre la totalidad del estudiantado de los cuatro cursos del Grado Universitario en Maestro Educación Primaria de una misma universidad privada española. El grupo de estudiantes que ha participado en el estudio han rellenado una encuesta anónima y voluntaria que se ha pasado a la totalidad del alumnado matriculado en el Grado. Esta encuesta se ha hecho llegar al estudiantado a través de su correo electrónico institucional universitario, del que todos ellos disponen, y se ha realizado a través de GoogleForms™. Se consideraron válidas todas las respuestas obtenidas que fueron completas. En total, se obtuvieron 51 respuestas, todas las cuales fueron válidas.

Los 51 participantes constituyen el 32,90% de la totalidad del alumnado del Grado en Maestro de Educación Primaria. Por tanto, la muestra es representativa de la población total con un nivel de significatividad del 95,00% y un margen de error del 11,00%. El 81,40% de los participantes no tienen especialidad definida, mientras que las especialidades que corresponden al 18,60% restante no es tocante a la educación matemática en ningún caso. El 80,39% del grupo de estudiantes encuestados ha superado previamente alguna asignatura de matemáticas y su didáctica dentro de la titulación que están cursando, el 50,98% tiene experiencia en educación matemática reglada en la etapa primaria (de ellos, el 57,07% manifiestan que su experiencia está derivada de sus prácticas curriculares; el resto tienen experiencia profesional, por ser diplomados en la antigua titulación de Magisterio, regulada en el RD 1440/1991, de 30 de agosto, por el que se establece el Título Universitario Oficial de Maestro) y el 33,33% manifiesta estar en posesión de algún título universitario anterior en el campo de la educación (de entre ellos, el 64,71% son diplomados en Magisterio y el 35,29% son graduados en la vigente titulación de Maestro de Educación Infantil).

Dentro del plan de estudios del Grado en Maestro de Educación Primaria hay tres asignaturas de contenido didáctico-matemático: una en primer curso, sobre fundamentos numéricos y aritméticos, otra en segundo, sobre pensamiento racional y combinatorio, tratamiento del azar y estadística matemática, y la última en cuarto, sobre geometría. Las tres asignaturas tienen tasas de éxito cercanas al 100% dentro del curso académico.

2.3. *Instrumento*

Se ha pasado a los participantes el cuestionario MATAS (Peker, 2006; Peker, 2009) de manera anónima y traducido al español. La encuesta estuvo precedida de tres preguntas para valorar las variables V1, V2 y V3 y de otras preguntas sobre el perfil del encuestado (curso, especialidad, origen de su experiencia y titulación anterior, en su caso). El cuestionario MATAS contiene 23 ítems de tipo Likert con cinco respuestas posibles, valoradas de 1 a 5 según la siguiente correspondencia:

- Totalmente en desacuerdo: 1
- En desacuerdo: 2
- Indeciso: 3
- De acuerdo: 4
- Totalmente de acuerdo: 5

Estas 23 preguntas o ítems se clasifican en las cuatro subescalas siguientes:

- A: Conocimiento de contenido matemático (ítems 1 a 10, que hemos llamado A1 a A10; se trata de proposiciones negativas).

- B: Confianza en uno mismo (ítems 11 a 16, llamados B11 a B16; son proposiciones positivas).
- C: Actitud hacia la enseñanza de las matemáticas (ítems 17 a 20, llamados C17 a C20; son proposiciones positivas).
- D: Conocimiento sobre didáctica de las matemáticas (ítems 21 a 23, llamados D21 a D23; también son proposiciones positivas).

Se ha medido la fiabilidad del instrumento mediante el cómputo de la alfa de Cronbach para cada una de las cuatro subescalas, obteniéndose los resultados indicados en la Tabla I.

TABLA I
Alfa de Cronbach de cada subescala de la MATAS

Subescala	*Alfa de Cronbach*
Conocimiento matemático	0,9495
Confianza en uno mismo	0,9202
Actitud hacia la enseñanza	0,9098
Conocimiento didáctico	0,6555

La consistencia interna del instrumento está garantizada para las tres primeras subescalas, cuyos coeficientes alfa de Cronbach se sitúan por encima de 0,70, valor que habitualmente se toma como límite inferior para considerar como fiable una escala de este tipo (Nunnally, 1967). En este caso, los tres coeficientes se sitúan por encima de 0,90 y por debajo de 0,95, lo que manifiesta un buen nivel de consistencia interna. El coeficiente de la cuarta subescala es 0,6555, lo que manifiesta un nivel de fiabilidad menor en esta subescala, pero, en cualquier caso, muy cercano al 0,70 tomado como límite inferior de fiabilidad y dentro de los límites aceptables para análisis exploratorios como es el que ocupa a este trabajo (Nunnally, 1967).

3. Resultados

3.1. *Resultados globales de la encuesta*

En la Figura 1 se representan las frecuencias relativas de las medias de las respuestas dadas por los participantes, diferenciando subescalas. Se observa que las respuestas más frecuentes en las cuatro subescalas se encuentran entre 2 y 3. Esto indica que el grupo de estudiantes encuestados manifiesta, en general, niveles altos o medios de ansiedad hacia la enseñanza de las matemáticas.

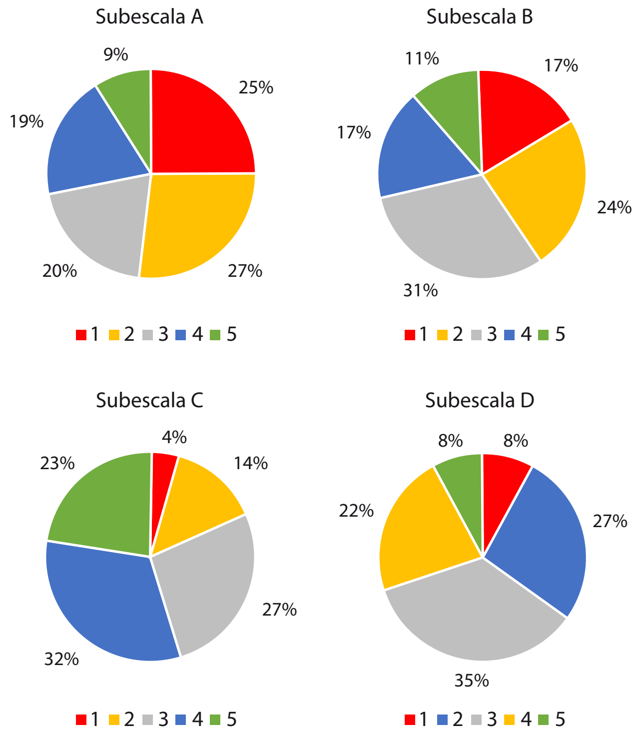


Figura 1. Frecuencias relativas de las respuestas por subescalas

En la Tabla II se indican los datos medios y las desviaciones para cada subescala. Las respuestas de los ítems A1 a A10 han sido reescaladas, dentro del intervalo de 1 a 5, con el fin de que resultados cerca de 1 correspondan a ansiedad alta y resultados cerca de 5 correspondan a ansiedad baja (puesto que las preguntas de esta subescala están formuladas en sentido negativo).

TABLA II

Respuestas por subescalas y datos relativos de niveles bajos, medios y altos de ansiedad

Subescala	*Media*	*D.T.*	*Frecuencia alta ansiedad (%)*	*Frecuencia ansiedad media (%)*	*Frecuencia baja ansiedad (%)*
A	3,39	1,30	15,69	74,51	9,80
B	2,81	1,22	7,84	80,39	11,76
C	3,58	1,12	9,80	74,51	15,69
D	2,96	1,07	3,92	88,24	7,84

La proporción de estudiantes que manifiestan altos niveles de ansiedad hacia la enseñanza de las matemáticas es mayor que la proporción de los que la manifiestan baja en lo que se atañe al conocimiento matemático (subescala A). Por el contrario, acerca de la confianza que tienen en sí mismos (subescala B), de su actitud hacia la enseñanza de las matemáticas (subescala C) y su conocimiento didáctico (subescala D), hay más estudiantes que expresan baja ansiedad que alta. Esto sugiere que el alumnado se siente más preocupado por sus conocimientos matemáticos que por el resto de los factores estudiados.

La media de la totalidad de las respuestas dadas al cuestionario es de 3,12, con una desviación típica de 1,26. Con la misma interpretación que se está manejando, un 13,73% del alumnado estaría expresando alta ansiedad hacia la enseñanza de las matemáticas, un 62,74% se sitúa en niveles de ansiedad media y un 23,53% manifestaría baja ansiedad.

3.2. *Análisis de proporciones de respuestas en las variables V1, V2 y V3*

Se van a analizar ahora las proporciones de respuestas dadas por los participantes diferenciando según las variables V1, V2 y V3, y se van a obtener los estadísticos de la prueba de Pearson comparación de proporciones. En primer lugar, respecto de las variables V1 y V2, estas proporciones se relacionan según los porcentajes y estadísticos que se indican en la Tabla III. La totalidad de estudiantes que están en posesión de estudios universitarios previos manifiestan haber superado ya alguna asignatura de matemáticas y su didáctica. De entre el grupo de estudiantes cuya primera titulación es la que están cursando en el momento de responder, la proporción de aquellos que han estudiado alguna asignatura de contenido didáctico-matemático desciende al 29,40%. Finalmente, el p-valor de la prueba de comparación de proporciones manifiesta que la diferencia entre proporciones de respuestas afirmativas y negativas es estadísticamente significativa respecto de las variables V1 y V2 (Tabla III). Por consiguiente, puede asumirse que la distribución porcentual de los participantes en los diferentes valores de la variable V1 es independiente de la distribución según los valores de V2.

TABLA III
Proporciones de respuestas afirmativas y negativas entre las variables V1 y V2

		V1			*Chi cuadrado*	*df*	*p-valor*
		No	*Sí*	*Total*			
V2	*No*	29,40%	70,60%	100%	6,22	1	0,012630
	Sí	0,00%	100%	100%			

A continuación, se hace un análisis semejante para explicar la variable V1 a partir de la variable V3. Los resultados están recogidos en la Tabla IV. La mayoría del estudiantado que ha respondido afirmativamente a la variable V3 también lo hacen a la variable V1, es decir, casi la totalidad del estudiantado que tiene experiencia docente en enseñanza reglada de matemáticas ha superado alguna asignatura didáctico-matemática. En cuanto al estudiantado sin experiencia docente, hay una distribución más homogénea entre quienes aún no han cursado ninguna asignatura de matemáticas y su didáctica y quienes sí lo han hecho. Además, dado que el p-valor de la prueba de comparación de proporciones es menor que 0,05, podemos asumir que hay una diferencia significativa entre las proporciones de respuestas afirmativas y negativas para las variables consideradas y, por tanto, una diferencia estadísticamente significativa entre las distribuciones de los datos de estas dos variables (Tabla IV). Las distribuciones de las variables V1 y V3 son, consecuentemente, independientes.

TABLA IV
Proporciones de respuestas afirmativas y negativas entre las variables V1 y V3

		V1			*Chi cuadrado*	*df*	*p-valor*
		No	*Sí*	*Total*			
V2	*No*	36,00%	64,00%	100%	8,36	1	0,003837
	Sí	3,80%	96,20%	100%			

En la Tabla V se indican los datos que explican la variable V2 a partir de la variable V3 de manera análoga a los casos anteriores. En este caso, la muestra del alumnado con experiencia docente se distribuye de manera aproximadamente homogénea entre quienes están en posesión de una titulación anterior y quienes no lo están, siendo ligeramente mayor la de quienes no tienen titulación universitaria previa. Por su parte, de entre el alumnado sin experiencia docente, la proporción de alumnado sin titulación superior crece hasta el 76,00%. Sin embargo, no podemos asumir que haya, respecto de las dos variables consideradas, diferencias significativas entre las proporciones de respuestas afirmativas y negativas, porque el p-valor de la prueba de comparación de proporciones es mayor que 0,05 (Tabla V). Esto permite asumir que no hay diferencias significativas entre la distribución de los participantes según los valores de V2 y la distribución según los valores de V3. Esto sugiere que, en la muestra específica de participantes en este estudio, la experiencia previa en didáctica de las matemáticas la han obtenido, principalmente, quienes disponen de titulaciones previas en el campo de la educación.

TABLA V
Proporciones de respuestas afirmativas y negativas entre las variables V2 y V3

		V1			*Chi cuadrado*	*df*	*p-valor*
		No	*Sí*	*Total*			
V2	*No*	76,00%	24,00%	100%	1,92	1	0,165600
	Sí	57,70%	42,30%	100%			

3.3. *Resultados diferenciando según las variables V1, V2 y V3*

La Tabla VI recoge los valores medios y desviaciones típicas de las cuatro subescalas diferenciando según el valor de la variable V1. También se indican los estadísticos de la prueba de Mann-Whitney de comparación de las medias, para cada subescala, entre las poblaciones con valor afirmativo y con valor negativo de la variable V1.

TABLA VI
Resultados de la encuesta diferenciando según los valores de la variable V1

Subescala	*Sí*		*No*		*U*	*p-valor*
	Media	*D.T.*	*Media*	*D.T.*		
A	2,51	1,27	3,03	1,32	25104,0	0,000349
B	2,90	1,23	2,47	1,14	5912,5	0,014040
C	3,54	1,12	3,63	1,13	3425,0	0,655000
D	2,99	1,11	2,83	0,87	1701,5	0,494600

En la subescala C, la media es ligeramente mayor en la población que no ha superado ninguna asignatura de matemáticas y su didáctica. Esto indica que el alumnado que no ha estudiado aún asignaturas de matemáticas y su didáctica presenta, de media, una ansiedad ligeramente superior que quienes ya han superado alguna asignatura. Esta diferencia, sin embargo, no es estadísticamente significativa, puesto que el p-valor de Mann-Whitney es mayor que el nivel de significación.

En las subescalas A, B y D ocurre la tendencia contraria desde el punto de vista de los valores medios. Estos datos son mayores entre el alumnado que ha superado ya alguna asignatura de didáctica de las matemáticas. La diferencia puede entenderse como significativa respecto de los conocimientos de matemáticas (subescala A) y de la confianza en uno mismo (subescala B), porque esta subescala arroja un p-valor de Mann-Whitney menor que el nivel de significación. El caso de la subescala D es el opuesto.

En el gráfico de la Figura 2 se representan las medias de las respuestas a las diferentes subescalas de la encuesta cuando se diferencia por los valores de V1 y se ponen en comparación con las medias globales (Tablas II y VI). Se observa que la subescala C es la única en la que quienes no han estudiado asignaturas previas superan en su autoconcepción a quienes sí han superado alguna asignatura (por tanto, manifiestan menor ansiedad), aunque se percibe que las diferencias son mínimas, en comparación con el resto. Las subescalas A y B (conocimiento matemático y confianza en uno mismo) son las que mayores diferencias arrojan respecto de las medias globales, luego es respecto de las dimensiones medidas por estas subescalas que hay una mayor polarización entre quienes han cursado una asignatura anterior y quienes no lo han hecho. En estas subescalas y también en la subescala D (conocimiento sobre didáctica de las matemáticas), la distancia entre las respuestas medias de quienes no han cursado ninguna asignatura anterior y las medias globales es claramente mayor que la de quienes han superado alguna asignatura y la media global. Pero la distancia absoluta entre las medias es claramente mayor en las subescalas A y B. Es posible deducir, en consecuencia, que el conocimiento matemático y la confianza son los aspectos en los que más influye, positivamente, el haber cursado alguna asignatura previa.

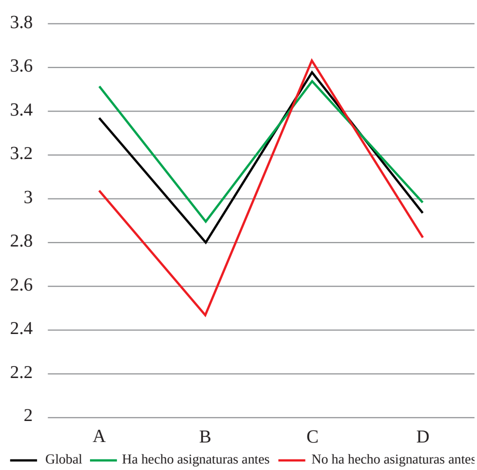


Figura 2. Comparación de medias globales y medias por los valores de la variable V1 para las subescalas A, B, C y D

A continuación, se clasifican las respuestas según niveles de ansiedad manifestados en ansiedad baja, ansiedad media y ansiedad, diferenciando los datos según el valor de la variable V1. Se obtienen, de este modo, los datos de la Tabla VII.

TABLA VII
Respuestas por subescalas y niveles de ansiedad diferenciando por los valores de la variable V1

Subescala	*V1*	*Alta ansiedad (%)*	*Ansiedad media (%)*	*Baja ansiedad (%)*
A	Sí	12,20	68,29	19,51
	No	10,00	70,00	20,00
B	Sí	17,07	65,85	17,07
	No	20,00	60,00	20,00
C	Sí	9,76	73,17	17,07
	No	20,00	70,00	10,00
D	Sí	19,51	68,29	12,20
	No	10,00	60,00	30,00

Es claro que, pese a las diferencias de los resultados medios arrojados por las distintas subescalas cuando se distingue por la variable V1, es posible afirmar que el grueso de la muestra de estudiantes manifiesta niveles medios de ansiedad para todas las subescalas y con independencia de si han cursado o no asignaturas previas de contenido didáctico-matemático (el nivel de ansiedad media se mueve en una horquilla entre el 60,00% y el 73,17%). La proporción de estudiantes que manifiestan niveles altos de ansiedad respecto de la dimensión conocimiento matemático es ligeramente superior entre el estudiantado que no ha cursado asignaturas previas. Lo mismo ocurre respecto del factor conocimiento didáctico. Por el contrario, respecto de la confianza en uno mismo y la actitud hacia la enseñanza de las matemáticas, la proporción de estudiantes que reconocen altos niveles de ansiedad es menor entre aquellos que han cursado alguna asignatura anterior.

Se consideran ahora los resultados de la encuesta y los estadísticos de Mann-Whitney diferenciando la muestra según los valores de la variable V2. Los datos a este respecto están recogidos en la Tabla VIII.

TABLA VIII
Resultados de la encuesta diferenciando según los valores de la variable V2

Subescala	*Sí*		*No*		*U*	*p-valor*
	Media	*D.T.*	*Media*	*D.T.*		
A	3,75	1,13	3,21	1,33	22239,0	0,000013
B	3,19	1,26	2,63	1,16	7815,5	0,000263
C	3,71	1,07	3,48	1,14	4062,5	0,144000
D	3,29	1,08	2,79	1,03	1890,0	0,004262

Los datos medios de las cuatro subescalas son superiores en la muestra de estudiantes con titulación superior previa en el ámbito de educación. Esto indica que este grupo de estudiantes manifiestan menores niveles de ansiedad hacia la enseñanza de las matemáticas respecto de las cuatro dimensiones de la encuesta que el estudiantado sin estudios universitarios previos en educación. Además, respecto de las subescalas A, B y D, se puede asumir que las diferencias entre las medias de las dos muestras de estudiantes son estadísticamente significativas, como indican los p-valores de la prueba de Mann-Whitney. Por tanto, el estudiantado con titulación superior anterior manifiesta resultados medios de ansiedad hacia la enseñanza de las matemáticas significativamente inferiores en todas sus dimensiones, a excepción de la actitud hacía la enseñanza de las matemáticas (subescala C). En esta última subescala, las respuestas medias también son ligeramente superiores en la muestra de estudiantes con titulación superior previa, aunque esta diferencia no puede asumirse como estadísticamente significativa puesto que el p-valor de Mann-Whitney es mayor que el nivel de significación.

Las respuestas medias de las diferentes subescalas cuando se diferencia por la variable V2 (Tabla VIII) en comparación con las medias globales (Tabla II) se representan en la Figura 3. En ese gráfico se percibe más claramente que quienes disponen de alguna titulación previa tienen autoconceptos mayores que la media (por tanto, niveles de ansiedad menores) en todas las subescalas. Las diferencias entre las medias son más abultadas para las subescalas A, B y D y más exiguas para la subescala C. Se puede deducir que tener alguna titulación previa influye en menor medida en la actitud hacia la enseñanza de las matemáticas (subescala C) que, en el resto de las subescalas, aunque positivamente, en cualquier caso.

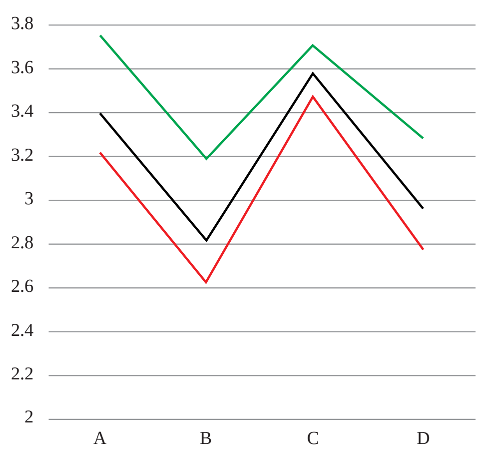


Figura 3. Comparación de medias globales y medias por los valores de la variable V2 para las subescalas A, B, C y D

Las respuestas cuando se diferencia la muestra según el valor de la variable V2 se indican en la Tabla IX.

TABLA IX
Respuestas por subescalas y niveles de ansiedad diferenciando por la variable V2

Subescala	*V2*	*Alta ansiedad (%)*	*Ansiedad media (%)*	*Baja ansiedad (%)*
A	Sí	5,88	76,47	17,65
	No	17,65	70,59	11,76
B	Sí	11,76	70,59	17,65
	No	11,76	76,47	11,76
C	Sí	5,88	70,59	23,53
	No	11,76	70,59	17,65
D	Sí	11,76	76,47	11,76
	No	23,53	61,76	14,71

Nuevamente se observa que, con independencia de la subescala considerada y el valor de la variable V2, la mayoría del alumnado manifiesta niveles medios de ansiedad (en una proporción por encima del 70,00%, a excepción del estudiantado sin titulación previa en la subescala D). Las proporciones de estudiantes que expresan niveles altos de ansiedad son superiores en todas las subescalas en el conjunto de estudiantes sin titulación superior anterior en el ámbito de la educación, salvo en el caso de la subescala C, en la que la proporción se mantiene, aunque, en esta subescala, la proporción de estudiantes que expresan baja ansiedad es claramente superior entre aquellos que tienen una titulación anterior.

Finalmente, la Tabla X recogen las respuestas a la encuesta y los estadísticos de Mann-Whitney diferenciando al estudiantado por la variable V3.

TABLA X
Resultados de la encuesta diferenciando según los valores de la variable V3

Subescala	*Sí*		*No*		*U*	*p-valor*
	Media	*D.T.*	*Media*	*D.T.*		
A	3,72	1,19	3,05	1,32	23276,0	<0,000001
B	3,00	1,19	2,46	1,17	8824,5	0,000130
C	3,76	0,99	3,34	1,17	4249,5	0,019640
D	3,12	1,20	2,80	0,90	2487,5	0,097380

Se observa que los datos medios son más elevados en la muestra de estudiantes con experiencia docente en el área de matemáticas en las cuatro subescalas de la encuesta. En el caso de las subescalas A, B y C, los datos medios son, además, significativamente superiores en esta muestra de estudiantes, porque los p-valores de Mann-Whitney son menores que el valor de significación. Esto implica que el estudiantado de magisterio que ha desarrollado algún tipo de actividad docente curricular en el área de matemáticas manifiesta una ansiedad significativamente menor hacia la enseñanza de las matemáticas, al menos, en las dimensiones correspondientes a las subescalas A, B y C.

En la Figura 4, que representa las medias de las cuatro subescalas diferenciando por si se tiene o no experiencia docente en comparación con las medias globales (Tablas II y X), se observa que el comportamiento de estas medias es semejante al correspondiente de la variable V2. Esto es esperable puesto que, como se ha demostrado, las distribuciones de los participantes según las variables V2 y V3 son semejantes. Sin embargo, se observan algunas diferencias. En primer lugar, las medias para la subescala B son menores cuando se diferencia por la variable V3 que cuando se diferencia por la variable V2, sobre todo entre quienes tienen experiencia docente, y mayores cuando se diferencia para la subescala C. Parece que la experiencia docente influye, por tanto, de un modo más intenso en estas subescalas (confianza en uno mismo y actitud hacia la enseñanza). En segundo lugar, las medias para la subescala D (conocimiento didáctico) se homogenizan más en torno a la media global cuando se diferencia por la variable V3 que cuando se hacía por la variable V2. Esto sugiere que la experiencia docente no influye tanto como el hecho de estar en posesión de una titulación previa en lo que respecta a conocimiento didáctico. Esta observación confirma la conclusión extraída a partir de los p-valores de las pruebas de Mann-Whitney.

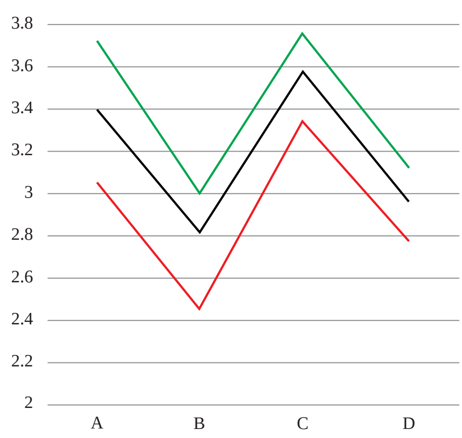


Figura 4. Comparación de medias globales y medias por los valores de la variable V3 para las subescalas A, B, C y D

En la Tabla XI se indican las proporciones de estudiantes que manifiestan alta, media y baja ansiedad para cada una de las subescalas de la encuesta y diferenciando por la variable V3.

TABLA XI
Respuestas por subescalas y niveles de ansiedad diferenciando por la variable V3

Subescala	*V3*	*Alta ansiedad (%)*	*Ansiedad media (%)*	*Baja ansiedad (%)*
A	Sí	7,69	69,23	23,08
	No	4,00	96,00	0,00
B	Sí	19,23	65,38	15,38
	No	16,00	72,00	12,00
C	Sí	15,38	65,38	19,23
	No	12,00	72,00	16,00
D	Sí	19,23	65,38	15,38
	No	16,00	72,00	12,00

La proporción de estudiantes que manifiestan niveles medios de ansiedad se sitúa por encima del 65,00% en todas las subescalas y para todos los valores de la variable V3. Todas las subescalas indican que la proporción de estudiantes con alta ansiedad es ligeramente superior entre el estudiantado con experiencia docente previa. Pero la proporción de estudiantes que se sitúan en niveles bajos de ansiedad es también superior entre este alumnado, siendo esta superioridad muy notable en el caso de la subescala A.

4. Discusión

Este trabajo se centra en el análisis de los niveles de ansiedad hacia la enseñanza de las matemáticas en una muestra de estudiantes de magisterio españoles de todos los cursos de Grado en Educación Primaria. Para ello, se ha empleado como instrumento la escala MATAS (Peker, 2006, 2009). Del análisis descriptivo de los datos obtenidos se puede concluir que el estudiantado de magisterio de Educación Primaria presenta, en su mayoría, niveles moderados o altos de ansiedad hacia la enseñanza de las matemáticas. Estos resultados son coherentes con numerosos estudios previos sobre la ansiedad hacia las matemáticas del estudiantado de magisterio. Por ejemplo, en Sánchez Mendías et al. (2011) se establece que la proporción del estudiantado con ansiedad hacia las matemáticas está en torno al 80,00% (en este estudio, el grupo de estudiantes encuestados son únicamente de primer curso).

Asimismo, los resultados anteriores están concordancia con otros estudios contextualizados en Turquía, como Karakose et al. (2023), o en Estados Unidos, como Brown et al. (2011), pero contrastan con los resultados de otros trabajos, como el de Tunç-Pekkan et al. (2023), también de Turquía. Dentro de las diferentes dimensiones de la ansiedad hacia la enseñanza de las matemáticas, la autoconfianza es baja, lo que concuerda con los resultados de Sánchez Mendías et al. (2020), contextualizado también en España. Probablemente, la razón de esta baja autoconfianza esté en que el nivel de conocimiento matemático expresado por los participantes es también bajo, lo que puede generarles inseguridad en su acción didáctica en educación matemática. Esta observación estaría en la línea de las tesis de Guillory Bryant (2009). De hecho, a juicio del autor de la presente investigación, la falta de convergencia de los resultados con los de otros trabajos, como el de Tunç-Pekkan et al. (2023), puede estar en el progresivo adelgazamiento de los contenidos curriculares de matemáticas que vienen sufriendo la educación primaria y secundaria en España en los últimos decenios. Esto explicaría el bajo nivel de conocimiento matemático que, en general, presenta el estudiantado español de magisterio y que manifiestan los participantes, así como la falta de autoconfianza.

En este trabajo se analiza, además, el fenómeno de la ansiedad hacia la enseñanza de las matemáticas diferenciando al grupo de estudiantes encuestados según si han superado alguna asignatura de matemáticas y su didáctica, si poseen alguna titulación previa en el campo de la educación, o si tienen experiencia docente previa en el área de matemáticas. Al diferenciar por la variable de experiencia docente, los niveles medios de ansiedad son menores para las cuatro subescalas de ansiedad analizadas en el grupo de estudiantes con algún tipo de experiencia docente en el área de matemáticas. Son, además, significativamente menores para las subescalas de conocimiento matemático, autoconfianza y actitud hacia la enseñanza de las matemáticas. Se extraen conclusiones parecidas cuando se diferencia por la variable de estar en posesión de una titulación anterior. La razón es que estas dos variables guardan una correlación importante entre ellas.

La experiencia docente práctica en educación matemática y la posesión de titulaciones anteriores en educación son, de hecho, los factores ansiolíticos más intensos para el grupo de estudiantes de magisterio participante de entre los estudiados aquí. Ciertamente, estos factores reducen la ansiedad más que la mera superación de asignaturas de didáctica de las matemáticas. De hecho, todas las dimensiones de la ansiedad hacia la enseñanza de las matemáticas son menores entre quienes ya tienen alguna titulación de educación. Asimismo, la ansiedad hacia la enseñanza de las matemáticas decrece en sus dimensiones de conocimiento matemático, autoconfianza y habilidades didácticas a medida que aumenta la experiencia docente. Esta ligera diferencia probablemente se explique porque los participantes ya titulados acumulen una más duradera experiencia docente que los no titulados (para quienes la experiencia docente se limita a las prácticas curriculares).

Además, estos resultados están en la línea de los trabajos que destacan el carácter ansiolítico del desarrollo de prácticas curriculares (Boyd et al., 2014; Greenstein, 2020; Lavidas et al., 2023). En estos resultados subyace la idea de que la formación práctica ayuda a reducir la ansiedad hacia la enseñanza de las matemáticas más que la formación teórica, porque ayuda más a formar en los contenidos didácticos y mejora la actitud hacia la educación matemática. Asimismo, el hecho de que la superación de asignaturas de educación matemática no tenga el mismo efecto ansiolítico (Marbán et al., 2016) sugiere, a su vez, que se está dando una orientación excesivamente teórica al desarrollo de estas asignaturas en España.

De los resultados presentados se deriva, además, que la falta de conocimiento matemático y de autoconfianza se superan, en parte, al cursar y aprobar las asignaturas de educación matemática. Sin embargo, no ocurre lo mismo con la actitud hacia la enseñanza de las matemáticas y los conocimientos didácticos, que no mejoran con las asignaturas. Esto concuerda con la falta de correlación entre la superación de asignaturas y la ansiedad hacia la enseñanza de las matemáticas encontrada por Marbán et al. (2016) en estudiantes españoles de magisterio. Sin embargo, aquí se ha profundizado en la descripción de las dimensiones de la ansiedad hacia la enseñanza de las matemáticas que está influida por la superación de asignaturas, lo que constituye una aportación novedosa del presente trabajo. Además, permite concluir que, probablemente, los contenidos de las asignaturas de educación matemática en España no incidan de manera suficientemente profunda en los aspectos de la didáctica específica de la matemática, lo que puede explicar que la ansiedad, en este aspecto, no se vea influida. Esta observación estaría en la línea de las tesis de Peker (2009), que relaciona ansiedad hacia la enseñanza de las matemáticas con la sensibilidad en cuanto a metodologías didácticas del estudiantado de magisterio.

5. Limitaciones y líneas de futura investigación

En el presente estudio, las principales limitaciones se refieren a la muestra: su tamaño y el hecho de que sean estudiantes de una misma universidad privada. Sería muy interesante ampliar el tamaño de la muestra, manteniendo el hecho de que esté constituida por estudiantes de los cuatro cursos del Grado, pero diversificando el número de universidades de procedencia, y el carácter de la universidad (pública o privada). La inclusión del tipo de universidad como variable independiente enriquecería el análisis, porque permitiría estudiar la dependencia de la ansiedad hacia la enseñanza de las matemáticas respecto de otro tipo de dimensiones académicas no ligadas estrictamente a los planes formativos del profesorado en formación o su experiencia didáctica. Además, la distribución de los participantes según su experiencia docente y según han superado o no asignaturas previas de didáctica de las matemáticas no es homogénea. Se sugiere hacer un estudio análogo al presentado aquí, pero con una muestra homogéneamente distribuida, para confirmar los resultados obtenidos.

Además, puesto que las variables explicativas consideradas están ligadas a la formación del estudiantado de magisterio, los resultados del estudio se limitan a la región geográfica en la que está contextualizado. Sería interesante extender un estudio análogo a otras regiones geográficas y llevar a cabo un análisis comparativo para identificar si hay un factor geográfico explicativo de la ansiedad hacia la enseñanza de las matemáticas. Además, se sugiere extender el estudio considerando variables explicativas de naturaleza sociodemográfica, como el sexo del alumnado de magisterio. Además, el presente estudio está limitado metodológicamente por ser estrictamente cuantitativo. Se sugiere completar el presente trabajo con un estudio cualitativo que permita identificar las razones de las valoraciones expresadas por el estudiantado.

6. Conclusiones e implicaciones

De entre las dos formas de ansiedad generalizada que están ligadas al proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas (la ansiedad hacia las matemáticas, referida a los objetos matemático, y la ansiedad hacia la enseñanza de las matemáticas, ligada a la actividad docente en matemáticas), en este estudio se ha analizado el nivel de ansiedad hacia la enseñanza de las matemáticas en un grupo de estudiantes de magisterio españoles. El instrumento de investigación ha sido el cuestionario MATAS de Peker, que es cuantitativo, validado y estandarizado para la medición de la ansiedad hacia la enseñanza de las matemáticas en el profesorado en ejercicio y en formación. Asimismo, estos niveles de ansiedad hacia la enseñanza de las matemáticas han sido valorados en función de la experiencia docente y de la formación académica en materia de educación matemática del estudiantado participante (concretado en la superación de asignaturas de educación matemática o de alguna titulación previa en el área de educación).

A la luz de los resultados obtenidos, el estudiantado de magisterio participante presenta niveles moderados o altos de ansiedad hacia la enseñanza de las matemáticas, en términos generales. Concretando en las diferentes dimensiones de la ansiedad hacia la enseñanza de las matemáticas, la falta de conocimiento matemático (en cuanto a conceptos matemáticos, definiciones, teoremas o resolución de problemas) y el conocimiento didáctico (referido a la formación recibida para poder llevar a cabo acciones educativas eficaces) son las dimensiones que concentran los niveles más altos de ansiedad hacia la enseñanza de las matemáticas (la proporción de estudiantes con bajos niveles de ansiedad en estas dos dimensiones no llega al 10,00%). Sin embargo, también se aprecia una falta de confianza en las propias habilidades de pensamiento matemático y en las propias habilidades didácticas, ya que casi el 90,00% del estudiantado participante manifiesta una confianza débil en sí mismo y casi el 85,00% expresa una actitud muy negativa o moderadamente negativa hacia la enseñanza de las matemáticas. En consecuencia, aunque el conocimiento matemático y didáctico son las dimensiones más intensamente explicativas de la ansiedad hacia la enseñanza de las matemáticas observada, las dimensiones de confianza y actitud son también fuertemente explicativas.

El hecho de haber aprobado asignaturas de educación matemática no influye significativamente en los niveles de ansiedad hacia la enseñanza de las matemáticas. Únicamente sirve para incrementar el conocimiento matemático y la confianza hacia las propias habilidades de pensamiento matemático, pero no ayuda a mejorar la actitud hacia la educación matemática ni a incrementar el conocimiento didáctico. En concreto, haber superado asignaturas de educación matemática incrementa en un 24,18% la autopercepción de conocimiento matemático y en un 17,41% la confianza en las propias habilidades de pensamiento matemático. De aquí se derivan dos consecuencias principales. En primer lugar, que no existe una fuerte correlación entre el conocimiento matemático del estudiantado de magisterio y su seguridad en el ejercicio de la educación matemática. Además, no parece que los planes de estudio cursados por el estudiantado de magisterio en materia de matemática educativa no parecen cubrir equilibradamente las diferentes competencias que debe desarrollar el profesorado en formación, debiéndose reforzar los aspectos más didácticos.

En cambio, la experiencia docente y tener titulaciones previas en educación es un factor ansiolítico respecto de todas las dimensiones de la ansiedad analizadas. En concreto, la experiencia docente incrementa la autopercepción de conocimiento de conceptos matemáticos en un 16,82%, la confianza en las propias habilidades de pensamiento matemático en un 21,29% y el conocimiento didáctico y la eficacia en el diseño de actividades didácticas en un 17,92%. Por su parte, el hecho de estar en posesión de una titulación previa en el área de educación mejora en un 21,97% la percepción sobre conocimiento matemático, en un 21,96% la confianza en sí mismo y en un 12,57% la actitud hacia la enseñanza de las matemáticas. Es, por tanto, el ejercicio docente práctico lo que está reforzando los desequilibrios formativos en materia de educación matemática del estudiantado de magisterio que sugieren los resultados.

De los resultados obtenidos se derivan algunas implicaciones. En primer lugar, es necesario reforzar los currículos españoles de matemáticas de las enseñanzas preuniversitarias. Esto ayudará a que el profesorado en formación tenga un conocimiento matemático más fuerte y un pensamiento matemático más desarrollado que les permita ganar autoconfianza hacia la enseñanza de las matemáticas. Además, es importante realizar acciones formativas transversales no formales con alumnado de educación primaria, de modo extraescolar, a través de las que el estudiantado desarrolle las competencias propias de su Grado. Asimismo, convendría incrementar el tiempo que el profesorado en formación permanece en los centros educativos realizando prácticas escolares y adelantar su primer contacto con éstas (si habitualmente se realizan en tercer y cuarto cursos, se deberían empezar en segundo curso, cuando el estudiantado ya haya cursado una asignatura de matemáticas y su didáctica). Finalmente, es necesario repensar los planes de estudios de educación matemática en España para reforzar el componente práctico de estos planes de estudios. En particular, los resultados sugieren la necesidad de reforzar el desarrollo de competencias didácticas en las asignaturas de matemática educativa de los citados planes de estudios. Probablemente esto ayudará a que las asignaturas de educación matemática tengan un carácter ansiolítico para el estudiantado de magisterio que les ayude a enfrentarse a la realidad de las aulas.

Finalmente, convendría que las universidades dedicaran esfuerzos a diseñar planes específicos para abordar la problemática de la ansiedad hacia la enseñanza de las matemáticas. En concreto, si se introducen bloques prácticos de matemática educativa entre los contenidos curriculares de las asignaturas, sería interesante diseñar cuestionarios de evaluación de la acción formativa para que rellene el grupo de estudiantes, acerca de los diferentes aspectos de la ansiedad hacia la enseñanza de las matemáticas y cómo se han sentido en relación con ellas durante la actividad práctica. Esto permitiría recabar datos acerca de la evolución de la ansiedad hacia la enseñanza de las matemáticas en el profesorado en formación y proporcionar claves para su abordaje.

Referencias

Alkan, V., Cosguner, T. y Fidan, Y. (2019). Mathematics teaching anxiety scale: construction, reliability and validity. *International Journal of Assessment Tools in Education*, *6*, 506-521. http://dx.doi.org/10.21449/ijate.625423

American Psychiatric Association (2022). *Diagnostic and statistical manual of mental disorders (5th ed.*). American Psychiatric Publishing. https://www.psychiatry.org/psychiatrists/practice/dsm

Auzmendi, E. (1992). *Las actitudes hacia la matemática-estadística en las enseñanzas medias y universitarias.* Mensajero.

Awofala, A. O. A., Akinoso, S., Adeniyi, C. O., Jega, S. H., Fatade, A. O. y Arigbabu, A. A. (2024). Primary teachers' mathematics anxiety and mathematics teaching anxiety as predictors of students' performance in mathematics. *ASEAN Journal of Science and Engineering Education*, *4*(1), 9-24. https://ejournal.upi.edu/index.php/AJSEE/article/view/51065

Bosica, J. (2022). Using a mixed methods approach to study the relationship between mathematics anxiety, mathematics teacher efficacy, and mathematics teaching anxiety in preservice elementary school teachers in Ontario. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education, 22*, 190-209. https://doi.org/10.1007/s42330-022-00203-8

Boyd, W., Foster, A., Smith, J. y Boyd, W. E. (2014). Feeling good about teaching mathematics: Addressing anxiety amongst pre-service teachers. *Creative Education*, *5*(4), 207-217. https://doi.org/10.4236/ce.2014.54030

Brown, A. B., Westenskow, A. y Moyer-Packenham, P. S. (2011). Elementary pre-service teachers: Can they experience mathematics teaching anxiety without having mathematics anxiety? *Issues in the Undergraduate Mathematics Preparation of School Teachers, 5*, 1-14. https://www.math.ttu.edu/k12/htdocs/journal/5.attributes/brown01/article.pdf

Bursal, M. y Paznokas, L. (2006). Mathematics anxiety and preservice elementary teachers' confidence to teach mathematics and science. *School Science and Mathematics, 106*(4), 173-180. https://doi.org/10.1111/j.1949-8594.2006.tb18073.x

Cockcroft, W. H. (1985). *Las matemáticas sí cuentan. Informe Cockcroft.* Centro de Publicaciones, Ministerio de Educación y Ciencia. https://sede.educacion.gob.es/publiventa/d/1129/19/0

Ertekin, E., Dilmac, B. y Yazici, E. (2009). The relationship between mathematics anxiety and learning styles of preservice mathematics teachers. *Social Behavior and Personality, 37*(9), 1187-1195. https://doi.org/10.2224/sbp.2009.37.9.1187

Fennema, E., y Sherman, J. A. (1976). Fennema-Sherman mathematics attitudes scales: Instruments designed to measure attitudes toward the learning of mathematics by females and males. *Journal for Research in Mathematics Education, 7*(5), 324-326. https://doi.org/10.2307/748467

Furner, J. M. y Berman, B. T. (2004). Confidence in their ability to do mathematics: The need to eradicate math anxiety so our future students can successfully compete in high-tech globally competitive world. *Philosophy of Mathematics Education Journal*, *18*(1), 1-33. http://socialsciences.exeter.ac.uk/education/research/centres/stem/publications/pmej/pome18/furner_math_anxiety_2.htm

Gamboa Araya, R. y Moreira-Mora, T. E. (2017). Actitudes y creencias hacia las matemáticas: un estudio comparativo entre estudiantes y profesores. *Revista Electrónica "Actualidades Investigativas en Educación*", *17*(1), 1-45. http://dx.doi.org/10.15517/aie.v17i1.27473

Gardner, L. E. y Leak, G. K. (1994). Characteristics and correlates of teaching anxiety among college psychology teachers. *Teaching of Psychology, 21*(1), 28-32. https://doi.org/10.1207/s15328023top2101_5

Gómez del Amo, R. y Caballero Carrasco, A. (2015). La ansiedad de los estudiantes para maestro ante la enseñanza de las matemáticas. En L. J. Blanco Nieto, J. A. Cárdenas Lizarazo y A. Caballero Carrasco (Eds.), *La resolución de problemas de matemáticas en la formación inicial de profesores de Primaria* (pp. 59-80). Servicio de Publicaciones de la Universidad de Extremadura. https://redined.mecd.gob.es/xmlui/handle/11162/174225

Gresham, G. (2008). Mathematics anxiety and mathematics teacher efficacy in elementary pre-service teachers. *Teaching Education, 19(*3), 171-184. https://doi.org/10.1080/10476210802250133

Guillory Bryant, M. M. (2009). *A study of preservice teachers: is it really mathematics anxiety?* (Tesis Doctoral). Universidad de Massachusetts. https://core.ac.uk/download/pdf/13623477.pdf

Hanifah, N., Afidah, L. N., Soraya, A. I. y Ardiansyah, A. S. (2023). Study literature of ICT toward mathematics anxiety for students. *PRISMA, Prosiding Seminar Nasional Matematika, 6*, 120-125. https://journal.unnes.ac.id/sju/index.php/prisma/article/view/66500

Hembree, R. (1990). The nature, effects, and relief of mathematics anxiety. *Journal of Research in Mathematics Education, 21*(1), 33-46. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.21.1.0033

Hunt, T. E. y Sari, M. H. (2019). An english version of mathematics teaching anxiety scale. *International Journal of Assessment Tools in Education, 6*(3), 436-443. http://dx.doi.org/10.21449/ijate.615640

Jackson, C. D. y Leffingwell, R. J. (1999). The role of instructors in creating math anxiety in students from kindergarten through college. *The Mathematics Teacher, 92*(7),5 83-586. https://doi.org/10.5951/mt.92.7.0583

Karakose, T., Polat, H., Yirci, R., Tülübaş, T., Papadakis, S., Ozdemir, T. Y. y Demirkol, M. (2023). Assessment of the relationships between prospective mathematics teachers' classroom management anxiety, academic self-efficacy beliefs, academic amotivation and attitudes toward the teaching profession using structural equation modelling. *Mathematics, 11*, 449. https://doi.org/10.3390/math11020449

Lavidas, K., Skopeliti, I., Zacharos, K. y Panagiotounakos, E-P. (2023). Preservice preschool teachers' mathematics experience and math anxiety on their beliefs about and attitudes toward teaching mathematics. *Journal of Early Childhood Teacher Education*. Publicación anticipada en línea. https://doi.org/10.1080/10901027.2023.2196943

Levine, G. (1993). *Prior mathematics history, anticipated mathematics learning style, and anxiety for teaching mathematics among preservice elementary school teachers* (Comunicación). Annual Meeting of the International Group for Psychology of Mathematics Education, North Amercian Chapter, California. https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED373972.pdf

Levine, G. (1996). *Variability in anxiety for teaching mathematics among pre-service Elementary school teachers enrolled in a mathematics course* (Comunicación). Annual Meeting of the American Educational Research Association, Nueva York. https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED398067.pdf

Luo, R., Zhang, A., Wang, Y., Li, H., Xu, Y., Guo, K. y Si, J. (2023). Math attitudes and math anxiety predict students' perception of teacher support in primary school, but not vice versa. *British Journal of Educational Psychology*. https://doi.org/10.1111/bjep.12628

Maloney, E. A., Schaeffer, M. W. y Beilock, S. L. (2013). Mathematics anxiety and stereotype threat: shared mechanisms, negative consequences and promising interventions. *Research in Mathematics Education, 15*(2), 115-128. https://doi.org/10.1080/14794802.2013.797744

Marbán, J. M., Maroto, A. y Palacios, A. (2016). Evolución de la ansiedad matemática en los maestros de primaria en formación. En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, F. J. Ruiz, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Actas del Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 615-615). SEIEM. https://www.seiem.es/docs/actas/20/ActasXXSEIEM.pdf

Marbán, J. M., Palacios, A. y Maroto, A. (2020). Enjoyment of teaching mathematics among pre-service teachers. *Mathematics Education Research Journal, 33*, 613-629. https://doi.org/10.1007/s13394-020-00341-y

Martínez-Sierra, G. y García González, M. del S. (2014). High school students' emotional experiences in mathematics classes. *Research in Mathematics Education, 16*(3), 234-250. https://doi.org/10.1080/14794802.2014.895676

Mato, M. D. (2010). Mejorar las actitudes hacia las matemáticas. *Revista Galego-Portuguesa de Psicoloxía e Educación, 18*(1), 19-32. https://ruc.udc.es/dspace/bitstream/handle/2183/8408/RGP%2018_1%202010%20art%202.pdf?sequence=1&isAllowed=y

McLean, L., Janssen, J., Espinoza, P., Lindstrom Johnson, S. y Jimenez, M. (2023). Associations between teacher and student mathematics, science, and literacy anxiety in fourth grade. *Journal of Educational Psychology, 115*(4), 539-551. https://doi.org/10.1037/edu0000790

McLeod, D. B. (1989). Beliefs, attitudes, and emotions: new views of affect in mathematics education. En D. B McLeod y V. M. Adams (Eds.), *Affect and mathematical problem solving: a new perspective* (pp. 245-258). Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4612-3614-6_17

Meryem, Ç. (2021). Investigation of teacher candidates' teaching maths anxiety and teaching maths competencies. *International Journal of Progressive Education, 17*(6), 158-167. https://doi.org/10.29329/ijpe.2021.382.11

Nunnally, J. C. (1967). *Psychometric Theory*. McGraw-Hill.

Patkin, D. y Greenstein, Y. (2020). Mathematics anxiety and mathematics teaching anxiety of in-service and pre-service primary school teachers. *Teacher Development, 24*(4), 502-519. https://doi.org/10.1080/13664530.2020.1785541

Peker, M. (2006). Matematik ögretmeye yönelik kaygi ölçeginin gelistirilmesi. *Egitim Bilimleri ve Uygulama, 9*, 73-92. https://toad.halileksi.net/sites/default/files/pdf/matematik-ogretmeye-yonelik-kaygi-olcegi-toad.pdf

Peker, M. (2009). Pre-service teachers' teaching anxiety about mathematics and their learning styles. *Eurasian Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 5*(4), 335-345. http://dx.doi.org/10.12973/ejmste/75284

Peker, M. y Ertekin, E. (2011). The relationship between mathematics teaching anxiety and mathematics anxiety. *The New Educational Review, 23*(1), 213-226.

Peker, M. y Halat, E. (2008). *The pre-service teachers' mathematics teaching anxiety and gender. European Conference on Educational Research* (Comunicación), Gotemburgo. European Educational Research Assotiation. https://eera-ecer.de/ecer-programmes/conference/1/contribution/1256/

Peker, M. y Halat, E. (2009). Teaching anxiety and the mathematical representations developed through webquest and spreadsheet activities. *Journal of Applied Sciences, 9*(7), 1301-1308. https://doi.org/10.3923/jas.2009.1301.1308

Pérez-Tyteca, P., Castro Martínez, E., Rico Romero, L. y Castro Martínez, E. (2011). Ansiedad matemática, género y ramas de conocimiento en alumnos universitarios. *Enseñanza de las Ciencias, 29*(2), 237-250. https://doi.org/10.5565/rev/ec/v29n2.570

Perry, A. B. (2004). Decreasing math anxiety in college students. *College Student Journal, 38*(2), 321-324.

Richardson, F. C. y Suinn, R. M. (1972). The mathematics anxiety rating scale. Psychometric data. *Journal of Counselling Psychology, 19*(6), 551-554. https://doi.org/10.1037/h0033456

Saadati, F., Martínez, M. V. y Espinoza, C. G. (2023). Upper primary student attitudes toward mathematics problem solving; an exploratory study in Chile. *Research in Mathematics Education*. https://doi.org/10.1080/14794802.2023.2221659

Sánchez Mendías, J., Segovia Alex, I. y Miñán Espigares, A. (2011). Exploración de la ansiedad hacia las matemáticas en los futuros maestros de educación primaria. *Profesorado. Revista de curriculum y formación del profesorado, 15*(3), 297-312. https://revistaseug.ugr.es/index.php/profesorado/article/view/20432

Sánchez Mendías, J., Segovia Alex, I. y Miñán Espigares, A. (2020). Ansiedad y autoconfianza hacia las matemáticas de los futuros maestros de Educación Primaria. *Electronic Journal of Research in Educational Psychology, 18*(2), 127-152. http://dx.doi.org/10.25115/ejrep.v18i51.2981

Sloan, T., Daane, C. J. y Giesen, J. (2002). Mathematics anxiety and learning styles: what is the relationship in Elementary preservice teachers? *School Science and Mathematics, 102*(2), 84-87. https://doi.org/10.1111/j.1949-8594.2002.tb17897.x

Stoehr, K. J. y Olson, A. M. (2023). Elementary prospective teachers' visions of moving beyond mathematics anxiety. *Mathematics Education Research Journal, 35*, 133-152. https://doi.org/10.1007/s13394-021-00379-6

Tunç-Pekkan, Z., Ölmez, İ. B., Taylan, R. D. (2023). An online laboratory school research on pre-service mathematics teachers' experiences and mathematics teaching anxiety. *Education and Information Technologies, 28*(5), 5739-5761. https://doi.org/10.1007/s10639-022-11404-x

Vargas Ríos, G. A. (2010). *Relación entre el rendimiento académico y la ansiedad ante las evaluaciones en los alumnos del primer año de la Facultad de Educación de la Universidad Nacional de la Amazonía Peruana. Ciclo 2009-I* (Tesis de maestría). Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Perú. https://cybertesis.unmsm.edu.pe/bitstream/handle/20.500.12672/1684/Vargas_rg.pdf?sequence=1&isAllowed=y

Živković, M., Pellizzoni, S., Doz, E., Cuder, A., Mammarella, I. y Passolunghi, M. C. (2023). Math self-efficacy or anxiety? The role of emotional and motivational contribution in math performance. *Social Psychology of Education, 26*, 579-601. https://doi.org/10.1007/s11218-023-09760-8

Autor

Álvaro Antón-Sancho. Escuela Universitaria de Magisterio Fray Luis de León, Universidad Católica de Ávila. Valladolid, España. alvaro.anton@frayluis.com

https://orcid.org/0000-0002-1901-3878

Paula Cardoso, Ema Mamede

INVESTIGANDO A PRÁTICA DO PROFESSOR NO ENSINO DE FRAÇÕES NUM CONTEXTO DE TRABALHO COLABORATIVO

Investigating Teacher Practices on Fractions in a Collaborative Work Context

RESUMEN

Este estudio tiene como objetivo comprender las prácticas de enseñanza de los docentes del 1er ciclo de Educación Básica al momento de introducir el concepto de fracciones a sus estudiantes. Se busca responder a las preguntas: 1) ¿Cómo introduce el docente el concepto de fracción a sus alumnos? 2) ¿Cómo explora el profesor la interpretación de fracciones en sus clases? 3) ¿Qué dificultades experimenta el docente al enseñar fracciones? Se adoptó una metodología cualitativa en un enfoque de estudio de caso para analizar seis clases observadas de un docente que participó de un programa de trabajo colaborativo, enfocado en la enseñanza de fracciones. Los resultados sugieren algunas debilidades en el conocimiento matemático y didáctico del profesor sobre fracciones, concretamente en la interpretación de las fracciones, su abordaje y articulación en las clases de matemáticas.

PALABRAS CLAVE:

- *Enseñanza de fracciones*
- *Aprendizaje de fracciones*
- *Conocimiento del profesor*
- *Trabajo colaborativo*

ABSTRACT

This study aims to understand the teaching practices of teachers in the 1st cycle of Basic Education when introducing the concept of fractions to their students. It seeks to answer the questions: 1) How does the teacher introduce the concept of fraction to his students? 2) How does the teacher explore fraction interpretations in his classes? 3) What difficulties does the teacher experience in teaching fractions? A qualitative methodology was adopted in a case study approach to analyze six observed classes of a teacher who participated in a collaborative work program, focused on teaching fractions. The results suggest some weaknesses in the teacher's mathematical and didactic knowledge about fractions, namely in the interpretations of fractions, their approach and articulation in mathematics classes.

KEY WORDS:

- *Teaching fractions*
- *Learning fractions*
- *Teacher's knowledge*
- *Collaborative work*

Cardoso, P. y Mamede, E. (2023). Investigando a prática do professor no ensino de frações num contexto de trabalho colaborativo. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 26*(2), 233 - 260. https://doi.org/10.12802/relime.23.2624. Recepción: Diciembre 27, 2021 / Aceptación: Diciembre 14, 2023

RESUMO

Este estudo tem como objetivo compreender as práticas de ensino de professores do 1º ciclo do Ensino Básico na introdução do conceito de fração aos seus alunos. Procura responder-se às questões: 1) Como o professor introduz o conceito de fração aos seus alunos? 2) Como o professor explora as interpretações de fração nas suas aulas? 3) Que dificuldades manifesta o professor no ensino de frações? Adotou-se uma metodologia qualitativa numa abordagem de estudo de caso para análise de seis aulas observadas de uma professora que participou num programa de trabalho colaborativo, centrado no ensino de frações. Os resultados sugerem algumas fragilidades no conhecimento matemático e didático do professor sobre frações, nomeadamente nas interpretações de fração, sua abordagem e articulação na aula de matemática.

PALAVRAS CHAVE:

- *Ensinar frações*
- *Aprender frações*
- *Conhecimento do professor*
- *Trabalho colaborativo*

RÉSUMÉ

Cette étude vise à comprendre les pratiques pédagogiques des enseignants du 1er cycle de l'Éducation de base lors de l'introduction de la notion de fractions à leurs élèves. Il cherche à répondre aux questions: 1) Comment l'enseignant introduit-il la notion de fraction à ses élèves ? 2) Comment l'enseignant explore-t-il les interprétations des fractions dans ses cours? 3) Quelles difficultés l'enseignant rencontre-t-il dans l'enseignement des fractions? Une méthodologie qualitative a été adoptée dans une approche d'étude de cas pour analyser six classes observées d'un enseignant ayant participé à un programme de travail collaboratif axé sur l'enseignement des fractions. Les résultats suggèrent certaines faiblesses dans les connaissances mathématiques et didactiques de l'enseignant sur les fractions, notamment dans l'interprétation des fractions, leur approche et leur articulation dans les cours de mathématiques.

MOTS CLÉS:

- *Enseigner les fractions*
- *Apprendre les fractions*
- *Connaissances des enseignants*
- *Travail collaboratif*

1. Introdução

Em Portugal, as mais recentes orientações curriculares (Direção Geral de Educação [DGE], 2021) antecipam um contato mais aprofundado ao conceito de fração, nos níveis iniciais do Ensino Básico (6-10 anos de idade), sendo sugeridas atividades para a aula que envolvam diferentes interpretações de fração, nomeadamente quociente, parte-todo e operador. Contudo, estas diferentes interpretações não parecem ser totalmente dominadas pelos professores.

O conceito de fração é frequentemente, e muitas vezes exclusivamente, abordado nas interpretações parte-todo e operador (Behr *et al.*, 1992; Cardoso e Mamede, 2023; Kerslake, 1986; Monteiro e Pinto, 2005). Muitas vezes, o professor apresenta uma figura geométrica (retângulo ou círculo) dividida em partes iguais, estando uma destas partes sombreada (Cardoso e Mamede, 2021, 2023; Mamede *et al.*, 2021). A fração surge assim como uma relação entre a parte sombreada e o número total de partes em que a figura foi dividida. Contudo, este tipo de ensino fornece aos alunos uma visão limitada do conceito de fração. Nomeadamente, limita o desenvolvimento da ideia de que uma fração pode ser maior do que 'um'. De fato, e de acordo com Kerslake (1986), o procedimento de apresentar-se a fração como um 'todo' dividido em partes iguais não se adequa facilmente a frações maiores do que a unidade. Assim sendo, as atuais orientações curriculares (ver DGE, 2021) implicam a mobilização de conhecimento matemático e didático, considerado inovador na realidade portuguesa, requerendo, portanto, ao professor maior conhecimento nesses âmbitos. Desejavelmente, o professor deverá dominar a representação, a ordenação e a equivalência de frações, bem como as suas diferentes interpretações, para poder ajudar os alunos a construir um completo conceito de número racional (ver Behr *et al.*, 1983; Behr *et al.*, 1992).

Torna-se então fundamental caraterizar as práticas correntes dos professores portugueses, nos níveis iniciais do Ensino Básico, relativamente ao ensino de frações, com vista a identificar aspectos que possam ser melhorados, beneficiando a comunidade escolar.

2. As interpretações de fração

O pleno domínio do conceito de fração pressupõe o domínio da representação e da operação com frações em todas as suas interpretações (Behr *et al.*, 1983; Nunes *et al.*, 2004). É possível encontrar na literatura diferentes classificações de interpretações de fração. Kieren (1976) apresenta os seguintes subconstructos de número racional: frações; frações decimais; classes equivalentes de frações; números da forma $\frac{p}{q}$, com p e q inteiros e $q \neq 0$; operadores multiplicativos; elementos de um campo ordenado infinito; e medidas ou pontos numa reta numérica. Behr *et al.* (1983), por sua vez, sugeriram os subconstructos parte-todo, decimal, razão, quociente, operador e medida. Mais tarde, Kieren (1993) considerou os subconstructos de medida, quociente, razão e operador. Mack (2001) propôs uma outra classificação, utilizando o termo 'partitioning' para abranger as interpretações parte-todo e quociente. Posteriormente, Nunes *et al.* (2004) sugeriram uma classificação baseada no significado dos valores envolvidos na fração, distinguindo as situações quociente, parte-todo, operador e quantidades intensivas.

Na interpretação quociente, o denominador e o numerador da fração representam, respetivamente, o número de recetores e o número de itens inteiros contínuos a dividir pelos recetores (ex.: 2/3 representa 2 barras de chocolate repartidas por 3 crianças). Nesta situação, a fração representa ainda a parte de item que cabe a cada recetor (ex.: 2/3 representa a quantidade de chocolate que cada criança recebe). Na interpretação parte-todo, o denominador da fração representa o número de partes em que o todo é dividido e o numerador indica o número dessas partes que são retiradas (ex.: 2/3 de uma barra de chocolate significa que a barra foi dividida em 3 partes iguais e 2 dessas partes foram consideradas). Na interpretação operador, estão envolvidas quantidades discretas: o denominador representa o número de grupos iguais em que o conjunto de elementos foi dividido e o numerador representa o número dos grupos que lhe foram retirados (ex.: 2/3 de 12 contas significa que foram formados 3 grupos iguais de contas e retirados 2 desses grupos) (Nunes e Bryant, 2008). Por último, na interpretação medida, a fração $\frac{a}{b}$ (*a* e *b* são números inteiros; $b \neq 0$) é utilizada repetidamente para determinar-se uma distância — frequentemente, a fração é acompanhada por uma reta numérica ou uma imagem de um instrumento de medida, de modo a que os alunos, expectavelmente, meçam a distância de um ponto a outro em termos de $\frac{1}{b}$ unidades (ex.: 2/3 indicam que a medida 1/3 foi usada 2 vezes). Nas orientações curriculares portuguesas em vigor (DGE, 2021), a introdução ao conceito de fração deve ocorrer no 2.º ano de escolaridade (7-8 anos de idade), envolvendo diferentes interpretações de fração, nomeadamente parte-todo e quociente, e a partir do 3.º ano as restantes interpretações.

3. O conhecimento do professor para ensinar

A ideia de que existe um conjunto de conhecimentos que são específicos para o ensino é amplamente aceite entre a comunidade científica internacional (Ball *et al.*, 2008; Shulman, 1986). Shulman (1986) sugere a classificação do conhecimento necessário para ensinar em três categorias: a) conhecimento de conteúdo — conhecimento de teorias, princípios e conceitos de uma disciplina em particular; b) conhecimento pedagógico de conteúdo — vai para além do conhecimento de conteúdo, na medida em que trata do conhecimento necessário para ensinar, incluindo o conhecimento de estratégias que tornem o conteúdo compreensível para os alunos; c) conhecimento curricular — conhecimento do currículo, envolvendo, por um lado, a capacidade de relacionar conteúdos que os alunos estão a aprender simultaneamente noutras disciplinas (articulação horizontal) e, por outro, o conhecimento daquilo que os alunos aprenderam em anos anteriores e do que aprenderão em anos posteriores, na disciplina (articulação vertical).

Mais recentemente, Ball *et al*. (2008) apresentaram um quadro teórico do conhecimento do professor para o ensino específico da Matemática. Com base no modelo universal de Shulman (1986), aqueles autores sugerem que o conhecimento de conteúdo proposto por este pode ser subdividido em conhecimento de conteúdo comum e conhecimento de conteúdo especializado, incluindo ainda neste domínio um terceiro elemento — o conhecimento do horizonte matemático. Os mesmos autores sugerem ainda a subdivisão do conhecimento pedagógico de conteúdo de Shulman em conhecimento de conteúdo e alunos, conhecimento de conteúdo e ensino e conhecimento curricular.

O conhecimento de conteúdo comum é o conhecimento matemático utilizado noutros contextos para além do ensino, podendo incluir a capacidade de reconhecimento de erros, a capacidade de uma correta realização de cálculos e a capacidade de uma correta utilização de termos técnicos. Trata-se de conhecimento exigido para ensinar, muito embora não sendo específico ou exclusivo desse contexto. O conhecimento de conteúdo especializado é definido por Ball e colegas (2008) como o conhecimento matemático exclusivamente destinado ao ensino da Matemática. Inclui a capacidade de reconhecer a natureza dos erros dos alunos, bem como de interpretar esses mesmos erros. Trata-se, portanto, de um conhecimento profundo que confere a capacidade de compreender os alunos e de comunicar-lhes conteúdos num formato acessível. O conhecimento de conteúdo e alunos combina o conhecimento matemático com o conhecimento dos alunos, incluindo a capacidade de antecipação das ideias e conceções erradas dos alunos, traduz-se na familiaridade com o pensamento matemático dos alunos. O conhecimento de conteúdo e de ensino combina o conhecimento de conteúdos matemáticos com conhecimentos sobre o ensino desses mesmos conteúdos. Refere-se às decisões que são tomadas para ensinar um determinado conteúdo. Para os autores, consta desta categoria o conhecimento da sequência de procedimentos a adotar e do método para ensinar um determinado conteúdo, a capacidade de avaliação das vantagens e desvantagens de diferentes representações e a capacidade de apresentar exemplos que sejam fundamentais para promover uma compreensão dos temas mais profunda por parte dos alunos. Finalmente, o conhecimento do horizonte matemático traduz-se na consciência da relação entre os tópicos matemáticos a ensinar e a variedade de tópicos incluídos no currículo (Ball *et al*., 2008). A Figura 1 ilustra o quadro teórico apresentado por Ball *et al*. (2008).

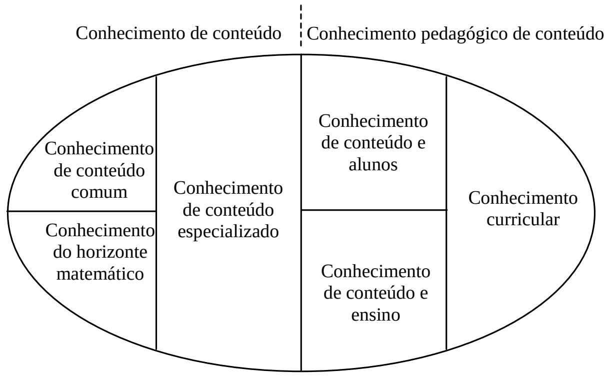


Figura 1. Domínios do conhecimento para o ensino da Matemática (Ball *et al.*, 2008)

3.1. *Conhecimento dos professores sobre frações*

Estudos centrados no conhecimento dos professores sugerem que estes são consideravelmente menos confiantes e menos bem-sucedidos no domínio dos números racionais do que no domínio dos números inteiros (Ball *et al.*, 2005). No âmbito do Rational Number Project (RNP), Post *et al.* (1991) conduziram um estudo em que participaram 218 professores (níveis 4-6), pretendendo-se traçar o perfil dos mesmos relativamente ao seu conhecimento sobre os números racionais. Particularmente sobre frações, os autores identificaram dificuldades com as interpretações de fração, com a ordenação e equivalência de frações.

Tirosh *et al.* (1998) procuraram avaliar o conhecimento de alunos da formação inicial de professores do ensino elementar (N=147). Estes autores sublinharam que o conhecimento dos participantes é segmentado e rígido, nomeadamente na redução da Matemática a uma coleção de técnicas de cálculo desprovidas de justificação formal, e muitas vezes até utilizadas de forma intuitiva. Mais ainda, concluíram que os futuros professores tendem a aplicar inapropriadamente propriedades dos números inteiros aos números racionais.

Alvarez (2010) entrevistou e observou aulas de ensino de frações de uma professora do 5.º ano do ensino fundamental. Recolheram-se dados em duas fases: a primeira antes da professora participar num curso de mestrado e a segunda durante a participação nesse mestrado. Os resultados da primeira fase sugerem uma acentuada dependência, relativamente ao manual escolar, na planificação das aulas, manifestando fraca criatividade e autonomia. Na segunda fase, a professora considerou já diferentes interpretações de fração nas aulas.

No entanto, registaram-se dificuldades em sequenciar conteúdos matemáticos de forma a incluir tais interpretações.

Em Portugal, os resultados obtidos por Pinto e Ribeiro (2013) através da aplicação de um questionário a 27 alunos da formação inicial de professores para o 1.º Ciclo do Ensino Básico revelam um conhecimento limitado de número racional. Identificaram-se dificuldades com as interpretações de fração (quociente, parte-todo e operador), com a compreensão do papel da unidade de referência e com a equivalência, ordenação de frações, entre outros aspectos. Num outro estudo, Mamede *et al.* (2021) aplicaram um questionário a 86 alunos (futuros professores do 1.º Ciclo do Ensino Básico) para analisar o seu conhecimento sobre frações. Dos resultados destacam-se: dificuldades com a compreensão do papel da unidade de referência; desconhecimento de interpretações de fração, nomeadamente da interpretação quociente; difuculdades na representação de frações na reta numérica, quando números diferentes de 1 são usados como referência na reta e quando é necessária uma redefinição de escala; dificuldades com a ordenação e equivalência de frações.

Também Copur-Gencturk (2021) realizou um estudo sobre conhecimento das operações com frações de professores dos 4.º e 5.º anos de escolaridade (N=303). Os resultados recolhidos através de um questionário *online* sugerem que os professores possuem uma compreensão limitada das operações com frações, particularmente da divisão. Mais centrado no conceito de fração, Powell *et al.* (2022) entrevistaram 19 professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental procurando saber se uma fração unitária, 1/*n*, resulta apenas de um todo equipartido em *n* partes. Cerca de 3/4 dos participantes revelaram possuir um conhecimento limitado da interpretação parte-todo, pois, para alguns, 1/3 de uma quantidade materializava-se exclusivamente numa seção que fosse uma de três partes; para os restantes, uma secção não podia ser 1/3 de um objeto particionado em três secções desiguais.

Centrando-se no ensino de frações, Cardoso e Mamede (2023) entrevistaram 31 professores do 1.º Ciclo do Ensino Básico, analisando as concepções e ideias sobre as suas práticas no ensino de frações. Os resultados evidenciaram fragilidades no conceito de fração, nas diferentes interpretações de fração, e na tradução dos diferentes modos de representação de frações. Identificaram-se, ainda, dificuldades na resolução de problemas com frações, particularmente em situações que envolviam quantidades discretas e na marcação de números fracionários na reta numérica.

Apesar das dificuldades dos professores com o conceito de fração e seu ensino (ver Alvarez, 2010; Cardoso e Mamede, 2021, 2023; Copur-Gencturk, 2021;

Li e Kulm, 2008; Mamede *et al*., 2021; Pinto e Ribeiro, 2013; Powell *et al*., 2022), continua a ser escassa a investigação centrada no ensino de frações. Em Portugal, as recentes alterações às orientações curriculares (ver DGE, 2021) preconizam mudanças na prática de ensino de frações. Contudo, sabe-se que, frequentemente, mudanças no currículo originam aos professores dificuldades de implementação. Dada a complexidade do conceito, esta dificuldade pode ver-se agravada (ver Mamede *et al*., 2021; Pinto e Ribeiro, 2013; Post *et al*., 1991; Tirosh *et al*., 1998), pelo que importa perceber se pode ser antecipada, já que condiciona a qualidade das aprendizagens dos alunos sobre frações. As dificuldades dos professores no ensino de frações, identificadas em Portugal, podem ser comuns a professores de outros países que têm visto o trabalho com números racionais fortemente marcado pela representação na forma de dízima, mas que ambicionam alargar à representação fracionária, o trabalho com estes números, nos níveis iniciais do Ensino Básico.

Conscientes do atual currículo português para o ensino da matemática, que antecipa um contato aprofundado com as frações, a pesquisa por nós desenvolvida teve como objetivo compreender as práticas de ensino de professores do 1º Ciclo do Ensino Básico na introdução do conceito de fração aos seus alunos. Procura responder-se às questões: 1) Como o professor introduz o conceito de fração aos seus alunos? 2) Como o professor explora as interpretações de fração nas suas aulas? 3) Que dificuldades manifesta o professor no ensino de frações?

4. Metodologia

Nesta pesquisa, adotou-se uma metodologia qualitativa, dado que se pretende uma descrição e interpretação de fenómenos educativos no seu ambiente natural (ver Bogdan e Biklen, 2010). Optou-se por um design de estudos de caso múltiplos (ver Yin, 2010), dado que esta opção é particularmente adequada quando se pretende responder a questões do tipo “como?” e “porquê?” e se pretende uma profunda compreensão dos acontecimentos.

4.1. *Participantes*

Participaram nesta investigação quatro professores do 1.º Ciclo do Ensino Básico de uma escola pública do distrito de Braga: Maria, docente com dezanove anos de serviço, treze destes a lecionar no 1.º Ciclo do Ensino Básico; Ana, docente com dezoito anos de serviço no 1.º Ciclo do Ensino Básico; João, docente com nove anos de serviço a lecionar no 1.º Ciclo do Ensino Básico; Inês, docente com treze anos de serviço, dez destes a lecionar no 1.º Ciclo do Ensino Básico. Todos os docentes possuem formação especializada (Licenciatura em Educação Básica e Mestrado Profissionalizante) para leccionar no 1.º Ciclo do Ensino Básico.

4.2. *Design*

Aquando da introdução dos seus alunos ao conceito de fração, os professores (incluindo a Maria) estiveram envolvidos num programa de trabalho colaborativo com a investigadora — uma das autoras deste artigo. Vários autores sublinham a importância do trabalho colaborativo entre professores como forma de promoção do desenvolvimento profissional (ver Day, 2001; Roldão, 2007; Saraiva e Ponte, 2003), outros ainda referem vantagens do trabalho colaborativo entre professores e investigadores (ver Lieberman, 1992; Ponte, 2001). Saraiva e Ponte (2003) referem que a colaboração entre professores e investigadores favorece uma desejável aproximação entre a prática profissional do professor e a investigação educacional. O investigador, por seu lado, vê facilitado o acesso à prática do professor e à reflexão do professor sobre essa prática (Saraiva e Ponte, 2003).

Boavida e Ponte (2002) sublinham que no trabalho colaborativo tem lugar o desenvolvimento de atividade para atingir determinados fins, pensando, preparando, refletindo, formando e empenhando-se, pelo que a colaboração requer do professor partilha e interação do que a simples realização de diversas operações. Assim, o programa colaborativo desenvolvido organizou-se em ciclos de atividades, consistindo cada ciclo na seguinte estrutura padrão: a) reuniões conjuntas com todos os professores participantes, para reflexão sobre aulas observadas, esclarecimento de dúvidas e preparação de aulas a observar; b) observação de aulas de cada um dos professores participantes; c) entrevista individual, no final da aula, entre cada professor e a pesquisadora, para reflexão sobre a aula observada (Figura 2).

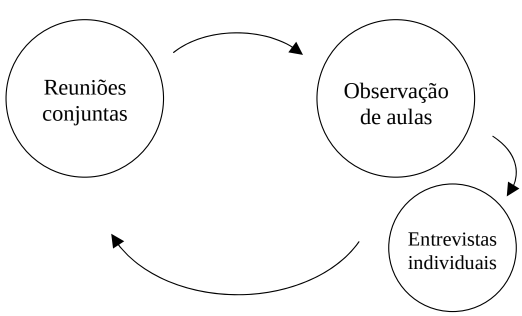


Figura 2. Ciclo padrão do programa de trabalho colaborativo

Foram realizados cinco ciclos de atividades, cada um implementado no intervalo de uma semana. Em cada ciclo foram observadas uma a duas aulas, com duração aproximada de noventa minutos cada uma. As reuniões conjuntas para preparação das aulas incluíram: a) discussão conjunta das diferentes interpretações de fração referidas nas orientações curriculares; b) discussão conjunta das propostas dos professores e da investigadora para a introdução ao conceito de fração, seleção de tarefas para a aula, e esclarecimento de dúvidas no âmbito do conhecimento matemático e didático; c) análise e reflexão conjunta de espisódios de aulas dos professores por eles selecionados e também episódios de aulas observadas pela investigadora. Ao professor era dada autonomia para a implementação das tarefas previamente discutidas na reunião conjunta na sua aula. As tarefas apresentadas nas reuniões conjuntas incidiam sobre diferentes interpretações de fração (quociente, parte-todo, medida e operador) e debruçavam-se sobre a representação, a ordenação e a equivalência de frações nestas interpretações. O cerne do presente artigo consiste na análise de alguns episódios de seis aulas observadas da professora Maria.

Maria lecionava numa turma do 3.º ano de escolaridade (8-9 anos de idade). De acordo com Maria, o único contacto formal com frações por parte destes alunos fora realizado no ano letivo anterior, quando aqueles frequentavam o 2.º ano de escolaridade, tendo esse contacto consistido somente na dobragem de uma folha em duas partes iguais, identificando-se cada uma das partes como “metade”. Maria acrescentou que os alunos haviam respondido a “tarefas do género pintar metade de algo dividido em dois”. No ano em que este estudo foi desenvolvido, os alunos não haviam tido qualquer contacto formal com as frações antes das reuniões de trabalho com a investigadora.

4.3. *Recolha e análise de dados*

Os dados foram recolhidos através de gravações áudio, notas de campo realizadas pela investigadora, registos fotográficos e material produzido pelos professores. A análise de dados recolhidos baseou-se no modelo sobre o conhecimento do professor apresentado por Ball *et al.* (2008). Assim sendo, a interpretação da informação recolhida passou pela categorização dos diversos aspectos analisados, segundo os parâmetros daquele modelo: os do conhecimento de conteúdo e os do conhecimento pedagógico de conteúdo (ou conhecimento didático), da professora, relativamente ao ensino do conceito de fração.

5. Resultados

Tal como foi já referido, o caso da Professora Maria, discutido no presente artigo, enquadra-se numa investigação mais alargada que envolveu quatro professores.

Não cabendo, neste artigo, uma exposição detalhada de toda a investigação realizada, a opção por apresentar-se apenas um dos casos prende-se com a vantagem de uma análise mais coesa e também mais vívida das situações da aula em foco. A legitimidade desta opção fundamenta-se ainda no fato das situações selecionadas remeterem, por um lado, para as principais conclusões da investigação alargada, e por outro, refletirem formas de abordar as frações que são comuns aos outros participantes da mesma investigação. Os aspectos mais críticos das aulas observadas prendem-se, mormente, com a abordagem às interpretações quociente e parte-todo, que suscitaram fragilidades notórias entre os professores – serão estes os aspectos aqui em foco. Apresentam-se ainda, para as situações de fragilidade, possíveis alternativas de ensino que potenciem a compreensão das diferentes interpretações de fração entre os alunos.

Nas transcrições dos diálogos apresentados, a letra “A” representa a intervenção de um aluno, sendo o número que se lhe segue estipulado consoante a ordem pela qual diferentes alunos surgem em cada diálogo; “Prof.” representa a intervenção do professor; e “Avv” representa a intervenção simultânea de vários alunos.

Todo o trabalho deste projeto teve início com reuniões conjuntas como forma de aceder mais facilmente ao conhecimento e crenças dos professores. Estas reuniões eram orientadas pelo pesquisador, um dos autores deste artigo, e alimentadas pelas contribuições dos professores, resultantes de dúvidas concetuais, crenças sobre o ensino e aprendizagem de frações, além de experiências prévias. As reuniões conjuntas dos professores procuraram melhorar as suas ideias sobre frações, promovendo o conhecimento de conteúdo especializado. Nelas identificaram-se e atenuaram-se fragilidades no conceito de fração e seu ensino, discutiram-se abordagens e tarefas para a aula, antecipando possíveis dificuldades dos alunos, promovendo assim o conhecimento de conteúdo e ensino e de conteúdo e alunos para o ensino de frações. As reuniões conjuntas contribuíram, assim, para o planejamento de novas práticas sobre frações. Num outro momento, cada professor planeava e implementava a sua aula individualmente, espelhando as suas crenças sobre o ensino de frações, operacionalizando os seus conhecimentos prévios e adquiridos com o trabalho colaborativo.

5.1. *As interpretações quociente e parte-todo*

A abordagem à interpretação quociente foi um dos temas abordados na reunião que precedeu a aula da professora Maria sobre este assunto. Maria questionou o grupo, “Ao ensinar a interpretação quociente não estou a ensinar também a interpretação parte-todo?”. A investigadora relembrou que, na interpretação quociente, estão envolvidas duas variáveis de natureza diferente, não acontecendo o mesmo na interpretação parte-todo. Reforçou que os alunos deverão ser capazes de representar quantidades por meio de frações, seja na interpretação parte-todo, seja na interpretação quociente. Os alunos devem ter contacto com ambas as interpretações, ainda que não necessitem de conhecer as respetivas designações formais, e a partir daí será com naturalidade que reconhecem quantidades representadas por frações em ambas as situações.

Na reunião, Maria procurou, ainda, ter a certeza de que, na interpretação quociente, poderiam estabelecer-se correspondências entre os recetores e os itens previamente divididos em partes iguais. Maria argumentou que os alunos iriam recorrer a estas correspondências, tornando-se esse procedimento incomportável quando estivessem envolvidas frações com numeradores e denominadores de maior magnitude:

> Podemos dividir os itens, não é? Dividimos a pizza, por exemplo, para vermos quanto fica para cada menino […] Os alunos vão dividir… vão dividir os itens que têm de repartir. Por exemplo, se for 1 item para 2 meninos. Vão dividir em duas partes. Uma para cada menino. [Maria faz um desenho e estabelece uma correspondência entre cada uma das partes da pizza e cada menino] Se forem muitos itens vai ser muito complicado. Os alunos não vão conseguir fazer isso…

A investigadora esclareceu que estas correspondências poderiam ser estabelecidas, mas que não eram necessárias para que se completasse a tarefa. Mais ainda, quando se iniciasse o trabalho com frações na interpretação quociente, era expectável que os alunos começassem por proceder desta forma, mas isso aconteceria quando estivessem em causa frações envolvendo numeradores e denominadores com menor magnitude. Passada esta fase, certamente que os alunos iriam abandonar este processo exaustivo, uma vez que, da exposição do professor, resultaria, desejavelmente, a compreensão, por parte dos alunos, de que, na interpretação quociente, a fração representa, não só uma relação entre os itens e os recipientes, mas também a quantidade que cabe a cada recipiente.

Aquando da aula observada, Maria começou por apresentar tarefas que envolviam a interpretação quociente. Os alunos respondiam às questões nas suas folhas de trabalho, sendo depois realizada a correção no quadro por um aluno e/ou pelo professor, em diálogo com a turma.

Entre as tarefas realizadas pelos alunos, uma dizia respeito à partilha de uma tablete de chocolate entre duas crianças. Neste problema, os alunos tinham de apresentar a fração que representava a quantidade de chocolate que cada criança receberia. Nesta ocasião, Maria referiu os significados do numerador e do denominador de uma fração apresentada numa situação quociente, associando o numerador ao número de itens a partilhar e o denominador ao número de elementos envolvidos na partilha (Figura 3).

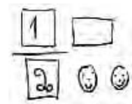


Figura 3. Correção, no quadro, de um problema de partilha equitativa de 1 tablete de chocolate entre 2 amigos

Foram apresentadas outras tarefas envolvendo frações na interpretação quociente, semelhantes àquela acima mencionada. Os alunos responderam com sucesso a estas tarefas, recorrendo aos significados do numerador e do denominador naquela interpretação. Contudo, no decurso da aula, Maria induziu os alunos a levarem a cabo a divisão dos itens, perguntando à turma “Como é que podemos dividir as tabletes de chocolate?” — este procedimento não era necessário. A Transcrição e Figura que se seguem referem-se a uma situação em que, no âmbito de uma partilha equitativa de 3 itens entre 2 recetores, se observa uma divisão dos itens.

Prof.: Temos, por exemplo, 2 amigas (Ana e Susana) a partilhar 3 chocolates. Vamos fazer um número fracionário que represente o que cada menina comeu na partilha de 3 chocolates por 2 meninas. [Maria representa no quadro os três chocolates divididos ao meio, identificando com uma letra maiúscula a parte que corresponde a cada menina – Figura 4] Cada menina come $\frac{1}{2}$ de cada chocolate. A Ana vai comer um chocolate inteiro?

Avv: Não. Vai comer metade.

Prof.: A Ana vai comer metade deste chocolate [apontando para o primeiro chocolate]. A Ana vai comer uma parte destas duas partes em que o chocolate foi dividido. Então, se eu quiser colocar aqui um número, qual será [apontando para a primeira metade do primeiro chocolate]?

A1: Um meio.

Prof.: A Ana vai comer $\frac{1}{2}$ deste chocolate. Uma parte das duas em que o chocolate foi dividido. [Escreve a fração “ $\frac{1}{2}$ ” em cada uma das primeiras metades dos chocolates – Figura 4] Quantos meios é que a Ana vai comer?

Avv: Três. São $\frac{3}{2}$.

Prof.: Então nós podemos fazer isto. [Maria apresenta uma soma para ilustrar a parte de chocolate que cada menina come – Figura 4] Um meio mais $\frac{1}{2}$ mais $\frac{1}{2}$ é $\frac{3}{2}$ [apontando para a soma que escreveu no quadro – Figura 4]. Reparem, o algarismo de cima adiciona-se e o de baixo fica igual.

Figura 4. Correção, no quadro, pela professora, de um problema sobre a partilha equitativa de 3 itens entre 2 recetores

No contexto de um problema sobre a partilha equitativa de 3 chocolates por 2 meninos, Maria procedeu à divisão dos itens em partes iguais e à soma $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$. Ao sublinhar a relação parte/todo, referindo que "A Ana vai comer uma destas duas partes em que o chocolate foi dividido" (ver Trasncrição acima), reduziu a interpretação quociente à interpretação parte-todo. Tendo em conta que o problema foi apresentado na interpretação quociente, afigurava-se desnecessário levar a cabo a divisão dos itens, já que o numerador representa o número de itens envolvidos na partilha e o denominador representa o número de recipientes ($\frac{3}{2}$ representa a quantidade de item que cabe a cada recetor numa partilha de 3 itens por 2 recetores). Assim, verificou-se que, apesar de ter introduzido corretamente a representação de frações na interpretação quociente, a maior familiaridade da professora com a interpretação parte-todo acabou por sobrepor-se, fazendo com que este problema não fosse completamente abordado na interpretação quociente. A redução da interpretação quociente à parte-todo condiciona a construção do conceito de fração pelos alunos, tornando-o incompleto, já que os alunos deverão contactar com todas as interpretações e representações de fração. Adicionalmente, sempre que se leva a cabo a divisão dos itens a partilhar e se interpreta a fração como a parte de um todo, perde-se a possibilidade de abordar a interpretação quociente (relação itens/recetores) e, consequentemente, poderão estar a ser limitadas as possibilidades de os alunos desenvolverem o raciocínio proporcional. Este tipo de raciocínio é particularmente promovido quando a interpretação quociente é explorada (ver Nunes *et al*., 2004; Mamede *et al*., 2005; Streefland, 1991).

Assim sendo, apesar das discussões conjuntas da reunião anterior sobre as diferenças entre abordar-se a interpretação parte-todo (relação entre número de partes retiradas e número de partes em que o todo foi dividido) e a interpretação quociente (relação entre itens e recetores), Maria, perante uma tarefa de partilha de itens por recetores (interpretação quociente), efetuou a divisão dos itens em partes iguais e apresentou a fração de item que cabe a cada recetor como uma relação entre as partes retiradas e o número total de partes em que o item foi dividido (interpretação parte-todo). Maria revela, assim, fraco conhecimento especializado sobre a abordagem da interpretação quociente na aula, comprometendo o conhecimento de conteúdo e ensino e de conteúdo e alunos. As reuniões de trabalho conjunto, apesar de uma boa oportunidade de discussão destes assuntos, foram manifestamente insuficientes para que Maria compreendesse todo o potencial que a interpretação quociente comporta, nomeadamente o estímulo ao raciocínio proporcional, o que a impediu de explorar esta interpretação com a mesma segurança atribuída à interpretação parte-todo. Contudo, a facilidade com que Maria aceitou integrar a interpretação quociente nas suas práticas sugere que as reuniões conjuntas contribuíram para mudanças nas suas conceções sobre ensino das frações.

5.2. *Dividir figuras geométricas em partes iguais*

Aquando da abordagem a tarefas que envolviam a representação de frações na interpretação quociente, os alunos dividiram as figuras, por vezes, em partes desiguais, não tendo Maria procedido a uma correção — Maria aceitou tacitamente aquelas divisões incorretas, apenas advertindo os alunos de que teriam de “imaginar” que as partes seriam iguais (“Temos aqui um retângulo dividido em três partes iguais. Temos de imaginar que as partes são iguais”). Como exemplo de uma destas situações, a Figura 5 ilustra uma divisão incorreta de um retângulo em 3 partes iguais, realizada no quadro. Numa outra ocasião, quando Maria solicitou a um aluno que marcasse um terço na reta numérica, a divisão da unidade em 3 partes iguais foi realizada corretamente (Figura 6).

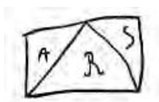


Figura 5. Divisão incorreta de um retângulo em três partes iguais, realizada no quadro por um aluno

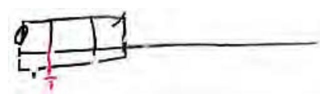


Figura 6. Divisão correta de um retângulo em três partes iguais, realizada no quadro por um aluno

Numa outro momento, em que a realização de uma tarefa requeria a divisão de um círculo em seis partes iguais, Maria corrigiu já uma divisão incorreta feita por um aluno, argumentando que “as partes não eram iguais” e que “a divisão não seria justa” (Figura 7). Constata-se então que, no âmbito da divisão de figuras geométricas, Maria não foi constante nas suas observações. Manter o rigor nos procedimentos e nos argumentos previne o aparecimento de dúvidas, entre os alunos, relativamente a uma ideia basilar na compreensão do conceito de fração como parte de um todo: a ideia de que o todo é dividido num número de partes iguais.

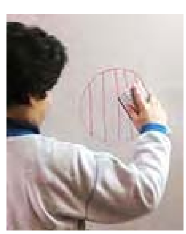


Figura 7. Divisão incorreta de um círculo, em seis partes iguais, realizada por um aluno, no quadro

Na reunião após a aula observada, Maria referiu que não corrigiu desde logo o retângulo dividido em três triângulos (ver Figura 5), porque:

> […] as partes são quase iguais. Os alunos imaginam que cada menino recebe uma parte igual da tablete de chocolate […] Quando foi o caso do círculo era óbvio que as fatias de pizza eram diferentes […] Se calhar devia ter começado por aí… devia ter começado por falar na divisão do círculo, do retângulo.”.

Maria reconheceu também, a posteriori, a necessidade de realizar-se uma divisão graficamente correta dos itens, para que não se crie, entre os alunos, ideias erróneas que enviesem a sua forma de pensar frações. Com efeito, as partes devem ser todas iguais, e esta deve ser uma ideia claramente transmitida aos alunos. Neste sentido, a divisão de figuras geométricas em partes iguais deverá ser abordada, previamente, pelo professor.

Em suma, e em primeiro lugar, Maria induziu os alunos, uma vez mais, a levar a cabo a divisão, em partes iguais, dos itens a partilhar, reduzindo, desta forma, a interpretação quociente de fração à interpretação parte-todo. Construir-se um conceito de fração ancorado numa só interpretação – a interpretação parte-todo – enfraquece grandemente o conhecimento matemático dos alunos sobre os números racionais (Behr *et al*., 1983; Nunes *et al*., 2004). Adicionalmente, Maria foi inconsistente nas propostas de realização de divisões dos itens em partes iguais: inicialmente, permitiu-se aos alunos a realização de divisões desiguais dos itens, desde que “imaginassem” que as partes eram iguais; posteriormente, divisões similarmente incorretas foram corrigidas, de modo a obter-se partes iguais.

Um conhecimento de conteúdo e alunos, por parte do professor, que reflita uma abordagem consistente à interpretação quociente, i.e., sem uma redução desta à interpretação parte-todo, promove entre os alunos, tal como é desejável, uma visão mais completa do conceito de fração. Além disso, uma antecipação de eventuais dificuldades dos alunos e um esclarecimento sobre os procedimentos a adotar revela um conhecimento de conteúdo e alunos mais sólido.

5.3. *A interpretação quociente e a equivalência de frações*

Maria manifestou alguma resistência em abordar a equivalência de frações na interpretação quociente, ainda que este tema surgisse naturalmente das observações dos alunos, o que não surpreende dada a sua longa experiência de ensino. Contudo, a abordagem mais profunda e completa às frações, exigida pelas orientações curriculares recentes, constituem um desafio pela sua novidade.

Apesar da sua experiência de ensino, Maria confessou desvalorizar nas suas aulas a partilha equitativa na abordagem às frações, trabalhando as frações maioritariamente na interpretação parte-todo. A reunião conjunta provocou mudanças no seu conhecimento especializado, mas também nas suas crenças sobre a aprendizagem de frações dos alunos, a ponto de incluir a interpretação quociente nas suas aulas. Apresenta-se de seguida, como exemplo, uma situação, de uma aula de Maria, sobre a partilha de 2 pizzas por 6 crianças, previamente discutida nas reuniões conjuntas.

Prof.: Imaginem que as pizzas têm diferentes ingredientes. Como é que as podem dividir?
A1: [Com a ajuda da professora, divide cada pizza em 6 partes iguais, e depois coloca o nome dos recetores em cada parte - Figura 8].
Prof.: Cada criança come $\frac{1}{6}$ de cada pizza. Por isso, cada criança come $\frac{2}{6}$.
A2: Professora, eu acho que a tarefa não pede isto. Aqui não diz que cada criança tem de comer das duas pizzas! Podia ser 3 crianças para cada pizza… $\frac{1}{3}$ …
A3: Deveria ser $\frac{2}{3}$.
Prof.: Porque é que deveria ser $\frac{2}{3}$?
A2: Eram 3 crianças para cada pizza… dava $\frac{1}{3}$.
Prof.: Nós podíamos também dizer $\frac{1}{3}$ de cada pizza… também está certo… mas nós vamos fazer isto de uma forma geral…

Figura 8. Divisão dos itens, em partes iguais, sugerida pela professora no âmbito de um problema sobre a partilha equitativa de 2 pizzas por 6 crianças

Face à tarefa em causa (ver transcrição acima), um aluno (A2) respondeu que cada criança receberia $\frac{1}{3}$, revelando ter compreendido que poderia realizar a correspondência de uma pizza para cada 3 crianças. Contudo, Maria não se sentiu confortável com esta resposta e induziu o aluno a responder $\frac{2}{6}$. Talvez por entender que o propósito da tarefa seria apenas abordar a representação simbólica da fração na interpretação quociente, Maria desvalorizou o contributo brilhante do aluno, assente no raciocínio proporcional, que lhe permitiu responder $\frac{1}{3}$. Maria tende então a induzir os alunos a apresentar, exclusivamente, uma fração cujos valores do numerador e do denominador sejam iguais, respetivamente, ao número de itens a partilhar e ao número de recetores envolvidos na partilha.

Na reunião após a aula observada, Maria, perante esta mesma tarefa, disse:

> Neste caso, cada criança recebe $\frac{2}{6}$. Também podíamos considerar que cada criança recebe $\frac{1}{3}$ de cada pizza, mas eu queria fazer isto de uma forma geral

> […] Sim… não existe uma forma geral… quis que fosse uma forma de todos compreenderem. […] Claro que poderia ter posto também a hipótese de as pizzas terem o mesmo sabor […] Se podia ter chamado mais atenção para a resposta $\frac{1}{3}$?… Sim, podia… não quis que os alunos se confundissem.

Deste modo, Maria não explorou a possibilidade de os alunos compreenderem que frações distintas podem representar a mesma quantidade, i.e., que $\frac{1}{3}$ e $\frac{2}{6}$ são frações equivalentes, ainda que esta tenha sido uma sugestão de um dos alunos da turma. Maria parece não ter antecipado a possibilidade de os alunos apresentarem respostas alternativas ao problema que selecionou para a aula, apesar de na reunião conjunta se terem antecipado diferentes formas de pensar dos alunos, o que parece ser indicador de que mudanças na prática de ensino não são conseguidas num período tão curto. Maria revelou, assim, fragilidades no domínio do conhecimento de conteúdo e ensino e de conteúdo e alunos.

5.4. *Ordenar frações na interpretação quociente*

Maria apresentou tarefas sobre a ordenação de frações, com numeradores iguais, na interpretação quociente. Os alunos tendiam a responder corretamente, raciocinando sobre a variação proporcional do número de itens e recetores. Por exemplo, aquando da correção de uma tarefa que envolvia as frações $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{2}$ numa situação de partilha equitativa de um bolo entre 3 meninos e de um outro bolo, igual ao anterior, entre 4 raparigas, um aluno argumentou que “o grupo de três meninos iria comer mais porque são menos e têm um bolo… as raparigas são mais… são quatro…”. Maria concluiu que “quanto mais as crianças partilhavam o bolo, menos cada criança comeria”. Este tipo de raciocínio promove a compreensão da relação inversa entre a magnitude da fração e o valor do denominador, quando os numeradores são iguais. Para compreender-se o conceito de fração é fundamental compreender-se esta relação. As dificuldades que os alunos frequentemente apresentam têm origem, justamente, na ausência da compreensão de que, entre números naturais e racionais, há diferentes ideias envolvidas: um erro comum entre os alunos é pensarem que, por exemplo, $\frac{1}{2}$ de uma tablete de chocolate é menor do que $\frac{1}{3}$ da mesma, apenas porque 2 é menor do que 3.

Maria apresentou também tarefas sobre a comparação entre frações com denominadores iguais. Por exemplo, apresentou uma tarefa sobre a comparação entre $\frac{2}{4}$ e $\frac{1}{4}$, estando envolvidas situações quociente (Figura 9). Numa das situações, 1 tablete de chocolate era partilhada equitativamente entre 4 meninos e, numa outra situação, 2 tabletes eram partilhadas entre 4 meninas. Um aluno argumentou que “cada menina come mais porque as meninas têm 2 tabletes de chocolate e os meninos têm apenas 1”. Maria aceitou esta resposta sem fazer qualquer referência ao fato de o número de recetores ser o mesmo, em ambas as situações, apesar de este aspeto ter sido discutido, e aparentemente compreendido, nas reuniões conjuntas. Este último aspeto é fundamental para concluir-se corretamente sobre a ordenação das frações. Assim sendo, não ficou claro se o aluno apenas comparou os inteiros 1 e 2 ou se, de fato, tomou em consideração a magnitude das frações do problema. É essencial promover-se, entre os alunos, a compreensão da diferença que existe entre frações e números inteiros: no âmbito do conjunto de frações, dois símbolos numéricos são utilizados para representar-se uma única quantidade, i.e., é a relação entre os números, e não cada valor independente, que representa a quantidade pretendida.

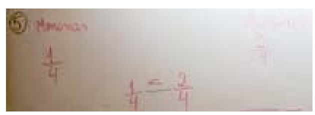


Figura 9. Correção, no quadro, de um problema sobre a comparação entre as frações $\frac{2}{4}$ e $\frac{1}{4}$

Na reunião após a aula Maria reconheceu que pode não ter clarificado devidamente a ideia de que na comparação de frações é menor a fração com menor numerador quando se têm denominadores iguais, ou seja, quando o número de recetores é igual, caso contrário o raciocínio não se aplica:

> Por vezes posso não ter dito que os denominadores são iguais mas essa ideia está lá... o número de meninos era o mesmo em cada situação... Claro que os alunos têm de ter isso presente... O profesor deve ir lembrando... se calhar numa ou outra situação posso não ter sido tão clara... Quando os denominadores não são iguais não se pode pensar assim e os alunos costumam errar nesse tipo de situações... é verdade.

5.5. *A interpretação parte-todo e a unidade de referência*

Maria introduziu os alunos aos significados do numerador e do denominador da fração, na interpretação parte-todo. Depois de apresentar um retângulo dividido em duas partes iguais, referiu que uma das partes podia representar-se por $\frac{1}{2}$: “o denominador representa o número de partes em que o retângulo foi dividido e o numerador representa o número de partes destacadas”. Outras tarefas semelhantes foram apresentadas nesta mesma interpretação. A reação positiva dos alunos manifestou-se nas respostas corretas apresentadas. De fato, Maria fez uma clara introdução à interpretação parte-todo, realçando frequentemente os significados do numerador e do denominador da fração nesta interpretação. Contudo, não discutiu com os alunos qual a unidade de referência relativa a cada tarefa. Mais ainda, não procurou diversificar a mesma, que oscilou sempre entre um círculo, um retângulo, um quadrado, etc. – i.e., tratava-se sempre de um único elemento. Por exemplo, $\frac{1}{3}$ de 1 retângulo em que a unidade de referência é um retângulo não é o mesmo que $\frac{1}{3}$ de 3 retângulos em que a unidade de referência são três retângulos. A abordagem a este último tipo de raciocínio permite uma reflexão sobre o fato de duas frações que são simbolicamente iguais poderem representar quantidades diferentes, dependendo do todo a que se referem.

Maria solicitou também aos alunos a reconstrução de um "todo", sabendo-se que dois quadrados representavam metade da unidade pretendida. Apenas um problema deste tipo foi apresentado. Os alunos não conseguiram responder ao mesmo, aparentemente por não terem entendido aquilo que lhes era pedido. Pode então concluir-se que a ideia de unidade de referência deveria ter sido previamente abordada por Maria, sublinhando-se o fato de que, para obter-se uma resposta correta, deve refletir-se sobre qual a unidade de referência presente em cada problema.

Uma abordagem muito incipiente à ideia de unidade de referência sugere fragilidades docentes nos domínios do conhecimento de conteúdo e ensino e do conhecimento de conteúdo e alunos. Deve por isso selecionar-se um conjunto variado de tarefas, diversificando-se o tipo de unidade para que, desde os anos iniciais de escolaridade, se combatam eventuais ideias incorretas que os alunos frequentemente desenvolvem relativamente à ideia de unidade de referência.

5.6. *Equivalência de frações na interpretação parte-todo*

Maria fez uma introdução à equivalência de frações utilizando $\frac{1}{2}$ e $\frac{2}{4}$, sendo que os alunos tenderam a acompanhar o seu raciocínio. Foi apresentado aos alunos um círculo dividido em 4 partes iguais, estando 2 delas sombreadas (Figura 10). Perante esta situação, os alunos foram questionados sobre se outras frações, para além de $\frac{1}{2}$ e $\frac{2}{4}$, poderiam representar a seção sombreada. Os alunos sugeriram algumas frações equivalentes e Maria concluiu que "quando o numerador é metade do denominador, a fração é equivalente a $\frac{1}{2}$". O excerto de diálogo abaixo transcrito refere-se ao momento de introdução da equivalência de frações na interpretação parte-todo.

Prof.: [Apresenta um círculo dividido em 4 partes iguais] Que fração representa estas 2 partes?

A1: Dois quartos.
Prof.: Existirá alguma fração diferente que também pode representar estas partes?
Avv: Um meio
Prof.: Porquê?
A1: Porque $\frac{2}{4}$ é o mesmo que $\frac{1}{2}$.
Prof.: Muito bem! As frações são equivalentes porque representam a mesma quantidade [escreve no quadro: “$\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$” – Figura 10]. Posso escrever aqui mais frações?
Avv: Sim.
A1: Três sextos.
Prof.: Sempre que o numerador é metade do denominador, a fração é equivalente a $\frac{1}{2}$.

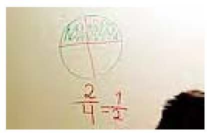


Figura 10. Correção, no quadro, de um problema sobre a equivalência de $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{4}$ na interpretação parte-todo

A introdução clara, de Maria, à equivalência de frações na interpretação parte-todo parece ter sido bem recebida pelos alunos. Porém, e com vista a consolidar-se o conhecimento sobre a equivalência de frações, poderiam ter sido sugeridas tarefas neste âmbito (envolvendo, por exemplo, $\frac{1}{3}$ e $\frac{2}{6}$). Mais ainda, e tendo a equivalência de frações sido já abordada na interpretação quociente, poderia articular-se as interpretações parte-todo e quociente realçando-se o significado dos valores do numerador e do denominador nestas duas interpretações.

Em suma, a equivalência, e acima de tudo a ordenação, de frações na interpretação parte-todo foi abordada de forma demasiado incipiente, o que sugere fragilidades no conhecimento de conteúdo e ensino da professora no conhecimento de conteúdo e alunos. De fato, o domínio da comparação de frações é essencial para a construção de um completo conceito de fração.

5.7. *Articulação entre interpretações de fração*

A abordagem às interpretações de fração foi, de modo geral, demasiado segmentada: a professora raras vezes interpolou tarefas que envolvessem diferentes interpretações de fração — Maria começou por abordar a interpretação quociente, e depois a interpretação parte-todo, sem estabelecer uma articulação entre estas duas interpretações. Este tipo de procedimento sugere que Maria, ou não reconhece a importância da articulação entre interpretações quando se constrói o conceito de fração, ou não se se sente confortável em fazer esta articulação, ou, talvez ainda, ambas as situações. A articulação entre diferentes interpretações de fração promoveria uma consolidação e uma integração de conhecimento, revelando ainda um conhecimento mais forte no domínio do conhecimento pedagógico relativamente ao ensino de frações.

De fato, é consensual, entre os investigadores, a necessidade de proporcionar-se ao aluno a possibilidade de contactar com todas as interpretações de fração. Não se pretende, porém, uma abordagem às interpretações que estipule fronteiras muito rígidas entre as mesmas. Pretende-se, antes, garantir que o aluno tenha a oportunidade, não só de raciocinar em cada uma delas, mas também de articular as mesmas entre si.

6. Discussão e conclusão

Os resultados apresentados revelam o empenho da professora na introdução do conceito de fração aos seus alunos, com recurso à interpretação quociente, abordando a representação, a ordenação e equivalência de frações. Seguidamente, introduziu a interpretação parte-todo, tendo explorado a representação e comparação de frações. Durante as aulas observadas, a docente conseguiu envolver os alunos, motivando-os para este tema. Nesta introdução do conceito de fração nestas interpretações houve uma preocupação da docente em diversificar tarefas e discutir procedimentos de resolução.

Contudo, a professora manifestou algumas fragilidades no seu conhecimento de conteúdo e no conhecimento pedagógico de conteúdo. Surgiram fragilidades nos subdomínios do conhecimento de conteúdo especializado, conhecimento de conteúdo e ensino, e de conteúdo e alunos (Ball *et al.*, 2008; Shulman, 1986) relativamente ao ensino de frações. Na abordagem à interpretação quociente, aquelas fragilidades manifestaram-se no recurso quase sistemático à interpretação parte-todo — reduzindo-se aquela a esta — ainda que as tarefas apresentadas dissessem respeito à interpretação quociente, numa clara evidência de falhas no conhecimento especializado, repercutindo-se no conhecimento pedagógico. Há uma maior familiaridade com a interpretação parte-todo e um recurso frequente a esta interpretação na aula, surgindo dificuldades em manter explicações pedagógicas exclusivamente focadas na interpretação quociente, indicador de um fraco conhecimento especializado, comprometendo o conhecimento pedagógico.

Frequentemente, os alunos foram induzidos a dividir em partes iguais os itens envolvidos numa situação de partilha, mesmo quando tal era claramente desnecessário. Deste modo, os alunos levaram a cabo a divisão do todo em partes iguais em vez de estabelecerem correspondências entre os itens a serem partilhados e os recetores. O esquema de correspondência surge naturalmente na interpretação quociente de fração (ver Mamede *et al.*, 2005; Nunes *et al.*, 2004), uma vez que o numerador e o denominador são, entre si, de naturezas diferentes. Esta divisão desnecessária dos itens evidencia um limitado conhecimento de conteúdo e alunos.

Por outro lado, o esquema de correspondência pode ser a base para o raciocínio proporcional. De acordo com Nunes e Bryant (2007), as crianças têm facilidade em estabelecer correspondências para produzirem partes iguais, ao passo que apresentam mais dificuldades em dividir quantidades contínuas. A utilização do esquema de correspondência promove ainda a compreensão da equivalência de frações, uma vez que os alunos têm, através dele, oportunidade de efetuar o seguinte tipo de raciocínio: se existir o dobro dos itens a serem partilhados e o dobro dos recetores, então a parte que cabe a cada recetor é a mesma. Este tipo de raciocínio é baseado numa relação direta entre as quantidades envolvidas no problema.

Já no esquema de divisão, o raciocínio envolvido é o seguinte: se um todo é cortado no dobro de partes, o tamanho de cada parte será então metade do tamanho inicial. Este segundo tipo de raciocínio é baseado numa relação inversa entre as quantidades envolvidas no problema. Contudo, os alunos compreendem melhor relações diretas do que relações inversas (Nunes e Bryant, 2007; Streefland, 1991). O fraco conhecimento de conteúdo especializado neste âmbito compromete, assim, o conhecimento pedagógico, nomeadamente, o conhecimento de conteúdo e ensino, que afeta as explicações da professora na aula, e o conhecimento de conteúdo e alunos que impossibilita antecipar as dificuldades dos alunos.

Ainda no âmbito da abordagem à interpretação quociente, deve sublinhar-se que a relação inversa entre o valor do denominador e a magnitude da fração — quando o numerador é constante — tende a ser compreendida pelos alunos. Contudo, uma nota deve ser feita à frequente utilização de tarefas, na aula, sobre a ordenação de frações com igual valor de denominador, o que sugere fragilidades docentes no conhecimento de conteúdo e alunos e no conhecimento de conteúdo e ensino (Ball *et al.*, 2008): este último tipo de tarefas promove um sucesso ilusório dos alunos na compreensão da relação inversa entre a magnitude da fração e a magnitude do denominador, uma vez que a simples comparação entre os números inteiros favorece substancialmente uma resposta correta às tarefas. Numa situação deste género, os alunos comparam as frações exclusivamente através dos valores dos numeradores, sem que o seu raciocínio inclua o fato de os denominadores serem iguais, i.e., comparam dois números inteiros em vez de compararem a magnitude das frações. A literatura apresenta dificuldades de alunos dos primeiros anos de escolaridade na ordenação de frações, dificuldades essas decorrentes, justamente, de uma sobrevalorização do método incipiente de comparação acima mencionado. Nunes *et al.* (2006) reporta elevados níveis de sucesso quando alunos dos 4.º e 5.º anos comparavam frações de igual denominador ($\frac{3}{7}$ e $\frac{5}{7}$), tendo-se registado apenas um quarto deste sucesso quando os numeradores eram iguais ($\frac{3}{5}$; $\frac{3}{4}$). Os autores argumentam que, quando os numeradores das frações são iguais e os denominadores são diferentes, os alunos têm de raciocinar sobre a magnitude das frações de uma forma que não acontece nos números naturais. Este fenómento foi também identificado em estudos anteriores (ver Behr *et al.* 1983; Behr *et al.* 1984; Kerslake 1986).

Tal como referido, a professora participante na nossa investigação tendem a reduzir a interpretação quociente à interpretação parte-todo. Contudo, a abordagem a esta interpretação nem sempre foi rigorosa aquando da divisão do todo em partes iguais. Ao introduzir-se um conceito matemático que é novo para os alunos, é particularmente importante que o professor mantenha a precisão e coerência nos procedimentos que adota. Tal requer um bom conhecimento especializado do professor, que lhe permita alicerçar o seu conhecimento de conteúdo e alunos (ver Ball *et al.*, 2008). Todavia, é assinalável a opção por modelos contínuos para trabalhar frações, pois modelos de área ajudam as crianças a compreender o conceito de fração (ver Behr *et al.*, 1983). Os modelos contínuos podem até ser exigentes para o professor, se, por exemplo, o todo estiver dividido em partes desiguais (ver Powell *et al.*, 2022).

Relativamente à interpretação parte-todo, os resultados analisados sugerem fragilidades num outro aspecto: trata-se do papel da unidade de referência, um aspecto essencial na compreensão desta interpretação, tendencialmente pouco abordado na aula. Ao longo das aulas observadas, e no contexto de tarefas sobre a representação pictórica de frações na interpretação parte-todo, a unidade de referência foi compreendida, apenas tacitamente, como o total da figura geométrica apresentada (um retângulo, um círculo, um quadrado), uma vez que não era feita qualquer referência clara a esse aspecto. Diversos autores identificam, justamente, dificuldades dos alunos com a ideia de unidade de referência (ver Hart, 1981; Lesh *et al.* 1987; Post *et al.* 1991; Tirosh *et al.* 1998), o que sugere, mais veementemente, a necessidade de cuidado e de clareza no ensino deste tópico particular.

Ainda no âmbito da interpretação parte-todo, é de assinalar a inclusão de modelos contínuos na abordagem do conceito de fração com os alunos, já que estes constituem um recurso ajustado à compreensão da comparação de frações, sendo, portanto, compatível com o processamento cognitivo dos alunos (ver Powell, 2023). O recurso a estes modelos traduz conhecimento de conteúdo e ensino do professor para ensinar frações. Contudo, a abordagem demasiado incipiente à ordenação e à equivalência de frações sugere fragilidades no conhecimento de conteúdo e ensino, dado que a comparação de frações é essencial para o desenvolvimento de um completo conceito de fração. Este tópico deve pois ser incluído na planificação de aulas dos professores, relativamente a todas as interpretações.

No ensino das frações é ainda importante que sejam criadas oportunidades de os alunos estabelecerem relações entre as várias formas de representação de frações. Contudo, este aspecto raramente foi promovido nas aulas observadas, onde, geralmente, as tarefas tendem a ser implementadas de uma forma segmentada, i.e., quando uma interpretação de fração é utilizada, apenas tarefas nessa interpretação são selecionadas. Estas opções didáticas implicam uma inconveniente ausência de articulação entre interpretações de fração, o que espelha falta de conhecimento de conteúdo especializado e, consequentemente, falta de conhecimento didático. Na verdade, é desejável que, à medida que os alunos vão aprendendo novas interpretações de fração, a seleção de tarefas inclua também as interpretações de fração anteriormente abordadas. Segundo Bright *et al.* (1988), os professores parecem inter-articular facilmente os diferentes modos de representação, embora, muitas vezes, não estejam conscientes de que fazem essa articulação. Os mesmos autores, porém, fazem a ressalva de que os alunos precisam de ajuda concreta para aprender a realizar tais articulações.

Em suma, os resultados do presente estudo sugerem algumas fragilidades no conhecimento de conteúdo e pedagógico de conteúdo da professora, relativamente ao ensino das frações. Apesar de não serem passíveis de uma generalização, os resultados obtidos sugerem fragilidades que podem facilmente ser identificadas junto de outros professores portugueses do 1.º Ciclo do Ensino Básico. Foi com manifesto entusiasmo que a docente aqui em causa se dedicou ao ensino de frações aos seus alunos, mas cedo se apercebeu de que este é um tópico matemático desafiante e difícil de ensinar, tendo em conta a sua complexidade e a sua novidade nos primeiros anos de escolaridade. Apesar de diversos assuntos sobre frações e seu ensino terem sido discutidos nas reuniões conjuntas, foram várias as dificuldades de Maria em ensinar frações. Este facto sugere ser necessário um trabalho colaborativo mais prolongado no tempo, para dar oportunidade ao professor de conseguir mudanças efetivas, que assegurem práticas de qualidade. As fragilidades da docente aqui identificadas sugerem também que as modificações nas orientações curriculares nem sempre são acompanhadas de correspondentes modificações nas práticas de ensino.

Assim, deveria ser regularmente disponibilizada formação contínua aos professores, preferencialmente intercalada com aulas observadas. Mais ainda, impõe-se uma reflexão séria sobre o tipo de formação de professores atualmente proporcionada. Futuros professores e professores em exercício deveriam ser sensibilizados para estes aspectos através da discussão e reflexão sobre os mesmos, com base na investigação mais recente, aumentando, assim, a ligação entre a investigação e a prática, melhorando as suas crenças sobre o ensino de frações e promovendo práticas de ensino de qualidade. Por último, mais investigação é necessária relativamente ao ensino de frações, tanto na realidade portuguesa como noutros países, com vista a melhoria do seu ensino e aprendizagem.

Agradecimentos

Este trabalho foi financiado por Fundos Nacionais através da FCT – Fundação para a Ciência e a Tecnologia no âmbito dos projetos do CIEC (Centro de Investigação em Estudos da Criança da Universidade do Minho) com as referências UIDB/00317/2020 e UIDP/00317/2020.

Referências

Alvarez, M. (2010). Dificultades experimentadas por el maestro de primaria en la enseñanza de fracciones. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 13*(4-II), 423-440.

Boavida, A. M. e Ponte, J. P. (2002). Investigação colaborativa: Potencialidades e problemas. Em GTI (Org.), *Reflectir e investigar sobre a prática profissional* (pp. 43-55). APM.

Ball, D., Hill, H. e Bass, H. (2005). Knowing Mathematics for Teaching. Who knows mathematics well enough to teach third grade, and how can we decide? *American Educator, 29*(3), 14-46.

Ball, D., Thames, M. e Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching: What Makes It Special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389-407.

Behr, M., Harel, G., Post, T. e Lesh, R. (1992). Rational Number, Ratio, and Proportion. Em D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 296-333). MacMillan Publishing Company.

Behr, M., Lesh, R., Post, T. e Silver, E. (1983). Rational-Number Concepts. Em R. Lesh e M. Landau (Eds.), *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes* (pp. 92-127). Academic Press.

Behr, M., Wachsmuth, I., Post, T. e Lesh, R. (1984). Order and Equivalence of Rational Numbers: A Clinical Teaching Experiment. *Journal for Research in Mathematics Education*, *15*(5), 323-341.

Bogdan, R. e Biklen, S. (2010). *Investigação qualitativa em educação: Uma introdução à teoria e aos métodos*. Porto Editora.

Bright, G., Behr, M., Post, T. e Wachsmuth, I. (1988). Identifying fractions on number lines. *Journal for Research in Mathematics Education*, *19*(3), 215-232.

Cardoso, P. e Mamede, E. (2021). Ensinar frações nos primeiros anos de escolaridade. In E., Mamede, H. Pinto e C. Monteiro (Eds.). *Contributos para o desenvolvimento do sentido de número racional* (pp. 247-268). APM.

Cardoso, P. e Mamede, E. (2023). Saber e ensinar frações: concepções e práticas de professores do ensino fundamental. *Educação E Pesquisa*, *49*, e261007. https://doi.org/10.1590/S1678-4634202349261007

Copur-Gencturk, Y. (2021). Teachers' conceptual understanding of fraction operations: results from a national sample of elementary school teachers. *Educational Studies in Mathematics*, *107*, 525–545. https://doi.org/10.1007/s10649-021-10033-4

Day, C. (2001). *Desenvolvimento profissional de professores: Os desafios da aprendizagem permanente*. Porto Editora.

Direção Geral de Educação. (2021). *Aprendizagens Essenciais de Matemática para o 1.º ciclo do Ensino Básico*. DGE. https://www.dge.mec.pt/noticias/aprendizagens-essenciais-de-matematica

Hart, K. (1981). Fractions. Em K. Hart (Ed.), *Children's Understanding of Mathematics: 11-16* (pp. 66-81). John Murray Publishers.

Kerslake, D. (1986). *Fractions: Children's Strategies and Errors – A Report of the Strategies and Errors in Secondary Mathematics Project*. NFER-NELSON.

Kieren, T. (1976). On the Mathematical, Cognitive and Instructional Foundations of Rational Numbers. Em R. Lesh (Ed.), *Number and Measurement: Paper from a Research Workshop* (pp. 101-144). ERIC/SMEAC.

Kieren, T. (1993). Fractional numbers: from quotient fields to recursive understanding. Em T. P. Carpenter, E. Fennema e T. Romberg (Eds.), *Rational Numbers: An Integration of Research* (pp. 49-84). Erlbaum.

Li, Y. e Kulm, G. (2008). Knowledge and confidence of pre-service mathematics teachers: the case of fraction division. *ZDM Mathematics Education*, *40*, 833–843. https://doi.org/10.1007/s11858-008-0148-2

Lieberman, A. (1992). The meaning of scholarly activity and the building of community. *Educational Researcher*, *21*(6), 5-12.

Lesh, R., Post, T. e Behr, M. (1987). Representations and Translations among Representations. Em C. Janiver (Ed.), *Problems of Representations in the Teaching and Learning of Mathematics* (pp. 33-40). Lawrence Erlbaum.

Mack, N. (2001). Building on Informal Knowledge Through Instruction in a Complex Content Domain: Partitioning, Units, and Understanding Multiplication of Fractions. *Journal for Research in Mathematics Education*, *32*, 267-295.

Mamede, E., Nunes e T., Bryant, P. (2005). The equivalence and ordering of fractions in part-whole and quotient situations. In Chick, H. L. e Vincent, J. L. (Eds.), *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 281-288). University of Melbourne.

Mamede, E., Ribeiro, C. e Pinto, H. (2021). Conhecimento de futuros professores do ensino básico sobre frações. In E. Mamede, H. Pinto e C. Monteiro (Eds.), *Contributos para o desenvolvimento do sentido de número racional* (pp. 205-219). APM.

Monteiro, C. e Pinto, H. (2005). A Aprendizagem dos números racionais. *Quadrante*, *14*(1), 89-104.

Nunes, T. e Bryant, P. (2007). Paper 3: Understanding rational numbers and intensive quantities. *Key understandings in mathematics learning* (pp. 1-31). Nuffield Foundation.

Nunes, T. e Bryant, P. (2008). Rational Numbers and Intensive Quantities: challenges and Insights to Pupils' Implicit Knowledge. *Anales de Psicología*, *24*(2), 262-270.

Nunes, T., Bryant, P., Pretzlik, U., Evans, D., Wade. J. e Bell, D. (2004). Vergnaud's definition of concepts as a framework for research and teaching. Em *Annual Meeting for the Association pour la Recherche sur le Développement des Compétences*.

Nunes, T., Bryant, P., Hurry, J. e Pretzlik, U. (2006). Fractions: Difficult but Crucial in Mathematics Learning. *Teaching and Learning Research Programme, 13,* 1-4. http://www.tlrp.org/pub/documents/no13_nunes.pdf

Pinto, H. e Ribeiro, C. (2013). Conhecimento e formação de futuros professores dos primeiros anos – o sentido de número racional. *Da Investigação às Práticas*, *3*(1), 80-98.

Ponte, J. (2001). A investigação sobre o professor de Matemática: Problemas e perspectivas. *Educação Matemática em Revista*, *11*, 10-13.

Post, T., Harel, G., Behr, M. e Lesh, R. (1991). Intermediate Teachers' Knowledge of Rational Number Concepts. Em E. Fennema, T. Carpenter e S. Lamon (Eds.), *Integrating research on teaching and learning mathematics* (pp. 177-198). State University of NY Press.

Powell, A. (2023). Enhancing students' fraction magnitude knowledge: A study with students in early elementary education. *The Journal of Mathematical Behavior*, *70*, 101042. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2023.101042

Powell, A., Alqahtani, M., Temur, O. e Tirnovan, D. (2022). Elementary school teachers' understanding of unit fractions. *Boletim Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática*, *80*, 231–248. https://doi.org/10.4322/gepem.2022.05

Roldão, M. (2007). Colaborar é preciso – Questões de qualidade e eficácia no trabalho dos professores. *Noesis*, *71*, 24-29.

Saraiva, M. e Ponte, J. (2003). O trabalho colaborativo e o desenvolvimento profissional do professor de Matemática. *Quadrante*, *12*(2), 25-52.

Shulman, L. S. (1986) Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, *15*(2), 4-14.

Streefland, L. (1991). *Fractions in Realistic Mathematics Education: A Paradigm of Developmental Research*. Kluwer Academic Publishers.

Tirosh, D., Fischbein, E., Graeber, A. e Wilson, J. (1998). *Prospective elementary teachers' conceptions of rational numbers.* The United States-Israel Binational Science Foundation. http://jwilson.coe.uga.edu/Texts.Folder/Tirosh/Pros.El.Tchrs.html

Yin, R. (2010). *Estudo de caso. Planejamento e métodos* (4.ª ed.). Bookman.

Autoras

Paula Cardoso. CIEC-Universidade do Minho. Braga, Portugal. paula.c.cardoso@outlook.com

https://orcid.org/0000-0001-5798-7107

Ema Mamede. CIEC-Universidade do Minho. Braga, Portugal. emamede@ie.uminho.pt

https://orcid.org/0000-0002-1623-8406

La *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (Relime)* es una revista científica indizada que busca diseminar nuevo conocimiento y resultados de investigación en Matemática Educativa, es decir, *relativos a los procesos de enseñanza y de aprendizaje particulares del conocimiento matemático*, en escenarios y contextos diversos. *Publica cuatrimestralmente* artículos inéditos y arbitrados, con resultados originales de investigación científica en español, portugués, inglés y francés. Está dirigida a investigadores, docentes de Matemáticas y Ciencias, estudiantes de licenciatura y posgrado y tomadores de decisiones relacionados con el campo disciplinar.

La Relime es la publicación oficial de investigación del *Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C. (Clame),* asociación científica y académica sin fines de lucro. Actualmente, la Relime se edita y pública desde la Ciudad de México, México.

Los objetivos de la Relime son:

- Ser un foro abierto a las diversas escuelas del pensamiento (paradigmas, teorías, metodologías, métodos, enfoques) en nuestra disciplina, la Matemática Educativa; sin definir perspectivas únicas y con un profundo respeto a las tradiciones educativas y los contextos de los diversos sistemas educativos de nuestra región.
- Dar a conocer resultados de investigación original en Matemática Educativa que se realizan en América Latina y el Caribe, y en el resto del mundo.
- Fomentar una cultura de divulgación e investigación entre los distintos grupos de investigación en nuestra región.
- Propiciar el debate y la reflexión profunda sobre problemas de investigación que fortalezca la disciplina en nuestra área geográfica.
- Fortalecer la calidad de la investigación en Matemática Educativa y la vinculación entre comunidades nacionales e internacionales.

Las contribuciones enviadas a la Relime deben ser manuscritos originales (nuevo conocimiento) e inéditos (no haber sido publicados en ningún otro medio, ni estar en proceso de evaluación en otra revista), pertinentes y relevantes para la Matemática Educativa.

En cada número, la Relime publica una editorial y cuatro artículos con una política de acceso abierto vía diamante. Los artículos pueden ser:

- *Artículos de investigación empírica*: son aquellos cuyos resultados provienen de estudios clínicos o *in situ*.

- *Artículos de investigación documental*: son aquellos cuyos resultados provienen de estudios sobre el curriculum, libros de texto, historia de la educación, entre otros.
- *Ensayos teóricos y filosóficos*: Texto producto del estudio y la reflexión académica de un tópico de interés para la comunidad científica en Matemática Educativa.
- *Revisiones bibliográficas*: Estados del arte, delimitados, sobre tópicos especializados en nuestro campo disciplinar. La revisión debe contribuir en el entendimiento profundo del tópico y proporcionar un análisis académico y crítico sobre las aportaciones de la investigación, así como trazar una prospectiva original para su estudio.

Se reciben manuscritos dentro de los periodos: *1 de enero al 30 de junio*,y *1 de septiembre al 31 de octubre*. Estos deben presentarse en versión electrónica, vía correo electrónico a *editorial@relime.org*; deben ser de una extensión máxima de 9,000 palabras en su primer envío, sin excepciones, incluyendo cuadros, gráficas, referencias y anexos; tener una redacción clara, buena ortografía y una estructura coherente al tipo de artículo enviado.

Para más información sobre el formato de las contribuciones y las normas editoriales de la Relime, favor de visitar la página oficial de la revista *https://relime.org*

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa

Volumen 26, Número 2

Diseño digital:
LDG. Emilio Serna Hernández
Recrea. Soluciones infinitas
sernandem@yahoo.com.mx

Se imprimió en los talleres de
Editorial Progreso S.A. de C.V.
Sabino # 275
Col. Santa María la Ribera
Alcaldía Cuauhtémoc
06400, CDMX, México

Julio de 2023
Impresión bajo demanda