Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa

Departamento de Matemática Educativa – Cinvestav
AP 14-740, México 07000, CDMX
M É X I C O

Publicación oficial de investigación del Comité Latinoamericano de Matemática Educativa, Clame A.C. Consejo Directivo: *Presidente:* Olga Lidia Pérez González – Cuba; *Secretario:* Hugo Parra Sandoval – Venezuela; *Tesorera:* Daniela Reyes Gasperini – Argentina; *Vocal Norteamérica:* Rebeca Flores García – México; *Vocal Caribe:* Juan Mazueta Concepción – República Dominicana; *Vocal Centroamérica:* Rodolfo Fallas Soto – Costa Rica*; Vocal Sudamérica:* Marcela Parraguez González – Chile.

Publicación cuatrimestral. Se publica en los meses de marzo, julio y noviembre. Vol. 22, Núm. 1, marzo, 2019. Tiraje 1,000 ejemplares. Suscripciones: suscripcion@relime.org. Contribuciones e información: relime@clame.org.mx, http://www.clame.org.mx.

Relime es una revista indizada en:
ISI Web of Knowledge, SSCI – Social Sciences Citation Index y Journal Citation Reports • ERIH – European Reference Index for the Humanities • Conacyt – Índice de Revistas Mexicanas de Investigación Científica y Tecnológica • Scopus – Elsevier Database • ZDM – Zentralblatt für Didaktik der Mathematik • IBZ – International Bibliography of Periodical Literature in the Humanities and Social Sciences • Clase – Citas Latinoamericanas en Ciencias Sociales y Humanidades • Iresie – Índice de Revistas de Educación Superior e Investigación Educativa • Latindex – Sistema Regional de Información en Línea para Revistas Científicas de América Latina, el Caribe, España y Portugal • Redalyc – Red de Revistas Científicas de América Latina y el Caribe, España y Portugal • EBSCO – Information Services • Dialnet • Scielo-México – Scientific Electronic Library Online • Thomson Gale – Gale Iberoamérica.

2019 Impreso en México

Volumen 22 – Número 1 – 2019

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa

Clame Comité Latinoamericano de Matemática Educativa

Publicación oficial del Comité Latinoamericano de Matemática Educativa

2019

Volumen 22 Número 1 Marzo de 2019

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa

EDITORIAL

ARTÍCULOS

REVISTA LATINOAMERICANA DE INVESTIGACIÓN EN MATEMÁTICA EDUCATIVA, RELIME, es la publicación de investigación oficial del Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C. Editada por el Colegio Mexicano de Matemática Educativa, A. C., calle Av. Instituto Politécnico Nacional, 2508, Col. San Pedro Zacatenco, Delegación Gustavo A. Madero, C.P. 07360, Tel. (55) 57473819, www.relime.org, relime@clame.org.mx. Director responsable: Ricardo Cantoral.

Reservas de Derechos al Uso Exclusivo, No. 04-2016-110914351000-102, con ISSN: 1665-2436, para el formato impreso; y No. 04-2016-110413025500-203, con e-ISSN: 2007-6819, para el formato digital; otorgados por el Instituto Nacional del Derecho de Autor. RFC: CMM 040505 IC7. Publicación cuatrimestral. Se publica en los meses de marzo, julio y noviembre, con el financiamiento del Clame. El Volumen 22, Número 1, se terminó de imprimir en marzo de 2019, con un tiraje de 1,000 ejemplares más sobrantes.

Impresa por Editorial Progreso, S. A. de C. V., Sabino No. 275, Col. Sta. María la Ribera, C.P. 06400, Delegación Cuauhtémoc, México, CDMX.

EDITORIAL

RELIME: CONSTRUCCIÓN, DESARROLLO Y CONSOLIDACIÓN ¿A DÓNDE NOS DIRIGIMOS?

RELIME: CONSTRUCTION, DEVELOPMENT AND CONSOLIDATION, WHERE ARE WE GOING TO?

RICARDO CANTORAL URIZA, DANIELA REYES GASPERINI, BENITO CASTRO PÉREZ, DIANA WENDOLYNE RÍOS JARQUÍN
Departamento de Matemática Educativa - Cinvestav, IPN México

Desde su fundación, la *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* (*Relime*) ha sido parte de un amplio proyecto disciplinar cuyas medidas de acción han sido lideradas por grupos activos de miembros de una comunidad de referencia: la Matemática Educativa en Latinoamérica. La revista surge con un objetivo dual; el de promover y fomentar la escritura de artículos de investigación de alta calidad en la región, así como favorecer el proceso de profesionalización de la disciplina en beneficio de los sistemas educativos de América Latina (Farfán, 1997). Este objetivo, si bien aún no alcanzado plenamente, ha sido un factor de desarrollo en la región y en el orbe.

Por dicha razón consideramos que *Relime* tuvo que transitar por tres periodos que refieren no sólo a su constitución como publicación científica, sino a la consolidación y al desarrollo de su disciplina de referencia, la Matemática Educativa, los cuales son: la construcción de una identidad disciplinar, la consolidación institucional y la consolidación internacional (Cantoral, 2011a).

El primer periodo se caracteriza por el reconocimiento de *Relime* como referente de la publicación científica de la disciplina en lenguas latinas de América Latina. Si bien ya existían revistas interesadas en publicar resultados de investigaciones sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas o de las ciencias, la realidad es que éstas atendían aspectos que no necesariamente

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (2019) *22* (1): 5-10.
DOI: 10.12802/relime.19.2210

correspondían con aquéllas de la comunidad latinoamericana cuyas problemáticas devenían propias de los rasgos distintivos regionales.

Así, en el primer lustro de *Relime* las investigaciones publicadas en sus páginas, de procedencia latina, se enmarcaron principalmente en enfoques sociales, didácticos y cognitivos, siendo los sociales los de mayor incidencia (50%); este hecho en sí resultó una característica de lo que nos depararía el futuro, serían tendencia en tradiciones teóricas de las publicaciones de la Revista, y más aún, resultó también ser un indicador de la constitución de una tradición científica dentro de la Matemática Educativa.

Como parte de este proceso de consolidación, la Revista publica su primer número especial en el cual se discuten temáticas de actualidad e importancia en la investigación científica del momento: Semiótica, Cultura y Pensamiento Matemático, donde participan colegas de destacada trayectoria académica en el contexto regional e internacional (Farfán, 2006).

El segundo periodo que, al igual que el primero, comprende los primeros años de *Relime*, está conformado por la constitución del Comité Latinoamericano de Matemática Educativa – Clame, como una Asociación Civil sin fines de lucro, destinada a fomentar la investigación de calidad, promover la actualización y profesionalización docente para el desarrollo científico, tecnológico y social de la región de campo de la Matemática Educativa (MatEdu). De este modo, la consolidación institucional a través del Clame se impulsa de manera conjunta por la consolidación regional de *Relime*, pues en 2005 la revista forma parte del Índice de Revistas Mexicanas de Investigación Científica y Tecnológica del Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (Farfán, 2005), además de que ingresa a bases de datos como Redalyc, Latindex y Dialnet, entre otras.

Más aún, el ingreso de *Relime* en las bases de datos regionales e internacionales (2006), la publicación de investigaciones no sólo en castellano, sino en portugués, inglés y francés en 2004, trajo consigo un nuevo reto: la consolidación internacional multilingüe.

En este punto, la MatEdu se consolida institucionalmente, y con ello, la colaboración de autores procedentes de diversos países se amplía, ya sea por el fortalecimiento de los posgrados o por las redes de producción académica. Maz, Jiménez, Bracho y Adamuz (2015) en un estudio bibliométrico de *Relime* entre 1997 y 2011, analizaron 182 artículos y obtuvieron el porcentaje de participación por país de procedencia de los autores. Para hacer una comparación en *Relime* se hizo el análisis de 1997 a 2018 con 368 artículos. Los resultados se muestran a continuación (tabla i):

TABLA I.
Porcentaje de participación de autores por continente de procedencia

CONTINENTE	*1997-2011 (182 artículos)*	*1997-2018 (368 artículos)*
América	61.55% 8 países	57.2% 11 países
Europa	39.02% 8 países	41.5% 11 países
África, Asia y Oceanía	0.55% 1 país	0.64% 3 países

El porcentaje de colaboración de autores procedentes de los diferentes continentes ha crecido; cabe destacar que actualmente hay artículos cuyos autores proceden de Asia y Oceanía. A pesar de que en América el porcentaje de participación de autores de la región se redujo, los países de procedencia de los autores aumentaron. Estos datos refrendan la idea que planteó Cantoral (2011b) acerca del reconocimiento de *Relime* como un foro abierto donde las teorías y tradiciones científicas de la disciplina cohabitan.

Dada la naturaleza de origen de *Relime* y su rol de liderazgo en la producción científica regional, será posible reconocer cómo se ha desarrollado la MatEdu a través de ella. El gráfico 1 muestra los marcos teóricos correspondientes a los artículos publicados en los periodos mencionados, aunque en los primeros años de *Relime* (periodo 1) los enfoques cognitivo, didáctico, histórico y social tuvieron una incidencia similar, es claro que las investigaciones de corte sociocultural han predominado progresivamente en la publicación completa de la revista (1997-2018) y que emergieron nuevos referentes teóricos como Modelación y Educación Estadística. Aun si antes de 2011 las investigaciones de corte cognitivo fueron fuertemente desarrolladas, éstas han disminuido considerablemente en los últimos años, y lo mismo sucede con las provenientes del enfoque semiótico.

En tiempos de consolidación internacional, las investigaciones clasificadas dentro del *enfoque didáctico* (resolución de problemas, teoría de las situaciones didácticas, didáctica fundamental, entre otras), y *social* (socioepistemología, concepciones y creencias, etnomatemática, género), entre otras, predominan en las publicaciones recientes de la Revista; el caso de las investigaciones que *no mencionan* explícitamente un marco teórico, sino que hacen uso de elementos teóricos diversos para su análisis de datos, refiere a estudios de corte interpretativo - descriptivo que aportan evidencia importante para líneas de investigación emergentes o de poca tradición en la región, como aquella relacionada con la formación docente, la educación inclusiva o el uso de tecnología (véase gráfico 1).

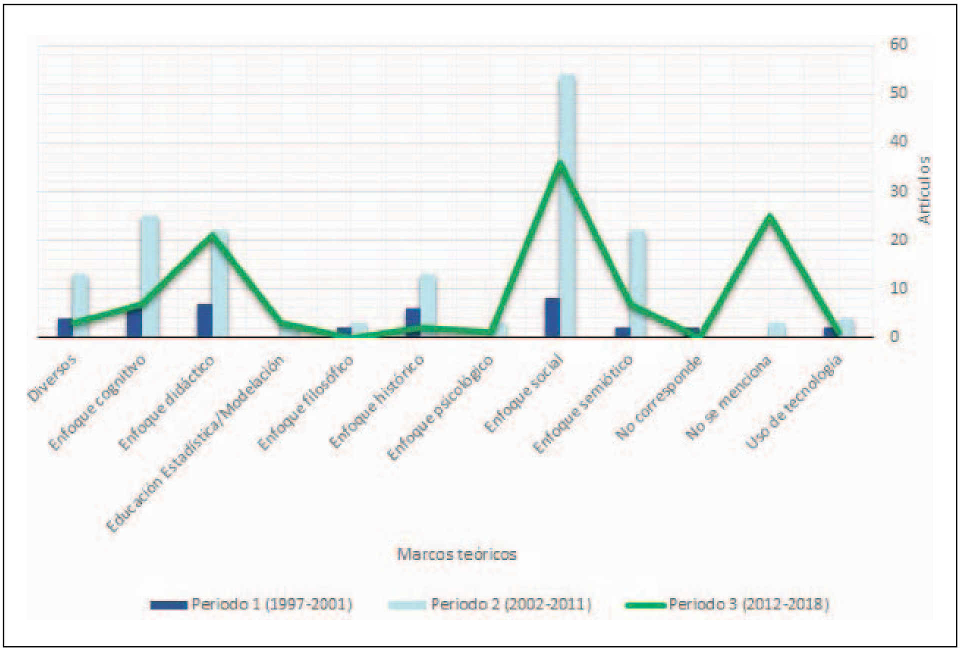

Gráfico 1. Enfoques de las investigaciones publicadas en *Relime*

Como resultado de la colaboración entre los miembros de la comunidad de MatEdu, hacia 2007 *Relime* se había posicionado en las bases de datos más relevantes de la especialidad y de la comunidad científica regional y mundial.

Actualmente *Relime* lleva 10 años indexada en una de las bases de datos científicas más consolidadas del mundo como es ISI Web of Science, lo cual le da reconocimiento y visibilidad sobresaliente a la comunidad académica latinoamericana. Así mismo seguimos incluidos en las bases de datos regionales más destacadas como SciELO, Redalyc y Latindex (véase tabla ii).

La permanencia en todas estas bases de datos, índices y directorios muestra una constante actualización de *Relime* y sus procesos editoriales, ya que los criterios de permanencia son cambiantes y cada vez más exigentes y rigurosos. Las implicaciones de esto para la disciplina versan principalmente sobre la visibilidad, que no sólo corresponde a los artículos como resultados de investigaciones locales, ni las teorías en las cuales se enmarcan, también abren una ventana para exponer a la comunidad científica las problemáticas actuales que se desarrollan en la MatEdu de la región.

TABLA II.
Bases de datos, índices y directorios en los que se encuentra incluida *Relime*

	BASES DE DATOS	*INDICADORES*
REGIONALES	Redalyc	Decil: 4. índice de Internacionalización: G15
	SciELO	Clasificación 2016: Q2 H index: 6
	Latindex	Todos los criterios cumplidos
	Clase	246 artículos indexados
	Iresie	222 artículos indexados
	Dialnet	Clasificación Ciencias Sociales: B Clasificación Ciencias Humanas: D
	Sistema de Clasificación de Revistas de Ciencia y Tecnología de CONACYT	Clasificación Q4
INTERNACIONALES	ISI Web of Science	Journal Impact Factor: 0.650
	Scopus	H index: 6
	DOAJ	No aplica
	IBZ	No aplica
	ErihPlus	No aplica
	Google Académico	Lugar 87 de las 100 revistas más importantes en español. H5-Index: 15 h5-media: 20

Cabe destacar que *Relime* se ha ido adaptando a los procesos editoriales y ha transitado, no sin dificultad, al mundo digital (Montiel, 2017), adoptando medidas como el identificador único para objetos digitales (DOI), la marcación electrónica de los metadatos de los artículos en formato XML o el uso de otros formatos que permiten la interoperabilidad, entre otros procesos. De igual manera, seguimos manteniendo y afianzando algunas tradiciones editoriales latinoamericanas como lo es la publicación en formatos de *acceso abierto*, el no cobro de APC (cargos por publicación) y el uso de licencias que permiten al autor compartir y autoarchivar sus artículos. Todo esto ha llevado a que *Relime* sea la revista donde los procesos y tradiciones editoriales cohabitan. Un reto mayor.

Todo lo anterior se debe en gran medida a que *Relime* defendió desde siempre la filosofía de origen:

> *… favorecer la consolidación de una comunidad profesional de matemáticos educativos (didactas de la matemática o educadores matemáticos). En ese sentido, su impacto tiene también una connotación de naturaleza social, pues la revista es parte de una estrategia para construir comunidad, y en ese camino* Relime *habrá de seguir en los siguientes años* (Cantoral, 2007).

Por tanto, los retos actuales que se propone la Revista van más allá del solo posicionamiento en los índices, pues reconocemos que la visibilidad e impacto de la investigación se compone de distintas dimensiones: la institucional, la disciplinar y en gran medida la social. Las dos primeras las hemos discutido en este espacio editorial, pero ¿es posible medir el impacto que la investigación tiene a nivel de la sociedad?, ¿cómo?, ¿cómo podríamos ponderar el impacto social que tienen los artículos de *Relime*?

¿Cómo podríamos saber si las investigaciones publicadas en *Relime* llegan al aula con el colectivo docente o el estudiantado, al equipo de diseño curricular o al equipo de planeación educativa? ¿Cómo podemos acaso saber quiénes leen asiduamente nuestras páginas?

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Cantoral, R. (2007). Índices, Bases de citas y factor de impacto... ¿Una política editorial para RELIME? *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 10*(2), 185–190.

Cantoral, R. (2011a). La escuela latinoamericana de matemática educativa. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 14*(1), 5–8.

Cantoral, R. (2011b). Quince años y nuevos retos para Relime. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 14*(3), 275–276.

Farfán, R. M. (1997). Presentación. Historia y objetivos del Clame. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 1*(0), 26.

Farfán, R. M. (2005). Editorial. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 8*(1), 4–5.

Farfán, R. M. (2006). Editorial. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, Num. Esp. 9*(4), 4–5.

Maz, A., Jiménez, N., Bracho, R., & Adamuz, N. (2015). Análisis bibliométrico de la revista RELIME (1997-2011). *INVESTIGACIÓN BIBLIOTECOLÓGICA, 29*(66), 91–104. http://dx.doi.org/10.1016/j.ibbai.2016.02.027

Montiel, G. (2017). La transición de Relime al contexto editorial digital. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 20*(1), 5–8. https://doi.org/10.12802/relime.17.2010

Eurivalda Santana, Lurdes Serrazina, Célia Nunes

CONTRIBUIÇÕES DE UM PROCESSO FORMATIVO PARA O DESENVOLVIMENTO PROFISSIONAL DOS PROFESSORES ENVOLVIDOS

Contributions of a formative process for the professional development of teachers involved

RESUMEN

Este artículo tiene como objetivo analizar las perspectivas que las profesoras hacen sobre un proceso formativo en el que participaron y cómo ese proceso contribuye a su desarrollo profesional. El estudio se refiere a un proyecto de formación de 17 profesoras, del primero al noveno año de escolaridad realizado por el Grupo de Investigación en Educación Matemática, Estadística y en Ciencias (gpemec). Los datos fueron recogidos en fichas de evaluación de formación (al final de cada sesión de trabajo), cuestionario de evaluación final y entrevistas semiestructuradas. La formación tenía como objetivo intervenir en la práctica de los profesores en los ejes de conocimiento curricular de las matemáticas: Estadística y Geometría. Los resultados apuntan a que las profesoras reconocen que el proceso formativo trae beneficios para su práctica en el aula, representa desafíos para su propio aprendizaje y la del estudiante, además de ayudarlas en la superación de dificultades, mejoras en sus prácticas y reflexiones sobre la enseñanza.

PALABRAS CLAVE:

- *Desarrollo profesional*
- *Proceso formativo*
- *Conocimiento didáctico*
- *Conocimiento curricular de las matemáticas*

ABSTRACT

This article aims to analyze the perspectives of the teachers about a formative process, in which they participated, and how this process contributes to their professional development. The research refers to an education project of 17 female teachers, from the 1st to the 9th year of schooling, carried out by the Mathematics, Statistics and Sciences Education Research Group (gpemec). The analyzed data were collected through the training evaluation sheets (at the end of each working session), the final evaluation questionnaire and semi-structured interviews. The purpose of the education was to intervene in teachers' practice in the axes of curricular knowledge of mathematics: Information Processing and Geometry. The results show that the teachers recognize that the education process elicits benefits for their classroom practice, bring challenges to their own learning and that of the student, overcoming difficulties, improvement of practice and reflections on teaching.

KEY WORDS:

- *Professional development*
- *Formative process*
- *Didactical knowledge*
- *Curricular knowledge of mathematics*

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (2019) *22* (1): 11-38.
Recepción: Noviembre 6, 2017 / Aceptación: Febrero 11, 2019. DOI: 10.12802/relime.19.2211

RESUMO

Este artigo tem por objetivo analisar as perspetivas das professoras sobre um processo formativo de que participaram e como esse processo contribui para o seu desenvolvimento profissional. O estudo refere-se a um projeto de formação de 17 professoras, do 1º ao 9º ano de escolaridade, realizado pelo Grupo de Pesquisa em Educação Matemática, Estatística e em Ciências (GPEMEC) e tem por base fichas de avaliação da formação, questionário avaliativo final e entrevista semiestruturada. A formação tinha por finalidade intervir na prática dos professores nos eixos de conhecimento curricular da matemática: Tratamento da Informação e Geometria. Os resultados apontam que as professoras reconhecem que o processo formativo proporciona benefícios para a sua prática em sala de aula, traz desafios para a sua própria aprendizagem e a do estudante, superação de dificuldades, melhorias da prática e reflexões sobre o ensino.

PALAVRAS CHAVE:

- *Desenvolvimento profissional*
- *Processo formativo*
- *Conhecimento didático*
- *Conhecimento curricular da matemática*

RÉSUMÉ

Cet article vise analyser les perspectives des enseignantes sur un processus de formation, auquel elles ont participé, et comment ce processus contribue à leur développement professionnel. L'étude fait référence à un projet de formation de 17 enseignants, du 1er au 9e année de l'école primaire, effectué par le Groupe de Recherche sur l'Education Mathématiques, Statistiques et des Sciences (GPEMEC). Les données ont été recueillies en fiches d'évaluation de formation (à la fin de chaque session de travail), questionnaire final évaluative et entretiens semi-structurées. La formation était pour le but, d'intervenir dans la pratique des enseignants par apport aux connaissances curriculaires des mathématiques: Traitement de l'information et la Géométrie. Les résultats montrent que les enseignants reconnaissent que le processus de formation énumère les avantages pour leurs pratiques en classe, apporte des défis pour leur propre apprentissage et des étudiants, surmonter les difficultés, améliorations des pratiques et des réflexions sur l'enseignement.

MOTS CLÉS:

- *Développement professionnel*
- *Processus de formation*
- *Connaissances didactiques*
- *Connaissances curriculaires des mathématiques*

1. Introdução

No Brasil, diferentes ações no âmbito da pesquisa e de ações governamentais têm sido implementadas ao longo dos anos na formação do professor, seja ela inicial ou continuada, contudo, muito ainda precisa ser feito para que, efetivamente, essas ações se repercutem na aprendizagem dos estudantes. Acreditamos que, para atingir esse objetivo, é preciso que a formação proporcione um diálogo com a prática do professor na sala de aula, numa relação direta entre o conhecimento didático, a prática e o conhecimento curricular da matemática.

O conhecimento didático refere-se aos aportes teóricos e metodológicos que podem auxiliar no momento de planejar e no momento de realizar a prática na aula e está em sintonia com o campo científico da didática colocado por Ponte (1999), envolvendo trabalho empírico e teórico. Constitui-se o trabalho empírico numa "perspectiva experimental e uma íntima ligação com a prática" (p. 6) e o teórico, quando se leva em conta "os estudos sobre a natureza do conhecimento e a aprendizagem, as interacções e grupos humanos" (p. 6).

As práticas são atividades de "carácter recorrente, isto é, realizam-se com frequência, e não apenas esporadicamente, são socialmente organizadas, ou seja, não são compreensíveis apenas pela consideração de um ator individual, mas requerem a consideração do grupo social relevante. E, finalmente, são reconhecíveis na vida de todos os dias" (Ponte et al., 2012, p. 268). Referem-se, também, ao momento de o professor agir na realidade da sala de aula, pois isso possibilita-lhe aplicar o que foi planejado, mediando as ações dos estudantes.

Finalmente, o conhecimento curricular da matemática é aquele que o professor precisa possuir, uma vez que é estabelecido pelo sistema educacional brasileiro e está expresso nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN). No caso da matemática, os PCN (Brasil, 1997, 1998) apresentam-se organizados em quatro blocos: Números e Operações; Espaço e Forma; Grandezas e Medidas; Tratamento da Informação.

O presente estudo tem o intuito de analisar como as professoras consideraram o contributo de um processo formativo[1] em que participaram e como esse processo influenciou o seu desenvolvimento profissional. É importante salientar que antes de o iniciar, questionamos que aspectos curriculares matemáticos as professoras gostariam que fossem abordados. Elas indicaram justamente dois blocos que tinham dificuldade em trabalhar em sala de aula, sobretudo por falta de conhecimento dos conteúdos de Espaço e Forma (Geometria) e Tratamento da Informação (Estatística). Isso confirma o resultado do estudo de Santana e Cazorla (2005), envolvendo 138 professores e que manifestaram as suas dificuldades em ensinar os mesmos tópicos. Isso nos parece revelar que, 11 anos após o estudo de Santana e Cazorla, a realidade da escola permanece a mesma.

Nesse contexto, assumimos a importância de desenvolver ações formativas na escola, de modo a proporcionar reflexões e mobilizações do conhecimento didático e do conhecimento curricular da matemática na prática do professor, a fim de possibilitar a aprendizagem do estudante. Assim, o Grupo de Pesquisa em Educação Matemática, Estatística e Ciências (GPEMEC) – composto por pesquisadores (no qual se inclui a primeira autora deste artigo), mestrandos, estudantes de Licenciatura em Matemática e professores das escolas – busca auxiliar na prática dos professores por meio da exploração de metodologias contextualizadas para o ensino de conteúdos matemáticos, desenvolvendo esta ação numa perspectiva colaborativa com professoras das escolas.

Dessa forma, para compreender as influências do processo formativo no desenvolvimento profissional das docentes, procuraremos, neste artigo, responder à seguinte questão de pesquisa: como é que as professoras participantes de um processo formativo consideram que ele contribuiu para o seu desenvolvimento profissional, nomeadamente no que se refere ao desenvolvimento do seu conhecimento matemático e didático?

2. Formação do professor e desenvolvimento profissional

A formação aqui mencionada refere-se à formação continuada do professor em serviço, que compreendemos como um fazer constante. Nessa linha, vários autores (Clarke & Hollingsworth, 2002; Day, 2001; Imbernón, 2011; Ponte, 2012) apresentam suas pesquisas e perspectivas para discutir essa formação. Imbernón (2011, p. 60) afirma que, "a partir de perspectivas não técnicas, o conhecimento, em relação ao exercício do ensino em todo docente, encontra-se fragmentado em diversos momentos". Elenca quatro perspectivas não técnicas: experiência como discente; socialização profissional; vivência profissional e formação permanente. Tais perspectivas abrangem mais do que a formação inicial do docente, pois o conhecimento estará envolto em contextos, como a ação do professor em sala de aula.

Nessa mesma direção, Ponte (2012, p. 89) contrasta o que se pode compreender por formação e desenvolvimento profissional, considerando que a "formação tende a ser vista como um movimento de 'fora para dentro' [...], enquanto o desenvolvimento profissional representa um movimento de 'dentro para fora'". A formação é vista como um fator externo, que pode ser pontual, gerada por outros agentes externos, e o desenvolvimento profissional é mais amplo, envolve o docente em seus aspectos cognitivos, afetivos e funcionais, tem motivações internas e pode proporcionar a autonomia do professor em sala de aula.

Day (2001) alerta a respeito dos esforços que vêm sendo despendidos na formação do professor, no sentido de potenciar a aprendizagem dos estudantes, e a necessidade de proporcionar formação continuada constante, de maneira que os professores "[...] possam atualizar o conhecimento do conteúdo e continuar a desenvolver estratégias relativas à organização da sala de aula e à avaliação" (p. 85). Consideramos esses pontos importantes para a formação docente e concordamos com o autor quando defende o desenvolvimento profissional e a importância de se aprender com os outros em seu próprio local de trabalho:

> O desenvolvimento profissional envolve todas as experiências espontâneas de aprendizagem e as actividades conscientemente planificadas, realizadas para benefício, directo ou indirecto, do indivíduo, do grupo ou da escola e que contribuem, através destes para a qualidade da educação na sala de aula. É o processo através do qual os professores, enquanto agentes de mudança, reveem, renovam e ampliam, individual ou colectivamente, o seu compromisso com os propósitos morais do ensino, adquirem e desenvolvem, de forma crítica, juntamente com as crianças, jovens e colegas, o conhecimento, as destrezas e a inteligência emocional, essenciais para a reflexão, planificação e prática profissionais eficazes, em cada uma das fases das suas vidas profissionais. (Day, 2001, pp. 20-21).

O desenvolvimento profissional ocorre ao longo da carreira do professor, sendo um fazer contínuo, e não pontual. Os professores, contudo, trabalham isoladamente e, para potencializar o seu processo formativo, é preciso promover culturas de ações colegiadas, em que possamos contar com o diálogo e a troca de experiências entre os diferentes atores do cenário escolar.

Quando pontuamos a formação num sentido colaborativo, reportamo-nos às ideias baseadas em John Dewey (1859-1952), que apresenta a perspectiva do professor reflexivo. Estas ideias assumem outras dimensões nos estudos de Schön (1992), que sugere um modelo de *prática reflexiva*, sendo essa prática desenvolvida pelo próprio professor, com base em três ideias: a reflexão sobre a ação, a reflexão na ação e a reflexão sobre a reflexão na ação.

Esse modelo assume a indissociabilidade ação – reflexão – ação, para que sejam geradas novas práticas, a partir do momento em que o professor é confrontado com orientações e estímulos oriundos de processos formativos que privilegiem o fazer docente alicerçado em concepções teóricas que fundamentem essas práticas.

Acreditamos que é preciso ponderar sobre o momento de reflexão na ação, pois seus resultados devem trazer elementos para provocar a ação, conduzindo o professor a repensar a respeito do ensino e, consequentemente, da aprendizagem em matemática (Oliveira & Serrazina, 2002). Nesse mesmo sentido, Day (2001, p. 55) adverte que "a aplicação da concepção de reflexão-na-acção de Schön ao ensino na sala de aula tem sido criticada com base no facto de não ter em linha de conta as condições sociais da aprendizagem que ocorrem no local de trabalho". O autor enfatiza que a reflexão pode ser estimulada por outras fontes e precisa dar a devida importância à necessidade do tempo para a compreensão do comportamento profissional do professor. Para nós, outro fator não considerado por Schön se refere à condição solitária que o docente assume nessa perspetiva. Os estudos empíricos desenvolvidos por Santana, Alves e Nunes (2015) e Santana, Lautert, Castro Filho e Santos (2016) concluem que a reflexão em grupo pode favorecer a formação do professor no que diz respeito ao seu desenvolvimento profissional. Podemos assumir que é possível essa prática reflexiva ocorrer de maneira individual ou coletiva (Day, 2001), sendo muito produtiva quando é proporcionada pela atividade de um grupo colaborativo.

Clarke e Hollingsworth (2002) apresentam um modelo para descrever o processo de desenvolvimento profissional do professor, cuja estrutura permite analisar um processo formativo em quatro diferentes domínios: (i) domínio *externo* (fonte de informação, estímulo e suporte); (ii) domínio da *prática* (experimentação profissional); (iii) domínio da *consequência* (na aprendizagem dos estudantes); e (iv) domínio *pessoal* (inclui conhecimento, crenças e atitudes do professor). Nesse modelo, o desenvolvimento profissional acontece por meio de processos de reflexão e efetivação ou apropriação (*enactment*) de ações que o professor pode realizar na interlocução entre diferentes domínios. A Figura 1 apresenta o desenho esquemático das inter-relações entre esses domínios.

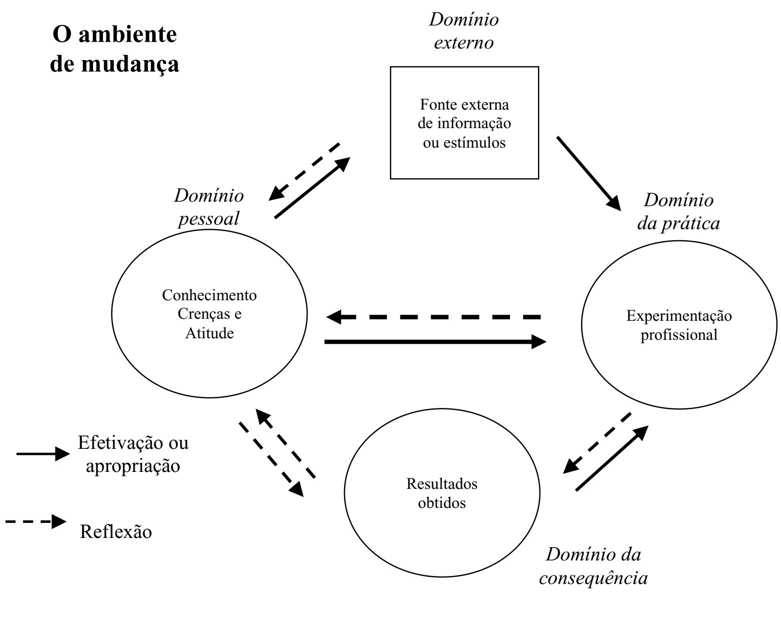

Figura 1. Desenho esquemático do modelo de Clarke e Hollingsworth (2002, p. 951).

Nesse modelo, destaca-se a sua estrutura inter-relacional, sugerindo que a mudança da prática do professor ocorre por meio dos processos de “reflexão” e “efetivação ou apropriação”. Para os autores, existem dois tipos de domínio representados no modelo. “O domínio externo é distinguido dos outros domínios por estar localizado fora do mundo pessoal do professor. Em combinação, domínio da prática, domínio pessoal e domínio da consequência constituem o mundo individual da prática profissional do professor” (Clarke & Hollingsworth, 2002, p. 951). Esse modelo é compatível com a presença de equipes externas à escola (por exemplo, pesquisadores); construção de práticas colaborativas; promoção de processos de planejamento, ação e reflexão; estabelecimento de relação direta entre conhecimento didático, prática e conhecimento curricular da matemática.

Para o processo formativo, o domínio externo pode ser ponto de partida, considerando como estímulo o convite aos professores para participarem voluntariamente da pesquisa e, como resultado, do processo formativo. Podem-se, ainda, admitir outras formas de estímulo para essa participação, como: demandas de aperfeiçoamento apresentadas no domínio de políticas públicas; necessidade de se obter certificação; dificuldades de aprendizagem dos estudantes; lançamento de novos programas ou *softwares*; lançamento de novos materiais didáticos. Todos estes são exemplos de elementos do domínio externo, que podem estimular a participação do professor num processo formativo. Todavia, a existência desses estímulos não assegura seu desenvolvimento profissional, como afirma Ponte (2012), ao se referir ao desenvolvimento profissional numa vertente de processo de crescimento, assumindo que “o protagonista principal é o professor, não os cursos ou as oportunidades que lhe são oferecidas” (Ponte, 2012, p. 89).

A partir de tais estímulos, se adentra no que Clarke e Hollingsworth (2002) classificam como mundo individual da prática profissional do professor. O domínio da prática é necessário para que o processo formativo permita reflexões sobre dados da realidade referentes à aprendizagem, ao desempenho dos estudantes e aos esquemas de resolução que utilizam, contrapondo-se a aportes teóricos e metodológicos que possibilitem o planejamento de tarefas a desenvolver na sala de aula, aportando-se no conhecimento curricular da matemática. Esse tipo de ação formativa facilita a combinação entre os três domínios (prática, consequência e pessoal).

Nessa direção, Santana, Alves e Nunes (2015) e Santana et al. (2016) descrevem que iniciaram os processos formativos com reflexões sobre a realidade de aprendizagem, considerando o pensamento do estudante e o conhecimento curricular da matemática, apoiando-se nos aportes teóricos e metodológicos postos pelo conhecimento didático. Após reflexões a respeito da aprendizagem do estudante, reportam-se ao planejamento de tarefas a desenvolver em aula. No modelo de Clarke e Hollingsworth (2002), isso se constitui no domínio da prática, sendo possível estabelecer interconexão com o domínio da consequência, momento em que o professor pode observar a aprendizagem do estudante. Consideramos que, após aplicação das tarefas em sala de aula, o docente precisa refletir se os seus esforços para planejar e os estudos envidados, nesse processo formativo, se reverberam na aprendizagem dos estudantes. Para isso, é preciso retornar à nova fase de planejamento e delinear os novos passos do processo formativo. Essa fase pode ser potenciada num trabalho colaborativo entre professores e pesquisadores, fomentando o espaço de reflexão. Nos estudos de Serrazina (2013), Santana, Alves e Nunes (2015) e Santana et al. (2016), os resultados das ações desenvolvidas em cunho colaborativo são pertinentes, pois possibilitam passos da *prática reflexiva* preconizada por Schön (1992) no que se refere à reflexão sobre a ação, favorecendo o pensar e o repensar da prática do professor.

No que concerne ao domínio pessoal, existe a necessidade de o docente avaliar as ações implementadas num processo formativo que vise ao seu desenvolvimento profissional. A avaliação consiste num mecanismo ideal, através do qual podem ser identificadas necessidades e mudanças no desenvolvimento pessoal e profissional do professor (Day, 2001). Na pesquisa de Ponte, Mata-Pereira, Quaresma e Velez (2017), que teve como objetivo analisar as mudanças que os professores referem sobre suas próprias perspectivas em relação ao ensino, após um processo formativo, os resultados indicam que eles passaram a valorizar o ensino exploratório e as discussões coletivas realizadas entre professores e pesquisadores, além de elevar as suas expectativas em relação às capacidades dos estudantes. Observa-se que é possível avaliar as ações implementadas visando a mobilização dos conhecimentos dos professores, bem como de suas perspectivas referentes aos processos de ensino e de aprendizagem.

3. Princípios para estabelecer o processo formativo e sua dinâmica

O processo formativo de 2016 era a terceira ação formativa do GPEMEC no âmbito das duas escolas pesquisadas, sendo que a primeira ocorreu em 2008 e a segunda em 2015. Com base nos estudos feitos sobre os dois processos formativos anteriores (Santana, Alves & Nunes, 2015; Santana *et al.*, 2016), foram adotados os seguintes princípios para este processo formativo:

1. *Constituir um grupo colaborativo* – com professores da escola e pesquisadores, para viabilizar o espaço de pensar e repensar a prática do professor.
2. *Confiar no grupo colaborativo* – sendo este grupo constituído também por membros externos à escola, a confiança foi adquirida, pelas professoras, durante a continuidade das ações na escola, nomeadamente, nas propostas de tarefas elaboradas pelo grupo a desenvolver em sala de aula e nas discussões realizadas pelo grupo para relatar as suas reflexões, suas dificuldades e seus aprendizados.
3. *Relacionar conhecimento didático, prática e conhecimento curricular da matemática* – as ações formativas foram implementadas tomando esse tripé como base.
4. *Realizar os encontros formativos presenciais no ambiente escolar* – o pesquisador passou a conhecer a dinâmica da escola, sendo os encontros presenciais realizados na própria escola.
5. *Escolher tema e período formativo* – os professores determinaram previamente (no final do ano letivo de 2015) o conhecimento matemático curricular a ser abordado no processo formativo. Os encontros presenciais se adequaram ao dia e horário que atendia à maioria dos professores.

Enquanto cada princípio foi estabelecido, foi surgindo um sentimento de segurança e de otimismo para melhorar o aproveitamento na sala de aula e, assim, motivar o estudante para a sua aprendizagem. O professor se comprometeu com o processo formativo.

O grupo colaborativo foi constituído por 17 professoras do 1º ao 9º ano de duas escolas, com o papel de formandas. Participaram, também, (i) duas coordenadoras pedagógicas, com o objetivo de observar o desenvolvimento das ações formativas, para que viessem a permitir a realização das mesmas nas salas de aula das professoras participantes; (ii) as diretoras das duas escolas, visando conhecer o desenvolvimento das ações formativas e apoiá-las como gestoras; (iii) seis mestrandos em Educação Matemática, na qualidade de assistentes de pesquisa, cada um dos quais acompanhou a discussão dos professores nos grupos organizados por ano escolar; (iv) uma graduanda em Licenciatura em Matemática, como assistente de pesquisa; e (v) uma pesquisadora, no papel de formadora.

O processo formativo decorreu no ano letivo de 2016, de abril a setembro, em dia de sábado, em quatro sessões de cinco horas cada. As professoras escolheram Geometria e Tratamento da Informação como temas. Formou-se uma equipe, designada por equipe da universidade (a pesquisadora, a diretora de uma das escolas que é membro do GPEMEC desde 2005, três professoras participantes do processo formativo que foram bolsistas do GPEMEC de 2014 a 2017, a graduanda e os seis mestrandos), que planejava os encontros e propunha as sequências de tarefas que tiveram por base a proposta didática de Santana et al. (2015). Essas propostas contemplavam três momentos para a aula: dinâmica para explorar o conteúdo num contexto (matematizar com jogos e desafios), discussão sobre os elementos conceituais extraídos da dinâmica (matematizar na roda de conversa) e tarefa individual (matematizar com registros). Cada sequência de tarefas era composta de objetivos e orientações para seu desenvolvimento em sala de aula. A Tabela I ilustra a dinâmica dos encontros presenciais.

TABELA I
Momentos e ações do processo formativo

Momentos do encontro presencial	*Ação*	*Desenvolvimento*
1º	Construção de relatório - em pequenos grupos (por ano escolar)	-De início, a equipe da universidade elaborou um instrumento diagnóstico por ano escolar que foi previamente aplicado numa turma de cada ano pela própria professora (participante da formação). A partir do 1º encontro, o 1º momento foi dedicado à discussão do desempenho e aos esquemas dos estudantes no diagnóstico. -A partir do 2.º encontro, as professoras reunidas em grupo, conforme o ano escolar em que atuavam, construíam um relatório com os resultados do desenvolvimento das tarefas em sala de aula.
2º	Socialização dos relatórios – no grupo grande (coletivamente)	-A partir do 2.º encontro, as professoras socializavam os relatórios e o grupo colaborativo discutia os resultados do desenvolvimento das tarefas planejadas no encontro anterior.
3º	Dinâmica - inicia em pequenos grupos e discussão coletivamente	-As professoras resolviam um desafio associado ao conteúdo do encontro (em pequenos grupos). - Discussão das soluções dadas aos desafios (coletivamente).

4º	Panorama conceitual e teórico (explicação e discussão no grupo grande)	-Previamente, as professoras liam um texto disponibilizado pela pesquisadora (individualmente). - No encontro, a pesquisadora abordava o conhecimento curricular da matemática e o conhecimento didático para se trabalhar em sala de aula (para o grupo grande).
5º	Planejamento – equipe da universidade e em pequeno grupo	-A equipe da universidade elaborava, para cada ano escolar, a sequência de tarefas para aplicar em duas horas de aula (equipe da universidade). - No encontro, um mestrando participava de um grupo pequeno (um por ano escolar), em que eram discutidas as tarefas propostas e feitas adaptações à realidade das salas das professoras.
6º	Plenária – no grupo grande (coletivamente) e avaliação individual	- Os grupos de professoras socializavam os planejamentos. - Discussão sobre as adaptações para a realidade da sala de aula. -As professoras respondiam voluntariamente à ficha de avaliação do encontro.

Assim, cada encontro foi dividido em seis momentos, que se complementavam, tendo sido todos realizados numa sala de aula de uma das escolas participantes. Na Tabela II, encontram-se os tópicos curriculares e os textos abordados por encontro.

TABELA II
Tópicos curriculares e textos da formação

Encontro	*Tópicos curriculares*	*Textos*
1º	- Reta, segmento de reta, linha poligonal aberta e fechada, polígonos, prismas.	Níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico de Van Hiele (Pires, Cury & Campos, 2001).
2º	- Continuação do conteúdo anterior, mais: pirâmides, esfera, cone e cilindro.	
3º	- Letramento estatístico, população, amostra, variável, quadro, tabela. - Gráfico: pictórico, coluna e setores.	Ensino de Estatística na Educação Básica (Cazorla & Utsumi, 2010).
4º	- Continuação do conteúdo anterior, mais: média, moda, mediana e histograma.	

Para cada encontro, a equipe da universidade apresentava a proposta da sequência de tarefas para ser analisada com os professores e cujo objetivo era que esses trabalhassem em sala de aula os conteúdos matemáticos referentes a cada ano escolar. As tarefas propostas pela equipe da universidade foram analisadas pelos professores (em pequeno grupo) com auxílio de um mestrando e adaptadas conforme o ano escolar e a realidade da escola, no que se refere ao campo numérico envolvido, os conceitos estatísticos ou de geometria a abordar e o tipo de levantamento de dados que era possível fazer com a realidade da escola. Como exemplo, apresentamos na Tabela III um resumo da tarefa do 8º e 9º anos no 3º encontro.

TABELA III
Tarefa do 3º encontro para o 8º e 9º anos

Momento da aula	*Tarefa*
Matematizar com jogos e desafios	Material: fita métrica, balança, papel metro, fita adesiva, régua, papel milimetrado. Os estudantes, divididos em 03 grupos e de posse de uma fita métrica, medem as suas alturas, a massa corporal e calculam o IMC (índice de massa corporal), organizando os dados em uma tabela e em gráfico.
Matematizar na roda de conversa	Com os estudantes organizados em uma grande roda, o professor solicita que os grupos apresentem as tabelas e os gráficos construídos por eles, ficando atento aos números que representam abaixo do peso, acima do peso e o peso ideal. Durante essa discussão, questões como alimentação saudável, obesidade e a prática de atividades físicas podem ser abordadas. Após a apresentação dos grupos, os professores intervêm mostrando uma tabela – discutem seus elementos (título, colunas, linhas e fonte) – e um gráfico – discutem seus elementos (título, eixos, nomeação dos eixos, fonte, explicam como se constroem as barras e o que a altura das barras significa).
Matematizar com registros	<u>Tarefa 1</u> 1) Cada estudante elabora uma tabela com os dados da turma apresentando: a) Quantidade de estudantes (homens e mulheres); b) Quantidade de homens e mulheres conforme a categoria de IMC (tabela de dupla entrada) 2) No papel milimetrado, cada estudante constrói os gráficos de acordo com as informações contidas na tabela da questão anterior.

Tarefa 2

Fazer um levantamento dos aniversariantes da turma, organizando por mês e observando as quantidades por semestre, bimestre e trimestre. Com esses dados, responder:

1) Complete a tabela abaixo com o número de aniversariantes de sua sala em cada mês do ano.

TABELA
Quantidade de aniversariantes da turma

Meses do Número de Ano Aniversariantes
JANEIRO
FEVEREIRO
MARÇO
ABRIL
MAIO
JUNHO
JULHO
AGOSTO
SETEMBRO
OUTUBRO
NOVEMBRO
DEZEMBRO
TOTAL

Fonte: Dados dos alunos da turma.

Observando a tabela, responda:

a) Quantos aniversariante há no mês de maio?______________

b) Em que mês há maior número de aniversariantes? _________

c) Em que mês há o menor número de aniversariantes?________

d) Em que bimestre há mais aniversariantes? Quantos aniversariantes tem esse bimestre?_______________________

e) Há algum trimestre sem aniversariante? Qual?____________

2) A partir dos dados da tabela anterior, construa um gráfico de barras.

Ressaltamos que foram quatro sequências de tarefas (duas de geometria e duas de estatística).

5. Processo metodológico

Esta pesquisa segue uma abordagem qualitativa de natureza descritiva e interpretativa, pois o método descritivo "tem como objetivo primordial a descrição das características de determinada população ou fenômeno" (Gil, 2002, p. 42). Além disso, o método interpretativo requer "habilidades de observação, comparação, contraste e reflexões que todo humano possui" (Erickson, 1986, p. 157), fazendo uso da interpretação que privilegie observação e reflexão, de maneira sistemática e discutida.

5.1. *O contexto da pesquisa*

Participaram dos encontros todos os elementos do grupo colaborativo indicados anteriormente. Foram instrumentos de coleta de dados: respostas dadas voluntariamente pelas professoras à ficha de avaliação da formação, no final de cada dia de formação; questionário final de avaliação da formação aplicado no último encontro; entrevista semiestruturada, realizada com três professoras participantes da formação, quatro meses após o final do processo formativo, com o objetivo de compreender quais são as contribuições da formação para a prática pedagógica e para o desenvolvimento profissional das professoras; as anotações num diário de bordo, feitas pelos assistentes de pesquisa (mestrandos).

Os critérios de escolha das professoras entrevistadas foram terem participado em todos os encontros; desenvolvido as sequências de tarefas em sala de aula; participado em, pelo menos, um dos processos formativos anteriores; e terem disponibilidade para participar da entrevista no mês de janeiro. As entrevistas foram audiogravadas e transcritas. Para todos os intervenientes, foram atribuídos nomes fictícios.

5.2. *Unidades de análise*

Para a análise das três questões da ficha de avaliação da formação, foram construídos dois blocos de análise e as respostas dadas foram agrupadas em categorias de análise (ver Tabela IV):

TABELA IV

Bloco de avaliação e categorias de análise da ficha de avaliação

Bloco de avaliação:	*Categoria:*
Do encontro formativo	- retirar dúvidas - socializar experiências - proporcionar novos conhecimentos
Das contribuições para a prática	- proporcionar novos conhecimentos - melhorar a prática - melhorar a sua aprendizagem e a do estudante

O questionário final de avaliação da formação continha seis questões, que foram divididas em cinco blocos, e as respostas, agrupadas por categorias de análise, ver Tabela V.

TABELA V

Bloco de avaliação e categorias de análise do questionário final de avaliação da formação

Bloco:	*Categoria:*
Geral da formação	- conhecimento do professor - conhecimento do estudante
Das sequências de tarefas	- prática da sala de aula - aprendizagem do estudante
Das possibilidades de desenvolvimento em aula	- diagnóstico das dificuldades - superação de dificuldades
Das dificuldades e avanços na sala de aula	- dificuldades - avanços
Das possíveis contribuições para a prática	- conteúdo matemático - aprendizagem dos estudantes
Relação com o conteúdo matemático	- domínios e atitudes - mudança na prática pedagógica

As respostas para cada bloco foram analisadas dentro dos quatro domínios do modelo de Clarke e Hollingsworth (2002), interpretando e descrevendo as respostas dadas pelas professoras. As tarefas respondidas pelos estudantes, os materiais usados em sala de aula (jogos, *slides*, material concreto, cartazes) e fotografias eram apresentados pelas professoras nos momentos de socialização no grupo colaborativo. Esse retorno trazia evidências da realização da prática docente.

6. Análise dos resultados

Dentro dos quatro domínios do modelo de Clarke e Hollingsworth (2002) foram interpretadas e descritas as respostas dadas pelas professoras, durante, no final e após o processo formativo. Foram categorizadas conforme os blocos de respostas e analisadas em duas seções: formação e sequências de tarefas e desenvolvimento em sala de aula.

6.1. *A formação e as sequências de tarefas*

Ao longo da formação, foram preenchidas 36 fichas de avaliação. O questionário final foi respondido pelas 17 professoras. Todas avaliaram positivamente cada encontro e o processo. As duas primeiras questões da ficha de avaliação (Tabela VI) solicitavam que destacassem pontos bons e ruins da ação realizada.

TABELA VI
Questões da ficha de avaliação

Questão 1	Destaque dois pontos que você considerou muito bom na formação de hoje
Questão 2	Destaque dois pontos que você considerou muito ruim na formação de hoje

Ao longo do processo, as professoras elencaram pontos bons que se relacionavam com a aprendizagem dos conceitos, a importância da socialização das experiências e a organização do encontro. Afirmaram não haver pontos ruins. Isto é ilustrado nas respostas de Patrícia:

> [O ponto bom], o momento em que foi apresentada a diferença entre as figuras planas e espaciais.
>
> Não considero que tenha nenhum ponto ruim na formação. *(Patrícia)*.

Durante o processo, ao relacionar pontos bons associados ao conteúdo matemático, as professoras indicaram ter dificuldade com conceitos de Geometria e do Tratamento da Informação e que estudar e discutir esses conteúdos durante o processo foi um ponto positivo.

No final do processo, as avaliações apresentam o mesmo perfil. A Tabela VII apresenta as respostas da questão 1 do questionário final.

TABELA VII
Resposta das professoras à Questão 1 do questionário final

Questionário final / Itens	Insatisfatória	Pouco satisfatória	Indiferente	Satisfatória	Muito satisfatória
De uma maneira geral, como você avalia a formação desenvolvida em 2016 pelo GPEMEC? Justifique.	0	0	0	5	12

No final, as professoras consideraram positivo o processo formativo e justificaram a avaliação associando-a à sua própria mobilização de conhecimento ou ao conhecimento do estudante, o que reverbera nas colocações das professoras Bete, Jó, Beatriz e Irene.

> Ampliou o nosso conhecimento, acrescentando e tirando as dúvidas que havia nas aulas de Matemática. *(Bete)*.
>
> Foi uma formação enriquecedora, cheia de desafios e descobertas que, com certeza, contribuiu para a minha formação e aprendizagem, além dos alunos que também estão recebendo esse conhecimento. *(Jó)*.
>
> Geometria é um assunto muito complexo para se trabalhar, pois depende do nível do aluno. Com a formação, eu consegui absorver um avanço, maior conhecimento que contribuiu muito para o meu desenvolvimento profissional. *(Beatriz)*.
>
> A formação me proporcionou muito conhecimento, aprendi a diferenciar um quadro de uma tabela, a estrutura de uma tabela, os diferentes tipos de gráficos e as informações neles contidas que facilitam a sua interpretação, não tenho vergonha em dizer que eu não sabia, mas me orgulho em dizer "eu aprendi". Hoje, posso passar para os alunos com segurança. *(Irene)*.

Essas justificações perpassam pelo domínio da consequência, quando se referem ao conhecimento mobilizado pelo estudante e pelo domínio pessoal no que diz respeito à mobilização de seu próprio conhecimento, evidenciando as necessidades do desenvolvimento profissional do professor em relação ao conhecimento do conteúdo matemático.

Em cada encontro do processo formativo, o 5.º momento se destinava ao planejamento, no qual a equipe do GPEMEC atuava, como domínio externo, como fonte de informações e estímulos, levando a proposta de sequência de tarefas para ser analisada e adaptada à realidade das salas pelo grupo do ano escolar e um membro da equipe da universidade.

A avaliação feita por Mari exemplifica as colocações das professoras que associaram sua avaliação sobre o planejamento à mobilização de conhecimentos:

> Alguns temas sugeridos me trouxeram inquietações, pois não haviam sido trabalhados por mim. *(Mari)*.

Mari expressa seu entendimento quanto à mobilização de sua zona de conforto, pois os conhecimentos curriculares trabalhados não faziam parte do seu repertório de atividades desenvolvidas na sala de aula, constituindo-se num desafio que poderá trazer-lhe aprendizagem. E evidencia uma experiência de aprendizagem espontânea, que pode motivar elementos do desenvolvimento profissional do docente.

A proposta de planejar as sequências de tarefas, no grupo pequeno, visava confrontar e experimentar os planejamentos na prática dessas professoras, o que se constituía para elas num desafio e novos patamares de aprendizagem, conforme observado nas colocações de Bete e Lu.

> Os encontros foram de grande auxílio para nossa prática e os planos acrescentaram conhecimento, ampliando a nossa prática. *(Bete)*.
>
> Com certeza, nós professores aprendemos muito com essas práticas, avaliando e refletindo sobre elas, sobre o que sabemos e o que precisamos aprender para realizarmos um trabalho de qualidade. *(Lu)*.

As professoras também avaliaram o planejamento com vertentes para auxiliar sua prática na sala de aula (domínio das práticas) e a sua própria aprendizagem (domínio pessoal). Além disso, os aspetos do domínio externo (Clarke & Hollingsworth, 2002), são indicados nas avaliações das professoras:

> Os planos [sequência de tarefas] foram importantes para a aplicabilidade dos temas abordados no que tange à prática confrontando com a teoria. *(Ray)*.

> Os conhecimentos aplicados por meio da socialização das práticas de sala de aula, a sistematização dos saberes, a importância do registro dos alunos e o confronto dos saberes através das explicações do GPEMEC, favoreceram a nossa prática em sala de aula. *(Li)*.

Ao referirem o planejamento, elas indicaram um diálogo entre teoria (conhecimento didático), prática na sala de aula, a sua própria aprendizagem e a do estudante (experiências de aprendizagem, elemento do desenvolvimento profissional). O domínio externo estimulava a efetivação dos demais domínios dentro dessa esfera formativa. Ademais, os resultados das relações de confiança foram sendo estabelecidos dentro do grupo e podem ser percebidos quando as professoras se revelam como aprendizes, indicando as possibilidades de troca, confronto e socialização de saberes e das práticas realizadas no âmbito do grupo.

6.2. *O desenvolvimento em sala de aula*

No que se refere à experimentação em sala de aula (domínio das práticas), perguntamos (Tabela VIII), no final de cada encontro, sobre as contribuições das discussões, com o grupo, para a sua prática em sala de aula.

TABELA VIII
Questão 3 da ficha de avaliação

Ficha de avaliação	
Questão 3	As discussões promovidas hoje na formação contribuíram para você refletir sobre sua prática em sala de aula? ( ) Sim ( ) Não a) Se você respondeu SIM, aponte quais foram as percepções que você teve.

Todas responderam que sim e realçaram que as discussões trazem contribuições para a mobilização de conhecimentos.

> Contribuíram significativamente, possibilitando o conhecimento acerca de geometria reconhecendo figuras planas e espaciais. *(Joana)*.
>
> A partir de agora, será bem mais fácil aplicar o assunto de geometria. (Patrícia).
>
> Quando [antes do processo formativo] o meu aluno disse que o quadrado era um retângulo, respondi a ele que não. Descobri que todo quadrado pode ser um retângulo, pois adquiri esse conhecimento na formação. *(Gorete)*.

> Eu trabalhava tratamento da informação muito simples. Depois da formação, trabalho com [diferentes variáveis como] brinquedos, sabores preferidos, idades [...]. *(Rana)*.

> Antes da formação, trabalhava os conceitos relacionados ao tratamento da informação de maneira solta, não tinha uma visão ampla que permitisse passar para os alunos os conceitos envolvidos de forma segura, por não dominar certos conteúdos. Depois, passei a ter um olhar mais amplo de conceitos envolvidos nas atividades trabalhadas durante a formação, o que facilitou o meu trabalho em sala de aula, fazendo-me sentir mais segura para aplicar os conteúdos que antes não dominava e, por este motivo, acabava dificultando a aprendizagem dos alunos. *(Irene)*.

> Trouxe muita contribuição. No meu dia a dia, vejo as coisas e falo: "gente, aquilo ali dá para trabalhar matemática quando eu for para sala de aula. Dá para trabalhar gráfico em matemática!". [...] parece que desencadeou tanta coisa. Quero trabalhar mais a matéria de matemática do que as outras! Até meus alunos perguntam: "Ô tia, é aula de matemática hoje? Oba!". Aumentou o prazer de trabalhar matemática. *(Beatriz)*.

A exemplo dessas respostas, as demais professoras expressam as suas reflexões a respeito da prática docente, em torno da mobilização de conhecimento, que poderá ser feita por elas mesmas ou pelo estudante, referindo dificuldades com o conhecimento didático. E indicam que, no domínio pessoal, foi possível permear o conhecimento matemático de Geometria e Tratamento da Informação (abordado no encontro formativo) e projetar outras atitudes em relação à prática de ensino, verificando uma necessidade de mudança e encorajamento da autonomia que, na perspectiva de Day (2001), são elementos que promovem o desenvolvimento profissional do professor.

No final do processo formativo, questionamos a respeito do desenvolvimento das sequências de tarefas com os estudantes (Tabela IX). As respostas dadas mantêm a aprovação do trabalho desenvolvido e sinalizam pontos sobre a dinâmica seguida, as dificuldades dos estudantes e suas aprendizagens.

TABELA IX
Parte 2 da terceira questão do questionário final

Questão 3. Considerando a sua atuação na formação, na vertente colaborativa:
3.2. Comente a aplicação das sequências de tarefas com os estudantes em sala de aula:

Em relação ao desenvolvimento da sequência de tarefas em sala de aula, as professoras destacam a motivação dos estudantes:

> Muito bom, em cada atividade, eles [os estudantes] mostravam interesse em aprender e se envolviam. *(Val)*.
>
> Momentos de atividades bem planejadas e bem orientadas. [A sequência] incentivava a participação dos alunos e construção de seus conhecimentos. *(Lu)*.
>
> Jogos, brincadeiras, gráficos, geometria foram de suma importância às atividades aplicadas. *(Tita)*.

As professoras se reportam ao interesse demonstrado pelos estudantes para aprenderem o conteúdo que estava sendo ministrado, relacionando isso ao planejamento. Mas relatam dificuldades:

> Ao apresentar os conteúdos, houve uma certa dificuldade, mas, depois, todos [os estudantes] se envolveram e conseguiram absorver o conteúdo dado. *(Mari)*.
>
> Ao executar uma atividade, sempre pedia para os alunos registrarem seus desafios [dificuldades]. Eles se envolviam e mostravam mais interesse pela matéria, fazendo registros e demonstrando o seu conhecimento. *(Bal)*.
>
> Houve muitas tarefas em cada plano de aula, levando os alunos a compreenderem todos os assuntos aplicados. *(Bia)*.
>
> Percebo que os planos nos direcionavam para melhor aprendizado dos alunos, pois a sequência [de tarefas] vinha pronta. *(Tita)*.

Segundo as professoras, o desenvolvimento da aula permitia que o estudante exprimisse sua dificuldade. Bal e outras professoras revelaram que propunham ao próprio estudante que registrasse suas dificuldades, utilizando isso como forma de despertar o interesse e a aprendizagem.

As colocações de Bia trazem evidências de que, ao avaliar a sequência, ela considera que a quantidade de tarefas conduzia os estudantes a compreenderem os conteúdos. Tita faz afirmações na mesma direção quando diz que a sequência de tarefas direcionava para a melhoria do aprendizado do estudante. Essas evidências apresentadas nas avaliações das professoras estão no domínio da prática ao se relacionarem com a aprendizagem do estudante e, também, sinalizam contribuições para as ações em sala de aula, o que Day (2001) compreende como indicativos para o desenvolvimento profissional do professor.

As professoras avaliam que a experimentação das sequências de tarefas também direcionava momentos para a sua própria reflexão.

> Os planos trabalhados me levaram a refletir sobre a minha prática em sala de aula. *(Duda)*.

> Antes, eu trabalhava atividades do livro com gráficos e simplesmente não aprofundava, era a atividade pela atividade, para cumprir um cronograma sem levar em consideração a gama de conhecimentos e conceitos ali contidos. *(Irene)*.

A prática era desenvolvida pela professora e, nesse caso, motivada pelo processo de experimentação na própria prática. Os registros desse desenvolvimento eram apresentados ao grupo colaborativo. Processos de reflexão que possibilitaram o repensar da prática e direcionaram para o desenvolvimento profissional do professor, com vista a possíveis experiências de aprendizagem.

Visando compreender como as professoras avaliavam os resultados obtidos em sala de aula, solicitamos que comentassem a respeito das dificuldades e avanços (Tabela X).

TABELA X
Parte 3 da terceira questão do questionário final

Questão 3. Considerando a sua atuação na formação, na vertente colaborativa:
3.3 Comente sobre as dificuldades e avanços vivenciados em sala de aula.

Nesse sentido, as professoras relatam sobre as dificuldades e as possibilidades de sua superação, avaliando que a formação realizada trouxe condições de sanar as dificuldades vivenciadas ao experimentar a sequência de tarefas:

> Houve dificuldades, uns [estudantes] entenderam com mais dificuldade e outros não, mas depois tudo se encaixou. *(Mari)*.
>
> As dificuldades foram muitas, a começar pelo professor ou aluno, mas com as discussões e com a troca de conhecimento, tais dificuldades foram sanadas. *(Peu)*.

As afirmações das professoras relatam que ocorreram dificuldades durante a aplicação das tarefas, tanto para elas como para os estudantes. As avaliações, contudo, explicitam que a superação foi possível diante do desenvolvimento da sequência de tarefas, da mediação e orientação dada aos estudantes pelas próprias professoras e pelo espaço de diálogo estabelecido em sala de aula. Para além disso, as professoras chegam a relatar a relação das dificuldades com conhecimentos curriculares da matemática:

> Os alunos tiveram dificuldades para traçar as linhas retas, fechadas, mas se destacaram muito bem na formação dos gráficos e tabelas. *(Duda)*.
>
> As dificuldades [se deram] nas primeiras aulas, depois criaram gosto, agora, de tudo querem fazer gráfico. *(Jó)*.

> Tive dificuldade em tabelas e, às vezes, na organização de grupos. O ponto positivo é que os objetivos foram alcançados, pois consegui interagir com todos os alunos e realizamos os trabalhos propostos na formação. *(Guga)*.
>
> O desenvolvimento foi de suma importância, além de interdisciplinar e matematizar o aprender brincando, os alunos adquiriram mais conhecimento dos gráficos [...]. *(Tita)*.

Dentre os conteúdos do currículo de matemática abordados na formação, as professoras destacam dificuldades dos estudantes com linhas poligonais abertas e fechadas, com tabelas e gráficos, porém chegam a afirmar superação como consequência das ações desenvolvidas em sala de aula.

Essas afirmações ilustram que o processo formativo parece conduzir as professoras a uma nova postura diante da sua ação pedagógica (conhecimento didático e a prática). Nesse caminho, encontram-se as palavras de Zel, destacando contribuições à aprendizagem dos estudantes:

> Com o avanço da formação do professor, os alunos vão avançando nas suas aprendizagens. *(Zel)*.

A professora Zel associa o avanço da aprendizagem do estudante ao avanço das ações do processo formativo. Essas avaliações evidenciam elementos que proporcionam o desenvolvimento profissional do professor, no que concerne a contribuições para a sala de aula e às possíveis mudanças em sua prática.

Solicitamos às professoras uma avaliação relativa à melhoria da prática pedagógica (Tabela XI).

TABELA XI

Questão 4 do questionário final

Questão 4 / *Itens*	*Insatisfatória*	*Pouco satisfatória*	*Indiferente*	*Satisfatória*	*Muito satisfatória*
Como você avalia o processo da formação do GPEMEC para a melhoria de sua prática pedagógica no ensino da Matemática? Justifique sua resposta:	0	0	0	7	10

As professoras avaliaram positivamente as contribuições do processo formativo para a sua prática. Como justificação, apresentam elementos que revelam como avançaram nos seus conhecimentos.

> Foi satisfatório, pois consegui esclarecer algumas dúvidas sobre a Matemática e percebi que tem assunto que parece ser simples, mas é muito complicado e que tenho que estudar muito mais antes de trabalhar a Matemática. *(Duda)*.
>
> Percebi o quanto os alunos melhoraram na área de Matemática, percebi o quanto aproximou o aluno do objeto de aprendizagem a partir das dinâmicas das aulas. (Ray).
>
> Me proporcionou momentos de aprendizados riquíssimos na troca de experiência, nos relatos apresentados, nas pesquisas realizadas para a aplicação dos conteúdos nas dúvidas sanadas. *(Lu)*.

As professoras fazem referências ao conhecimento didático, à aprendizagem do estudante motivada pelas dinâmicas desenvolvidas a partir do processo formativo e ao trabalho colaborativo (a troca de experiências). Pautam possibilidades de utilização das propostas vivenciadas em sua prática:

> Dar continuidade ao fazer na sala, continuar a buscar novas estratégias, fortalecer a consolidação das práticas. *(Li)*.
>
> É uma proposta que, quando necessário, colocarei em prática e não será mais conteúdo deixado em segundo plano. *(Peu)*.
>
> Pois só veio a melhorar a minha prática pedagógica. *(Guga)*.

É possível denotar a busca por novas estratégias, indicada nas colocações de Li, e a possibilidade de efetivar na prática a proposta da sequência de tarefas, dita por Peu.

No âmbito do domínio pessoal, as professoras relatam novas aprendizagens e ideias que surgem com o processo.

> O bom realmente foi essa ligação da teoria para a prática e o aprender novos métodos de como desenvolver a Matemática nos anos iniciais. *(Val)*.
>
> O professor tem uma grande função: ensinar, mas ele não está isento de aprender. E tudo aquilo que é para melhorar seus conhecimentos. Ele deve buscar e acreditar para melhor ensinar, melhorar e avançar. Acredito que ajudou bastante. *(Bal)*.
>
> Excelente. Os conhecimentos adquiridos na formação fizeram com que o meu raciocínio avançasse e novas ideias surgiram e as aulas de Matemática foram mais prazerosas. *(Mily)*.

Nas colocações de Mily, durante o processo formativo, as aulas passaram a ter mais significado. Val indica que a busca de aprendizagem por novos métodos de ensino é importante para a atuação do professor em sala de aula.

O processo formativo proporcionou às professoras uma visão sobre possíveis mudanças em sua prática, elementos que compõem o desenvolvimento profissional do professor (Day, 2001). No âmbito geral, as evidências indicadas nas avaliações das professoras ilustram que o processo formativo pareceu conduzi-las a novas posturas diante da sua ação pedagógica, a ter o domínio de sua prática no que diz respeito aos conteúdos de Geometria e do Tratamento da Informação, ao conhecimento didático na elaboração das sequências de tarefas e na observação e análise da produção do estudante. Esses são elementos que possibilitam o desenvolvimento profissional do professor e, quando são explicitados por ele, proporcionam uma visão sobre possíveis mudanças em sua prática (Day, 2001). Tais posturas a respeito da ação pedagógica refletem vertentes do que concebemos como essenciais para o desenvolvimento profissional do professor, ou seja, as experiências espontâneas de aprendizagem que são manifestadas mesmo fora da escola, as ligações que as professoras buscam fazer com episódios da realidade para filtrar, de maneira positiva, para a sua prática da sala de aula, conduzindo à reflexão sobre as possibilidades de ações para a sua prática, o que, consequentemente, parece motivar o estudante na sala de aula (Day, 2001). Essas contribuições ficam evidentes nas avaliações das professoras sobre o processo formativo.

7. Considerações finais

Para iniciar o processo formativo e constituir o grupo colaborativo dentro da escola, foi preciso, inicialmente, ganhar a confiança das professoras da escola. Isso foi feito estabelecendo um conjunto de princípios para a organização do processo formativo. Neles estavam incluídos a constituição e apresentação dos planejamentos das sequências de tarefas e de discussões teóricas sobre as possibilidades de aprendizagem dos estudantes. Esses princípios foram sendo instalados à medida que as ações eram colocadas em prática e revelados ao permearem o processo avaliativo realizado pelas professoras, associando-o a uma prática reflexiva no grupo colaborativo dentro da escola.

As evidências empíricas indicam que o processo formativo assumido favoreceu o desenvolvimento profissional das professoras, pois possibilitou: i) abordar conteúdos matemáticos; ii) trocar experiências no âmbito das discussões dos grupos pequenos e do grupo grande (coletivamente); iii) experimentar, em sala de aula, as tarefas planejadas no grupo coletivamente; iv) visualizar o interesse, a aprendizagem e a aproximação do conteúdo matemático pelos estudantes; v) proporcionar aprendizagem para o professor. Esses são cinco pontos que permeiam as colocações das professoras durante e após o processo formativo e que as levam a afirmar que a formação foi positiva. Essas possibilidades do processo formativo ampliam a discussão posta por Sanches conforme desenvolvido por Sánches e Gómez-Blancarte (2015) quando pesquisam a respeito da negociação de significado como processo de aprendizagem de professores num programa de desenvolvimento profissional de professores, numa abordagem de conceitos estatísticos.

Ao considerarem o processo de adaptação do planejamento e a aplicação em suas próprias salas de aula, as professoras referem a dinâmica imprimida na prática na sala de aula, as dificuldades enfrentadas por elas próprias e pelos estudantes, ressaltando que essas dificuldades foram vencidas por meio do conhecimento mobilizado no processo formativo, seja por reflexões e aprendizagens feitas individualmente ou como fruto das reflexões feitas coletivamente no grupo colaborativo, como aconteceu nos estudos de Santana, Alves e Nunes (2015) e Santana, Lautert, Castro Filho e Santos (2016). Revelam, ainda, possíveis avanços a respeito do seu conhecimento curricular da matemática, do seu conhecimento didático e da sua prática, em conformidade com o movimento do modelo proposto por Clarke e Hollingsworth (2002) no que se refere ao domínio da prática, ao domínio da consequência ou ao domínio pessoal.

No que se refere ao conhecimento curricular de matemática, as professoras afirmam sobre a mobilização da sua zona de conforto, pois os conteúdos trabalhados não faziam parte do seu repertório de atividades desenvolvidas na sala de aula, constituindo-se num desafio. Day (2001, p. 145) afirma que "muitas das mudanças internas e externas colocam desafios a partir dos quais os professores podem aprender".

Dessa forma, as professoras indicam novas perceções em relação aos conteúdos matemáticos, bem como a respeito da sua própria aprendizagem e a do estudante, que foram motivadas a partir do domínio externo impresso pela equipe da universidade e pelas dinâmicas desenvolvidas a partir do processo formativo. Para Clarke e Hollingsworth (2002), essas novas perceções estão ligadas aos resultados obtidos a partir das aplicações na sala de aula, assim como as perceções para a mudança da prática. Assim, as professoras permeiam os quatro domínios incluídos no modelo de desenvolvimento profissional apresentado por Clarke e Hollingsworth (2002). Indicam, ainda, a importância de se estabelecer, em um processo formativo, relações entre conhecimento didático, prática e conhecimento curricular da matemática.

Referências

Ministerio de Educación. (1997). *Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN). Matemática.1 e 2 ciclos*. Brasília: MEC, Secretaria de Ensino Fundamental.

Ministerio de Educación. (1998) *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática*. Brasília: MEC, Secretaria de Educação Fundamental.

Cazorla, I., & Utsumi, M. (2010). Reflexões sobre o ensino da estatística na Educação Básica. In. I. Cazorla, & E. Santana (Orgs.). *Do tratamento da Informação ao Letramento Estatístico.* Série Alfabetização Matemática, Estatística e Científica (pp. 9-18). Itabuna, Bahia, Brasil: Via Litterarum Editora.

Clarke, D. J., & Hollingsworth, H. (2002). Elaborating a model of teacher professional growth. *Teaching and Teacher Education*, *18*(8), 947-967. https://doi.org/10.1016/S0742-051X(02)00053-7

Day, C. (2001). *Desenvolvimento Profissional de Professores: os desafios da aprendizagem permanente*. Porto: Porto Editora.

Erickson, F. D. (1986). Qualitative methods in research on teaching. In M. C. Wittrock (Ed.), *Handbook of research on teaching* (3rd ed.), (pp. 119–161). New York, NY: MacMillan.

Gil, A. (2002). *Como elaborar projetos de pesquisa*. São Paulo: Atlas.

Imbernón, F. (2011). *Formação docente e professional: formar-se para a mudança e a incerteza*. Coleção Questões de nossa época. V.14 (Tradução: Leite, S. C.). São Paulo: Cortez.

Oliveira, I., & Serrazina M. L. (2002). A reflexão e o professor como investigador. In GTI (Org.), *Reflectir e Investigar sobre a Prática Profissional* (pp. 29-42). Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Pires, C. M. C., Curi, E., & Campos, T. M. M. (2001). *Espaço e Forma: a construção de noções geométricas pelas crianças das quatro séries iniciais do Ensino Fundamental*. São Paulo: PROEM.

Ponte, J. P. (1999). Didácticas específicas e construção do conhecimento profissional. In J. Tavares, A. Pereira, A. P. Pedro, & H. A. Sá (Eds.). *Investigar e formar em educação: Actas do IV Congresso da SPCE*, (pp. 59-72). Porto: SPCE.

Ponte, J. P. (2012). Estudiando el conocimiento y el desarrollo profesional del profesorado de matemáticas. In N. Planas (Ed.), *Educación matematics: Teoría, crítica y prática*. (pp. 83-98). Barcelona: Graó.

Ponte, J. P., Branco, N., Quaresma, M., Velez, I., & Mata-Pereira, J. (2012). Perspectivas teóricas no estudo das práticas profissionais dos professores de matemática. In A. P. Canavarro, L. Santos, A. M. Boavida, H. Oliveira, L. Menezes & S. Carreira (Eds.), *Práticas de ensino da Matemática: Atas do Encontro de Investigação em Educação Matemática*, (pp. 267-279). Lisboa: SPIEM.

Ponte, J. P., Mata-Pereira, J., Quaresma, M., Velez, I. (2017). Formação de professores dos primeiros anos em articulação com o contexto de prática de ensino de matemática. *Revista Latinoamericana de Investigacioìn en Matemaìtica Educativa. 20* (1), pp. 71-94. http://dx.doi.org/10.12802/relime.17.2013

Saìnchez, E. A. S., Goìmez-Blancarte, A. L. (2015). La negociacioìn de significado como proceso de aprendizaje: el caso de un programa de desarrollo profesional en la ensenÞanza de la estadiìstica. *Revista Latinoamericana de Investigacioìn en Matemaìtica Educativa. 18* (3), pp. 387-419. https://doi.org/10.12802/relime.13.1834

Santana, E., & Cazorla, I. (2005). Encontros e desencontros no ensino de matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental. *Anais do III Congresso Internacional de Ensino da Matemática*, 2005, Canoas-RG.

Santana, E., Alves, A. A., & Nunes, C. B. (2015). A Teoria dos Campos Conceituais num Processo de Formação Continuada de Professores. *Bolema, 29* (53), 1162-1180. https://doi.org/10.1590/1980-4415v29n53a18

Santana, E., Taxa-Amaro, F. O. S., Luna, A. V. A., Bortoloti, R., & Perovano, A. P. (2015) *Alfabetização matemática*: *Proposta Didática do professor*. *2º ano*. Salvador: Secretaria da Educação do Estado da Bahia/ IAT.

Santana, E., Lautert, S. L., Castro Filho, J. A. De, & Santos, E. M. (2016). Observatório da Educação em Rede: as Estruturas Multiplicativas e a Formação Continuada. *Revista Educação Matemática em Foco*. *5* (01), 77-96.

Schön, D. (1992). Formar professores como profissionais reflexivos. In: A. Nóvoa (Coord.). *Os professores e a sua formação*, (pp.79-91). Lisboa: Dom Quixote.

Serrazina, M. L. (2013). O Programa de Formação Contínua em Matemática para Professores do 1.o ciclo e a melhoria do ensino da Matemática, *Da Investigação às práticas, 3* (2). 75-97.

Autores

Eurivalda Santana. Universidade Estadual de Santa Cruz, Brasil. eurivalda@hotmail.com

Lurdes Serrazina. UIDEF, Universidade de Lisboa, Portugal. lurdess@eselx.ipl.pt

Célia Nunes. Universidade do Estado da Bahia Campus X, Brasil.

Elizabeth Gomes Souza, Jonei Cerqueira Barbosa

A APRENDIZAGEM DE REGRAS DO SISTEMA MATEMÁTICO ESCOLAR NA MODELAGEM MATEMÁTICA[1]

The learning of rules of school mathematics system in mathematical modelling

RESUMEN

Este artículo tiene como objetivo analizar el aprendizaje de las matemáticas que se constituyen en la modelización matemática en el aula, entendiendo a la modelización matemática como la organización de situaciones empíricas. Analizamos el tema a partir de la comprensión de las matemáticas como sistema normativo regido por reglas. Se trata de una comprensión desarrollada por los análisis de las delimitaciones filosóficas de Ludwig Wittgenstein y de las interpretaciones teóricas de Anna Sfard. Los discursos producidos por un grupo de alumnos y de una profesora, obtenidos mediante la *observación* de situaciones empíricas, fueron utilizados como material para el análisis del tema. Los usos que los alumnos y la profesora atribuyeron a las palabras nos permitieron identificar que el juego discursivo de modelización es jugado bajo las reglas instituidas en la forma de vida de las matemáticas desarrolladas en el contexto escolar.

PALABRAS CLAVE:

- *Modelización matemática*
- *Aprendizaje matemático*
- *Sistema matemático escolar*
- *Juego discursivo*

ABSTRACT

This article aims to analyze of what mathematics learning is constituted in mathematical modelling from the understanding of modeling as an organization of empirical situations. This issue has been analyzed based on the understanding of mathematics as *a normative rule governed system*. This view of mathematics is based on Ludwing Wittgenstein's analysis of philosophical delimitations as well as Anna Sfard's theoretical understanding about it. The discourses produced by a group of students and a teacher during the implementation of the modelling have been adopted as empirical material for the analysis of the theme. These data have been collected through observation method. The uses that the students and the teacher attributed the words allowed us to point out that the discursive modeling game is played under the rules instituted in the mathematical way of life developed in the school context.

KEY WORDS:

- *Mathematical modelling*
- *Mathematics learning*
- *Mathematics system school*
- *Discoursive game*

[1] Este artigo é uma versão ampliada e revisada de um capítulo da tese de doutorado da primeira autora, sob a supervisão do segundo autor deste artigo.

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (2019) *22* (1): 39-66.
Recepción: Noviembre 6, 2017 / Aceptación: Febrero 8, 2019. DOI: 10.12802/relime.19.2212

RESUMO

Este artigo objetiva analisar a aprendizagem matemática que se constitui na modelagem matemática em sala de aula, entendendo modelagem matemático como organização de situações empíricas. Analisamos essa temática a partir da compreensão de matemática como sistema *normativo regido por regras*. Trata-se de uma compreensão elaborada pelas análises das delimitações filosóficas de Ludwig Wittgenstein e dos entendimentos teóricos de Anna Sfard. Os discursos produzidos por um grupo de alunos e uma professora, durante a implementação da modelagem, foram adotados como material empírico para análise da temática e obtidos por meio do procedimento de *observação*. Os usos que os alunos e a professora atribuíram as palavras nos permitiram apontar que o jogo discursivo de modelagem é jogado sob as regras instituídas na forma de vida da matemática desenvolvida no contexto escolar.

PALAVRAS CHAVE:

- *Modelagem matemática*
- *Aprendizagem matemática*
- *Sistema matemático escolar*
- *Jogo discursivo*

RÉSUMÉ

Cet article vise à analyser l'apprentissage mathématique que constitue la modélisation mathématique de la compréhension de la modélisation en tant qu'organisation de situations empiriques. On analyse ce thème à partir de la compréhension des mathématiques en tant que système *normatif régie par des règles*. Les analyses des délimitations philosophiques de Ludwig Wittgenstein et les études théoriques de Anna Sfard sont à la base de ce point de vue. Les discours produits par un groupe d´étudiants et une enseignante, au cours de la mise en oeuvre de la modélisation, ont été adoptés comme matériel empirique pour analyser ce sujet et ont été obtenus par une procédure d*'observation*. Les utilisations que les élèves et l'enseignant ont attribuées aux mots nous ont permis de souligner que le jeu de modélisation discursif se joue selon les règles instituées dans le mode de vie mathématique développé dans le contexte scolaire.

MOTS CLÉS:

- *Modélisation mathématique*
- *Apprentissage mathématique*
- *Systéme mathématique scolaire*
- *Jeu discursif*

1. Introdução

De maneira geral, modelagem matemática em âmbito educacional pode ser entendida como uma prática pedagógica em que os alunos são convidados a investigar, problematizar e compreender situações-problema do dia a dia, das ciências e do mundo do trabalho, utilizando conceitos e procedimentos matemáticos escolares (Souza & Barbosa, 2014; Lorin & Almeida, 2015).

As dificuldades dos alunos em aplicar, usar e problematizar esses procedimentos e conceitos em situações cotidianas e realísticas são constatadas pelos baixos índices atingidos pelos alunos em avaliações de aprendizagem matemática, como as realizadas pelo PISA (Programme for International Student Assessment) e pelo Ministério de Educação Brasileiro.

Com objetivo de fortalecer o ensino da matemática por meio de situações realísticas, em 1983, ocorreu a formação do ICTMA (Internation Conference on The Teaching of Mathematical Modelling and Applications), filiado ao International Commission on Mathematics Instruction (ICMI). Este grupo tem consolidado e divulgado pesquisas sobre a implementação da Modelagem e Aplicações em sala de aula em todos os níveis de escolaridade (Stillman, Kaiser, Blum, & Brown, 2013).

Pesquisas divulgadas no ICTMA, bem como em diferentes meios científicos, discorrem consensualmente que a implementação da modelagem matemática em sala de aula gera importantes repercussões para a aprendizagem matemática, como a proficiência em resolver problemas pautados em situações do dia a dia, do mundo do trabalho e das ciências, a tomada de decisão pautada na presença da matemática na sociedade, a elaboração de argumentos matemáticos fundamentados, a utilização de diferentes procedimentos matemáticos na resolução das situações-problema, entre outros (Stillman, Blum., & Biembengut, 2015).

Entre os argumentos favoráveis à implementação da modelagem em sala de aula, a aprendizagem matemática pode ser identificada com um dos recorrentes. Alguns estudos apontam a aplicação dos conceitos matemáticos em situações do dia a dia, como uma das características da aprendizagem matemática gerada pela modelagem (Soares, 2015), enquanto outros relatam fatores motivacionais os quais são fontes para a aprendizagem, como o interesse e o envolvimento dos alunos no debate das situações propostas (Burak, 2017). Já para Almeida e Lorin (2016) esclarecem que no uso da modelagem a aprendizagem de conceitos e procedimentos matemáticos ocorre concomitante a aprendizagem de como construir modelos matemáticos.

As pesquisas citadas acima são representativas do enfoque comumente delineado para as pesquisas sobre aprendizagem matemática no desenvolvimento de atividades de modelagem matemática no contexto escolar. Esses enfoques apresentam a aprendizagem como uma implicação natural desse desenvolvimento, não adotando o tema aprendizagem matemática em seus objetivos de pesquisa. Nesta direção, o estudo desenvolvido neste artigo busca evidenciar, relacionar e analisar os termos "aprendizagem", "matemática" e "modelagem matemática" a partir de uma perspectiva filosófica discursiva.

Assim, objetivamos analisar a aprendizagem matemática que se constitui na modelagem matemática com base em pressupostos filosóficos discursivos.

Para isso, iremos operacionalizar alguns termos da filosofia wittgensteiniana tardia (1999) e conjugá-los às ideias da pesquisadora Anna Sfard (2018) sobre aprendizagem matemática, em um viéis discursivo.

2. A linguagem em *uso*

As ideias de Wittgenstein (1999) devem ser entendidas no contexto de um movimento denominado de "virada linguística", o qual teve repercussões em diversos campos científicos, como a linguagem, psicologia, psicanálise e a filosofia.

Em Wittgentein (1999) a referida "virada" pode ser identifica pelo papel atribuído à linguagem na constituição da significação de nossas experiencias no mundo. É *na e pela* linguagem que constituímos nossas formas de estar no mundo, de nos vestir, falar, sentar, cozinhar, conversar, sorrir, brincar e aprender matemática, por exemplo.

A "virada se caracterizou pela contraposição às ideias predominantes de significação pela linguagem, a qual ela não era concebida como lugar simbólico de significação, mas como *canal* de expressão para a constituição dos *significados.* Assim, a significação era prévia e exterior à linguagem, por isso, a linguagem era entendida como referencial.

Para Wittgenstein (1999), é na análise dos *usos* efetivos da linguagem que compreendemos como os *significados* são constituídos. Por meio da análise desses usos, podemos notar que instituímos a linguagem para as mais diversas finalidades peculiares às comunidades em que vivemos. Por exemplo, usamos a linguagem para nominar objetos, dar e obedecer a ordens, relatar um acontecimento, ou ainda, representar uma peça de um teatro, etc. (Wittgenstein, 1999, p. 35).

Wittgenstein (1999) desconstrói qualquer justificação referencial de linguagem, sejam aquelas recorrentes aos sentidos ou as sensações. Os aforismas de seu texto sugerem um diálogo com o interlocutor que busca por essências e / ou referencias, é frequentemente permeado por exemplos. Wittgenstein (1999) exemplifica para seu interlocutor que os usos da palavra Cor e da palavra Dor, é uma produção linguística que independe dos órgãos dos sentidos. Isso justifica podermos usar a palavra Cor para uma tonalidade nunca vista, ou ainda a palavra Dor para uma sensação que jamais sentimos.

Em alusão à significação lingüística de nossas formas de estar no mundo, Wittgenstein (1999), p. 30) usa o termo "jogos de linguagem" em seus escritos.

Além de outras implicações, a expressão aponta para diversas significações linguísticas possíveis, diversos usos que a linguagem pode constituir. Como nomear objetos, relatar acontecimentos, expor hipóteses e prova-las, resolver problemas, entre outros.

O uso do termo *jogos de linguagem* também visa destacar que os usos que fazem sentido atribuirmos às palavras dependem da *forma de vida* em que os jogos de linguagem estão ancorados. Nesta direção, o filósofo indica a natureza não essencial e não universal dos jogos de linguagem. Existiriam, portanto diferentes usos para a palavra Cor e para a palavra Dor, mas quais seriam esses usos? Depende da *forma de vida* de constituição dos significados. Nas palavras do filosofo " representar uma linguagem é representar uma forma de vida" (Wittgenstein, 1999, p. 32).

Em outras palavras, *a constituição de significados* que se dá *na* e *pela* linguagem está relacionada às questões mais gerais da comunidade de pessoas que faz determinado uso das palavras. Adotamos a definição de Moreno (2003) e compreendemos *formas de vida* como "sistemas *regrados* de ações convencionais e imersos na prática efetiva de nossa vida com a linguagem; sistemas em que se entrecruzam hábitos, atitudes, éticas, concepções a respeito do conhecimento e decisões de vontade" (Moreno, 2003, p. 129, grifo nosso).

Com isso, *forma de vida* é uma expressão que indica a amplitude de questões nas quais a constituição de *significados* está vinculada. Crenças, concepções a respeito do mundo, hábitos e valores, etc. explicam, geram e reelaboram os diversos usos da linguagem e vice-versa.

3. Matemática: um conjunto de enunciados normativos regrados

Wittgenstein (1987) buscou apresentar considerações sobre o papel que os enunciados matemáticos possuem na vida humana. Para o filósofo, os enunciados matemáticos são enunciados normativos, ou seja, seu papel é de organizar nossas experiências no mundo (Glock, 1998; Gottschalk, 2008; Miguel, Vilela, & Moura, 2010; Vilela, 2013).

Conceber os enunciados matemáticos como normativos implica dizer que eles são usados para a organização de nossas experiências, moldando essas experiências de uma determinada forma. Por exemplo, podemos utilizar o sistema de números naturais para a contagem de objetos ao nosso redor e, assim, contabilizarmos cinco canetas em cima de uma mesa de trabalho.

Caso adotássemos outro sistema, poderíamos contabilizar oito, dez, ou três canetas, enfim, poderíamos dar outro sentido a essa experiência. Nas palavras de Gottschalk (2008, p. 81), os enunciados matemáticos, em uma perspectiva wittgensteiniana, "têm a função de paradigmas, modelos que seguimos para dar sentido à nossa experiência empírica".

Assim, podemos notar que a adoção de determinado sistema normativo regula nossas experiências. No exemplo citado acima, foi o uso do sistema matemático escolar que *orientou* a experiência de contar e de relatar a quantidade de canetas. Afirma Glock (1998) que para Wittgenstein,

> As proposições matemáticas não descrevem nem entidades abstratas, nem a realidade empírica; tão pouco refletem o funcionamento transcendental da mente. Seu estatuto apriorístico se deve ao fato de que, a despeito de sua aparência descritiva, seu papel é normativo, nada que as contrarie pode ser considerado uma descrição inteligível da realidade (Glock, 1998, p. 243).

Com base nesse entendimento, as cinco canetas dispostas em uma mesa de trabalho não são vistas como *descrição* ou *representação do numeral* cinco, uma possível compreensão advinda de um entendimento referencial de linguagem. Neste caso, as cinco canetas corresponderiam a como nós organizamos a experiência de contagem pautada no sistema de número naturais adotado na escola.

Por isso, afirma Glock (1998), que para Wittgenstein, os enunciados matemáticos são distintos dos enunciados das ciências empíricas. Em função dos enunciados matemáticos serem normativos, as experiências não refutam esses enunciados da mesma maneira que refutaria os enunciados empíricos.

O sistema de números naturais não seria modificado, caso encontrássemos três, ao invés de cinco canetas, no exemplo aqui discutido. Se isso ocorresse, questionaríamos a situação empírica, afirmando que alguém pegou as canetas vistas anteriormente, ou utilizaríamos outro sistema de números naturais para lidar com tal experiência, de tal forma que o sistema de números naturais usado como normatização não seria modificado em funçaõ da experiência empírica.

Exemplificamos, assim, o fato de os enunciados matemáticos com base nas ideias de Wittgenstein, não serem alvo de refutação pela observação e/ou pela experimentação (Glock, 1998; Gottschalk, 2008, 2014; Vilela, 2013). Diante de tais questões, delineamos a compreensão de que os enunciados matemáticos são enunciados adotados como sistemas/normas para a organização de nossas experiências no mundo. Trata-se da organização no sentido que os enunciados moldam, dão a essas experiências determinado formato.

O estudo de Vilela (2013) a autora identificou nas diferentes adjetivações relativas à matemática (p. ex. matemática dos agricultores, matemática da rua, do dia a dia, etc.), a constatação da existência de diferentes matemáticas, o que neste estudo pode ser entendido como outros possíveis sistemas normativos pelos quais diferentes grupos sociais organizam suas experiências empíricas, além do matemático escolar e acadêmico. Com base nas ideias de Wittgenstein (1999) podemos dizer que esses sistemas / normas foram constituídos e estão vinculados a distintas *formas de vida*.

4. A aprendizagem do sistema matemático escolar

As ideias relativas à "virada linguística" foram mobilizadas também no campo da Educação Matemática, por pesquisadores como Richard Barwell (2013), Candia Morgan e Anna Sfard (2016), Planas (2018), entre outros. Em comum, a discussão neste campo pode ser sintetizada pela compreensão de aprendizagem matemática como um processo de natureza exclusivamente discursiva.

Nesta direção, as diversas questões que envolvem a aprendizagem matemática no contexto escolar ou acadêmico se constituem nessas pesquisas como problemáticas de natureza discursiva, em contraposição, portanto, às perspectivas de aprendizagem majoritárias na década de 1990, as quais entendem a aprendizagem matemática como um processo cognitivo.

Os estudos de Sfard (2008, 2012) ampliam o entendimento discursivo de aprendizagem matemática para a delimitação da própria Matemática, seus teoremas, demonstrações, conceitos, mediadores visuais, etc., como Discursos. Para este artigo, utilizaremos a compreensão da autora relativa a aprendizagem da Matemática, a qual ela, denomina de aprendizagem do Discurso matemático.

Entre outras descrições que envolvem o entendimento de Discurso matemático, Sfard (2008) destaca que ele é um Discurso orientado por regras de natureza "como" e regras de natureza "quando" (Sfard, 2008, p. 208, tradução nossa). As regras *como* dizem respeito ao que denominamos de regras procedimentais. Tais regras orientam a elaboração de enunciados que podem ser identificados como enunciados matemáticos legítimos, ou seja, aqueles próprios do Discurso matemático escolar / científico.

Entendemos que Sfard (2008) reconhece que o aprendizado dessas regras deve ser vinculado ao aprendizado da *forma de vida* a qual tais enunciados são considerados válidos e legítimos. Por conta disso, a autora aponta que a aprendizagem do Discurso matemático envolve regras de outra natureza, as regras *quando.*

As regras *quando* indicam *sob que circunstâncias espaciais, temporais ou contextuais, ou seja, sob quais critérios a* adoção das regras do tipo *como* será considerada legítima. Para a autora, o fato de alguns indivíduos não utilizarem o sistema matemático escolar / acadêmico em situações não escolares e não acadêmicas e vice-versa, indica que as regras de um Discurso são válidas e legítimas em *formas de vida* específicas, por isso não transferíveis entre distintos contextos.

No que refere à *forma de vida* constituída no contexto escolar, o sistema matemático escolar e as suas regras *como* e *quando* são concebidos como únicos válidos para a produção de enunciados matemáticos legítimos. Produção discursiva legítima deve ser entendida como usos que fazem sentido empregar às palavras em determinada *forma de vida*.

Neste artigo, compreendemos a Matemática escolar como um *sistema normativo orientado por regras*, pois normatizam nossas experiências empíricas, a partir de um conjunto de regras de orientação para a produção de tais enunciados.

Nesta perspectiva, a aprender Matemática no contexto escolar, corresponde a aprender a produzir enunciados matemáticos legítimos, os quais para serem elaborados dependem da identificação das regras *quando*, as quais a elaboração das regras *como* são válidas e consideradas legítimas.

No contexto escolar, o professor é um participante experiente (Harré & Tissaw, 2005) cuja participação intencional no Discurso é o ensino das regras e a avaliação da legitimidade da produção de enunciados matemáticos pelos alunos, os participantes iniciantes no Discurso (Sfard, 2008).

Os exemplos contidos em Sfard (2007, 2008, 2012) sugerem que os alunos na participação no Discurso matemático escolar buscam organizar as suas experiências adotando o sistema matemático do dia a dia. Diante disso, ela aponta que os alunos devem *mudar* a sua produção discursiva, o que é representado pela adoção de regras do tipo *como* relativas ao sistema matemático escolar em *substituição* a esse sistema.

Todavia, apresentamos uma sugestão distinta e apontamos para a ideia de que a aprendizagem matemática que se constitui no contexto escolar pode se caracterizar por uma *delimitação discursiva*, ou seja, pela identificação de quais circunstâncias (*quando)* as regras do tipo *como* são consideradas legítimas. Desta maneira, os alunos poderão escolher pelo uso do sistema que se adéque a determinadas finalidades e sejam legítimos em determinada *forma de vida*, ao invés de *substituir* um sistema matemático por outro.

O sistema matemático escolar está relacionado às formas de vida distintas daquelas aos quais os indivíduos vinculam-se em contextos não escolares. Esse fato justifica a compreensão de a escola ser entendida como lócus histórico e socialmente constituído para a aprendizagem do sistema matemático escolar.

Diante dessa especificidade, os participantes iniciantes neste sistema, irão aprender o Discurso por meio de um processo denominado imitação discursiva

(Sfard, 2008). Ela corresponde à elaboração de enunciados matemáticos tendo a produção discursiva do professor como modelo. A autora aponta que isso ocorre porque os alunos, no momento inicial de aprendizagem, não identificam as razões de usar determinadas regras relativas ao sistema matemático escolar, por isso, imitam os enunciados matemáticos produzidos pelo professor.

A imitação discursiva corresponde à elaboração discursiva realizada a partir de um participante experiente no Discurso. As regras de um Discurso já se encontram compartilhadas e utilizadas por uma comunidade, elas não são modificadas pelos participantes iniciantes. Todavia imitar regras não implica produzir discursos iguais e sim produzir discursos orientados pelas regras ensinadas e elaboradas pelos participantes experientes.

Contudo, a adoção, pelos alunos, da produção discursiva do professor como *modelo,* ocorre, segundo Sfard (2008, p. 256, tradução nossa), a partir de um conflito denominado de "conflito commognitivo". O conflito commognitivo é uma situação na qual se identifica que os discursantes estão adotando diferentes regras em seus enunciados, ou em nossos termos, estão adotando diferentes sistemas matemáticos normativos.

Em âmbito escolar, Sfard (2008) destaca que esse conflito ocorre em virtude de os alunos adotarem, como regras na elaboração de seus enunciados matemáticos, aquelas válidas e legítimas em contextos não escolares. Diante disso, Sfard (2008) aponta que o conflito é dissolvido quando os alunos adotam as regras do tipo *como* legítimas no contexto escolar e abandonam ou mudam suas produções discursivas oriundas de outros contextos.

5. Modelagem: uma *maneira* de organizar situações empíricas

A modelagem matemática na Educação Matemática tem sua constituição, a partir de pesquisas desenvolvidas no âmbito da Matemática Aplicada (Souza, Almeida, & Kluber, 2018). Em particular, no campo da educação matemática brasileira tal constituição ocorreu por meio de iniciativas de ensino da matemática por meio de modelos matemáticos, em cursos de nível superior em engenharia e matemática, e posteriormente em cursos de especialização para professores nos relata Almeida (2017).

A natureza da constituição do campo configura as múltiplas designações para a expressão modelagem matemática na Educação Matemática, sem haver a busca por uma unidade de significação (Barbosa, Caldeira., & Araújo, 2009). Assim, a modelagem matemática pode ser entendia como a arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos (Bassanezi, 2015), como alternativa pedagógica a qual, problemas não essencialmente matemáticos são resolvidos por meio da matemática (Lorin & Almeida, 2015), ou ainda como um conjunto de procedimentos cujo objetivo é explicar matematicamente situações do cotidiano (Burak, 2017), entre outras delimitações existentes.

As pesquisas sobre modelagem no cenário brasileiro se caracterizam pela ênfase na aprendizagem matemática gerada no desenvolvimento das atividades de modelagem em suas múltiplas etapas, assumindo a possibilidade de não construção de modelos matemáticos, bem como na natureza crítica dos temas reais tratados no contexto escolar (Kluber & Burak, 2014; Freitas, 2017).

Já no cenário internacional, a modelagem matemática na Educação Matemática identifica-se pelo desenvolvimento de ciclos de modelagem, os quais correspondem a realização item por item de etapas que conduzem a construção de modelos matemáticos e a suas validações (Stillman, Blum., & Biembengut, 2015).

Apesar das multiplicidades de concepções de modelagem matemática possíveis, de maneira geral em âmbito escolar, ela pode ser entendida como a elaboração, pesquisa e/ou resolução *matemática* de situações-problema,[2] adjetivadas de reais ou, ainda, de não matemáticas. A modelagem na Educação Matemática adota, predominantemente, o sistema matemático escolar para abordagem dessas situações.

Apesar de específica, a situação-problema apresentada em Sonego e Bisognim (2010) é representativa de como uma situação-problema é predominantemente abordada em tarefas de modelagem na educação matemática. As autoras, diante uma situação-problema que consistia na determinação da quantidade de metal necessária à construção de silo. Um silo é um recipiente de armazenamento e beneficiamento de arroz industrial. Entendemos que fazer modelagem consistiu em mobilizar regras do tipo *como* relativas ao sistema matemático escolar na abordagem dessa situação - problema.

Para a mobilização dessas regras, as autoras afirmaram que “durante as visitas de campo os alunos perceberam que a forma do silo é um cilindro, e a parte de cima é um cone” (Sonego & Bisognin, 2010, p. 6) e realizaram cálculos relativos a essas duas figuras. Assim, podemos dizer que foram mobilizadas regras do tipo *como* referentes às figuras geométricas denominadas no sistema matemático escolar de cone e de cilindro.

[2] Tendo em vista a origem de constituição do campo da Modelagem na educação matemática ser a Matemática Aplicada, mantiveram-se a caraterística de *resolução de uma problemática real* como eixo comum das atividades de modelagem. Todavia, não se deve confundir com o campo de pesquisa de Resolução de Problemas, pois ambas possuem distintas de constituições de origem, bem como maneiras de operacionalizar as atividades propostas.

Como resultado, os alunos e a professora relataram que seriam necessários 92.99 m^2 de metal para construir um silo de algumas específicas dimensões. Diante do uso de regras do sistema matemático escolar na abordagem dessa situação - problema, podemos afirmar que as autoras, modelaram matematicamente a situação.

Poucas pesquisas descrevem ou objetivam explicitar o embasamento filosófico orientador do desenvolvimento das atividades de modelagem propostas no contexto escolar. Porém, o estudo de Araújo (2007) nos possibilita compreender a associação realizada entre o objeto físico (no exemplo o silo) e os objetos matemáticos (no exemplo as figuras matemáticas) como operacionalizadas à luz de uma perspectiva descritiva e referencial de Matemática.

Neste artigo, uma análise discursiva wittgensteiniana nos possibilita apresentar outra compreensão possível. O silo não é um cilindro, nem a parte do superior do silo *é* um cone. Um silo é comparável a um cilindro se eu adotar o sistema matemático escolar previamente para organizar / nomear esse objeto. Não haveria uma função de Matemática como descrição dos objetos e fatos do mundo "real" e sim, uma maneira de ver a partir de um determinado sistema normativo.

Com base nesse entendimento, compreendemos modelagem matemática em âmbito escolar como um *modo de apresentar* situações empíricas e *de lidar* com elas. Centralizamos essas duas características pelo uso único da palavra *organização* de situações empíricas.

As situações - problema em modelagem são caracterizadas como situações empíricas, porque são passíveis de verificação e refutação pela experiência. Diante disso, a modelagem pode ser entendida como o uso do sistema matemático escolar na abordagem de situações empíricas. Esse sistema, como vimos, refere-se ao conjunto de regras do tipo *como*, ou seja, de regras procedimentais que são adotadas como modelo para essa abordagem. Essas regras estão ancoradas em *formas de vida, nas quais* o sistema escolar se fundamenta.

Assim, a aprendizagem matemática em modelagem neste artigo corresponde à elaboração de enunciados matemáticos legítimos relativos à elaboração, pesquisa e resolução matemática da situação - problema. A produção de tais enunciados por sua vez, dependem da identificação das regras *como* e *quando* peculiares ao sistema matemático escolar.

6. A tarefa de modelagem: o lixo eletrônico

A professora Nanda, cujos discursos analisamos, encontrava-se no último semestre de um curso de licenciatura em Matemática em uma universidade pública do Brasil. Entre outras disciplinas, frequentava a de Modelagem Matemática e a de Estágio Supervisionado. A disciplina de estágio compreende a inserção dos futuros professores em ambientes escolas, sob supervisão do professor da referida disciplina cursada na universidade.

Os discursos analisados neste artigo são de um grupo de alunos da escola em que referida professora cumpria a carga horária definida na disciplina de estágio supervisionado. O grupo de alunos observado foi escolhido pela professora, em virtude de serem falantes e questionadores durante suas aulas de matemática. Nesse artigo, os identificamos pelos nomes fictícios Fábio, Ane, Laís e Denise. Na disciplina Modelagem Matemática, o professor solicitou aos graduandos que elaborassem, em grupos, uma tarefa de modelagem para ser implementada por um dos integrantes do grupo de alunos.

A professora Nanda escolheu o tema lixo eletrônico e junto com seus colegas elaborou um pequeno texto descrevendo a problemática e um conjunto de cinco situações-problema, configurando-se, assim, a tarefa de modelagem a ser entregue aos alunos. A seguir, apresentamos a referida tarefa. A tarefa consistia de mais 4 (quatro) situações-problema, mas mantemos neste texto, apenas aquela a ser analisada.

LIXO ELETRÔNICO

No Brasil, são consumidos cerca de 100 milhões de lâmpadas fluorescentes por ano. Desse total, apenas 6% (aproximadamente) é reciclado, dando origem a materiais que, em sua maioria, são comercializados em mercados secundários. O restante das lâmpadas é descartado em aterros sanitários sem nenhum tipo de tratamento, podendo contaminar o solo e a água.

Além disso, cada lâmpada reciclada possui concentração média de 10 mg de mercúrio, variando de acordo com o tamanho e o modelo e a cada 1.000 lâmpadas fluorescente tubulares se obtêm aproximadamente 6kg de pó de fósforo, 18 kg de terminais de alumínio, pinos de cobre, eletrodos e etc. 8000 mg de mercúrio e 260 kg de vidro.

O conceito de sustentabilidade exige portando profunda transformação da sociedade, alterando atitudes, comportamentos e valores. Por conseguinte, estudar e compreender os problemas decorrentes da utilização dos recursos naturais torna-se uma demanda urgente e de grande importância.

Questões

A partir das informações presentes no texto, responda:

a) Quanto de mercúrio é necessário para produzir o total de lâmpadas que são recicladas no Brasil?

Figura 1. Tarefa de modelagem criada pelo grupo de Nanda resumida pelos autores

7. O MÉTODO E OS PROCEDIMENTOS DE REGISTRO DOS DISCURSOS DOS PARTICIPANTES

O objetivo deste estudo foi analisar a aprendizagem matemática que se constitui em modelagem matemática em uma perspectiva filosófica discursiva. Entendemos matemática. Entendemos matemática como um conjunto de enunciados normativos regrados. Seus enunciados são, frequentemente, constituídos em termos de escritos, orais e/ou gestuais. Por conta disso, adotamos como fonte de dados desse estudo, a fala, a escrita e os gestos dos participantes produzidos durante o desenvolvimento de uma tarefa de modelagem. Denominaremos a fala, a escrita e os gestos produzidos de discursos orais, discursos escritos e discursos gestuais, respectivamente e as suas produções de *produção discursiva*. Quando esses discursos se constituirem como matemáticos, denominaremos de discursos matemáticos ou de produção discursiva matemática.

O método de pesquisa utilizado para compreensão da temática apresentada nesse estudo foi o método qualitativo. Ele é adotado, frequentemente, em função do objetivo do estudo e da natureza dos dados que o pesquisador visa ter como fonte de análise. Em particular, o método qualitativo é adotado em pesquisas que têm como fonte de dados, as crenças, significados, práticas, formas de vida e os discursos dos indivíduos (Denzin & Lincol, 2005).

Entre os possíveis procedimentos de obtenção de dados, adotamos *a observação*, pois esse procedimento nos permitiria entender o fenômeno estudado no momento de materialidade do mesmo (Angrosino, 2005). As observações realizadas foram registradas em vídeo. A professora Nanda desenvolveu a tarefa de modelagem com os seus alunos durante dois dias consecutivos. As gravações possuem duração de uma hora e trinta minutos, no primeiro dia, e uma hora e cinquenta minutos, no segundo.

8. PROCEDIMENTOS DE ANÁLISE DOS DISCURSOS

Após as filmagens, os discursos produzidos pelo grupo de alunos e pela professora foram transcritos em sua totalidade. Contudo, selecionamos, para análise, apenas os produzidos durante o desenvolvimento da primeira situação-problema, entre as cinco propostas por Nanda na tarefa de modelagem, em virtude de termos identificado que, na realização da primeira situação-problema, os discursos apresentavam elementos importantes acerca da temática do estudo.

Após selecionarmos esse trecho relativo à produção discursiva, adotamos algumas sugestões de Chamaz (2006) relativas à maneira de analisar dados, quando estes são os discursos dos participantes e quando o estudo não possui categorias previamente estipuladas a serem adotadas para a análise de dados. Podemos dizer que essas sugestões foram assumidas como orientadoras para a escolha de realização de uma análise preliminar em nosso estudo.

Assim, posterior à análise descritiva preliminar, elaboramos uma análise na qual usamos diretamente os conceitos teóricos assumidos, com base no que nos informava a produção discursiva dos participantes da pesquisa.

As transcrições dos discursos serão apresentadas em uma sequência numerada de registros dos mesmos e da indicação de quem os produziu. Inspiramo-nos em Silva (2002) e utilizamos como marcadores de conversação, o símbolo barra (/), para indicar pausas entre orações e pausas no interior das orações. As pausas representativas de hesitação, por parte dos discursantes, serão identificadas pelo uso de reticências, da seguinte maneira: [...]. Nossos comentários serão realizados entre duas chaves.

9. A análise descritiva preliminar

Após um breve debate sobre o tema lixo eletrônico e a leitura da tarefa na íntegra pela professora, os alunos em grupo foram solicitados a iniciarem a resolução das situações - problemas. A seguir, apresentamos as primeiras discussões sobre a primeira questão da tarefa, a qual possuía o seguinte enunciado: *Quanto de mercúrio é necessário para produzir o total de lâmpadas que são recicladas no Brasil?*

[1] **Fábio:** Para usar isso aqui de mil? Ô Professora **como** é que vai somar esse oito mil? ((Fábio aponta para o valor 8.000 mg presente na tarefa de modelagem))

[2] **Nanda:** Esse oito mil aqui, tem a ver com [...] Depois que ela passa pelo processo de reciclagem.

[3[**Fábio:** com mil lâmpadas?

[4] **Fábio:** Reciclagem de ?

[5] **Nanda:** É (/) porque já tinham mil lâmpadas (/) **quando eu obtenho delas, essas mil lâmpadas, eu tiro algumas coisas** (/) Agora tente ver (/) Vamos buscar por partes (/) Qual foi a primeira pergunta? Quais são os itens dessa primeira pergunta?

[6] **Fábio:** Quanto de mercúrio é necessário para produzir o total de lâmpadas que são recicladas no Brasil? (/) Então (/) Eu não sei.

[7] **Ane:** Mas professora vem cá (/) **Quanto de mercúrio é necessário pra produzir o total de lâmpadas que são recicladas no Brasil?** São recicladas seis por cento das lâmpadas.

[8] **Nanda:** ((Nanda fez gestos confirmando o argumento))

[9] **Ane:** Não professora (/) Vem cá (/) No caso aqui (/) desses **seis por cento (/) nós vamos ver quanto vai ter de mercúrio?**

[10] **Ane: É?**

[11] **Nanda:** Não (/) Na primeira eu só pergunto [...] É exatamente!

[12] **Fábio:** Vai dizer isso aqui da reciclagem? ((Fábio apontou para o valor de 6% presente na tarefa)).

[13] **Ane:** Agora (/) Nós temos que ver quanto ((A fala de Ane é interrompida por Nanda)).

[14] **Nanda: Depois que essas mil lâmpadas (/) milhões de lâmpadas vão passando pela reciclagem (/) vão ficando como subproduto essas quantidades aqui (/) entendeu?** ((Nanda indicou no texto o valor de 6%)).

[15] **Fábio:** Tem que transformar oito mil? ((Fábio respondeu a pergunta de Nanda)).

[16] **Ane: Não (/) Vão ser mil lâmpadas que serão produzidas (/) Não são mil? (/) Aí (/) nós vamos tirar os seis por cento?** | ((Concomitantemente ao discurso oral de Ane “nós vamos tirar seis por cento”, Ane produziu o discurso escrito “ 1.000 - 0,06”)).

[17] **Fábio:** Vão ser milhões.

[18] **Nanda:** São cem milhões.

[19] **Ane: Então (/) São seis por cento de cem milhões?**

[20] **Nanda:** É

[21] **Nanda:** Então (/) já tem os dados da primeira questão não é?

[22] **Ane: Já**

[23] **Nanda: Então (/) já sabe.**

Os discursos anteriormente apresentados correspondem ao momento em que a professora é questionada pelos alunos sobre a produção discursiva legítima que deveria ser elaborada relativa ao discurso escrito “Quanto de mercúrio é necessário para produzir o total de lâmpadas que são recicladas no Brasil?”

Inicialmente, a professora solicita a leitura desse discurso pelos integrantes do grupo [5]. Essa leitura é alternada pelo uso de outras palavras para explicar /

ensinar os alunos sobre quais regras *como* devem ser acionados para a resolução da situação - problema, ver nas falas de número [5], [14]. No discurso da professora seria necessário, os alunos tirassem valores do total de lâmpadas que fossem recicladas.

Podemos notar que Ane buscou produzir a resposta para a situação - problema, em função do que a professora lhe sugeriu como produção discursiva coerente à resolução. Na transcrição de número 16, Ane, além de verbalizar para a professora como a situação - problema deveria ser matematizada, relatando "nós vamos tirar os seis por cento?", Ane transcreveu seu discurso oral no discurso escrito procedimental da seguinte maneira "1.000 – 0,06".

Nanda e Fábio corrigiram Ane, somente quanto ao valor do número de lâmpadas, por ela adotado, afirmando não se tratar de mil, mas, de cem milhões. Ane, então, perguntou "são seis por cento de cem milhões", e a professora indicou que esse discurso oral correspondia ao procedimento matemático que deveria ser desenvolvido pelo grupo.

Quando a professora se distanciou do grupo, Fábio transcreveu o discurso oral de Ane no seguinte discurso procedimental "100.000.000 – 0,06". Na ausência da professora, os alunos assumiram não saber que discurso matemático escrito corresponderia a "seis por cento de cem milhões".

Quando presente no grupo, a professora solicitou que os alunos lhe explicassem o discurso escrito que haviam formulado. Os alunos não responderam a Nanda, tão pouco a professora produziu qualquer julgamento sobre a coerência do discurso matemático dos alunos como resolução matemática legítima da situação - problema. A professora optou por indicar novamente, como a situação - problema deveria ser matematizada, em termos de notação científica.

Os alunos modificaram a maneira pela qual estruturam matematicamente problema, somente, em termos de transformação em notação científica. Embora, o grupo de alunos não tenha atingido um consenso a respeito de como estruturariam "100.000.000 – 0,06" em notação científica, prevaleceu a sugestão de Fábio, que estava com a tarefa de modelagem, em mãos.

O aluno registrou na folha de anotações, a seguinte produção discursiva matemática: "$10^8 - 0{,}06$". Contudo, novamente, os alunos não desenvolveram matematicamente esse discurso, embora cientes de que procedimentos matemáticos precisam ser desenvolvidos, pois várias tentativas foram empreendidas.

Devido à não identificação pelos alunos, de quais discursos matemáticos corresponderiam a uma resolução legítima da situação - problema, os mesmos recorreram às novas sugestões da professora. As transcrições a seguir se referem ao momento em que Nanda retornou ao grupo.

[73] **Ane:** Ô professora! Professora.

[74] **Ane:** Nós ainda não começamos!

[75] **Nanda:** É (/) já percebi ! Estão demorando demais (/) a maioria já conseguiu.

[76] **Laís:** É pra usar notação científica, não é? ((Enquanto pronuncia esse discurso, a aluna aponta para a expressão "$10^8 – 0,06$" presente na tarefa de modelagem))

[77] **Nanda:** É (/) Mas não importa. (/) Se vocês não sabem lidar com notação científica (/) usem o que vocês sabem.

[78] **Fábio:** Mas assim (/) fica difícil (/) É muito complicado!

[79] **Nanda: Olha (/) se eu tenho cem milhões de lâmpadas (/) e eu quero tirar seis por cento de cem milhões (/) Quanto é que dá isso?**

[80] **Fábio**: Não sei.

[81] **Nanda**: O que isso aqui ? ((Nanda apontou para a expressão "$10^8 – 0,06$")) Explica para mim.

[82] **Ane: Está certa essa conta?**

[83] **Ane: É a notação científica (/) professora (/) de cem mil (/) Não é assim não?**

[84] **Fábio:** Ah (/) professora (/) está difícil!

[85] **Fábio: inaudível.**

[86] **Nanda:** Sim ((Nanda responde ao questionamento de Ane)) (/) Mas eu estou perguntando o que é que isso aqui ((Nanda referindo-se novamente à expressão "$10^8 – 0,06$")) (/) o que isso adianta para nossa questão?

[87] **Fábio:** Explica para nós!

[88] **Nanda:** Mas eu já expliquei.

[89] **Fábio:** Vou tirar zero!

No trecho anterior, podemos notar que os alunos buscaram produzir discursos matemáticos somente com base na indicação discursiva da docente ("é notação científica, não é?"), sem no entanto, saberem justificar o porquê estruturaram o problema em notação científica da seguinte forma "$10^8 – 0,06$".

A docente não afirmou estar correto a elaboração discursiva dos alunos, optando por buscar explicações dos discentes sobre a estrutura elaborada, mas eles responderam sobre a dificuldade da situação - problema. Nanda então, seguiu um dos direcionamentos para desenvolvimento de tarefas de modelagem, a saber, permitir que os alunos construam as respostas para os problemas, tendo com isso, um papel ativo no processo de modelagem.

Assim, ela resolve explicar novamente como a situação-problema deve ser matematicamente entendida, usando as mesmas palavras do discurso dito inicialmente "se eu tenho cem milhões de lâmpadas e quero tirar seis por cento de cem milhões"? [79]. Os alunos que já haviam estruturado matematicamente esse discurso, porém o mesmo não foi avaliado como legítimo pela docente, explicitam não saberem como elaborar outro discurso matemático a partir da indicação da professora. A seguir, os discursos que se sucederam, após o pedido de Fábio, de outras explicações.

[90]	**Nanda: Vocês já sabem que o número de lâmpadas.**	
[91]	**Fábio:** Isso está ok!	
[92]	**Nanda: Ok (/) Aí (/) eu vou tirar os seis por cento** (/) **Como é que eu faço? Isso é uma porcentagem (/) Como é que eu tiro seis por cento de cem milhões?**	
[93]	**Fábio:** Mas é muito grande (/) é muito chato.	
[94]	**Nanda:** Não (/) Faça (/) Todo mundo fez e conseguiu (/) Mesmo ficando muito grande (/) Faça isso para eu ver (/) Aí (/) nós veremos o que é que faz (/) Vocês estão com medo de errar (/) Deixa aqui (/) faz de novo (/) Como é que vocês aprenderam a tirar ? A fazer com esses números mesmos?	
[95]	**Fábio:** Assim ô, cem mil ((Fábio começou a escrever o discurso 100.000.000 – 0,06))	
[96]	**Nanda:** Cem milhões!	
[97]	**Fábio: Cem milhões (/) desculpa! (/) Menos zero vírgula zero seis.**	((Fábio finalizou a escrita: "100.000.000 – 0,06"))
[98]	**Nanda: É assim que tira zero vírgula seis de cem milhões? O que é esse zero vírgula zero seis? Seis por cento, né ? Como é que eu tiro de cem milhões, seis por cento, desse total? Como é que eu tiro?**	
[99]	**Fábio:** ((Fábio movimentou os ombros fazendo gestos que representam não saber responder))	
[100]	**Nanda: Se tenho cem reais (/) eu tiro seis por cento (/) Quanto é que é?**	
[101]	**Fábio: Se fosse eu ia fazer (/)**	((O aluno produziu o discurso escrito "100 – 0,06" em resposta a pergunta de Nanda))
[102]	**Laís:** Cem mil (/) menos zero vírgula (/) zero seis (/) Não é assim não?	
[103]	**Nanda:** Dá quanto isso aí? ((Nanda questiona Fábio a respeito do discurso "100 – 0,06" elaborado por ele))	
[104]	**Fábio:** Eu não sei.	
[105]	**Nanda:** Não sabe (/) **quanto é cem menos 0,06?**	
[106]	**Fábio:** É difícil!	

Na transcrição de número 92, a professora realiza novas sugestões por meio da oralidade sobre a estruturação matemática que a situação - problema requeria como legítima no campo do discurso escrito pelos alunos. O discurso oral da docente mantém as palavras usadas em outros momentos de explicação, acrescentando, porém a indicação do assunto matemático escolar a ser acionado pelos alunos na estruturação matemática solicitada, afirmando "isso é uma porcentagem", "como é que eu tiro seis por cento de cem milhões?".

A pergunta presente no discurso oral da docente foi respondida por Fábio na produção do discurso escrito "100.000.000 – 0,06". Para Fábio, esta seria a estruturação matemática legítima relativa a situação - problema almejada pela docente ao propor a tarefa aos alunos. Uma transcrição que atribuiu usos matemáticos palavra por palavra do discurso oral da docente.

Na busca por indícios na fala da docente sobre qual seria estruturação matemática correta da situação - problema, a pergunta da docente em [98] questionando o discurso escrito de Fábio e repetindo a sugestão anterior, indicou para o aluno a ilegitimidade de sua resposta na avaliação da professora. Em [99], o aluno gesticula não saber responder às perguntas da professora, já que sua resposta não sido confirmada como correta pela docente.

Assim como o discurso da professora é indício para os alunos sobre a legitimidade de sua produção, o discurso dos alunos mostra para a docente se suas sugestões e indicações estão sendo transcritas no discurso escrito dos alunos de forma satisfatória em sua avaliação. Neste caso, diante da negativa do aluno em respondê-la, a professora resolve reformular a sua pergunta dizendo, "*se* eu tenho *cem reais* eu tiro seis por cento?", quanto é que é?

Esse novo discurso oral de Nanda apresenta mudanças em relação aos discursos [79], [92] e [98]. Ele inclui outra variável, a variável dinheiro e um valor quantitativamente menor em relação a cem milhões, cem reais (Reais é a moeda monetária brasileira). Todavia, a mudança de valor e de quantidade não conteve diferença na estrutura matemática oral sugerida, pois se manteve o verbo "tirar" e a expressão "seis por cento".

O uso do adverbio condicional "*se*" e seu *uso* entendido como uma possibilidade que não se referia à tarefa propriamente, mas uma analogia a ela, fez Fábio afirmar *se* fosse assim e transcreveu o discurso oral da docente da seguinte maneira "100 – 0,06".

Assim, podemos notar que o aluno novamente atribuiu usos matemáticos ao discurso hipotético de Nanda, semelhante aos usos empreendidos nas sugestões anteriores, como em [97]. Em ambos os casos, o verbo "tirar" foi associado ao procedimento matemático do campo da subtração, bem como "por cento" mobilizou a transformação em número decimal.

Na sequência, a professora não responde estar incorreto a produção discursiva do aluno e escolhe questioná-lo sobre ela. Novamente, o aluno entende essa escolha como uma negativa da professora em relação à estruturação matemática da questão e responde “Eu não sei”.

Diante da constatação discursiva da docente de que os alunos ainda não produziram uma estruturação matemática legítima da situação-problema, ela opta por uma nova mudança discursiva.

[107]	**Nanda: Se eu pedir seis por cento de dez reais?**	
[108]	**Fábio: Já sei**! (/) Calma (/) Se fosse eu (/) eu ia fazer assim.	
[109]	**Nanda:** Se fosse você? (/) Mas é você!	
[110]	**Fábio:** Não (/) Mas se fosse eu (/) eu fazia assim (/)	((O aluno registrou na folha de anotações o seguinte discurso matemático em resposta a pergunta de Nanda: $100 \times \frac{6}{100}$ e o desenvolveu da seguinte forma: $100 \times \frac{600}{100} = 6$))
[111]	**Ane:** Dá seis!	
[112]	**Denise:** É (/) dá seis!	
[113]	**Nanda: Então (/) como é que faz?** ((Após essa fala Nanda se distanciou do grupo))	
[114]	**Fábio:** Ah! Então é fácil! (/) Vai ser assim (/)	((Fábio apagou a operação de subtração presente no discurso (100.000.000 – 0,06) e inseriu em seu lugar, a operação de multiplicação, procedendo da seguinte maneira)) $100.000.000 \cdot \frac{6}{100} \Rightarrow \frac{600.000.00\cancel{0}\cancel{0}}{1\cancel{0}\cancel{0}} \Rightarrow 6.000.000$
[115]	**Fábio:** Dá seis mil	((Fábio leu o resultado como seis mil, mas manteve a escrita de seis milhões em sua folha de anotações))
[116]	**Fábio:** Está certo? ((Fábio perguntou a pesquisadora))	
[117]	**Fábio:** É só isso é? ((Fábio perguntou a Ane))	

Na transcrição de número [107], a professora Nanda escolhe manter um discurso hipotético com variável dinheiro, intencionando uma analogia com situação - problema sobre lâmpadas, todavia muda a estrutura discursiva de sua fala, perguntando "*se* eu *pedir* seis por cento *de* dez reais?".

Podemos notar que o novo discurso de Nanda é diferente dos discursos anteriores. Nesse caso, o verbo "tirar" não foi mais utilizado e foi substituído por "pedir seis por cento de dez reais". Essa nova estrutura do discurso da professora gerou também mudanças nas respostas discursivas de Fábio. O aluno atribuiu usos matemáticos até então não usados às palavras do discurso da docente. Assim, ele respondeu a "fazer seis por cento de dez reais" com o discurso escrito "$100 \times \frac{6}{100}$", ou seja, acionando o procedimento matemático do campo multiplicativo e da porcentagem em forma de fração. O uso do valor *cem,* ao invés do valor dez, presente no discurso de Fábio pode ter ocorrido, em virtude da analogia com a sugestão anterior da professora que envolvia o valor cem.

Pela primeira vez na interação discursiva, o aluno desenvolve a estruturação matemática elaborada por completo e encontra seu resultado. Após isso, a professora sugere aos alunos que usem esse modelo de estruturação matemática para a situação - problema em questão sobre lâmpadas, questionando "então, como é que faz?"

Essa indicação da professora gerou novas produções discursivas de Fábio que apaga em seu material o sinal de subtração da estruturação anterior "100.000.000 – 0,06" e a porcentagem escrita valor decimal e escreve ($100.000.000 \times \frac{6}{100}$), depois $\frac{600.000.000}{100}$, encontrando como resultado o valor 6.000.000.

O aluno também julga que resultado final produzido, assim como suas demais produções discursivas elaboradas, necessitam de confirmação quanto à sua legitimidade. Na ausência da professora, pleiteia que essa avaliação seja realizada pela pesquisadora e posteriormente pela sua colega de grupo. Posteriormente, aguarda a confirmação por parte da docente e só depois, seguem para a resolução dos demais itens da questão.

10. A análise dos discursos

Na tarefa de modelagem proposta pela professora Nanda foi solicitado aos alunos que abordassem *matematicamente* a situação - problema que versava sobre o descarte de lâmpadas fluorescentes. A questão - problema formulada pela professora na tarefa impressa foi o discurso de partida para o início do *jogo discursivo* constituído entre a professora e os alunos.

Uma das regras do *jogo* instituída pela docente foi suscitar que os alunos por eles mesmos, elaborassem uma produção matemática escrita relativa à situação - problema proposta pela professora para resolução. A escolha desta regra pode ter sido inspirada nas especificidades do desenvolvimento de tarefas de modelagem no contexto escolar, já que a literatura aponta para a importância de os alunos serem ativos e autônomos durante tal desenvolvimento (Burak, 2017).

Os alunos iniciaram o jogo discursivo pela busca em elaborar discursos matemáticos, a partir dos *usos* que atribuíram às palavras presentes na tarefa impressa. Contudo, no decorrer da interação discursiva entre eles e a professora, o discurso oral da mesma foi tomado por eles como única fonte para a produção de discursos matemáticos legítimos.

Isso se constatou, em muitos momentos, quando os alunos não sabiam justificar matematicamente, por eles mesmos a elaboração matemática produzida, afirmando simplesmente tratar-se de uma sugestão dada pela docente. Também, quando eles recorrentemente, solicitavam o julgamento da professora quanto à legitimidade da produção realizada de forma explícita (o que não ocorreu) ou entendiam ter isso esse julgamento negativo.

Esses exemplos colocam em evidência o papel que o discursante experiente tem constituído em uma dinâmica de aprendizagem matemática no contexto escolar, em particular, em uma aula de modelagem, na qual se estimula que os alunos participem do processo compondo por eles mesmos as repostas dos problemas propostos.

Apesar desse objetivo, os alunos atribuem ao professor, o discursante experiente no discurso, o papel de lhes informar, lhes dizer como resolver as situações-problema, inclusive lhes apresentando o discurso escrito final relativo a resolução da questão. Um papel historicamente cristalizado pelos alunos a partir de jogos discursivos vivenciados ao longo do período de escolarização, sejam em aulas de matemática ou não.

Skovsmose (2008) aponta que práticas de sala de aula pautadas em investigação, como a exemplo, a modelagem matemática pode destituir práticas de ensino tradicionalmente abordadas nas quais, o professor é concebido como responsável por todo o processo de ensino, desde a escolha dos conteúdos até a resolução das situações - problemas tratadas em sala de aula.

No entanto, essa função historicamente atribuída ao professor não se desconstruiu por completo no desenvolvimento desta única atividade de modelagem e se constituiu como característica principal do jogo discursivo implementado pelos alunos e pela professora.

Os discursos produzidos nos evidenciaram que os alunos pautaram as suas produções discursivas a partir dos usos que poderiam atribuir às palavras presentes na produção discursiva da docente. Neste caso, a professora mantém suas sugestões na natureza de produções discursivas orais, enquanto os alunos procuram nessas produções elaborar discursos matemáticos escritos que seriam os legítimos, segundo uma posterior avaliação da docente.

Com isso, percebemos que o *jogo discursivo* realizado se constituiu pela frequente transcrição (discurso escrito) pelos alunos da produção oral da professora e vice-versa. Essa transcrição compreendeu na atribuição de usos às palavras presentes no discurso oral da docente. Tal atribuição evidenciou um *conflito commognitivo*, nos termos de Sfard (2008), haja vista os alunos e a professora mobilizarem diferentes usos para a palavra "tirar" presente reiteradamente no discurso da docente.

Neste caso, os alunos não acionaram claramente um uso exterior ao discurso matemático escolar, gerando o conflito como entende Sfard (2008). Isso porque o verbo "tirar" compõe o sistema matemático escolar em resolução de situações - problema majoritariamente vinculadas a operação de subtração (Mendonça, 2007).

Assim, podemos entender que o *uso* do verbo *tirar* exclusivamente relacionado à operação de subtração atribuído em aulas de matemática vivenciadas pelos alunos no contexto escolar, pode ter orientado a produção discursiva não legítima dos mesmos. Também essa ligação pode limitar as múltiplas possibilidades discursivas de compreensão de uma situação - problema, não apenas em modelagem, pois ao atar uma palavra à uma única operação matemática correspondente não se explora a diversidade de usos que as palavras possuem e a compreensão ampla do problema matemático em questão.

No jogo discursivo aqui analisado, podemos identificar a escolha pelos alunos dos usos matemáticos que podem acionar no discurso oral da professora, como central para a transcrição em discursos escritos. O fato de a professora ter usado um discurso de suposição, o discurso *se,* usando variáveis que para ela facilitaria a produção discursiva correta pelos alunos, como a variável dinheiro e um valor menor do que cem milhões, não gerou a produção discursiva almejada, porque entendemos que a docente manteve a mesma estrutura matemática de seu discurso anterior sobre lâmpadas.

Nesta direção, podemos destacar que apesar do tema em tarefas de modelagem ser um tema não matemático, a produção discursiva elaborada corresponderá a estruturação matemática formulada sobre a situação - problema. É a transcrição do problema real em problema matemático que enviesará os usos atribuídos às palavras matemáticas dessa estruturação. Tais usos por sua vez, possivelmente corresponderão aos usos mobilizados em aulas de matemática vivenciados pelos alunos.

Por outro lado, o discurso hipotético do *se* desempenhou um papel relevante na produção do discurso matemático legítimo sobre a situação - problema, quando a professora mudou a estrutura do seu discurso. A estruturação matemática *se* proposta no discurso gerou o desenvolvimento pelos alunos de discursos matemáticos sobre tal estruturação, os quais foram avaliados pela professora como semelhantes aqueles que deveriam ser produzidos em relação a situação-problema original sobre lâmpadas.

A docente ao escolher o discurso hipotético *se* e indicar uma relação de analogia com a estruturação matemática da questão original, permite que os alunos construam por eles mesmos, os discursos legítimos da situação - problema, mantendo assim, um jogo discursivo cuja participação dos alunos não se limita a copiar a resposta do problema encontrada pelo professor e não pelos alunos.

Ainda que no jogo discursivo foram os alunos a elaborar por eles mesmos, os discursos matemáticos legítimos relativos à situação - problema, podemos identificar a enorme dependência deles sobre o discurso da professora para lhes informar qual seria a estruturação matemática correta. Os alunos buscaram sempre indícios nos discursos da docente, em um jogo de pistas sobre o quais usos poderiam atribuir às palavras da discente.

Sobre essa questão, Sfard (2008) destaca que a produção discursiva dos alunos, participantes iniciantes no discurso, nesse caso, consideramos iniciantes no jogo discursivo pautado em uma tarefa de modelagem, são produções que imitam a produção discursiva dos participantes experientes.

Neste jogo discursivo, imitar não implica produzir discursos iguais, e sim, discursos que visam estar de acordo com a produção discursiva requerida pelo participante experiente. Certificar-se se o discurso produzido corresponderá ao discurso que o experiente irá julgar como legítimo, ou o discurso que experiente quer ele produza.

Nos discursos aqui analisados, podemos perceber que a docente visou ensinar *como* os alunos poderiam produzir as regras *como* da situação - problema proposta. Ela apresentou oralmente uma estrutura matemática da situação, mas as regras procedimentais *como* foram produzidas pelos alunos a partir dos discursos matemático sobre *como* essas regras deveriam ser elaboradas. Essa escolha da professora apresentou um novo jogo discursivo aos alunos em aulas de matemática, em que eles são também protagonistas, embora isso tenha gerado discursos descontentes, como os de "eu não sei", "está difícil", "explica de novo", "vou tirar zero", entre outros.

Em relação às regras *quando*, os alunos as situaram na *forma de vida* do sistema matemático escolar e acionaram usos já cristalizados de palavras matemáticas usadas nessa *forma de vida.* Isso gerou conflitos em alguns momentos, mas também auxiliaram na produção discursiva final.

Assim, entender a dinâmica do desenvolvimento de uma atividade de modelagem como um jogo discursivo nos possibilita identificar o quanto este jogo se mescla aos modos historicamente cristalizados de produzir discursos matemáticos. Entre eles, o papel unilateral que os alunos atribuem ao discurso da professora para a elaboração de discursos matemáticos legítimos.

11. Ideias conclusivas

Este artigo se propôs a analisar a aprendizagem matemática que se constitui em uma tarefa de modelagem matemática a partir uma perspectiva filosófica discursiva. Com base nas ideias do filósofo Ludwig Wittgenstein e da pesquisadora Sfard (2008), descrevemos nosso entendimento de matemática, aprendizagem e de modelagem matemática. Tais delimitações embasaram a compreensão de aprendizagem matemática na modelagem como a elaboração de enunciados matemáticos legítimos sobre a situação-problema analisada. Tais elaborações compreendem a identificação de regras *como* e *quando* pelos alunos do sistema matemático escolar.

O embasamento filosófico das ideias apresentadas no texto, nos permitiram *olhar* para a dinâmica da aprendizagem matemática constituída na tarefa de modelagem analisada como sendo um *jogo discursivo.*

Este *jogo* foi caracterizado pelos usos que seus participantes atribuíram aos discursos produzidos por eles ao longo do desenvolvimento da tarefa de modelagem. Foram as análises desses usos em um víeis filosófico de jogos discursivos, os indicadores de reflexões sobre a aprendizagem matemática que se constituiu na tarefa estudada.

Os usos que os alunos e a professora atribuíram as palavras nos permitiram apontar que o jogo discursivo de modelagem é jogado sob as regras instituídas na *forma de vida* da matemática desenvolvida no contexto escolar. Nesta direção, tarefas pautadas em cenários investigativos, apesar de possuírem propostas didáticas inovadoras (aulas temáticas, investigativas e reflexivas), como a modelagem, por exemplo, quando implementadas no contexto escolar se configuram a partir de regras já cristalizadas na *forma de vida* escolar.

Uma delas se refere ao papel historicamente atribuído ao professor na dinâmica de uma aula de matemática. Talvez, não nos percebamos, mas esse papel pode ser visto pelos alunos de forma extrema, como sendo o único que sabe usar as regras do discurso matemático escolar, portanto os alunos devem perseguir a produção discursiva do professor, não sendo importante nem justificar matematicamente as respostas encontradas, nem dizer por eles mesmos sobre a legitimidade delas.

Nesta direção, a modelagem matemática ainda encontra resistências e obstáculos para a sua implementação em sala de aula, pois para ser implementada suscita mudanças no papel do professor e dos alunos, na abordagem dos conteúdos e dos procedimentos matemáticos, na natureza da tarefa matemática, entre outros (Magnus, Prane, Cambi, & Caldeira, 2017). Pesquisas apontam existir um hiato entre número elevado de pesquisas desenvolvidas e pequeno número de práticas de modelagem desenvolvidas em sala de aula (Ceolim & Caldeira, 2017).

Algumas resistências podem ser compreendidas em virtude do *jogo discursivo* que se implementa no desenvolvimento de tarefas de modelagem instituir novas *regras* para a aprendizagem matemática que destoam das regras já vivenciadas pelos alunos na *forma de vida* do contexto escolar, as quais predominantemente se caracterizam por: um currículo fixo, linear e predeterminado, pela abordagem de exercícios e não de problemas matemáticos, por um tempo escolar fragmentado, por papeis fixos em relação ao professor e aos alunos na dinâmica da aprendizagem, entre outros.

O jogo discursivo da aprendizagem de regras *como* e regras *quando* em tarefas de modelagem imerso na *forma de vida* escolar encontra resistências, todavia, é *no* jogar do *jogo* que instituímos mudanças para tornar essa *forma de vida* mais crítica, emancipatória, investigativa.

Referências

Almeida, L, M. (2017). Painel de abertura. 10 anos da Conferência Nacional de Modelagem Matemática na Educação Matemática: memórias, histórias e reflexos na educação matemática brasileira. *Proceeding of 10th National Conference on Modelling in Mathematics Education*, Maringá, Paraná, Brasil.

Almeida,L.M.W., & Lorin, A.P.Z. (2016). Competências dos alunos em atividades de modelagem matemática. *Educação Matemática Pesquisa*, *18*(2)*,* 759-782.

Angrosino, M. V. (2005).Recontextualizing observation: ethnography, pedagogy, and the prospects for a progressive political agenda. In: N. K. Denzin, & Y.S. Lincol (Eds.), *Handbook of qualitative research*. 3. ed. (pp. 729-745). Thousand Oaks: Sage.

Araújo, J.L. (2007). A relação entre matemática e realidade em algumas perspectivas de modelagem matemática na educação matemática In: J. C. Barbosa, A.D. Caldeira & J.L. Araújo (Eds.). *Modelagem Matemática na Educação Matemática Brasileira: pesquisas e práticas educacionais*. Recife: SBEM.

Barbosa, J. C., Caldeira, A.D., & Araújo, J. L. (2009). *Reports of do 4th International Seminar for Research in Mathematics Education*. Brazilian Society of Mathematics Education**.** 2-10**.** Retrieved 30 May, 2018, from http://www.sbembrasil.org.br/sbembrasil/images/RelatóriogeralSIPEM.pdf

Bassanezi, R. C (2015). *Modelagem Matemática: teoria e prática*. São Paulo: Contexto.

Barwell, R. (2013). Discursive psychology as an alternative perspective on mathematics teacher knowledge. *ZDM*, *45* (4), 595-606. https://doi.org/10.1007/s11858-013-0508-4

Burak, D . (2017). Modelagem matemática no contexto da educação básica. *Proceeding of 10th National Conference on Modelling in Mathematics Education*, Maringá, Paraná, Brasil.

Ceolim, A. J.,& Caldeira**,** A.D (2017). Obstáculos e dificuldades apresentados por professores de matemática recém-formados ao utilizarem modelagem matemática em suas aulas na educação básica. *Bolema, 31*(58), 760-776. http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v31n58a12

Charmaz, K. (2006). *Constructing grounded theory: a practical guide through qualitative analysis*. Thousand Oaks: SAGE Publications.

Denzin, N. K., & Lincol. Y.S. (2005). *The sage of qualitative research*. 3ª ed. Thousand Oaks: SAGE Publication.

Freitas, W. S.(2017). As vozes dissonantes que circularam na construção de um ambiente de modelagem orientado na perspectiva da Educação Matemática Crítica. *Proceeding of 10th National Conference on Modelling in Mathematics Education*, Maringá, Paraná, Brasil.

Glock, H.J. (1998). *Dicionário de Wittgenstein*. Rio de Janeiro: Jorge Zahar Editor.

Gottschalk, C .M.C. (2008). A construção e transmissão do conhecimento matemático sob uma perspectiva wittgensteiniana. *Cadernos Cedes*, Campinas, *28*, 75-96. http://dx.doi.org/10.1590/S0101-32622008000100006

Gottschalk, C.M.C.(2014).Educational implications of some of wittgenstein's remarks on mathematics: proposition, inference and proof. *RIPEM*, *4* (2), 36-51.

Harré. R.,& Tissaw. M.A. (2005). *Wittgenstein and Psychology*. *A practical guide*. Asgate: England.

Klüber, T. E., & Burak, D (2014). Sobre a pesquisa em Modelagem na Educação Matemática brasileira. *Revista Diálogo Educaciona*l , *14* (1), 143-157. https://doi.org/10.7213/dialogo.educ.14.041.DS07

Lorin, A. P.Z.,& Almeida, L. M.W (2015). Competências dos alunos em atividades de modelagem matemática. *Proceeding of 9th National Conference on Modelling in Mathematics Education*, São Carlos, São Paulo, Brasil.

Magnus, M.C., Prane, B. Z. D., Cambi, C., & Caldeira, A. D. (2017). O diálogo nas tramas discursivas da modelagem matemática na educação matemática. *Proceeding of 10th National Conference on Modelling in Mathematics Education*, Maringá, Paraná, Brasil.

Mendonça, T. M. (2007). As estruturas aditivas nas séries iniciais do Ensino Fundamental: um estudo diagnóstico em contextos diferentes. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*. *10* (2), 219-239.

Miguel, A., Vilela, D. S., & Moura, A. R. L. (2010). Desconstruindo a matemática escolar sob uma perspectiva pós-metafísica de educação. *Zetetiké*, *18*, 129- 203.

Moreno, A. (2003) Descrição fenomenológica e descrição gramatical - ideias para uma pragmática filosófica*. Revista Olhar*, *7* (7), 94-139.

Morgan, C., & Sfard, A. (2016). Studying the evolution of school mathematics as a change in discourse. *Research in Mathematics Education, 18* (4), 2., 89-91. https://doi.org/10.1080/14794802.2016.1182063

Planas, N. (2018). Language as resource: a key notion for understanding the complexity of mathematics learning. *Educacional Studies in Mathematics, 98* (*3*), 215-229. https://doi.org/10.1007/s10649-018-9810-y

Sfard, A. (2007). When the rules of discourse change, but nobody tells you: making sense of mathematics learning from a commognitive standpoint. *The Journal of the learning Sciences*, *16* (4*)*, 567- 615. https://doi.org/10.1080/10508400701525253

Sfard, A. (2008). *Thinking as communicating: human development, the growth of discourses, and mathematizing*. Cambridge: university press. https://doi.org/10.1017/CBO9780511499944

Sfard, A. (2012). Developing mathematical discourse- some insights from communicational research. *Internacional Journal of Education Research*, *51-52*, 1-9. https://doi.org/10.1016/j.ijer.2011.12.013

Silva, M. C. F. (2002). Pausas em textos orais e espontâneos e em textos falados. *Linguagem em discurso*, *3* (1), 111- 133.

Skovsmose, O. (2008). *Desafios da reflexão em educação matemática crítica*. Campinas, SP: Papirus.

Soares, D. S. (2015). Introduzindo o conceito de derivada por meio da taxa de variação do desenho de uma tarefa. *Proceeding of the 6th International Seminar for Research in Mathematics Education*, Pirenópolis, Goiás, Brazil.

Sonego, V.S., & Bisognim, E (2010). Modelagem matemática: é possível fazer sem saber. In.: *Proceeding of the 10th National Reunion of the Mathematical Education*, Salvador, Brasil.

Souza. E.G., Almeida, L. M. W.,& Kluber. T.E. (2018). Research on Mathematical Modelling in Mathematics Education in Brazil: Overview and Considerations. In.: A.J. Ribeiro et al. (Eds.), *Mathematical Education in Brazil*. (pp. 211-228). New York: Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-93455-6_11

Souza, E.G.,& Barbosa, J.C.(2014). Contribuições teóricas sobre modelagem matemática na modelagem matemática. *Zetetikê*., *22*(1), 31-58. https://doi.org/10.20396/zet.v22i41.8646577

Stillman, G. A., Blum, W., & Biembengut, M. S (Eds). (2015). *Mathematical Modelling in Education Research and Practice: Cultural, Social and Cognitive Influences*, New York: Springer.

Stillmam, G. A., Kaiser, G., Blum, W., &Brown, J. P. .(2013) (Eds). *Teaching Mathematical Modelling: Connecting to Research*. New York: Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-18272-8

Vilela, D.S.(2013). *Usos e jogos de linguagem na matemática*. São Paulo: Editora Livraria da Física.

Wittgenstein, L . (1987). *Observaciones sobre los fundamentos de la matemática*. Madrid: Alianza.

Wittgenstein, L.(1999). *Investigações filosóficas*. (Trad. José Carlos Bruni). São Paulo: Nova Cultural.

Autores

Elizabeth Gomes Souza. Universidade Federal do Pará, Belém – Brasil. elizabethgs@ufpa.br

Jonei Cerqueira Barbosa. Universidade Federal da Bahia, Salvador - Brasil. jonei.cerqueira@ufba.br

Rodrigo Fioravanti Pereira, Ileana Maria Greca Dufranc,
Jesus Angel Meneses Villagra

CAMINHOS DO ENSINO DE ESTATÍSTICA PARA A ÁREA DA SAÚDE[1]

Ways of teaching statistics for the health area

RESUMEN

El apoyo estadístico al área de la salud creció mucho en los últimos 50 años y continúa avanzando, principalmente después de la popularización de las computadoras y de los softwares específicos. Los términos como práctica basada en evidencias y epidemiología tienen a la estadística como uno de sus pilares y son comunes en el área de la salud. Dada su importancia, muchos esfuerzos de mejora de la enseñanza y aprendizaje de Estadística se han diseminado en el medio académico. Este trabajo muestra y analiza los caminos que la enseñanza de Estadística tomó, considerando la revisión de bibliografía hecha por Garfield (1995), retomada por Garfield y Ben-Zvi (2007) y enfocándose en el caso específico del área de la salud a través de la revisión propia la literatura, que contempló artículos publicados de 2007 a 2017 en revistas del área de la salud y de la enseñanza. La revisión propia de literatura analizó 26 artículos que se clasificaron en dos categorías: aspectos psicológicos y metodologías de enseñanza. La enseñanza de estadística evolucionó como área de estudio e investigación, los esfuerzos puntuales y particulares pasaron a contar con instrucciones y directrices institucionales específicas para la enseñanza de estadística. Sin embargo, faltan instrumentos para la evaluación de lo que los alumnos aprenden y el uso de las teorías de aprendizaje es ínfimo, lo que impacta en metodologías aún muy basadas solamente en la práctica de los profesores.

PALABRAS CLAVE:
- *Estadística*
- *Área de la salud*
- *Revisión de literatura*
- *Evaluación*

[1] Este trabalho amplia e encerra a versão resumida publicada nos anais da Satellite conference of the International Association for Statistical Education (IASE), 2018 com o título PATHWAYS FOR TEACHING STATISTICS IN THE HEALTH AREA.

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (2019) *22* (1): 67 - 96.
Recepción: Marzo 21, 2018 / Aceptación: Marzo 23, 2019. DOI: 10.12802/relime.19.2213

ABSTRACT

Statistical support to the health field has widely grown and continues advancing, especially after the popularization of computers and specific software. Terms such as 'evidence-based practice' and 'epidemiology' have the Statistics as one of their pillars and are common to the health area. Given the Statistics' importance, many efforts to improve its teaching and learning have been disseminated in academia. This work shows and analyzes the ways the teaching of Statistics has taken, considering the bibliographical review by Garfield (1995), reestablished by Garfield and Ben-Zvi (2007), focusing on the specific case of the health area by our literature review. This last review included articles published from 2007 to 2017 in journals from health and teaching areas. The literature review analyzed 26 articles, which were classified into two categories: psychological aspects and teaching methodologies. The teaching of Statistics has evolved as an area of study and research. Individual and specific efforts have now received proper institutional guidelines for the teaching of Statistics. However, there are few instruments for evaluating what students learn. Yet, the use of theories of learning is minimal, what impacts on methodologies highly based only on the teachers' practice.

KEY WORDS:

- *Statistics*
- *Health area*
- *Literature review*
- *Evaluation*

RESUMO

O suporte estatístico à área da saúde cresceu significativamente e continua avançando, principalmente após a popularização dos computadores e dos softwares específicos. Termos como prática baseada em evidências e epidemiologia têm a Estatística como um de seus pilares e são comuns na área da saúde. Dada a sua importância, muitos esforços de melhoria do ensino e aprendizagem de Estatística têm sido disseminados no meio acadêmico. Este trabalho tem o objetivo de mostrar e analisar os caminhos que o ensino de Estatística tomou, considerando a revisão de bibliografia feita por Garfield (1995), retomada por Garfield e Ben-Zvi (2007) e focando no caso específico da área da saúde, por meio da revisão própria de literatura, que contemplou artigos publicados nos anos de 2007 a 2017, em revistas da área da saúde e do ensino. A revisão própria de literatura analisou 26 artigos que foram classificados em duas categorias: aspectos psicológicos e metodologias de ensino. O ensino de Estatística evoluiu como área de estudo e pesquisas, e os esforços pontuais e particulares passaram a contar com instruções e direcionamentos institucionais específicos para o ensino de Estatística. Entretanto, faltam instrumentos para avaliar o que os alunos aprendem e, além disso, o uso das teorias de aprendizagem é ínfimo, o que impacta em metodologias embasadas somente na prática dos professores.

PALAVRAS CHAVE:

- *Estatística*
- *Área da saúde*
- *Revisão de literatura*
- *Avaliação*

RÉSUMÉ

L'appui statistique pour le secteur de la santé a énormément augmenté et continue à avancer, surtout après la popularisation des ordinateurs et logiciels spécifiques. Des termes tels que la pratique fondée sur des données probantes et de l'Épidémiologie ont la Statistique comme l'un de ses piliers et sont communs dans le domaine de la santé. Compte tenu de son importance, de nombreux efforts pour améliorer l'enseignement et l'apprentissage des statistiques ont été diffusées dans l'environnement scolaire. Ce travail présente et analyse les façons que l'enseignement de la Statistique a pris, alors que l'examen de la bibliographie faite par Garfield (1995), repris par Garfield et Ben-Zvi (2007) et en se concentrant sur le cas spécifique dans le domaine de la santé, dans le cadre de la révision de la littérature, qui comprenait des articles publiés de 2007 à 2017 dans des revues dans le domaine de la santé et de l'éducation. Une revue de la littérature a analysé 26 articles qui ont été classés en deux catégories: les aspects psychologiques et les méthodes d'enseignement. L'enseignement de la statistique a évolué comme un champ d'étude et de recherche, et les efforts particuliers et ponctuels ont commencé à compter avec des instructions et des lignes directrices institutionnelles spécifiques à l'enseignement de la Statistique, Cependant, il existe des instruments pour l'évaluation de ce que les élèves apprennent et l'utilisation des théories de l'apprentissage est négligeable, ce qui a des répercussions sur les méthodes encore très fondées que sur la pratique des enseignants.

MOTS CLÉS:

- *Statistiques*
- *Domaine de la santé*
- *Revue de la littérature*
- *Évaluation*

1. Introdução

Esta revisão bibliográfica agrupa questões relativas ao ensino de Estatística para a área da saúde, levantadas desde o final da década de 70 até o ano de 2017. Partindo das revisões de literatura sobre o ensino de Estatística em geral, realizadas por Garfield (1995) e Garfield e Ben Zvi (2007), em seguida, será apresentada a revisão própria de literatura sobre o ensino de Estatística para a área da saúde, compreendida no período de 2007 a 2017.

As revisões de Garfield expõem uma ideia geral dos caminhos percorridos pelo ensino da Estatística, principalmente no Ensino Superior, permitindo que se infira um contexto sobre o tema, no qual se insere o ensino de Estatística para a área da saúde, foco da revisão própria de literatura.

O objetivo desta revisão é delinear um panorama sobre o que foi investigado acerca do ensino de Estatística para a área da saúde (tanto em termos de dificuldades quanto em termos das metodologias didáticas propostas para melhorar sua aprendizagem), a partir do que fora publicado em artigos científicos, tanto da área da saúde quanto do ensino de Matemática e de Estatística, formando parte de uma pesquisa em andamento que visa aprimorar o ensino de Estatística para a área da saúde. Os resultados desta revisão podem auxiliar os pesquisadores sobre o que falta investigar e quais linhas se pode dar continuidade.

A relevância do tema se deve à necessidade de qualificação do ensino de Estatística, quando se consideram os contextos atuais da medicina baseada em evidências e da epidemiologia, por exemplo. A prática baseada em evidências (*Evidence-Based Practice - EBP*), segundo McKibbon (1998), é uma abordagem para os cuidados de saúde, na qual os profissionais utilizam a melhor evidência disponível para tomar decisões clínicas para pacientes individuais. Os cuidados de saúde são individualizados e estão em constante mudança, envolvendo incertezas e probabilidades, aspectos inerentes ao raciocínio estatístico. Por outro lado, conforme Bonita, Beaglehole e Kjellstrom (2010), os conceitos e ferramentas de Estatística são necessários para a síntese e análise dos dados e os estudos epidemiológicos requerem o uso de amostras para que sejam feitas inferências sobre uma população. Além disso, Tishkovskaya e Lancaster (2012) ponderam que a Estatística tem sido e continuará a ser um dos temas mais ensinados no nível universitário.

Weissgerber et al. (2016) salientam que efeitos negativos da ineficácia do ensino de Estatística já são sentidos no meio acadêmico, visto que artigos com problemas metodológicos, conhecimento estatístico insuficiente e impossível reprodutibilidade, têm sido encontrados.

A Estatística faz parte da formação do profissional da saúde e os estudantes podem estar se posicionando de forma negativa perante esta demanda.

> O letramento estatístico é uma habilidade necessária para que os médicos compreendam e implementem pesquisas. Embora um bioestatístico deva ser consultado antes e durante todo o curso da maioria dos esforços da pesquisa, é imperativo que o clínico que conduz a pesquisa compreenda os princípios da análise Estatística. (Ing, 2016, p. 142)

Dado que o ensino da Estatística no Ensino Superior para a área da saúde encontra-se inserido no ensino da Estatística no Ensino Superior em geral, opta-se por começar este trabalho com os resultados obtidos em duas abrangentes revisões dessa área. Inicia-se com a análise do artigo de Garfield (1995), que mapeia os caminhos do ensino de Estatística até então.

2. O ENSINO DE ESTATÍSTICA ATÉ 1995: A REVISÃO DE GARFIELD (1995)

Em 1995, Joan Garfield publicou na revista *International Statistical Review*, uma revisão de literatura intitulada "Como os estudantes aprendem Estatística", sobre o ensino de Estatística em nível universitário, com o argumento de que os educadores precisam conhecer o que realmente esperam que os estudantes aprendam, a fim de modificar a forma como ensinam, utilizando a avaliação para determinar se estão sendo efetivos e se os estudantes estão desenvolvendo a compreensão e a competência Estatística. Segundo o Google Scholar, seu artigo possuía 607 citações, até quatorze de janeiro de 2018.

Garfield (1995) destaca a importância do conhecimento das teorias de aprendizagem e descreve que o construtivismo, derivado das teorias de Piaget, concebe a aprendizagem com uma construção ativa, por parte do estudante, do seu próprio conhecimento. No cenário construtivista, o conhecimento não é transmitido ou repassado, mas construído a partir de um ambiente adequado, proporcionado pelo professor.

A autora questiona se o que se tinha feito nas aulas proporcionaria que os alunos atingissem tais objetivos, como pode ser verificado na citação a seguir:

> Muitas classes de Estatística da faculdade consistem em assistir às explicações e fazer as tarefas em livros didáticos ou em laboratórios de informática. Essas atividades ajudam a atingir os objetivos para nossos alunos? Os alunos estão adequadamente preparados para utilizarem o pensamento e o raciocínio estatísticos, coletar e analisar dados, escrever e comunicar os resultados da resolução de problemas estatísticos reais? Muitas pesquisas indicam que os estudantes não estão aprendendo o que queremos. (Garfield, 1995, p. 27).

Garfield (1995) classifica seus achados em três categorias: pesquisa psicológica, pesquisa em educação estatística e pesquisa em educação matemática (seções quatro, cinco e seis, respectivamente).

Em relação à pesquisa psicológica, a autora destaca que a maior parte das pesquisas atenta para como adultos compreendem, ou não compreendem, ideias Estatísticas particulares. Esta heurística revela alguns pensamentos prevalentes e inconsistentes, como a falácia do jogador, em que muitas pessoas acreditam que depois de uma grande sequência de caras é mais provável que a próxima jogada seja uma coroa. A autora identificou problemas de entendimento relativos à correlação e à causalidade, à probabilidade condicional, à independência, à aleatoriedade e à média ponderada. Garfield (1995) salienta que raciocínios estatísticos inapropriados são generalizados e persistentes, ocorrem em todos os níveis de idade, inclusive entre pesquisadores experientes.

A pesquisa relativa à educação estatística estava menos focada em padrões de pensamento e mais em como a Estatística é aprendida. Neste sentido, a autora compilou uma série de atributos que ajudam os estudantes a aprender:

- Cursos baseados em atividades (*Activity-based courses*) e o uso de pequenos grupos parecem ajudar os estudantes a superar alguns equívocos em probabilidade e aumentar o aprendizado de conceitos estatísticos;
- Quando os alunos são avaliados e recebem os resultados desta avaliação, seguidos de atividades de correção, nas quais são encorajados a explanar e conjecturar soluções e verificar se o que fizeram faz sentido, estas atividades ajudam a superar equívocos;
- Ideias sobre probabilidade de amostras melhoram quando é preciso fazer predições antes da tomada dos dados e comparações com o resultado experimental obtido;
- Simulações computacionais melhoram as respostas dos alunos sobre variabilidade e problemas sobre probabilidade;
- Utilizar *softwares* que permitem a visualização e interação com os dados, melhora o entendimento dos estudantes sobre a aleatoriedade e análise de dados.

A autora destaca os achados provenientes da educação Matemática:

- Investir mais tempo no entendimento de como um algoritmo funciona, quais as habilidades envolvidas e como um conceito difere de outro, melhoram a capacidade do estudante em resolver problemas;
- Trabalhar com grupos pequenos melhora a produtividade de toda a turma, suas atitudes e suas conquistas;
- Trabalhar com exercícios resolvidos pode ser mais efetivo do que propor listas de exercícios convencionais, como os temas de casa;
- Os estudantes aprendem mais com problemas abertos do que com problemas de uma única resposta;
- Atividades matemáticas do tipo "Escrevendo para aprender" (*"Writing to learn"*) parecem auxiliar no entendimento matemático;
- Metodologias inovadoras como resolução de problemas e pensamento superior (*"higher order thinking"*) parecem melhorar o rendimento dos estudantes, sem sofrer qualquer perda em testes tradicionais.

Garfield (1995) propõe dez princípios de aprendizagem Estatística, construídos de acordo com seus achados e no contexto do construtivismo. Estes princípios foram recompilados em oito e são apresentados no próximo item desta revisão.

Em resumo, Garfield (1995) destaca que o ensino de Estatística pode ser mais efetivo se os professores determinarem o que eles realmente querem que os estudantes saibam e façam ao final do seu curso, providenciando atividades desenhadas para este fim. Além disso, a autora considera a importância da realização de avaliações incorporadas ao processo de aprendizagem para que alunos e professores determinem se os objetivos foram alcançados, isto em tempo de rever alguma estratégia antes do final do curso.

Os docentes precisam avaliar o que foi encontrado nas pesquisas e determinar como irão adaptar com a sua realidade particular, precisam analisar e redefinir continuamente suas teorias de como os estudantes aprendem Estatística. Os discentes devem ser encorajados a avaliar seu próprio aprendizado e as noções de como aprendem pensando sobre o processo de ensino-aprendizagem.

Diante disso, Garfield (1995) conclui ponderando que a maioria das pesquisas consultadas trazia somente implicações gerais e que muito havia a ser aprendido sobre problemas particulares acerca do uso do computador, das técnicas para superar concepções errôneas, do tipo de atividades em pequenos grupos e de quais materiais avaliativos melhor informam o professor sobre o entendimento dos alunos.

A revisão de Garfield (1995) trouxe uma ampla visão do estado do ensino de Estatística para alunos de graduação, identificou linhas de pesquisa, propôs melhorias e indicou questões a serem respondidas. Dez anos depois, a autora volta a analisar o estado da arte do ensino de Estatística, no trabalho descrito a seguir.

3. Os caminhos do ensino de estatística entre 1995 e 2007

Garfield e Ben-Zvi (2007) revisitam o trabalho de Garfield (1995), a fim de determinarem os caminhos tomados pelo ensino de Estatística até 2007. Esta nova revisão possuía 341 citações em janeiro de 2018, segundo o Google Scholar.

Os autores citam 151 trabalhos, mostrando a expansão do ensino de Estatística quando comparado aos 40 artigos da primeira revisão, entretanto, este artigo aborda o ensino de Estatística em todos os níveis, enquanto o artigo de Garfield (1995) focava no ensino universitário. Além disso, Garfield e Ben-Zvi (2007) sumarizam estudos conduzidos por pesquisadores de outras áreas.

Aqui, as ideias principais do artigo de Garfield e Ben-Zvi (2007) são mostradas dando destaque ao Ensino Superior. Os autores iniciam destacando o crescimento das conferências e publicações dedicadas à pesquisa em educação estatística mesmo que, em 2007, ainda se considerava a área como nova, emergente, difícil de localizar suas bases e evoluir a partir delas, pois seus estudos estavam diluídos em publicações de diversas outras disciplinas.

Relativamente às conferências e publicações especializadas, em 2002 surge a *Statistics Education Research Journal*, primeira revista dedicada a publicações de alta qualidade no ensino de Estatística. Em seguida, surgiram: *The International Conference on the Teaching Statistics*, o *International Group for the Psychology of Mathematics Education, The Mathematics Education Research Group of Australasia, The International Congress on Mathematics Education meetings* e o *International Statistical Institute,* que também relatam pesquisas na área de educação Estatística. A grande quantidade de apresentações e publicações, a partir destas conferências, revela a existência de um grupo ativo de educadores, psicólogos e estatísticos envolvidos no ensino e na aprendizagem da Estatística, além disso, mais de 44 teses doutorais abordaram o tema, segundo Garfield e Ben-Zvi (2007).

Na revisão de Garfield e Ben-Zvi (2007), as pesquisas focaram em métodos de treinamento individual para alcançar um aprimoramento do raciocínio. Conforme os autores, estas pesquisas consideraram que a causa para tantas concepções errôneas encontradas era a inabilidade do uso do raciocínio proporcional, requerido por muitos problemas envolvendo probabilidade, entre outros tipos de erros dentro dos conteúdos de Tabelas de Contingência, Distribuição Amostral, Testes de Significância e uma variedade de erros de raciocínio estatístico. Destes estudos, os autores depreenderam que as concepções errôneas sobre a Estatística estão disseminadas e são similarmente persistentes em todos os níveis de ensino, até mesmo entre pesquisadores experientes, tal como Garfield (1995) já havia destacado.

Os autores ressalvam que as pesquisas examinaram atividades particulares ou intervenções e alguma ferramenta tecnológica ou método de ensino. A maioria destes estudos envolveu as classes dos próprios pesquisadores, por vezes examinando uma classe, por outras, olhando para várias classes da mesma instituição.

Um grande problema observado em estudos quantitativos foi a falta de instrumentos consistentes e de alta qualidade para avaliar os resultados de aprendizagem dos alunos, sendo comum a utilização das notas (rendimento) como medida, uma vez que estas não trazem evidências de validade e confiabilidade e normalmente não medem resultados generalizáveis.

> No entanto, estes estudos revelam que é difícil determinar o impacto de uma determinada ferramenta, método de ensino ou instrução sobre a aprendizagem dos alunos em um curso devido a limitações no desenho do estudo ou avaliação utilizados. Enquanto professores gostariam de contar com estudos de investigação para convencê-los que um método de ensino particular ou ferramenta instrucional leva à melhorar significativamente os resultados dos alunos, esse tipo de evidência não é realmente disponível na literatura de pesquisa. Os resultados de muitos dos estudos comparativos são geralmente limitados a esse tipo de curso particular e não pode ser generalizado para outros cursos. (Garfield & Ben-Zvi, 2007, p. 379)

No contexto das ferramentas tecnológicas, incluindo as de simulação, os autores afirmam que uma ferramenta bem concebida não garante um ensino eficaz. Estudos também mostraram que não ficam evidentes as diferenças de aproveitamento em distintas modalidades de ensino, presencial, on-line ou híbridas.

O que ficou evidente para Garfield e Ben-Zvi (2007) foi que quando os estudantes trabalham de forma colaborativa, em grupos, e considerando suas concepções prévias, há melhora em seus rendimentos. Alguns estudos encontraram bons resultados quando proporcionaram a evolução do pensamento estatístico informal para o formal, considerando a não linearidade da construção do raciocínio estatístico durante o curso, entretanto, é difícil estabelecer qual método é melhor para o Ensino de Estatística.

Neste sentido, os autores Garfield e Ben-Zvi (2007) pontuam que "desenvolver uma compreensão profunda de conceitos de Estatística é bastante desafiador e não deve ser subestimado". O processo é demorado, precisa ser bem planejado quanto à trajetória a percorrer, bem como as ferramentas a utilizar, a escolha das questões para discussão e a forma de proporcionar a revisitação destas ideias. Ressaltam, ainda, a importância dos estudos que focam no desenvolvimento de tópicos específicos de Estatística, pois podem auxiliar os professores no entendimento dos erros e dificuldades de compreensão comuns àquele tópico, prevenindo-os.

Finalmente, os autores apresentam seus oito princípios para o aprendizado de Estatística, reestruturados, a partir dos dez princípios propostos por Garfield (1995):

I. Estudantes aprendem pela construção do conhecimento;
II. Estudantes aprendem pelo envolvimento ativo em atividades de aprendizagem;
III. Estudantes aprendem a fazer bem somente o que praticam;
IV. É fácil subestimar a dificuldade que os estudantes têm em entender conceitos básicos;
V. É fácil superestimar quão bem os estudantes entendem conceitos básicos;
VI. A aprendizagem melhora se os estudantes tomam consciência e confrontam seus erros de raciocínio;
VII. Ferramentas tecnológicas devem ser utilizadas para ajudar os estudantes a visualizar e explorar dados, não apenas para seguir algoritmos com finais pré-determinados;
VIII. Estudantes aprendem melhor se recebem feedbacks consistentes que auxiliem em sua performance.

Para Garfield e Ben-Zvi (2007) há a necessidade do desenvolvimento de projetos de pesquisa colaborativos, preferencialmente partindo de diferentes disciplinas, a fim de combinar suas experiências e comparar resultados obtidos em muitas instituições, usando instrumentos de medida de alta qualidade.

De maneira geral, o artigo de Garfield (1995) propôs bases para o ensino de Estatística, considerando o que se espera que os alunos aprendam e as suas atitudes com relação à disciplina. Já o artigo de Garfield e Ben-Zvi (2007) destaca o esforço das pesquisas em identificar maneiras mais particulares do ensino e da aprendizagem de Estatística. Neste sentido, observa-se um direcionamento do geral para o particular no foco das pesquisas da área. Contudo, ambos os períodos (até 1995 e de 1995 a 2007) evidenciaram a necessidade de questionamento do ensino tradicional e a apropriada utilização do construtivismo. No entanto, enquanto a revisão de 1995 estava mais dirigida aos próprios professores que ministram estatística, o artigo de 2007 toma certo distanciamento e é mais focado à pesquisa e aos pesquisadores.

Em seguida, apresenta-se o levantamento do estado do ensino de Estatística para a área da saúde, por meio da revisão própria de literatura. Dado que o foco desta revisão está no ensino, usaremos os princípios do aprendizado da Estatística resultantes destas duas revisões como marco.

4. A revisão própria de literatura: o ensino de estatística de 2007 a 2017

Neste ponto, será tratada a revisão própria de pesquisas publicadas sobre o ensino de Estatística para o nível superior e, especificamente, na área da saúde. Para isso, o estudo concentrou-se em artigos completos divulgados exclusivamente, em revistas e eventos que contam com revisão por pares, contemplando somente trabalhos publicados entre 2007 e 2017.

Foram utilizadas ferramentas de busca on-line contidas em repositórios de artigos das áreas da Estatística (*ISI),* Ensino de Estatística (*IASE*) e Ensino de Matemática (*RELIME*), além de ferramentas de busca científica (Web of Science, Scopus e Scielo*).* Também foram utilizadas ferramentas automáticas de alerta por *e-mail,* que monitoram as publicações mais recentes, considerando palavras-chaves pré-definidas da Google Scholar, PubMed e ScienceDirect. Em cada ferramenta de busca, foram utilizadas as seguintes expressões (bem como combinações das palavras contidas em tais expressões): “Statistics Teaching” ou “Teaching Statistics” AND University Level”. Em seguida, a pesquisa sofreu um refinamento de acordo com os filtros que dispunha para restringir os resultados em relação ao tema, como, “Health Care”, “Science Technology” ou “Educational Research” e quanto ao tipo de documento, visto que somente considerou-se artigos em Língua Inglesa, Portuguesa ou Espanhola. Embora existam muitas expressões que remetem ao trabalho estatístico, tais como *“Data Analysis”* ou

"Data Science", esta revisão não as utilizou, pois estas ainda são pouco usadas na área da saúde de forma relacionada com o ensino de Estatística. O levantamento ocorreu durante janeiro de 2016 a dezembro de 2017. Inicialmente, foram encontrados 343 artigos na Web of Science; 202 na Scopus, e 29 na Scielo. Assim, tendo em conta a repetição de artigos e a busca automática da PubMed, Science Direct e Google Scholar, obtivemos um universo aproximado de 460 artigos.

Os artigos selecionados provêm das seguintes revistas e eventos: *Currents in Pharmacy Teaching and Learning*, Avaliação e Políticas Públicas em Educação, *Global Journal for Research Analisys, Actas de las Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria*, ICOTS 8 (2), *Journal of Statistics Education* (2), *Nurse Education Today*, PLOSONE (2), *Preventive Medicine*, *Probabilidad Condicionada: Revista de didáctica de la Estadística* (2), *Psicologia: Ciência e Profissão, Psicothema, Revista Brasileira de Educação Médica*, *Revista Humanidades Médicas*, *Revista Liberabit*, *SERJ*, *Statistics in Medicine*, *BMC Medical Education*, *Anales de Psicología*, *Clinical Oncology e AHPE*.

Os artigos foram pré-selecionados, dentre os filtrados pelas ferramentas, por meio da análise de seus títulos, onde se buscou uma indicação de que se trata de um trabalho sobre ensino de Estatística para a área da saúde no Ensino Superior. Não havendo tal indicação, o artigo era descartado e, se houvesse alguma dúvida sobre seu conteúdo, passava-se a analisar o seu resumo, persistindo a dúvida, lia-se o artigo completo. Ao final do processo, foram selecionados 26 artigos que compuseram a amostra, artigos que foram analisados na íntegra. Apesar da forma sistemática de busca de artigos, esta pesquisa não pode ser definida como uma pesquisa sistemática da literatura. Na Figura 1, a seguir, pode-se verificar a estrutura metodológica da revisão própria de literatura.

Figura 1. Estrutura metodológica da revisão própria de literatura

5. Análise e categorização

Os trabalhos analisados tratam do ensino de Estatística para a área da saúde, a partir de abordagens não aplicadas e aplicadas. As não aplicadas transitam por uma diversidade de temas que vão da análise das atitudes dos alunos frente à Estatística, passando pelo currículo, avaliação e sugestão de metodologias de ensino, porém, sem a efetiva aplicação de metodologia de ensino aos alunos. Os práticos testam propostas de ensino em turmas da área da saúde. Os artigos encontrados têm origem nas duas grandes áreas as quais se dedica esta revisão: a de ensino (10) e a da saúde (16). Por área de ensino entende-se as revistas e eventos da área de ensino e por área da saúde entende-se as revistas e eventos de próprios da área da saúde que eventualmente tratam do ensino da Estatística. A maior quantidade de trabalhos provenientes da área da saúde em muito se justifica pelo volume de trabalhos que abordam os aspectos psicológicos envolvidos no ensino de Estatística para a área da saúde.

A maior quantidade de trabalhos provenientes da área da saúde, em muito se justifica pelo volume de trabalhos que abordam os aspectos psicológicos envolvidos no ensino de Estatística para a área da saúde.

Relativamente aos países de origem, os artigos apresentam grande espalhamento ao redor do mundo, indicando que as preocupações são semelhantes. Este fato pode ser constatado na Tabela i, a seguir.

TABELA I
Districução entre países de origem e área

País	*Ensino*	*Saúde*	*Total*
Arábia Saudita		1	1
Argentina	1	1	2
Austrália		1	1
Brasil	2	2	4
Caribe	1		1
Espanha	1	2	3
Estados Unidos	3	2	5
Grécia		1	1
Israel		1	1
Paquistão		1	1
Portugal	1		1
Sérvia		2	2
UK	2	1	3
Total Geral	11	15	26

Os artigos analisados parecem adequar-se em duas categorias, denominadas de aspectos psicológicos e metodologias de ensino, conforme Tabela ii abaixo. A categoria "aspectos psicológicos" contempla os trabalhos que afetam diretamente o ensino de Estatística, mas não através de uma proposta didática, como a ansiedade estatística e as atitudes dos alunos frente à disciplina. Já a categoria "metodologias de ensino" refere-se aos trabalhos dedicados à melhoria da relação pedagógica entre os estudantes, professores e instituições, através de diversas propostas. Dentre as propostas, algumas aplicadas e avaliadas e outras não, encontram-se tanto propostas para a sala de aula particular quanto para um currículo de curso.

TABELA II
Districução das categorias pelas áreas

Categorias	*Ensino*	*Saúde*	*Total*
Aspectos psicológicos	4	9	13
Metodologia de ensino	6	7	13
Total	10	16	26

6. Análise das categorias

6.1. *Aspetos psicológicos*

Ao que parece, as dificuldades próprias do conteúdo estatístico não constituem o único desafio a ser enfrentado pelos professores de Estatística, existem dificultadores externos que impactam decisivamente no fazer pedagógico dos docentes: a ansiedade estatística e a atitude negativa dos alunos frente à Estatística. Estresse, desmotivação e repulsa dos alunos por não verem ligação com a área da saúde ou porque as aulas não são estimulantes, como relatam Oliver, Galiana, Cebrià e Sancho (2014) e Espindola, López, Miranda, Ruiz e Díaz (2014). A ansiedade estatística constitui uma emoção caracterizada por extensa preocupação, pensamentos intrusivos, desorganização mental, tensão e ativação fisiológica quando os estudantes estão expostos aos conteúdos, aos problemas, às situações de sala de aula ou contextos avaliativos que envolvam a Estatística (Zeidner, 1990).

Doze artigos abordaram aspectos psicológicos frente à Estatística (ansiedade Estatística e atitudes frente à Estatística) e, após a leitura completa dos trabalhos, foram descritos como pode ser observado na Tabela iii, a seguir.

TABELA III

Interpretação própria dos artigos na categoria Aspectos Psicológicos

Autores	*Área*	*Objetivo*	*O que foi medido*	*Como foi medido*	*Metodol. de Pesquisa*	*Metodol. de Ensino*	*Teoria de Aprend.*
(León Bologna & Vaiman, 2013)	Ensino	Verificar se exposição à Estatística em níveis de ensino anteriores melhora a atitude na graduação de Psicologia	Atitude	Escala própria tipo Likert	Quanti+ Multivari ada	Não se aplica	Não se aplica
(Turik, Viali, & Moraes, 2012)	Ensino	Identifícar os fatores que melhoram a atitude dos alunos frente à estatística	Atitude	Escala de atitudes	Quanti+ TRI+ Multivari ada	Não se aplica	Não se aplica
(Stanisavljevic et al., 2014)	Saúde	Medir as atitudes frente à estatística usando uma versão da escala SATS	Atitude	Versão da SATS	Quanti+ Multivari ada	Não se aplica	Não se aplica
(Moreira Junior, Zanella, Lopes, & Seidel, 2015)	Saúde	Medir a satisfacão dos alunos quanto à Estatística	Atitude	Escala própria tipo Likert	Quanti+ TRI+ Multivari ada	Não se aplica	Não se aplica
(Hannigan, Hegarty, & McGrath, 2014)	Saúde	Identificar aspectos que melhoram a atitude dos alunos frente à Estatística	Atitude	ATS, SAS, SATS e SATS-36	Quanti+ Descritiva+ Correlacão Multilinear	Não se aplica	Não se aplica
(Vigil-Colet, Lorenzo-Seva, & Condon, 2008)	Saúde	Desenvolver uma escala própria de medida da ansiedade estatística e compara-la com escalas gerais	Ansiedade	Desenvol vimento da SAS	Quanti+ Multivari ada	Não se aplica	Não se aplica
(Hernandez, Santos, Silva, Mendes, & Mattinello, 2012)	Saúde	Validade a SAS	Ansiedade	SAS	Quanti+ Multivari ada	Não se aplica	Não se aplica

(Escalante Gómez, Repetto, & Mattinello, 2012)	Saúde	Avaliar atitudes frente à Estatística	Atitude	SATS	Quanti+ Multivari ada	Não se aplica	Não se aplica
(Oliver, Sancho, Galiana, & Cebrià i Sancho, 2014)	Saúde	Validade a SAS	Ansiedade	SAS	Quanti+ Multivari ada	Não se aplica	Não se aplica
(Kiekkas et al., 2015)	Saúde	Avaliar as atitudes frente à Estatística de alunos de Enfermagem	Atitude	SAS-36	Quanti+ Inferencial	Não se aplica	Não se aplica
(Willie, Ferguson, Tulloch-Reid, & Mccaw-Binns, 2012)	Ensino	Verifícar quais técnicas os alunos preferem, entre centradas no Professor ou mais ativas	Atitude	Escala própria tipo Likert	Quali+ Quanti+ Quanti dades absolutas e relativas	Cita técnicas de ensino diversas sem aplica-las	Não utiliza ram
(Mahboob, Wajid, & Iqbal, 2015)	Saúde	Avaliar a percepção dos alunos frente a uma oficina obrigatória de estatística	Atitude	Escala própria tipo Likert	Quanti+ Inferencial	Não se aplica	Não se aplica
(Espindola Artola, López Benítez, Miranda Carbonell, Ruiz Socarrás, & Díaz Garcia, 2014)	Saúde	Avaliar a percepção dos alunos frente a uma oficina obrigatória de estatística	Ansiedade	Escala SISCO	Quali+ Quanti	Meto dologia Partici pativa	Vigotsky

Quatro artigos focam a ansiedade estatística, mas alguns dos demais também aportam ideias sobre o tema: Espindola Artola *et al.* (2014) encontraram uma diminuição na ansiedade Estatística quando se utiliza uma metodologia participativa. Este estudo traz uma proposta didática objetivando a diminuição da ansiedade Estatística e não uma metodologia de ensino focada no aprendizado de Estatística propriamente dito, por isto se classifica na categoria aspectos psicológicos. Hernandez, Santos, Silva, Mendes e Ramos (2015) encontraram um nível de ansiedade mais elevado nas mulheres. Turik, Viali e Moraes (2012) concluíram que estudos estatísticos contextualizados à realidade do estudante contribuem para a diminuição da ansiedade estatística. León e Vaiman (2013) verificaram que a exposição à Estatística na escola melhora o desempenho na faculdade, mas não necessariamente o sentimento que se tem da disciplina. Vigil-Colet, Lorenzo-Seva e Condon (2008) determinaram que os resultados específicos de ansiedade estatística têm uma relação significativa com o desempenho acadêmico nesta disciplina, enquanto medidas mais amplas de ansiedade não os tem.

Estrada, Batanero e Lancaster (2011) citam três instrumentos de medida da ansiedade estatística:

> Três dos mais utilizados instrumentos de medida das atitudes em relação à Estatística são Wise (1985) Attitudes Towards Statistics scale (ATS), Roberts e Saxe (1982) Statistics Attitude Survey (SAS) e Shau, Stevents, Dauphine e del Vecchio (1995) Survey of Attitudes Toward Statistics (SATS). (Estrada, Batanero & Lancaster, 2011 p. 164)

Outros instrumentos surgiram, alguns adaptados dos citados acima, como o SATS-36 de Nowacki (2015) e outros utilizando a Teoria da Resposta ao Item (TRI) em sua análise, como em Moreira Junior *et al.* (2015).

Os trabalhos desta categoria trouxeram uma forte análise Estatística multivariada tanto para ansiedade quanto para a atitude, normalmente utilizando o alfa de Chronbach e a análise fatorial aplicados sobre questionários do tipo Likert, em geral com 5 níveis e análise estatística por meio da Teoria da Resposta ao Item (TRI). Costumam acessar grande número de amostras, dada a facilidade de aplicação dos questionários, inclusive com versões *online.* Mesmo que as medidas tenham mais de 20 anos, muitos estudos ainda buscam indícios de validade e não há uma escala que suplante as demais, evidenciando a dificuldade que este tipo de instrumento encontra para afirmar-se. Cabe ressaltar que a maioria (10) tem sua origem na área da saúde, enquanto que os demais estudos (3) se originam da área do ensino.

Um destacado instrumento para a ansiedade é a SAS (Statistical Anxiety Scale*)*, criada por Vigil-Colet *et al.* (2008), que procura estabelecer uma escala estritamente relacionada à ansiedade estatística e pequena o bastante para ser facilmente administrada individualmente ou em uma classe de alunos. O processo de validação da SAS contou com 159 graduandos espanhóis do curso de Psicologia, sendo 139 mulheres e 20 homens, com uma média de 21,6 anos de idade e um desvio padrão de 3,5 anos. Os alunos responderam voluntariamente a três questionários, o primeiro foi a SAS e os demais eram relativos a traços de personalidades. Foi utilizada a análise exploratória fatorial, extraindo-se três dimensões, usando o método de análise de fator de classificação mínima e o método de rotação mínima *Promim.* A análise fatorial apresentou três dimensões correlacionadas entre si e que poderiam ser consideradas como subescalas relacionadas de uma escala global. Além disso, a análise paralela foi calculada para analisar a matriz de correlação inter-fator e sugeriu que havia uma dimensão subjacente a ela. Se as três subescalas fossem ansiedade de exame, ansiedade ao pedir ajuda e ansiedade ao interpretar, a escala global seria a ansiedade estatística, conforme Vigil-Colet *et al.* (2008) reforçado por Oliver *et al.* (2014) e Hernandez *et al.* (2015).

A SAS foi aplicada a alunos italianos e espanhóis (Vigil-Colet *et al.*, 2008), (Oliver *et al.*, 2014) e brasileiros (Hernandez *et al.,* 2015), e se percebe uma incidência maior de ansiedade estatística nas mulheres.

Em relação às atitudes, perante o estudo da Estatística, foram encontrados nove trabalhos. Hannigan, Hegarty e McGrath (2014) apresentam uma escala para medir as atitudes dos estudantes frente ao estudo da estatística. Esta escala foi aplicada em alunos entrantes na faculdade de Medicina, visto que estes estudantes provavelmente trazem experiências prévias do raciocínio quantitativo, oriundas da Matemática e não da Estatística. Os autores aplicaram o instrumento SATS-36 a 121 alunos de primeiro ano logo nas primeiras semanas do semestre, para garantir que nunca tenham sido expostos à Estatística, capturando assim, suas atitudes em relação à disciplina no início da faculdade.

Na amostra, 66% dos respondentes tinha menos de 25 anos, 58% eram mulheres, 59% eram irlandeses e 31% norte americanos, 61% teve uma educação básica em ciências ou engenharia, 85% teve um curso quantitativo na educação básica, com mediana de dois cursos.

A escala SATS-36 foi escolhida por ter sido usada anteriormente, em estudo sobre as atitudes em relação à Estatística de alunos de pós-graduação, permitindo uma análise comparativa entre as pesquisas. A escala mediu seis componentes referentes à atitude: Sentimental, Cognitivo, Utilidade (Valor), Dificuldade, Interesse e Esforço.

A SATS-36 conta com uma versão pré e outra pós-instrução, todavia, os autores utilizaram somente a versão pré-instrução. As 36 sentenças possuem uma escala de sete itens, na qual o primeiro refere-se a "discordo fortemente" e o sétimo a "concordo fortemente". Dentre as 36 sentenças, 19 estão valoradas de maneira inversa e precisaram ser recodificadas, desta forma, quanto mais próximo de 7 as médias das respostas estão, mais positiva é a atitude em relação à Estatística.

Hannigan *et al.* (2014) introduziram, na análise das atitudes, questões relativas à performance dos alunos em Matemática. Utilizaram uma escala de 1 (um) a 7 (sete), na qual 1 (um) representa uma performance muito fraca, enquanto 7 (sete) representa uma performance muito forte. Também perguntaram sobre a quantidade de módulos de Matemática ou Estatística que tiveram em sua educação básica e qual seria a chance de se matricularem em algum curso de Estatística, se tivessem a oportunidade (respostas de 1 (um) a 7 (sete), em que 1 (um) representa nenhuma chance e 7 (sete), muita chance).

A análise dos resultados contou com o cálculo do alfa de Cronbach para medir a consistência interna das respostas dos 36 itens do questionário SATS (alfa = 0,93) e dos seus seis componentes: Valor e Esforço (alfa = 0,79), Dificuldade (alfa = 0,81), Afetivo (alfa = 0,85) e Cognitivo e Interesse (alfa = 0,88). Os valores de alfa obtidos indicam boa confiabilidade dos componentes e são similares aos reportados em outros estudos. A regressão linear multivariada foi usada para predizer os escores utilizando variáveis demográficas: idade (< 25, ≥ 25), sexo, nacionalidade (Irlandês ou não Irlandês) e variáveis representando as experiências educacionais anteriores: número de módulos de estudo quantitativo na educação básica (nenhum, um ou mais) e percepção da sua performance prévia em Matemática (escala de 1 a 7). Para medir a força da associação entre a percepção prévia da performance em Matemática, os componentes relativos à atitude e ao número de módulos prévios, foi utilizado o coeficiente de correlação de Spearman. A análise Estatística foi realizada com o auxílio do *software* IBM SPSS versão 20.

Segundo os autores, os estudantes participantes da pesquisa tendem a apreciar a utilidade e a relevância da Estatística em sua vida pessoal e profissional (Valor) e estão preparados para se esforçar a aprender Estatística (Esforço). Os alunos demonstraram uma atitude neutra a positiva quanto ao interesse em Estatística (Interesse) e à competência cognitiva (Cognitivo). Quanto à probabilidade de os estudantes realizarem um curso de Estatística se tivessem tido a chance, 33% responderam que não o fariam (escore 1). Mesmo que 85% dos estudantes tenham tido algum curso quantitativo no passado, somente 24% foram positivos ao fato de virem a ter um (escore acima de 5). O número de cursos quantitativos prévios está positivamente relacionado aos componentes Dificuldade e Cognitivo, com uma intensidade fraca a moderada ($r_s = 0{,}27$ e $r_s = 0{,}31$, respectivamente), indicando que quanto mais cursos prévios os alunos tiveram, menor é sua percepção da dificuldade e mais positiva é sua atitude em relação aos seus conhecimentos e habilidades na aplicação da Estatística.

Existiu uma forte correlação entre a percepção da performance prévia em Matemática com todos os componentes atitudinais, exceto o Esforço, indicando que para uma boa percepção da performance prévia em Matemática tem-se uma atitude positiva frente à Estatística. As mulheres tiveram um escore menor em todos os componentes, exceto o Esforço. Entretanto, nenhuma diferença significativa entre os sexos foi observada. Alunos mais velhos tiveram escores menores em todos os componentes, exceto Interesse. Ser mais velho é um preditor significativo para Dificuldade, depois do ajustamento para gênero, nacionalidade, se teve ou não curso quantitativo e performance prévia em Matemática. Ter tido ou não um curso quantitativo prévio não foi um preditor significativo para nenhum componente atitudinal. Contudo, a percepção prévia de performance em Matemática foi um forte preditor de todos os componentes atitudinais, exceto Esforço.

Hannigan *et al.* (2014) encerram enfatizando a diferença entre Matemática e Estatística. Eles ponderam que a Estatística não se originou da Matemática, e o papel do contexto, da variabilidade e da produção de dados, diferencia o pensamento estatístico do matemático, além disso, o pensamento estatístico depende muito da interpretação e do pensamento crítico.

Os autores ainda salientam que bons conhecimentos em Matemática não necessariamente se transformam em boa performance em Estatística, e que alunos que estudam Estatística a partir de outras áreas, como a Sociologia, por exemplo, têm atitudes mais positivas e concepções conceituais mais adequadas dos fundamentos da Estatística do que os estudantes de Matemática. Hannigan *et al.* (2014) remetem, ainda, a um trabalho de Hannigan, Gill e Leavy (2013), o qual dispõe que embora os professores fossem mais capacitados matematicamente e mais confiantes, uma amostra de professores de Ensino Médio não obteve melhor desempenho em um teste avaliativo amplamente utilizado (*Comprehensive assessment of outcomes in a first statistics course*) do que estudantes provenientes de cursos de abordagem não quantitativa.

Para Milic *et al.* (2016), as atitudes subjetivas dos alunos com relação à competência cognitiva, ligada diretamente ao conhecimento matemático, afetam suas atitudes até o final do curso que, por sua vez, influenciam a sua performance. Assim, temos que a atitude negativa comumente demonstrada antes do início do curso de Estatística pode perdurar até o seu final, caso não haja um reconhecimento, por parte do aluno, de sua evolução Matemática. Também é preciso considerar, nestas atitudes, o importante fator da ansiedade, que pode estar correlacionada à ansiedade do teste em si (Hembree, 1988), exigindo um cuidado extra por parte do professor.

Como foi possível observar, a revisão de Garfield (1995) abordou a questão psicológica, porém desde um ponto de vista cognitivo restrito: raciocínios estatísticos inapropriados são generalizados e persistentes, ocorrem em todos os níveis de idade, inclusive entre pesquisadores experientes e são difíceis de mudar. A pesquisa psicológica atual avançou significativamente, incluindo os aspectos afetivos na cognição. Isto parece se refletir nos trabalhos desta revisão, pois destaca a caracterização da ansiedade estatística, que também é generalizada, persistente e de difícil superação. Ambas as abordagens psicológicas são interdependentes, pois a conjugação de esforços de alunos e professores vistos nos princípios propostos por Garfield e Ben-Zvi (2007) parece ser capaz de diminuir a ansiedade estatística. Os princípios construção do conhecimento (primeiro), envolvimento (segundo) e prática (terceiro), alinham-se com as metodologias participativas que, segundo Espindola Artola *et al.* (2014), são capazes de reduzir a ansiedade estatística.

Por outra parte, os princípios seis (consciência dos erros) e oito (feedbacks) expõem os alunos a uma tarefa metacognitiva de revisão de seus rendimentos, o que poderia favorecer, segundo os resultados atuais, a diminuição na ansiedade, dado que desempenho e ansiedade estão relacionados, como foi observado no trabalho de Vigil-Colet, Lorenzo-Seva e Condon (2008). Entretanto, os princípios propostos por Garfield e Ben-Zvi (2007) nada dizem a respeito da contextualização, embora este aspecto seja mencionado na sua revisão de literatura. É interessante ressaltar que os trabalhos de Hernandez, Santos, Silva, Mendes e Ramos (2015) e Turik, Viali e Moraes (2012) apontam que estudos estatísticos contextualizados à realidade do estudante, contribuem para a diminuição da ansiedade estatística. Outra questão abordada na revisão feita por Garfield (1995), mas que não está explícita em seus princípios, é referente aos conhecimentos prévios dos alunos, principalmente os conhecimentos matemáticos que eles vêm desenvolvendo desde a escola básica, que propicia uma aproximação dos conhecimentos estatísticos e, como observam Hannigan *et al.* (2014), influenciam na ansiedade estatística.

De outra parte, atitudes positivas frente à Estatística estão relacionadas também às experiências prévias de sucesso em Matemática (Milic *et al.*, 2016), daí a importância de feedbacks consistentes, tal como Garfield e Bem-Zvi (2007) expressam em seu princípio número sete, pois nem sempre o aluno é capaz de mensurar seu próprio desenvolvimento, sendo este um papel do professor.

6.2. *Metodologias de ensino*

Os artigos que trazem uma preocupação com a maneira que a Estatística é trabalhada (13) perfizeram uma quantidade parecida a dos que tratam dos aspectos psicológicos (13) e estão distribuídos como aparece na Tabela iv. Quando os artigos descrevem um processo de ensino de Estatística efetivamente desenvolvido junto aos alunos, acrescido da análise dos resultados obtidos, esses foram classificados como de metodologia aplicada. Caso contrário, os artigos foram classificados como contendo metodologia não aplicada, de cunho teórico. Sete trabalhos são provenientes da área da saúde e seis do ensino, destacando o esforço didático de pesquisadores que publicaram em revistas ou eventos da área da saúde na qualificação das metodologias de ensino.

Atenta-se à quantidade maior de artigos com metodologia aplicada (8) contra os de metodologia não aplicada (5). Destes, Smith (2010) destaca a importância de se diminuir a distância entre o que é necessário e o que se ensina de Bioestatística, tema que também é abordado pelo estudo dos autores Herman, Notzer, Libman, Braunstein e Steinberg (2007), ao salientarem que o currículo atual não ensina o que os médicos necessitam. Neste sentido, Macdougall (2010) enfatiza a importância da promoção da aprendizagem autônoma. Dos trabalhos que não aplicaram uma metodologia, somente Fuente e Gea (2013) analisam formas de raciocínio sobre independência.

TABELA IV
Interpretação própria dos artigos na categoria Metodologias de Ensino

Autores	*Área / Sub - categoria*	*Objetivo*	*O que foi medido*	*Como foi medido*	*Metodol. de Pesquisa*	*Metodol. de Ensino*	*Teoria de Aprend.*
(Smith, 2010)	Ensino / Teórico	Discutir as necessidades entre pesquisadores e clínicos sobre Estatística e como melhorar o currículo	Não se aplica	Não se aplica	Discurso teórico	Proposta de currículo	Não se aplica
(Lima, 2010)	Saúde / Apli cado	Integrar a Epidemiologia e a Estatística no ensino de Estatística	Não se aplica	Não se aplica	Quali+ Relato de experiencia	Desen volveram a própria metodologia ativa mesclando epidemio logia e Estatística	Não utiliza ram
(Fuente & Gea, 2013)	Ensino / Teórico	Relatar problemas dos estudiantes de Psicologia com atividades de Independência	Respostas sobre correlação	Cuestio nário	Quali+ Quanti	Onto-semiótica	Não utiliza ram
(Turner et al., 2016)	Saúde / Aplicado	Propor uma metodologia de ensino de Estatística utilizando dados oncológicos	Não se aplica	Não se aplica	Quali+ Quanti	Workshops mesclando problemas oncológicos com Estatística	Não utiliza ram
(McGready & Brookmeyer, 2013)	Saúde / Aplicado	Verificar a diferença de rendimento de alunos da modalidade a distância e presencial	Notas	Provas finais	Quanti+ Descritiva	Tradicional	Não utiliza ram
(Felgueiras, 2013)	Ensino / Aplicado	Relato de experiência do uso de exemplos da área nas aulas de Estatística	Não se aplica	Não se aplica	Quali	Tradicional com uso de dados nao reais mas familiares e exemplos das áreas dos alunos	Não utiliza ram

(Herman, Notzer, Libman, Braunstein, & Steinberg, 2007)	Saúde / Teórico	Verificar o conteúdo remanescente após as aulas de Estatística	Conheci mento remanes cente após as aulas de Estatística	Cuestio nário fechado	Quali+ Quanti+ Descritiva	Não se aplica	Não se aplica
(Milic, Trajkovic, et al., 2016)	Saúde / Aplicado	Comparar o rendimento de alunos expostos ao ensino híbrido com o de quem experimentou o ensino presencial	Rendimen to dos alunos ao final dos dois processos	Notas ao final dos proces sos	Quali+ Quanti+ Inferencial Correlacao	Metodo logia tradicional em ambas as modalidades	Não utiliza ram
(McDougall, 2010)	Ensino / Teórico	Sugerir meios de se alcançar uma aprendizagem autônoma	Não se aplica	Não se aplica	Quali	Cita algumas técnicas, não metodo logias	Não utilizou
(Bahnassy, 2015)	Ensino / Aplicado	Comparar o rendimento de alunos expostos ao ensino convencional e os que utilizam softwares e dados reais	Rendimen to dos alunos expostos a diferentes metodos de ensino	Notas ao final do período	Quanti+ Inferencial	Ensino tradicional baseado em software com uso de dados reais	Não utilizou
(Nowacki 2015)	Ensino / Aplicado	Apresentar e analisar uma metodologia de ensino usando um material concreto	Não se aplica	Não se aplica	Quali	Resolução de Problemas e recomenda ções do GAISE	Não utiliza ram
(Feild, Belgado, Dougherty, Doering & Gong, 2015)	Saúde / Aplicado	Avaliar se a análise de literatura média melhora a confiança dos estudiantes em suas habilidades	confiança dos estudi antes em suas habilida des	Escala própria tipo Likert	Quanti+ Inferencial	application - based teaching strategies	Não utiliza ram
(Nowacki 2011)	Ensino / Aplicado	Aplicar a estrutura 4Mat no desenvol vimento da metodologia PBL e verificar a ansiedade estatística gerada no processo	Satisfação do estudante com o curso	ATSS	Quali+ Quanti+ Inferencial	4MAT PBL	Constru tivismo

Metodologias de ensino de Estatística inadequadas impactam na formação do futuro profissional da área da saúde, visto que a Medicina Baseada em Evidências é uma realidade e os estudantes podem estar se posicionando de forma negativa perante esta demanda, por causa da Estatística e da Matemática que ela exige. Nos Estados Unidos, foram criadas as *Guidelines for Assessment and Instruction in Statistics Education* (GAISE), que tiveram seu impacto também no ensino de Estatística para a área da saúde, e priorizam:

- Ensinar o raciocínio estatístico;
- Ensinar Estatística como um processo investigativo de resolução de problemas e tomada de decisão;
- Proporcionar aos estudantes experiência com o pensamento multivariado;
- Focar no entendimento dos conceitos;
- Integrar dados reais com um contexto e propósito;
- Fomentar a aprendizagem ativa;
- Utilizar a tecnologia para explorar conceitos e analisar dados;
- Utilizar as avaliações para melhorar e avaliar a aprendizagem dos alunos.

As pesquisas concentraram-se em experimentos de ensino restritos principalmente às classes dos próprios pesquisadores, refletindo concepções particulares em suas disciplinas, ou das instituições, em seus currículos. Embora tal abordagem continue sendo maioria, a despeito dos alertas feitos por Garfield (1995), agora existem parâmetros para o ensino de Estatística, tais como as GAISE, que nortearam o trabalho de Nowacki (2015). Este autor propõe um ensino que envolva o aluno em todas as etapas da pesquisa, mediante atividades que incluam design, levantamento e coleta de dados, a fim de que os estudantes possam perceber o todo do processo de trabalho (Nowacki, 2015. p. 3).

A pesquisa de Nowacki (2015) contou com 32 estudantes de Medicina, divididos em grupos de quatro, que desenvolveram sua própria questão de pesquisa baseada em leituras prévias disponibilizadas pelo professor. Este tipo de metodologia contempla a contextualização, promove o processo investigativo e fomenta a aprendizagem ativa. Neste sentido, o trabalho de Lima (2010) mostra o resultado da integração da disciplina de Epidemiologia com a Estatística, desenvolvida entre 2002 e 2008, envolvendo 240 alunos do curso de Medicina de uma universidade brasileira. Os alunos foram incentivados a gerar e desenvolver suas próprias questões de pesquisa, a partir das necessidades da saúde da região. Como resultado extraclasse, a pesquisadora destaca a determinação do perfil epidemiológico de algumas doenças endêmicas na região.

Outro elemento das propostas metodológicas diz respeito às teorias psicológicas ou didáticas que as sustentam. Como se pode observar na Tabela iv, um único trabalho embasou-se, ao menos de forma explícita, no construtivismo, a despeito da indicação da importância de seu uso dada por Garfield (1995).

Relativamente ao uso da tecnologia, fica clara a larga utilização de computadores nas aulas de Estatística, sendo a informática uma das responsáveis pela popularização da disciplina para a área da saúde, com softwares especializados como o "Epi info", criado pelo CDC (*Center for Disease Control and Prevention)* para trabalhar com dados epidemiológicos, entre outros *softwares.* Entretanto, sobre a acessibilidade da informática, Tishkovskaya e Lancaster (2012) pontuam a falta de estudos que incluam a tecnologia de maneira pedagógica nas aulas, e não como simples substituta da álgebra Estatística. Contudo, a Web tem sido terreno fértil para experimentações pedagógicas diferenciadas. Prova disso é a disseminação das MOOC's *(Massive Open Online Courses),* disponibilizado por renomadas instituições de ensino como o MIT *(Massachusetts Institute of Technology)*, mas ainda focadas em aulas gravadas, segundo Tavares (2014). Outrossim, nenhum dos artigos da amostra avalia alguma metodologia de ensino de Estatística de forma totalmente a distância.

Tishkovskaya e Lancaster (2012) indicam que, com relação à quantidade de opções e larga utilização da internet, é preciso uma metodologia adequada para o seu uso eficiente como ferramenta de ensino, mesmo que as propostas sejam centradas no aluno *(student-centred learning)* ou dirigidas por ele *(self-directed learning).* A intervenção do professor é requerida para um aprendizado efetivo. Propostas que conjugam o presencial com os recursos on-line tiveram um desempenho positivo.

É pertinente lembrar que Garfield (1995) já mencionava a necessidade de se desenvolver metodologias para o bom uso das tecnologias. A questão não é o uso de computadores, softwares e internet em si, mas a carência de metodologias neste contexto, que contenham um fundamento teórico consistente e aporte de pesquisa científica. Por outro lado, em seu conjunto, destacam-se as propostas que utilizam o rendimento dos estudantes como forma de medida de conhecimento, sobre os problemas desta prática apontados por Garfield e Ben-Zvi (2007).

Havendo discorrido sobre o ensino de Estatística para o Ensino Superior de maneira geral, amparado pelas revisões de Garfield (1995) e Garfield e Bem-Zvi (2007) e contando com a revisão própria de literatura sobre o ensino de Estatística, em nível superior, para a área da saúde, parte-se para as considerações finais deste trabalho.

7. Considerações finais

Mesmo havendo algum distanciamento do foco das revisões de Garfield e a nossa revisão da literatura, percebe-se que uma quantidade dos problemas indicados por Garfield repercute no ensino de Estatística para a área da saúde. Assim, os princípios quatro (subestimar as dificuldades de entendimento) e cinco (superestimar os conhecimentos), dados por Garfield e Ben-Zvi (2007), revelam a necessidade de se desenvolver escalas para a caracterização do conhecimento dos estudantes, além das que medem a ansiedade estatística. Neste sentido, os trabalhos de cunho psicológico foram profícuos na determinação dos aspectos da ansiedade estatística, mas não foram encontrados, nestes dez anos de pesquisa, trabalhos relativos à caracterização do conhecimento estatístico dos estudantes das áreas da saúde.

No que diz respeito às metodologias de ensino, os artigos encontrados apresentam grande variedade de enfoques, abordando desde propostas curriculares a *workshops*, utilizando uma boa gama de propostas que mesclam a clínica médica, a pesquisa e o ensino, o uso dos computadores e da internet e, por vezes, um ambiente híbrido de ensino, na tentativa principal de atrelar a Estatística ao fazer típico do profissional da área da saúde.

Ao se observar a atuação de um médico durante a anamnese, por exemplo, percebe-se que a investigação é inerente ao seu fazer profissional. As perguntas feitas na anamnese permitem o levantamento de dados, a formulação de hipóteses, a ponderação frente à variabilidade e à incerteza e à tomada de decisão, passos do raciocínio estatístico indissociáveis da atuação do médico. No entanto, ao se adotar metodologias tradicionais de ensino de Estatística, não se transmite essa ideia, contribuindo para a ansiedade Estatística e para o distanciamento do futuro médico desta importante ferramenta.

Torres e Rossi (2013) salientam que se o profissional da área da saúde considerar a Estatística somente como uma ferramenta, correrá o risco de diminuir sua importância e simplificar seu uso, incorrendo em erros de aplicação. Entretanto, considerando que o conhecimento estatístico está na essência da pesquisa quantitativa, simplificar seu uso ou diminuir sua importância impacta na visão científica do profissional. Por esta linha de pensamento, a qualificação dos profissionais da área da saúde pode variar de acordo com seus conhecimentos de Estatística, corroborando com a ideia de Markert (2013), que afirma que se o uso inapropriado da Estatística for evitado na divulgação científica, o ensino e a aprendizagem da disciplina aos estudantes da saúde serão melhorados e, consequentemente, os cuidados com a saúde dos pacientes será aperfeiçoado.

Reforça-se, dessa forma, a necessidade de qualificar o ensino através de práticas que invistam no papel de investigador do aluno. No entendimento de Campos, Wodewotzki, & Jacobini (2011, p. 14),

> (...) os estudantes, de um modo geral, devem ser preparados para levantar problemas de seu interesse, formular questões, propor hipóteses, coletar dados, escolher os métodos estatísticos apropriados, refletir, discutir e analisar criticamente os resultados considerando as limitações da Estatística, sobretudo no que se refere à incerteza e variabilidade.

Diante do exposto, constata-se que o uso de metodologias baseadas em teorias de aprendizagem, desenvolvidas em ambientes que valorizam a investigação sobre dados reais e amparadas por recursos computacionais desenvolvidos em ambientes híbridos (presencial e virtual), parece estar de acordo com a evolução que o ensino de Estatística demanda e que pode melhorar o aprendizado de estudantes da área da saúde.

Outro aspecto a destacar desta abordagem é que ela permite distinguir a Matemática e a Estatística. Uma tarefa importante do professor consiste no estabelecimento dos papéis de cada disciplina, evidenciando suas semelhanças e, principalmente, suas diferenças. Este intento parece ser muito difícil de ser alcançado por uma metodologia tradicional, na qual a teoria é apresentada seguida de exemplos e terminando em aplicações, pois este é o caminho que comumente se toma nas aulas de Matemática.

Em relação à Web, encontram-se diversas possibilidades novas de ensino de Estatística como o *e-learning* ou o *b-learning* ou ainda o *self-learning*: Porém, em sua maioria, preservam o enfoque tradicional, limitando-se os esforços ao uso desta ferramenta como dispensadora da álgebra envolvida nos cálculos estatísticos e mudando somente a modalidade de ensino. Este campo carece de pesquisas que proponham metodologias com forte embasamento pedagógico. Com vistas a superar estas dificuldades, Tishkovskaya e Lancaster (2012) ponderam sobre a necessidade de uma contínua revisão do processo de ensino-aprendizagem da Estatística e que uma reforma no ensino da disciplina e um currículo baseado numa forte sinergia entre conteúdo, pedagogia e tecnologia são necessários.

No entanto, é importante salientar que, segundo nossa revisão, os trabalhos que propõem metodologias diferenciadas ainda são, comumente, distantes das propostas sugeridas por educadores Estatísticos, tal como a GAISE, por exemplo, e dissipam-se em ações isoladas propostas normalmente por não educadores, como médicos ou estatísticos, que parecem não atentarem para as teorias de aprendizagem. Além das propostas aqui revisadas, consideramos que outra relação simbiótica da Estatística com a área da saúde e que pode gerar bons resultados pedagógicos, desde que bem empregada, é a metodologia chamada de PBL *(Problem Based Learning)*. Esta metodologia, muito desenvolvida para o ensino da área médica, pode proporcionar o ambiente investigativo propício ao desenvolvimento pedagógico da Estatística, considerando o contexto clínico no aprendizado.

Por outro lado, chama atenção o não aparecimento de artigos que tratam de instrumentos de pesquisa para a avaliação de resultados de aprendizagem para a área da saúde. Se considerar-se que existe a preocupação com a ansiedade estatística e com as metodologias de ensino empregadas, poder-se-ia esperar pesquisadores preocupados em acessar o nível de entendimento sobre Estatística atingido pelos alunos da área da saúde. Neste sentido, cabe lembrar o que Zieffler *et al.* (2008) pontuam: maneiras tradicionais de acessar o raciocínio estatístico dos alunos, como notas em testes ou mesmo exercícios, podem não corresponder ao que eles realmente sabem e que discussões em duplas ou pequenos grupos podem ser mais reveladoras dos conhecimentos dos alunos.

Dessa forma, constata-se que são necessários mais instrumentos validados que permitam acessar os conhecimentos sobre o raciocínio de conceitos estatísticos, tais como distribuição ou variabilidade. Também o uso de métodos qualitativos pode oferecer meios de desenvolver instrumentos quantitativos. A Avaliação de Raciocínio Estatístico *(Statistical Reasoning Assessment)* é um dos primeiros instrumentos objetivos desenvolvidos para avaliar o raciocínio estatístico dos alunos, publicado por Garfield em 1998, como descrevem Tempelaar, Gijselaers e Loeff (2006). Esta revisão mostra que a questão colocada por Garfield (1995) sobre que tipos de procedimentos e materiais avaliativos informam melhor o professor sobre o entendimento dos alunos, ainda está aberta, principalmente no que se refere aos instrumentos quantitativos para a área da saúde, necessitando mais esforços neste sentido.

Referências

Campos, C. R., Wodewotzki, M. L. L., & Jacobini, O. R. (2011). *Educação Estatística: Teoria e prática em ambientes de modelagem matemática.* Autêntica. Sao paulo, Brasil

Cruz, D. de A. L. M. da, & Pimenta, C. A. de M. (2005). *Prática baseada em evidências, aplicada ao raciocínio diagnóstico. Rev. Latino-Am Enfermagem*, 13(3), 415-422. http://dx.doi.org/10.1590/S0104-11692005000300017

Espindola Artola, A., López Benítez, R., Miranda Carbonell, M., Ruiz Socarrás, J. M., & Díaz Garcia, G. M. (2014). Estrategia didáctica para disminuir el estrés académico hacia el contenido estadístico en los estudiantes de medicina. *Humanidades Médicas*, *14*(2), 499-521. Recuperado de: http://scielo.sld.cu/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1727-81202014000200016&lng=es&nrm=iso&tlng=es

Estrada, A., Batanero, C., & Lancaster, S. (2011). Teachers' Attitudes Towards Statistics. In Batanero C., Burril G., Reading C. (eds). Teaching Statistics in School Mathematics-Challenges for Teaching and Teacher Education (pp. 163-174). Dordrecht: Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-1131-0_18

Fuente, G. C. de la, & Gea, M. M. (2013). Estrategias y conflictos semióticos de estudiantes de psicología al evaluar un problema de independencia. *Probabilidad Condicionada: Revista de Didáctica de La Estadística*, (2), 257-263. Recuperado de https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=4770296

Garfield, J. (1995). How Students Learn Statistics. *International Statistical Review / Revue Internationale de Statistique*, *63*(1), 25-34. http://doi.org/10.2307/1403775

Garfield, J., & Ben-Zvi, D. (2007). How Students Learn Statistics Revisited: A Current Review of Research on Teaching and Learning Statistics. *International Statistical Review*, *75*(3), 372-396. http://doi.org/10.1111/j.1751-5823.2007.00029.x

Hannigan, A., Gill, O., & Leavy, A. M. (2013). An investigation of prospective secondary mathematics teachers' conceptual knowledge of and attitudes towards statistics. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *16*(6), 427-449. http://doi.org/10.1007/s10857-013-9246-3

Hannigan, A., Hegarty, A. C., & McGrath, D. (2014). Attitudes towards statistics of graduate entry medical students: the role of prior learning experiences. *BMC Medical Education*, *14*, 70. doi: https://doi.org/10.1186/1472-6920-14-70

Hembree, R. (1988). Correlates, causes, effects, and treatment of test anxiety. *Review of Educational Research Spring*, *58*(1), 47-77. https://doi.org/10.3102/00346543058001047

Herman, A., Notzer, N., Libman, Z., Braunstein, R., & Steinberg, D. M. (2007). Statistical education for medical students. Concepts are what remain when the details are forgotten. *Statistics in Medicine*, *26*, 4344-4351. http://doi.org/10.1002/sim.2906

Hernandez, J. A. E., Santos, G. R. dos, Silva, J. de O. da, Mendes, S. L. L., & Ramos, V. da C. B. (2015). Evidências de Validade da Escala de Ansiedade em Estatística em Alunos da Psicologia. *Psicologia: Ciência E Profissão*, *35*(3), 659-675. http://doi.org/10.1590/1982-3703000362014

Ing, E. (2016). Aids to statistics literacy for ophthalmologists. *Canadian Journal of Ophthalmology*, *51*(5)142-143. http://doi.org/10.1016/j.jcjo.2016.05.011

León Bologna, E., & Vaiman, M. (2013). Actitudes, experiencia previa y nivel de logro en Estadística en la carrera de Psicología. *Probabilidad Condicionada: Revista de Didáctica de La Estadística*, (2), 91-103. Recuperado de https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=4770239

Lima, E. P. (2010). Epidemiologia e Estatística: integrando ensino, pesquisa, serviço e comunidade. *Revista Brasileira de Educação Médica*, *34*(2), 324-328. http://doi.org/10.1590/S0100-55022010000200019

Macdougall, M. (2010). Promoting autonomous learning in statistics among undergraduate medical students. In: *Proceedings of the Eighth International Conference on Teaching Statistics, (ICOTS8 2010)*. Netherlands: International Statistical Institute. Recuperado de http://icots.info/8/cd/pdfs/invited/ICOTS8_7E1_MACDOUGALL.pdf

Markert, R. J. (2013). Enhancing Medical Education by Improving Statistical Methodology in Journal Articles. *Teaching and Learning in Medicine*, *25*(2), 159-164. http://doi.org/10.1080/10401334.2013.770746

McKibbon, A. (1998). Evidence-Based Practice. *Bulletin of the Medical Library Association, 86*(3), 396. PMCID: PMC226388

Milic, N. M., Masic, S., Milin-Lazovic, J., Trajkovic, G., Bukumiric, Z., Savic, M., Nikola, V. M., Gakic, M., Kostic, M., Ilic, A. & Stanisavljevic, D. (2016). The importance of medical students' attitudes regarding cognitive competence for teaching applied statistics: multi-site study and meta-analysis. *Plos One*, 11(10): e0164439 http://doi.org/10.1371/journal.pone.0164439

Moreira Junior, F. de J., Zanella, A., Lopes, L. F. D., & Seidel, E. J. (2015). Avaliação da satisfação de alunos por meio do Modelo de Resposta Gradual da Teoria da Resposta ao Item. *Ensaio: Avaliação E Políticas Públicas Em Educação*, *23*(86), 129-158. http://doi.org/10.1590/S0104-40362015000100005

Nowacki, A. S. (2015). Teaching statistics from the operating table: minimally invasive and maximally educational. *Journal of Statistics Education*, *23*(1). https://doi.org/10.1080/10691898.2015.11889726

Oliver, A., Sancho, P., Galiana, L., & Cebrià i Sancho, M. Á. (2014). Nueva evidencia sobre la Statistical Anxiety Scale (SAS). *Anales de Psicología*, *30*(1), 150-156. http://doi.org/10.6018/analesps.30.1.151341

Smith, K. L. (2010). Divergent needs of learners in evidence based medicine. In: *Proceedings of the Eighth International Conference on Teaching Statistics, (ICOTS8 2010)*. Netherlands: International Statistical Institute. Recuperado de http://icots.info/icots/8/cd/pdfs/invited/ICOTS8_1A2_SMITH.pdf

Tavares, V. B. A. (2014). Massive Open Online Courses (MOOCS): nova tendência educacional. Recuperado de http://bdm.unb.br/bitstream/10483/8387/1/2014_VivianeBrunellyTavares.pdf

Tempelaar, D. T., Gijselaers, W. H., & Loeff, S. S. (2006). Puzzles in statistical reasoning. *Journal if Statistics Education, 14*(1). https://doi.org/10.1080/10691898.2006.11910576

Tishkovskaya, S., & Lancaster, G. (2012). Statistical education in the 21st century: a review of challenges, teaching innovations and strategies for reform. *Journal of Statistics Education*, *20*(2), 1-56. https://doi.org/10.1080/10691898.2012.11889641

Torres, H. J., & Moreno Rossi, A. (2013). Apreciaciones sobre el uso y aplicación de la estadística en las ciencias de la salud. *Duazary: Revista Internacional de Ciencias de la Salud*, *10*(1), 62-66. Recuperado de https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=4730381

Turik, C., Viali, L., & Moraes, J. F. D. de. (2012). Análise de atitudes de alunos universitários em relação à estatística por meio da teoria de resposta ao item. *Ciência & Educação (Bauru), 18*(1), 231–243. http://doi.org/10.1590/S1516-73132012000100014

UNIFESP. (n.d.). Aprendizado Baseado em Problemas - PBL. Recuperado em 3 de fevereiro, 2017, de http://www2.unifesp.br/centros/cedess/pbl/

Vigil-Colet, A., Lorenzo-Seva, U., & Condon, L. (2008). Development and validation of the statistics anxiety scale. *Psicothema*, *20*(1), 174–180. Recuperado de: http://www.psicothema.es/pdf/3444.pdf

Weissgerber, T. L., Garovic, V. D., Milin-Lazovic, J. S., Winham, S. J., Obradovic, Z., Trzeciakowski, J. P., & Milic, N. M. (2016). Reinventing Biostatistics Education for Basic Scientists. *PLoS Biology, 14*(4): e1002430. http://doi.org/10.1371/journal.pbio.1002430

Zeidner, M. (1990). Does Test Anxiety Bias Scholastic Aptitude Test Performance by Gender and Sociocultural Group? *Journal of Personality Assessment*, *55*(1-2), 145-160. http://doi.org/10.1080/00223891.1990.9674054

Zieffler, A., Garfield, J., Alt, S., Dupuis, D., Holleque, K., & Chang, B. (2008). What Does Research Suggest About the Teaching and Learning of Introductory Statistics at the College Level? A Review of the Literature. *Journal of Statistics Education*, *16*(2). https://doi.org/10.1080/10691898.2008.11889566

Autores

Rodrigo Fioravanti Pereira. Centro Universitário Franciscano, Brasil. prof.rodrigopereira@gmail.com

Ileana Maria Greca Dufranc. Universidad de Burgos, España. imgreca@ubu.es

Jesus Angel Meneses Villagra. Universidad de Burgos, España. meneses@ubu.es

Jesús Gallardo Romero, Verónica Aurora Quintanilla Batallanos

EL CÍRCULO HERMENÉUTICO DE LA COMPRENSIÓN EN MATEMÁTICAS: UNA PROPUESTA INTEGRADORA PARA LA EVALUACIÓN EN EL AULA

The hermeneutic circle of understanding in mathematics: an integrative proposal for the evaluation in the classroom

RESUMEN

La actividad matemática escolar se desarrolla en entornos interpretativos complejos condicionados por la comprensión de sus protagonistas. Con la intención de contribuir al esclarecimiento de los procesos involucrados en tales entornos, en este trabajo exploramos distintos cuestionamientos que afectan la interpretación de la comprensión en matemáticas. En este recorrido previo encontramos la justificación para sugerir una propuesta integradora con la que acceder de forma operativa a la comprensión matemática de los estudiantes. Fundamentamos dicha propuesta al configurar las bases teóricas y metodológicas de lo que denominamos el *círculo hermenéutico de la comprensión en matemáticas*. También evidenciamos la potencialidad metodológica de este círculo interpretativo, al aplicarlo en un estudio de caso en el ámbito de la divisibilidad de los números naturales. En este episodio obtenemos resultados favorables para reconocer que el círculo hermenéutico puede mostrarse útil en la práctica para interpretar la comprensión involucrada en la actividad matemática de los escolares.

PALABRAS CLAVE:

- *Comprensión*
- *Divisibilidad*
- *Evaluación*
- *Interpretación*
- *Pensamiento numérico*

ABSTRACT

The mathematical activity in school takes place in interpretive complex environments which they are conditioned by the understanding of its protagonists. To clarify the processes involved in such environments, in this work we explore different principal issues related to the interpretation of the understanding in mathematics. In this path, we find the reasons to suggest an integrative proposal to access from an operative way to the mathematical understanding of the students. We support this proposal by setting the theoretical and methodological bases of what we call the *hermeneutic*

KEY WORDS:

- *Understanding*
- *Divisibility*
- *Assessment*
- *Interpretation*
- *Number thinking*

Recepción: Marzo 14, 2018 / Aceptación: Octubre 30, 2018. DOI: 10.12802/relime.19.2214

circle of understanding in mathematics. We also show the methodological potential of this interpretative circle, by applying it in a case study in the field of the divisibility of the natural numbers. In this episode, we obtain favourable results to recognize that the hermeneutic circle can be useful in practice to clarify the understanding involved in the mathematical activity of the students.

RESUMO

A atividade matemática escolar ocorre em ambientes interpretativos complexos condicionados pela compreensão de seus protagonistas. Com a intenção de contribuir para a elucidação dos processos envolvidos em tais ambientes, neste artigo nós exploramos várias questões importantes que afetam a interpretação da compreensão em matemática. Nesta revisão encontrámos a justificação para sugerir uma proposta integradora para aceder a compreensão matemática dos alunos. Nós oferecemos a fundamentação desta proposta desenvolvendo as bases teóricas e metodológicas do que chamamos o círculo hermenêutico da compreensão em matemática. Nós mostramos também a potencialidade metodológica deste círculo, aplicando-o a um estudo de caso no campo da divisibilidade dos números naturais. Este episódio oferece resultados favoráveis para reconhecer que o círculo hermenêutico pode ser útil na prática para esclarecer a compreensão matemática envolvida nas atividades escolares.

PALAVRAS CHAVE:

- *Compreensão*
- *Divisibilidade*
- *Avaliação*
- *Interpretação*
- *Pensamento numérico*

RÉSUMÉ

L'activité mathématique dans l'école se développe dans complexes environnements interprétatifs conditionnés par la compréhension de ses protagonistes. À l'objectif de contribuer à l'élucidation des processus impliqués dans ces environnements, dans ce travail nous examinons divers questions principaux relatifs à l'interprétation de la compréhension en mathématiques. Dans ce parcours, nous trouvons la justification pour suggérer une approche inclusive avec laquelle accéder de manière opérationnelle à la compréhension mathématique des étudiants. Nous étayons cette approche en définissant le cadre théorique et méthodologique de ce que nous appelons le cercle herméneutique de la compréhension en mathématiques. Nous montrons aussi la potentialité méthodologique de ce cercle interprétatif en l'appliquant à une étude de cas dans le domaine de la divisibilité des nombres naturels. Dans cet épisode nous obtenons des résultats favorables pour reconnaître que le cercle herméneutique peut se montrer utile dans la pratique pour clarifier la compréhension impliquée dans l'activité mathématique des élèves.

MOTS CLÉS:

- *Compréhension*
- *Divisibilité*
- *Évaluation*
- *Interprétation*
- *Pensée numérique*

1. Introducción

La enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas es una actividad esencialmente interpretativa. Los procesos cognitivos y discursivos involucrados en las prácticas matemáticas demandan ejercicios permanentes de interpretación por parte de los estudiantes y del profesor. Esta interpretación transcurre en entornos compartidos donde la comprensión matemática, propia y ajena, interactúa de manera compleja. En particular, cada protagonista se enfrenta al desafío constante de obtener información sobre la comprensión matemática de su interlocutor. Esta situación, que pone en evidencia el problema fundamental del acceso a la comprensión matemática del otro, justifica la pertinencia de realizar esfuerzos encaminados a esclarecer la naturaleza de la interpretación de la comprensión que acontece durante la actividad matemática y configurar procedimientos operativos con los que llevar a cabo esta interpretación.

En Educación Matemática percibimos diferentes posicionamientos básicos que dan respuestas distintas a esta problemática en función del lugar hacia donde dirigen sus correspondientes propuestas interpretativas. Al mismo tiempo, contemplamos que se pueden establecer vínculos dialécticos compatibles entre ellos como alternativa a la elección justificada de enfoques. Por esta razón, en este trabajo nos planteamos la posibilidad de configurar una visión extendida de la interpretación de la comprensión donde distintas orientaciones contribuyan de forma complementaria a una misma propuesta interpretativa. Con esta intención integradora, en los últimos años hemos desarrollado un modelo operativo para la interpretación de la comprensión en matemáticas basado en el análisis de la experiencia matemática de los estudiantes (Gallardo y González, 2006; Gallardo y Quintanilla, 2016; Gallardo, González y Quintanilla, 2013, 2014; Gallardo, González y Quispe, 2008). En la investigación que ahora presentamos avanzamos en el desarrollo de la dimensión hermenéutica de nuestro modelo, al incorporar a su fundamentación actual la configuración de un círculo interpretativo con el que buscamos acceder de una forma operativa a la comprensión matemática de los escolares.

Iniciamos el estudio exponiendo, en el apartado 2, cuestiones fundamentales que afectan a la interpretación de la comprensión y que son foco actual de debate en Educación Matemática. Utilizamos estas referencias para justificar y desarrollar, en el apartado 3, las bases que fundamentan nuestra propuesta interpretativa: el círculo hermenéutico de la comprensión en matemáticas. En los apartados 4 y 5 describimos su aplicación a través de un episodio concreto donde interpretamos la comprensión matemática desplegada por una alumna de primer curso de educación secundaria (12-13 años) al intentar resolver una tarea de divisibilidad de números naturales. Concluimos el estudio subrayando en el apartado 6 las características fundamentales y las contribuciones más destacadas de nuestra propuesta interpretativa en relación con algunas de las principales orientaciones a la interpretación en Educación Matemática. También esbozamos algunas posibilidades de desarrollo futuro para nuestro modelo de interpretación de la comprensión en matemáticas.

2. Antecedentes

La interpretación de la comprensión en matemáticas despierta interés en Educación Matemática y sus problemáticas asociadas generan discusiones abiertas en el campo de la investigación. Las controversias giran en torno a distintos problemas abiertos en la interpretación, específicos y relacionados, como los relativos a la dualidad cognitivo-semiótica, el distanciamiento con el otro, la referencia al interpretar, la gestión de la intencionalidad, el retorno inclusivo y la apropiación de la comprensión, o el protagonismo del estudiante. En las siguientes secciones transitamos por los debates generados por tales cuestiones.

2.1. *Sobre el acceso a la comprensión matemática del alumno*

¿Hasta qué punto es posible obtener información sobre la comprensión matemática que poseen los estudiantes? Toda actividad matemática está propiciada por, y es consecuencia de, acciones intelectuales que demandan unas exigencias cognitivas necesariamente vinculadas a la esfera mental de sus protagonistas. Y la comprensión en matemáticas también comparte el carácter interno e inmaterial propio de las actividades intelectuales cognitivas específicas. Esta realidad oculta impide considerar el acceso y la observación directa como opción metodológica para obtener información sobre la comprensión matemática de los estudiantes.

En Educación Matemática se reconocen los esfuerzos de la orientación cognitiva por superar esta situación y buscar estrechar progresivamente la distancia entre las realidades interna y externa de la comprensión. Un claro exponente lo encontramos en el conocido enfoque representacional que desarrolla una visión de la comprensión vinculada a las representaciones y conexiones, internas y externas, del conocimiento matemático (Barmby *et al*., 2007; Goldin, 2002; Hiebert y Carpenter, 1992). No obstante, la transición entre objetos de ambos mundos resulta compleja y, de hecho, la relación entre los ámbitos externo e interno de la comprensión no es tan morfológicamente homogénea como la plantea el representacionalismo (Sierpinska, 1994; Font, Godino y D'Amore, 2007). Si bien la orientación cognitiva de la interpretación contribuye al esclarecimiento del fenómeno de la comprensión en matemáticas, no logra desprenderse por completo de las dificultades operativas derivadas de los propios rasgos mentales de ésta, así como de la transición fundamental entre sus ámbitos externo e interno.

2.2. *Sobre el distanciamiento con el alumno y la referencia para interpretar su comprensión matemática*

No poder observar directamente la naturaleza y el funcionamiento interno de la comprensión desplaza el centro de atención al ámbito de la actividad matemática observable; desde el estudiante, cuya comprensión se quiere valorar, hacia su propia producción matemática externa. Se trata de una inevitable transición *de lo interno a lo externo* que también trae consigo como consecuencia un distanciamiento con el propio alumno. Las propuestas interpretativas que centran su atención en el propio registro observable se ven afectadas por la cuestión de cómo mantener o recuperar el estatus cognitivo del alumno que comprende. El análisis cognitivo de la comprensión matemática propuesto por Duval (2006) contribuye en parte a la resolución de esta problemática, al introducir un cambio de estatus en las representaciones semióticas, y presentarlas como entidades de carácter externo e interno. Esta circunstancia impone un inevitable traslado al ámbito de lo semiótico, también a nivel interno, en el estudio de los procesos de pensamiento requeridos para comprender los objetos matemáticos.

Esta alternativa integradora, sin embargo, no parece encajar totalmente en el marco de la orientación semiótica de la interpretación en matemáticas en la que se aprecia una clara renuncia al carácter mental de la comprensión, por lo que el distanciamiento entre ella resulta especialmente acentuado. De hecho, la interpretación en esta orientación se circunscribe exclusivamente al análisis de la complejidad de las relaciones semióticas externas desplegadas durante la actividad matemática visible. Encontramos evidencias de esta orientación semiótica en los planteamientos de Otte (2006) o en la visión peirceana de la interpretación como doble proceso semiótico propuesta por Sáenz-Ludlow y Zellweger (2012).

La primera transición de la interpretación desde la esfera cognitiva a la semiótica, cuya pertinencia se reconoce de forma justificada, podría constituir entonces una fase sólida, aunque también provisional, dentro del proceso de interpretación de la comprensión en matemáticas. Más aún, en este punto se plantea la discusión sobre la conveniencia de seguir transitando hacia referencias externas situadas más allá de la propia representación semiótica. ¿Hemos de aceptar una interpretación que transcurre exclusivamente en el entorno de lo semiótico o por el contrario podemos pensar en sortear sus límites? Para autores como Brown (2001) o Morgan (2014), la interpretación de la comprensión matemática no parece concluir sólo con un análisis semiótico de las producciones de los estudiantes, puesto que la actividad matemática siempre conlleva acciones y usos que, por lo general, traspasan las fronteras del registro escrito literal.

2.3. *Sobre la posibilidad de hacer referencias complementarias y la realidad que proyectan más allá del texto matemático*

Al interpretar la comprensión en matemáticas, ¿cabe más de una posibilidad en la búsqueda de referencias extralingüísticas? Transitar del sentido a la referencia trae consigo dos nuevas problemáticas relacionadas. La primera de ellas pone el acento sobre cuáles pueden ser estas referencias que traspasan el ámbito semiótico, dónde ubicarlas y cómo valorar su pertinencia. ¿Adónde remite o hacia dónde apunta el registro observable producto de la actividad matemática (texto matemático) y depósito de los rastros de comprensión del estudiante? En esta cuestión cobra protagonismo el debate en torno a lo que la teoría antropológica de lo didáctico ha caracterizado como dialéctica de lo ostensivo y no ostensivo en los objetos matemáticos (Bosch y Chevallard, 1999). La segunda señala el estatus ontológico de los objetos matemáticos, puesto que, al trascender el texto, habríamos de aceptar una realidad ontológica para ellos más allá del signo. ¿Cuál sería esta realidad concreta? El carácter paradójico del conocimiento matemático promueve esta problemática, que Duval (2006) describe bien al cuestionarse cómo es posible reconocer y distinguir los objetos matemáticos de sus representaciones semióticas particulares si la vía de acceso a ellos es precisamente a través de estas mismas representaciones.

Entre las propuestas interpretativas en Educación Matemática que buscan superar las posiciones semióticas puras se aprecian diferencias a la hora de situar la referencia y dotar de existencia a los objetos matemáticos. Por ejemplo, el enfoque representacional opta por posicionarse en la perspectiva no-realista del psicologismo, y propone una existencia mental para los objetos matemáticos y una referencia que apunta al interior del sujeto (Rico, 2009). El enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática (Godino, 2002), por su parte, sugiere adoptar una posición ficcionalista con referencia metafórica para explicar cómo emergen los objetos en las prácticas matemáticas. Aquí los objetos matemáticos cumplen una función de referencia global para la configuración socio-epistémica que surge de los objetos primarios y sus relaciones (Font, Godino y Gallardo, 2013).

2.4. *Sobre el protagonismo del alumno en la interpretación de su comprensión matemática y la búsqueda de interpretaciones inclusivas*

La conexión última entre los rastros visibles del conocimiento, las producciones externas y los signos objetivados empleados por los estudiantes durante el desarrollo de sus prácticas matemáticas, por un lado, y la propia comprensión matemática como actividad intelectual específica de carácter mental, por otro, todavía requiere una última concreción relativa a la transición *de lo externo a lo* *interno*. La cuestión es: ¿cómo recuperar el carácter cognitivo de la comprensión matemática si regresamos a ella con una interpretación sustentada en los registros observables del conocimiento matemático y en sus referencias asociadas? Se busca recomponer la comprensión matemática que fue provisionalmente distanciada en la fase interpretativa correspondiente al paso de lo cognitivo a lo semiótico.

La cuestión del retorno también pone de relieve el modo de hacer partícipe al estudiante de la interpretación de su propia comprensión matemática. En este sentido, se plantea la posibilidad de configurar interpretaciones donde el distanciamiento con el estudiante sea transitorio, donde cobre mayor protagonismo la presencia y la participación del alumno en su propio proceso interpretativo y donde quede desestimado cualquier desequilibrio o desigualdad manifiesta entre las partes intervinientes (Drouhard, Maurel y Sackur, 2011). De este modo, se garantizarían unas interpretaciones de la comprensión en matemáticas más justas e inclusivas con los estudiantes (Morgan y Watson, 2002; Brown, 2008). La teoría de la objetivación propone el posicionamiento crítico de los alumnos frente a los conocimientos matemáticos y al resto de las subjetividades en el aula como vía para el retorno a la consciencia del otro, entendida como experiencia social, emocional y sensible (Radford, 2014).

3. Marco teórico

En los debates anteriores encontramos justificación para concebir la comprensión como fenómeno mental de carácter cognitivo y, al mismo tiempo, plantear su interpretación centrando la atención, en un primer momento, en el ámbito semiótico de las producciones externas, sin necesidad de traspasar la frontera de lo observable hacia el interior (*de lo cognitivo a lo semiótico*). Además, percibimos la conveniencia de transitar en la interpretación hacia referencias externas, centradas en la experiencia matemática del otro, en el actuar y en el hacer más allá del propio registro observable literal. Ello legitima la propuesta funcional de buscar la comprensión matemática de los alumnos en los usos que éstos hacen de los conocimientos matemáticos (*más allá de lo semiótico*). Finalmente, vislumbramos la posibilidad de plantear un recorrido interpretativo de carácter circular, con una fase final que permita retornar a la comprensión matemática del estudiante mediante una interpretación inclusiva y transformadora centrada en la búsqueda del consentimiento (*retorno a la comprensión matemática del otro*). Estas conclusiones preliminares son el punto de partida para el desarrollo de la propuesta que presentamos a continuación para acceder de forma operativa a la comprensión matemática de los estudiantes.

3.1. *Plano semiótico: identificación de rastros de comprensión en la actividad matemática*

La comprensión es comunicable e incluye en su manifestación externa rastros interpretables. Asumimos que la exteriorización de la comprensión viene dada a través del lenguaje, medio privilegiado de transmisión de lo interno. Con base en esto, el registro observable generado durante la actividad matemática como resultado de la inscripción en el texto del quehacer matemático realizado, se erige como la primera fuente principal depositaria de las expresiones o rastros visibles derivados de la comprensión, y se constituye así en el primero de los centros de interés de nuestra propuesta interpretativa (figura 1).

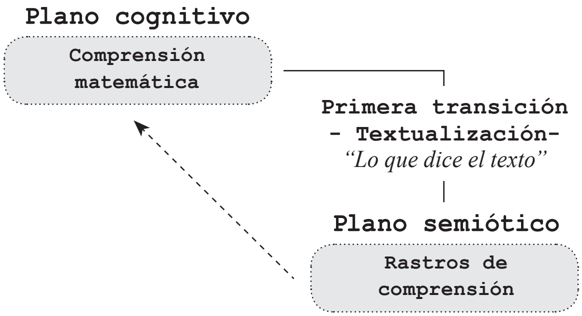

Figura 1. Círculo hermenéutico de la comprensión en matemáticas (parte I)

Nuestra interpretación demanda la *textualización* de lo observable en registros de naturaleza escrita. La inscripción textual de lo observable hace patente el progresivo distanciamiento entre lo mental, lo verbal y, finalmente, lo escrito, en donde se pone de manifiesto la inaccesibilidad directa de los aspectos internos de la comprensión, la imposibilidad de una relación especular entre lo verbal y lo escrito y la exigencia ineludible de una interpretación dirigida al texto. Otro objetivo en esta fase inicial es identificar y delimitar entre todo lo observado y registrado de la actividad matemática los *rastros de comprensión* del estudiante que podrían considerarse indicadores de algún uso tipificado dado al conocimiento matemático.

Los conocimientos matemáticos no siempre se utilizan del mismo modo, y son los componentes caracterizadores de su estructura epistemológica los que establecen en cada caso los distintos requisitos condicionantes de su empleo intencionado por parte del estudiante. A su vez, las situaciones matemáticas demandan la identificación de aquellos conocimientos matemáticos susceptibles de poderse emplear en ellas, en alguna de sus formas posibles, como medio de resolución, así como la decisión sobre cuál conocimiento matemático emplear, y de qué modo, entre las posibilidades identificadas previamente. La consideración conjunta de ambos aspectos nos permite percibir una estructura de conocimientos matemáticos y situaciones asociadas, conectados entre sí mediante vínculos epistemológicos (conocimiento - conocimiento) y fenomenológicos (conocimiento - situación). La descripción de esta estructura fenómeno - epistemológica, correspondiente a cada situación matemática planteada a los escolares, nos sirve de referencia para dirigir la búsqueda de los rastros de comprensión durante esta fase (Gallardo y González, 2006; Gallardo, González y Quintanilla, 2014; Gallardo, González y Quispe, 2008).

3.2. *Plano fenómeno - epistemológico: caracterización de los usos del conocimiento matemático*

Aunque la comprensión y la interpretación se ejerzan sobre la mediación de un texto, rebasan el campo de lo meramente semiótico. La capacidad para utilizar el conocimiento matemático depende en buena medida de su comprensión, por lo que situamos la referencia de la comprensión del estudiante, no ya en el propio registro escrito, sino en el uso del conocimiento matemático que deja entrever. Por ello, encauzamos la búsqueda de la comprensión matemática en una dirección que parte de un texto, pero prosigue más allá de él hacia el empleo del conocimiento matemático (figura 2).

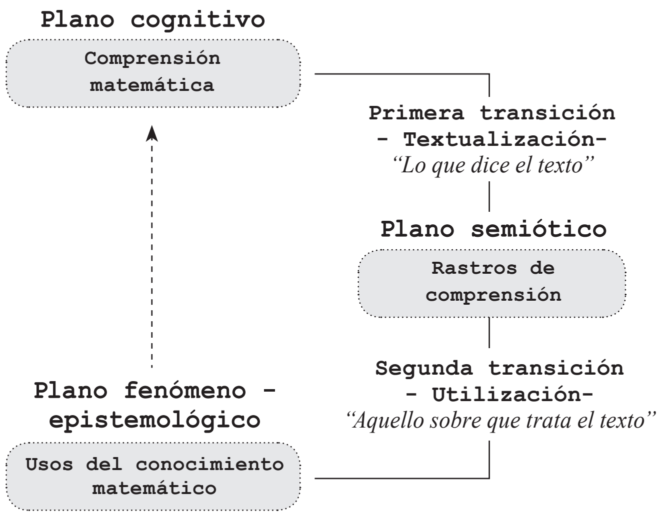

Figura 2. Círculo hermenéutico de la comprensión en matemáticas (parte II)

En la decisión que justifica el uso del conocimiento matemático siempre hay un ejercicio mental y privado de deliberación y elección de alternativas por parte del estudiante ligada a una intención y a un cierto convencimiento de que la actuación es posible y pertinente. Será el uso intencional del conocimiento matemático por parte del alumno, como forma de acción observable e interpretable, el que dé cuenta de su comprensión matemática. La interpretación en esta fase se dirige entonces a la exteriorización y la caracterización de los *usos del conocimiento matemático* que se desprenden de los rastros de comprensión emergentes de los registros escritos. La propia estructura fenómeno - epistemológica de las situaciones asociadas planteadas seguirá siendo la que actúe como referencia para certificar tales usos.

3.3. *Plano dialógico: el retorno a la comprensión matemática a través del consentimiento con el otro*

Para proporcionar una respuesta satisfactoria al problema del retorno a la comprensión matemática del estudiante, a partir de la caracterización de los usos dados al conocimiento matemático durante su actividad en el aula, proponemos una nueva extensión consistente en retornar a la comprensión matemática a través del *consentimiento con el otro*. Éste es un nuevo rastro visible complementario al uso evidenciado en el registro escrito matemático que conecta y permite transitar desde el ámbito externo de los usos del conocimiento matemático a la esfera mental de la comprensión (figura 3).

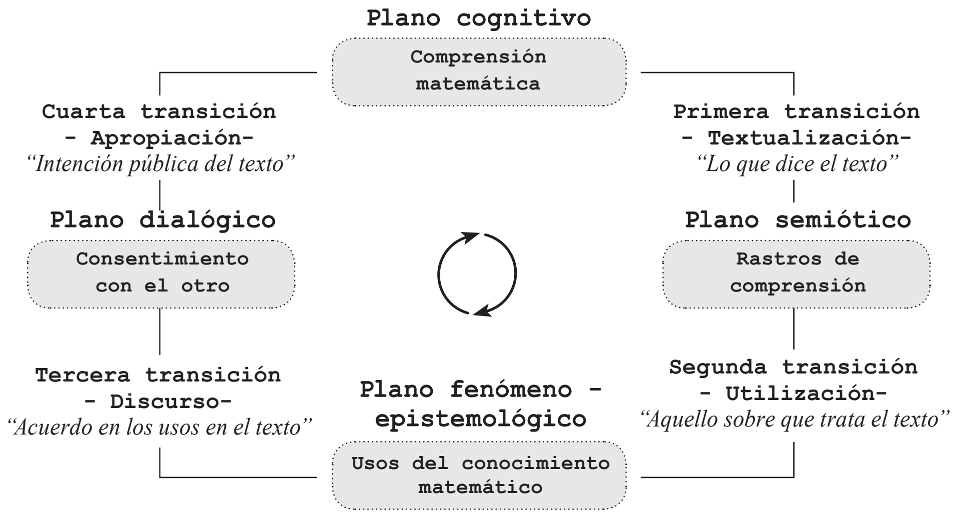

Figura 3. Círculo hermenéutico de la comprensión en matemáticas (parte III)

Sugerimos entonces continuar el proceso interpretativo con la búsqueda de una conformidad recíproca entre el propio estudiante y su agente intérprete (investigador, profesor, compañeros) acerca de las conclusiones sobre los usos del conocimiento matemático obtenidas en las fases precedentes. En esta nueva fase, la comprensión interpretada se contrasta discutiendo con el propio alumno, directa o indirectamente, sobre los usos del conocimiento matemático evidenciado. Este intercambio finalizará cuando las respuestas sean consideradas suficientes por quien las da y aceptables como tales por quien las recibe. Hablamos de alcanzar el consentimiento con el otro en el ejercicio de la interpretación de su comprensión matemática (Gallardo y Quintanilla, 2016).

La interpretación de la comprensión matemática del estudiante exige su participación como mediador entre lo que él previamente ha realizado (el registro escrito de la acción matemática acontecida) y el agente que persigue concretar lo que comprende y cómo lo comprende. El alumno interviene de forma directa en la construcción del consentimiento durante su práctica matemática, por lo que se convierte en artífice directo y protagonista del proceso de interpretación de su propia comprensión.

La fase de consentimiento, de carácter esencialmente dialógica, exige (a) la explicitación de la intención del estudiante a través de sus acciones matemáticas (lo que hace y lo que dice que hace), y (b) la apropiación por parte del agente intérprete de los usos intencionales identificados. En esto último es donde reside el efecto transformador de la comprensión sobre el agente: comprender al estudiante termina transformando al propio intérprete como consecuencia de hacer propio lo que en un principio le resultaba ajeno. En esta fase, el estudiante puede verse involucrado de manera directa y real junto con el intérprete en los procesos interpretativos de su propia comprensión matemática. También puede manifestarse indirectamente en tales procesos, a través de la intención pública que expresa el texto autónomo que produce y después deja como herencia al intérprete de su comprensión. Tanto la explicitación de la intención del alumno, directa o indirectamente, como la apropiación por parte del agente intérprete transcurre en la fase de consentimiento con el otro. En esta confluencia de la explicitación y la apropiación es donde concluye el círculo hermenéutico de la comprensión en matemáticas.

En definitiva, el consentimiento con el otro nos ofrece una vía para retornar a la comprensión matemática. Por medio del protagonismo final adquirido por el estudiante, garantizamos de nuevo el carácter cognitivo de su comprensión, desplazado provisionalmente al comienzo del círculo, y con la correspondiente apropiación completamos de un modo más inclusivo nuestra propuesta para interpretar la comprensión de la actividad matemática en el aula.

4. Metodología

4.1. *Escenario básico de interpretación y actividad matemática de clase*

Pretendemos mostrar la operatividad metodológica del círculo hermenéutico a través de su aplicación en uno de los escenarios básicos de interpretación que utilizamos con regularidad en el aula de matemáticas con alumnos de educación secundaria. Nos referimos a la interpretación que realizamos de la comprensión matemática desplegada por Isabela, una alumna de primer curso de educación secundaria (12-13 años), en su intento por resolver una tarea escrita de divisibilidad de números naturales. En esta ocasión, este trabajo interpretativo lo realizamos en el marco de un programa educativo más amplio, destinado al fomento de la elaboración y análisis de protocolos escritos entre los alumnos del centro educativo donde también desempeñamos parte de nuestra labor profesional como docentes. Dicho programa tiene como objetivo general fomentar los aprendizajes con comprensión y las acciones concretas que se ponen en marcha para su consecución tienen, a su vez, como objetivos principales favorecer (a) la argumentación escrita en matemáticas, (b) la búsqueda de acuerdos en la interpretación y la evaluación conjunta de la actividad matemática y (c) la configuración de criterios para consolidar buenas interpretaciones en el aula. Isabela y sus compañeros participaron en este contexto de trabajo como alumnos propios mientras cursaban la asignatura de matemáticas que les impartimos. El estudio de caso que presentamos ejemplifica el tipo de actividad matemática que desarrollaron los estudiantes en su ambiente natural de aula, que involucraba la descripción y explicación de los procesos y resultados obtenidos durante la resolución, propia y ajena, de tareas matemáticas escritas.

4.2. *Tarea*

Parte de las tareas matemáticas incluidas en el programa de interpretación de protocolos, como la utilizada en el episodio de Isabela, son tareas escolares, convencionales y estereotipadas, extraídas de los libros de texto implantados en el centro educativo. Elegimos de forma intencionada este tipo de tareas con el propósito de asignar al libro de texto una utilidad didáctica alternativa y complementaria a la tradicional usualmente extendida. En esta ocasión, la tarea aritmética utilizada aparece incluida en la propuesta didáctica del libro de texto de Isabela para la enseñanza y el aprendizaje de la divisibilidad de números naturales:

Un granjero, tras recoger en una cesta su cosecha de huevos, piensa:

"Si los envaso por docenas, me sobran 5."

"Si tuviera uno más, podría envasarlos exactamente en cajas de 10."

"Casi he cogido 100."

¿Cuántos huevos tiene? (Colera y Gaztelu, 2011, p. 71)

De acuerdo con nuestro modelo interpretativo, se requiere un análisis fenómeno - epistemológico de la tarea que tomaremos como referencia previa para la aplicación de las dos primeras fases del círculo hermenéutico. En este caso, se trata de una tarea que pertenece a la esfera fenómeno - epistemológica de varios conocimientos matemáticos distintos, susceptibles de emplearse de manera relacionada durante el proceso de resolución. En concreto, la tarea admite diferentes vínculos situación - conocimiento con los conocimientos matemáticos principales incluidos en la tabla i.

TABLA I

Análisis fenómeno - epistemológico de la tarea

Conocimientos matemáticos	Concepto de división en su significado quotitivo.
	Elementos de la división: dividendo, divisor, cociente y resto.
	Concepto de divisibilidad.
	Conceptos de división entera y exacta.
	Idea de número próximo a 100 ("Casi he cogido 100").
	Idea de siguiente/anterior de un número ("Si tuviera uno más").
	Algoritmo estándar escrito para la división de números naturales (división entre 12 y entre 10). Uso de la calculadora como alternativa atractiva para el cálculo de las divisiones.
	Procedimiento de sumar 1 ("Si tuviera uno más").
	Criterio de divisibilidad por entre.
Relaciones	División entera – división exacta.
	Divisibilidad entre 10 – criterio asociado ("…podría envasarlos exactamente en cajas de 10").
	Relación divisor – resto ("Si los envaso por docenas, me sobran 5").
Estrategias heurísticas	Considerar las condiciones del enunciado en sentido inverso y argumentar desde el final.

Asimismo, la tarea también exige para su resolución establecer diferentes relaciones adicionales de estos conocimientos matemáticos básicos. Entre las fundamentales se encuentran la relación del concepto de divisibilidad y el criterio de divisibilidad entre 10, la relación entre división entera y exacta, y las distintas relaciones entre dividendo, divisor, cociente y resto. Finalmente, la resolución de la tarea requiere el empleo de estrategias heurísticas que permitan gestionar de forma simultánea las tres condiciones aritméticas impuestas por el enunciado. Un ejemplo de posible estrategia sería argumentar desde el final y considerar las condiciones en sentido inverso al presentado: un número próximo a 100 (condición 3) divisible entre 10 (condición 2), podría ser 70, 80 o 90. Restando 1 a cada uno de los tres números candidatos (condición 2), obtendríamos 69, 79 y 89, respectivamente. Al dividir cada uno de estos números entre 12, por ejemplo, con el algoritmo estándar escrito de la división, encontraríamos el resto 5 (condición 1) en el caso del número 89, siendo éste la solución del problema.

4.3. *Recogida y análisis de datos*

La actividad de interpretación asociada a este episodio concreto se inicia con la propuesta de resolución individual de la tarea a todos los alumnos del grupo - clase, entre los que se encuentra nuestra protagonista, y se incorpora a su procedimiento particular de resolución un protocolo explicativo de las principales estrategias y acciones realizadas en casa caso. La figura 4 muestra el producto escrito elaborado por Isabela.

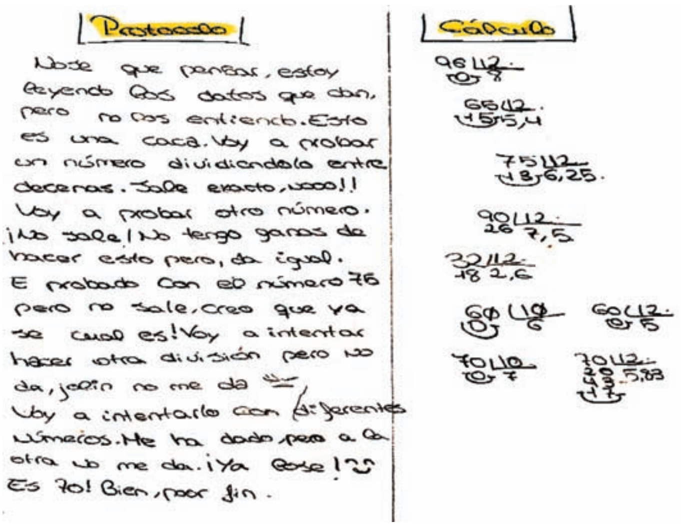

Figura 4. Registro escrito de Isabela en forma de protocolo

En una primera etapa interpretativa, aplicamos sucesivamente las fases semiótica y fenómeno - epistemológica del círculo hermenéutico sobre la propuesta de resolución con protocolo escrito que Isabela nos proporciona. En ella buscamos identificar rastros de la comprensión matemática desplegada y, con base en éstos, caracterizar los usos dados a los diferentes conocimientos matemáticos puestos en juego. Para esta labor utilizamos como referencia el análisis fenónemo - epistemológico previo aplicado sobre la tarea donde hemos caracterizado previamente diversos conocimientos matemáticos vinculados con la divisibilidad y sus posibles modos de uso en la resolución de la tarea (tabla i).

Con los resultados obtenidos en esta primera etapa, proseguimos con la fase dialógica del círculo hermenéutico correspondiente a la búsqueda de consentimiento con Isabela. Desarrollamos esta fase unos días después de la entrega de su respuesta escrita inicial. La conversación transcurre en un entorno distendido y de confianza mutua que propicia el discurso, la discusión y el intercambio crítico, favorecido por la cercanía y la complicidad que mantenemos a diario con la alumna, por el carácter democrático e igualitario de nuestra propuesta de trabajo en el aula de matemáticas y por la regularidad con la que aplicamos nuestro método interpretativo. Registramos en audio la discusión durante el desarrollo de esta fase. La transcripción posterior de la grabación resultante nos permite generar un nuevo registro escrito complementario al protocolo de resolución de la tarea que refleja las interacciones con Isabela en forma de diálogo textual. El producto final presenta en esta ocasión una extensión total de 83 entradas correspondientes a las distintas intervenciones realizadas durante esta fase. Los datos así recopilados se analizan tomando como referencia la estructura completa del propio círculo hermenéutico. En concreto, en el protocolo escrito y en cada entrada del registro escrito del diálogo buscamos posibles rastros significativos del proceder característico de cada uno de los planos hermenéuticos. Estos elementos nos permiten reconocer en cada momento el centro de atención variable de la alumna, las facetas de comprensión en las que pone el interés y los lugares hacia donde dirige la interpretación.

5. Resultados y discusión

5.1. *Textualización y rastros de comprensión en el registro escrito de Isabela*

El primer desafío que nos impone el círculo hermenéutico es el de identificar rastros de comprensión en el registro escrito que resulta de la textualización de la actividad matemática de la alumna (parte I). En este caso, el registro elaborado por Isabela como respuesta a la tarea incluye notaciones numéricas, cálculos aritméticos básicos y un texto explicativo (protocolo) del procedimiento seguido en la resolución (figura 4). Para ello, se requiere elaborar una descripción lo más detallada posible del proceso de resolución de la tarea, que refleje, entre otros aspectos, los registros ostensivos de los conocimientos matemáticos puestos en juego. Esta componente semiótica incluye términos y expresiones matemáticas, conceptos y definiciones, representaciones numéricas y simbólicas, procedimientos y propiedades empleadas por Isabela. También las posibles relaciones que establece entre los distintos registros y las estrategias heurísticas que utiliza durante la resolución.

En nuestra aproximación semiótica al registro escrito de Isabela observamos que ésta comienza la resolución de la tarea considerando simultáneamente la primera y la tercera condición del enunciado. La estrategia empleada consiste en buscar números próximos a 100 que al dividirlos entre 12 den de resto 5: "Voy a probar un número dividiéndolo entre decenas". Aquí comete el error, que consideramos fortuito, de denominar "decena" al número 12 del cociente de la división. Inicia la búsqueda con el 96 (número próximo a 100), lo divide entre 12 en apariencia con el algoritmo estándar escrito para la división de números naturales, se percata de que la división es exacta y finalmente descarta la posibilidad por no ser el resto 5.

Isabela prosigue la resolución realizando dos nuevos ensayos con los números 65 y 75. Observamos que en su estrategia de comprobación comienza a perder vigencia la tercera condición, dado que en esta ocasión ambos números se alejan del 100 de forma notable. Tras dividirlos entre 12 con el mismo algoritmo de la división, los desestima por no cumplir la primera condición. Respecto a la aplicación del algoritmo, apreciamos en este momento que la alumna no tiene en cuenta las llevadas al multiplicar y que también hay una falta reiterada de correspondencia entre el resto que resulta de la división entera (en la mayoría de los casos, un resto mayor que el cociente) y la obtención subsiguiente de decimales en el cociente. Estos errores bien podríamos catalogarlos como sistemáticos, puesto que afloran con estos dos números y también con algunos más de los siguientes, como el 90, el 32 o el 70. También es posible que las divisiones las haya realizado con ayuda de la calculadora, sin aplicar los pasos propios del algoritmo, tan sólo disponiendo los datos y resultados numéricos obtenidos según la forma usual del algoritmo. En cualquier caso, en un nuevo intento de búsqueda, Isabela cree haber encontrado la solución con el número 90: "Creo que ya sé cuál es". Sin embargo, tras una nueva comprobación del resto al dividir 90 entre 12 con el algoritmo de la división (de forma errónea), concluye una vez más que no cumple el primer requisito del enunciado del problema. Sigue persistiendo en su estrategia y prueba todavía con el número 32, un candidato distanciado ya del 100 de forma notoria. Parece que pronto también lo descarta por la misma razón que en los casos anteriores.

A partir de aquí, Isabela intenta incorporar a su estrategia de comprobación la segunda condición del enunciado de la tarea. Suponemos que esta vez elige los números 60 y 70 buscando garantizar primero una división exacta (resto 0) al dividir entre 10, para poder cumplir de este modo con el requisito "podría envasarlos exactamente en cajas de 10". Ambos números lo verifican. Sin embargo, no llega a reflexionar sobre la primera parte de la segunda condición: "Si tuviera uno más". En un primer momento, Isabela descarta el número 60 al acreditar que no cumple la primera condición. Al dividir 60 entre 12 no le sale resto 5, sino una división exacta: "Me ha dado, pero a la otra no me da". A continuación, finaliza la resolución proponiendo el número 70 como solución de la tarea. Es posible que esta conclusión la haya sustentado tan sólo en el hecho de no ser exacta la división 70 entre 12, sin tener en cuenta la exigencia del resto 5.

5.2. *Indicios de comprensión matemática con base en los conocimientos matemáticos utilizados por Isabela*

Isabela utiliza de manera relacionada distintos conocimientos matemáticos en su intento por resolver la tarea, que son empleados además de formas específicas a lo largo de la resolución. De acuerdo con nuestra propuesta interpretativa, el tipo de vinculación que establece entre estos conocimientos y la situación enfrentada, a través de sus usos particulares en ella, proporciona la primera información referencial acerca de su comprensión matemática en el episodio que estamos analizando (parte II). La aproximación semiótica descrita en la sección anterior nos ha permitido identificar rastros de comprensión significativos con los que caracterizar ahora los usos dados a los principales conocimientos matemáticos puestos en juego por la alumna durante la resolución de la tarea (tabla ii). Estos conocimientos incluyen, sobre todo, (a) conceptos vinculados con la divisibilidad de los números naturales, (b) el algoritmo estándar escrito para la división de números naturales, y (c) el heurístico consistente en la búsqueda de la solución mediante ensayo - error o tanteo delimitado y dirigido por las tres condiciones del enunciado, como estrategia de resolución.

TABLA II
Conocimientos matemáticos durante la resolución de la tarea de divisibilidad

Rastros de comprensión	Usos del conocimiento matemático
Divisibilidad de números naturales	
Realización de divisiones con divisores 12 y 10. Búsqueda de restos 5 y 0. Interpretación de restos y cocientes con decimales.	Conexiones fenómeno-epistemológicas: Envasar por docenas ≡ Dividir entre 12; Sobrar 5 ≡ Resto 5; Envasar en cajas de 10 ≡ Dividir entre 10; Exactamente ≡ Resto 0. El concepto de división. División entera y división exacta. Relación confusa.
Algoritmo estándar escrito para la división de números naturales	
Omisión en el algoritmo de las llevadas al multiplicar.	Aplicación no consolidada de la faceta técnica del algoritmo.
Estrategia de resolución	
Elección de números alejados de 100. El número 70 como solución de la tarea.	Vulnerabilidad en la aplicación de las condiciones del enunciado: posible relajación de la primera condición; aplicación parcial de la segunda condición; pérdida de relevancia de la tercera condición.

El proceso de resolución y la propuesta de solución para la tarea han estado determinados por los distintos usos, pertinentes y alterados, dados a estos conocimientos matemáticos. Caracterizar tales usos nos exige profundizar en las estrechas relaciones existentes entre el conocimiento conceptual, la destreza procedimental y la representación del problema evidenciados por Isabela. En lo que respecta a la divisibilidad de números naturales, la realización de sucesivas divisiones entre 12 y entre 10 junto con la búsqueda de los respectivos restos 5 y 0, evidencian conexiones de tipo fenómeno-epistemológico, a través de las equivalencias semióticas establecidas en la traducción del enunciado, entre la situación matemática y los conceptos de división y resto, vinculados ambos con la divisibilidad. Las consideramos muestras favorables de su comprensión de la división y el resto. Por otra parte, la interpretación de los restos por parte de Isabela también denota la incorporación del concepto de división entera a la resolución. Sin embargo, el uso que hace de esta división nos parece débil porque la división entera impone unos requerimientos matemáticos en su proceder (sobre todo, la determinación de un cociente entero y la consideración de un resto menor que el divisor) que no son suficientemente percibidos por la alumna. El uso de la división entera entra en conflicto además con la división exacta, que Isabela también utiliza al pretender calcular, tal vez con el apoyo complementario de una calculadora, unos cocientes más precisos con números decimales. Por todo ello, entendemos que los conceptos de división entera y exacta están presentes en la resolución, lo cual es un indicio favorable de su comprensión, aunque a través de un uso débil y confuso.

Sobre el algoritmo estándar escrito para la división de números naturales, Isabela proporciona indicios evidentes de un empleo técnico reiterado, centrado en el establecimiento de las relaciones externas usuales entre los elementos básicos del algoritmo que hacen posible recorrer el procedimiento establecido en el sentido apropiado (Gallardo y González, 2006; Gallardo, González y Quintanilla, 2013). En esencia, nos referimos al uso rutinario convencional del algoritmo como instrumento de cálculo aritmético elemental. No obstante, los errores cometidos en su aplicación, sobre todo el relativo a la omisión sistemática de las llevadas al multiplicar, ponen de manifiesto un uso no consolidado del procedimiento y una comprensión todavía incipiente de la faceta técnica del algoritmo.

Por último, la estrategia de resolución incorpora la aplicación de un heurístico que actúa como mecanismo de representación, gestión y control del procedimiento. El uso de este tipo de conocimiento es propio del quehacer matemático ordinario en las aulas y desde nuestro enfoque también lo consideramos indicador de la comprensión matemática de los alumnos. En el caso de Isabela, observamos que pretende someter sus posibles candidatos a solución a las condiciones iniciales del enunciado de una forma secuencial. Sin embargo, la aplicación de estas condiciones sufre distintas alteraciones a lo largo del proceso, lo que desemboca en una resolución errónea de la tarea. En concreto, nos parece que relaja la primera condición cuando propone el número 70 como solución definitiva, siempre omite el primer requerimiento impuesto por la segunda condición y ya desde el inicio resta protagonismo al cumplimiento de la tercera condición al ensayar con números alejados de 100. Todo ello pone de manifiesto que el uso dado al heurístico, aunque vinculado con la tarea y planificado de manera pertinente, evidencia sin embargo una cierta fragilidad en lo referente a la comprensiónde Isabela.

5.3. *Discurso hacia el consentimiento con Isabela y retorno a su comprensión matemática*

Con la caracterización de los usos dados a los conocimientos matemáticos puestos en juego durante la resolución de la tarea, detallada en la sección anterior, hemos obtenido una primera información sobre la comprensión matemática desplegada por Isabela en el episodio. Todavía quedan por dilucidar algunas cuestiones relativas a su desempeño en la tarea y al uso de los conocimientos matemáticos en ella que pueden aportar información complementaria sobre su comprensión. La evolución en la aplicación de las tres condiciones del enunciado, la no consideración del criterio de divisibilidad entre 10, la relación entre división entera y exacta, la idoneidad de la estrategia empleada y la pertinencia de la solución dada son los contenidos sobre los que centramos el discurso hacia el consentimiento. La discusión en torno a ellos define en esta ocasión la forma en la que queda finalmente completado el círculo hermenéutico de la comprensión matemática de Isabela de acuerdo con nuestros últimos planteamientos relativos al retorno a la comprensión matemática a través del consentimiento con el otro (parte III).

5.3.1. *Gestión simultánea de información aritmética diversa y uso del criterio de divisibilidad entre 10*

El primer foco de atención sobre el que buscamos consentimiento con Isabela está relacionado con el tratamiento dado a las tres condiciones del enunciado durante el proceso de resolución. Profundizamos en la relación que establece entre tales condiciones, en su orden de aplicación, y contrastamos el sentido de la vulnerabilidad apreciada con anterioridad al interpretar el registro escrito.

[1] Investigador:	¿Y las otras condiciones? Antes has dicho que los cogerías cercanos al 100, para cumplir esa condición [la tercera]. Pero, ¿y esta segunda condición?: Si tuviera uno más, podría envasarlos exactamente en cajas de 10.
[2] Isabela:	Pues, si da…. Si complace ésta y ésta [la primera y tercera condición], probaría con un número más a ver si complace la de aquí [la segunda condición].
[3] Investigador:	Pero primero tiene que cumplir la primera.
[4] Isabela:	Ajá.
[5] Investigador:	¿Y por qué probaste con el 65, si el 65 no es casi 100?
[6] Isabela:	Ya, pero por probar.
[7] Investigador:	Y aquí abajo con el 32. El 32 sí que no es casi 100, ¿no? ¿Por qué probarías con el 32? ¿Qué estarías buscando?
[8] Isabela:	Podría probar con el 99 y bueno….
[9] Investigador:	[Tras unos segundos en silencio] ¿Con el 99 no te convence?
[10] Isabela:	No, porque si tuviera un número más, sería 100 entre 12.
[11] Investigador:	Aquí dice: Si tuvieras uno más, podrías envasarlos exactamente en cajas de 10. Si tú tienes el 99 y le añades uno más, son 100. Y eso sí lo puedes empaquetar en cajas de 10. Aquí, algunas veces divides entre 10 y otras veces divides entre 12.
[12] Isabela:	Claro, para comprobar si… en cajas de 10 sobraba alguna. Puede ser, espera…

Tal como ya percibimos, la aplicación de la primera y la tercera condición precede en su estrategia a la consideración de la segunda condición (2-4). Ahora bien, el hecho de que no haya logrado aplicar esta segunda condición en su totalidad junto con la aparente pérdida de relevancia de la tercera condición (5-7, 10), parecen estar motivados por la dificultad que encuentra para gestionar al mismo tiempo las condiciones del enunciado. No podemos atribuirle entonces a Isabela la omisión, por olvido o indiferencia, de la primera parte de la segunda condición como consecuencia de algún tipo de carencia en su comprensión sobre la misma. Su intento al probar con el número 99 pone de manifiesto unas dificultades que tienen que ver más con su capacidad para aplicar una variedad de condiciones numéricas de forma simultánea (9-11). Por otra parte, este fragmento de discurso también nos aporta nuevas evidencias que muestran que Isabela no ha logrado establecer el vínculo fenomenológico entre la tarea, a través de la segunda condición del enunciado, y el criterio de divisibilidad por 10. La alumna prefiere dividir entre 10 con el algoritmo estándar escrito antes que emplear el correspondiente criterio de divisibilidad, especialmente recomendable en este caso por su facilidad de uso (12). Desde nuestra perspectiva, interpretamos esta circunstancia como una evidencia desfavorable de su comprensión acerca del criterio de divisibilidad entre 10.

5.3.2. *Incompatibilidad de las divisiones entera y exacta*

En la interpretación del registro escrito de Isabela ya nos percatamos de la presencia de la división entera y la división exacta durante la resolución de la tarea. Sin embargo, con su uso no quedó del todo clara la relación concebida y establecida por la alumna entre las dos divisiones; ni tan siquiera si ella fue del todo consciente de la diferencia entre ambas. El consentimiento en torno a esta cuestión se manifiesta ahora a través del fragmento en el que Isabela prueba a dividir, como nueva opción posible, el número 99 entre 12.

[13] Investigador:	¿Ahora qué estás haciendo, dividiendo?
[14] Isabela:	Sí, 99 entre 12, a ver… [Tras unos segundos trabajando en silencio] Sacaría 4, sobraría 51, …. Bueno, sacaría decimales.
[15] Investigador:	Puedes seguir dividiendo. 51 lo puedes dividir entre 12, ¿no?
[16] Isabela:	Pero saldría decimales.

Esta nueva evidencia nos ayuda a esclarecer la relación que Isabela aprecia entre las divisiones entera y exacta. A través de ella nos percatamos de que no sólo las diferencia, sino que además les atribuye una cierta relación de incompatibilidad. En efecto, la búsqueda de un resto, vinculada a la división entera, que en este caso es 51 y no 5 porque tampoco vislumbra la posibilidad de seguir dividiendo de forma entera (14-15), le resulta incompatible con la opción de extraer decimales, una circunstancia que es más propia de la división exacta (16). Es decir, lo que nos dice Isabela lo interpretamos del siguiente modo: si al dividir se calculan cocientes con decimales (división exacta), no se puede obtener como resto 5 (división entera).

5.3.3. *Solidez de la estrategia empleada, delimitación de posibilidades y pertinencia de la solución dada*

El discurso con Isabela nos permite interpretar la solidez de su estrategia de resolución, no sólo desde un punto de vista matemático, sino también en términos de convencimiento sobre su idoneidad y convicción al momento de aplicarla.

[17] Investigador: ¿Utilizaste una buena estrategia?
[18] Isabela: Hombre no, porque viendo los "destos" [en referencia a los restos], pues ya puedo descartar esos números y probar con otros más aproximados y a ver qué da.
[19] Investigador: Tú mantendrías la estrategia de seguir probando con números para que dé resto 5, ¿no?
[20] Isabela: Claro.
[21] Investigador: ¿Qué harías?
[22] Isabela: Bueeeno. Es que hasta que 5…. Es que es mucho lío.
[23] Investigador: Tampoco hay tantos números. ¿O piensas que hay muchos números?
[24] Isabela: Bueeeno. No, porque si es cercano a 100, sería de 80 para arriba.
[25] Investigador: De 80 para arriba. Entonces 20 números tan sólo, ¿no?
[26] Isabela: Sí.

Este fragmento revela la confianza que tiene Isabela en su estrategia, a pesar de los resultados negativos obtenidos hasta ahora con los dividendos contrastados y sus restos asociados. Su confianza se refleja en la decisión de mantener la estrategia (19-20), al entender que todavía tiene margen para seguir probando (18). Asimismo, observamos cómo modifica incluso su percepción inicial sobre la dificultad que supondría prolongar sus ensayos con otros números. Al final, llegamos a reconocer con ella una delimitación de posibilidades que consigue que el desafío se le muestre más factible (22-26). Todas estas circunstancias favorables para la resolución de la tarea vienen acompañadas además de una nueva reflexión conjunta, también con efectos positivos, sobre la pertinencia de la solución.

[27] Investigador: Y ya para terminar, ¿podrías explicar el porqué del 70?
[28] Isabela: Porque primero yo creo que hice éste, 70 entre 12, que dio 17 de resto. Y después ver si con un número más, podría envasarlo exactamente en 10 cajas.

[29] Investigador:	Pero un número más es 71, no es 70.
[30] Isabela:	Sí. Yo qué sé. No sé ni lo que he hecho. ¡Me habría liado!
[31] Investigador:	Creo que no solamente te has dado cuenta de que está mal, sino que tienes una buena estrategia para resolverlo, ¿no? Con un poco de paciencia, poniéndote tranquilamente a dividir como has dicho antes.
[32] Isabela:	Claro.
[33] Investigador:	Bueno, eso es una ventaja ¿no te parece? Es un avance respecto a lo que hiciste.
[34] Isabela:	O si no, hoy en mi casa lo intento resolver.

En este punto de la discusión, Isabela admite de una forma más explícita la aplicación inadecuada de las condiciones del enunciado y pone de manifiesto una vez más sus dificultades para relacionar y utilizar información aritmética diversa suministrada de forma simultánea (28-30). En cualquier caso, todas las puntualizaciones, modificaciones y rectificaciones producidas en esta fase de la interpretación han sido fruto de una discusión consensuada que concluye con el convencimiento compartido con Isabela de poseer una estrategia reforzada y mejorada que la sitúa en una situación propicia y prometedora para resolver la tarea de divisibilidad de números naturales (31-34). De esta forma particular es como queda materializada en esta ocasión el consentimiento con Isabela.

5.3.4. *El retorno a la comprensión matemática de Isabela*

A partir del registro escrito elaborado por Isabela, en las anteriores fases sucesivas, semiótica y fenómeno-epistemológica, hemos sido capaces de delimitar y caracterizar los usos, pertinentes y alterados, dados por ella a determinados conocimientos matemáticos específicos durante la resolución de la tarea. A continuación, en la fase dialógica de consentimiento hemos conseguido contrastar y consensuar con ella algunos de estos usos y abierto la posibilidad de reconducir su estrategia con la incorporación de nuevos usos a la resolución. Esta fase nos ha permitido además evidenciar una evolución en la toma de consciencia de Isabela respecto a la validez matemática de su razonamiento. Todo este esfuerzo interpretativo es el que nos ha permitido compartir los distintos usos, al reconocerlos, caracterizarlos y aceptarlos como tales conjuntamente con la alumna. De este modo, transitamos desde una producción matemática personal hacia un saber compartido por consentimiento que ofrece garantías de racionalidad y certidumbre matemática. Finalmente, es a través de la apropiación de todos estos usos, en la forma particular acontecida en este episodio, como accedemos o retornamos en última instancia a la comprensión que posee Isabela sobre los conocimientos matemáticos empleados en la tarea.

6. Conclusión

Nos hemos enfrentado al reto fundamental de acceder a la comprensión matemática de una estudiante al intentar resolver una tarea de divisibilidad de números naturales. Para ello, hemos llevado a cabo una interpretación multifacética de su comprensión tomando como referencia distintos rastros visibles, provenientes de los planos semiótico, fenómeno - epistemológico y dialógico del círculo hermenéutico. Este círculo lo presentamos como un método integrador, por cuanto en él se ven reflejadas distintas orientaciones de la interpretación en matemáticas. En primer lugar, reconocemos la especificidad de la actividad cognitiva requerida para comprender los conocimientos matemáticos, lo que la hace diferente a la implicada en otros aprendizajes (Duval, 1996). También prestamos atención al estudio de lo que comprenden los sujetos y cómo lo comprenden, tratándose por ello de una aproximación positiva a la comprensión, en la que la especificidad del propio conocimiento matemático desempeña un papel esencial (Sierpinska, 1994).

En el plano semiótico, buscamos textualizar en diferentes sistemas de representación semiótica las diversas evidencias observables de la actividad matemática. Más que proponer un análisis cognitivo en términos de registros en el sentido sugerido por Duval (1996, 2006), otorgamos al registro un carácter exclusivamente externo. En el plano fenómeno - epistemológico, no pretendemos acceder a las vivencias internas que originan las acciones del estudiante, ni tan siquiera mediante métodos fenomenológicos de introspección guiada, como el que proponen Drouhard *et al.* (2011). Planteamos la interpretación de la comprensión en términos de usos del conocimiento matemático, considerados objetos no mentales y al mismo tiempo no ostensivos (Bosch y Chevallard, 1999), que actúan como referencia de la actividad matemática del estudiante más allá del registro escrito matemático. También consideramos que los planos semiótico y fenómeno - epistemológico de nuestra propuesta son compatibles con otras opciones (Godino, 2002; Font *et al.,* 2013) que plantean interpretar la comprensión con base en estrategias y procedimientos de valoración multifacética basados en el análisis del conocimiento matemático. En el plano dialógico, ponemos de relieve el protagonismo del otro en la interpretación de su propia comprensión a través del consentimiento.

La labor interpretativa aquí la percibimos próxima al enfoque de Radford (2006, 2014), como forma social de acción conjunta que garantiza de manera simultánea el acceso a la comprensión ajena, en forma de reencuentro con el otro, y la transformación continua de quien interpreta. Finalmente, con nuestra propuesta perseguimos reducir riesgos en la interpretación cuando transitamos entre los ámbitos externo e interno de la comprensión. Lo hacemos presentando la interpretación como un ejercicio de curiosidad hacia el otro y asombro desinteresado por sus acciones y producciones, en un proceso dirigido por una pretensión de reciprocidad y equidad (Brown, 2008; Morgan y Watson, 2002).

En el futuro, valoramos la posibilidad de utilizar el círculo hermenéutico para establecer diferencias entre las interpretaciones de los escolares y apreciar la idoneidad de cada una de ellas en función de su correspondencia con lo fijado por el propio círculo. Nos planteamos emplearlo también como referencia para hacer transitar a los alumnos desde sus modos idiosincrásicos de interpretar hasta el método interpretativo propuesto. Pensamos que haciendo explícito el método sugerido por el círculo podremos ayudar a los estudiantes a transformar el suyo propio y transitar hacia formas más operativas y efectivas de acceder a la comprensión matemática del otro. Nos planteamos además la interpretación a través del círculo como una vía para desarrollar la comprensión matemática propia y garantizar la obtención de nuevos aprendizajes de calidad. En definitiva, buscamos evidenciar que la interpretación de los escolares podría mejorar si los planos se conectan de forma cíclica y se organizan siguiendo la estructura del círculo hermenéutico de la comprensión en matemáticas.

Referencias bibliográficas

Barmby, P., Harries, T., Higgins, S. y Suggate, J. (2007). How can we assess mathematical understanding? En J. H. Woo, H. C. Lew, K. S. Park y D. Y. Seo (Eds.), *Proceedings of the 31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 41-48). Seoul, South Korea: PME.

Bosch, M. y Chevallard, Y. (1999). La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *19*(1), 77-124.

Brown, T. (2001). *Mathematics education and language. Interpreting hermeneutics and post-structuralism*. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers. https://doi.org/10.1007/978-94-010-0726-9

Brown, T. (2003). Making Mathematics Inclusive: Interpreting the Meaning of Classroom Activity. *Waikato Journal of Education*, *9*,113-128.

Colera, J. y Gaztelu, I. (2011). *Matemáticas 1. Educación Secundaria*. Madrid, España: Anaya.

Drouhard, J-Ph., Maurel, M. y Sackur, C. (2011). La souffrance à l'école. Le cas des mathématiques: souffrance ou plaisir et liberté? *Les Collectifs du Cirp*, *2*, 294-310.

Duval, R. (1996). Quel cognitif retenir en didactique des mathématiques? *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *16*(3), 349-382.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *61*(1/2), 103-131. https://doi.org/10.1007/s10649-006-0400-z

Font, V., Godino, J. D. y D'Amore, B. (2007). An onto-semiotic approach to representations in Mathematics Education. *For the Learning of Mathematics*, *27*(2), 2-9.

Font, V., Godino, J. D. y Gallardo, J. (2013). The emergence of objects from mathematical practices. *Educational Studies in Mathematics*, *82*(1), 97-124. https://doi.org/10.1007/s10649-012-9411-0

Gallardo, J. y González, J. L. (2006). Assessing understanding in mathematics: steps towards an operative model. *For the Learning of Mathematics, 26*(2), 10-15.

Gallardo, J. y Quintanilla, V. A. (2016). El consentimiento con el otro en la interpretación de la comprensión en matemáticas. *BOLEMA: Boletim de Educação Matemática*, *30*(55), 625-648. http://dx.doi.org/00.1590/1980-4415v30n55a16

Gallardo, J., González, J. L. y Quintanilla, V. A. (2013). Tareas, textos y usos del conocimiento matemático: aportes a la interpretación de la comprensión desde el cálculo aritmético elemental. *Educación Matemática*, *25*(2), 61-88.

Gallardo, J., González, J. L. y Quintanilla, V. A. (2014). Sobre la valoración de la competencia matemática: claves para transitar hacia un enfoque interpretativo. *Enseñanza de las Ciencias, 32*(3), 319-336. http://dx.doi.org/ 10.5565/rev/ensciencias.1158

Gallardo, J., González, J. L. y Quispe, W. (2008). Interpretando la comprensión matemática en escenarios básicos de valoración. Un estudio sobre las interferencias en el uso de los significados de la fracción. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *11*(3), 355-382.

Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *22*(2/3), 237-284.

Goldin, G. (2002). Representation in mathematical learning and problem solving. En L. D. English (Ed.), *Handbook of international research in Mathematics Education* (pp. 197-218). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Hiebert, J. y Carpenter, T. P. (1992). Learning and teaching with understanding. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 65-97). New York: MacMillan Publishing Company.

Morgan, C. (2014). Understanding practices in mathematics education: structure and text. *Educational Studies in Mathematics*, *87*(2), 129-143. https://doi.org/10.1007/s10649-013-9482-6

Morgan, C. y Watson, A. (2002). The interpretive nature of teacher's assessment of students' mathematics: issues for equity. *Journal for Research in Mathematics Education*, *33*(2), 78-111. https://doi.org/10.2307/749645

Otte, M. (2006). Proof and explanation from a semiotic point of view. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *9*(4), 23-43.

Radford, L. (2006). Elementos de una teoría cultural de la objetivación. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *9*(4), 103-129.

Radford, L. (2014). Towards an embodied, cultural, and material conception of mathematics cognition. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education*, *46*(3), 349-361. https://doi.org/10.1007/s11858-014-0591-1

Rico, L. (2009). Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en Educación Matemática. *PNA*, *4*(1), 1-14.

Sáenz-Ludlow, A. y Zellweger, S. (2012). The teaching-learning of mathematics as a double process of intra - and inter - interpretation: A peircean perspective. En S. J. Cho (Ed.), *The 12th International Congress on Mathematical Education ICME* (pp. 3117-3126). Seoul, South Korea: ICME.

Sierpinska, A. (1994). *Understanding in mathematics*. London: The Falmer Press.

Autores

Jesús Gallardo Romero. Universidad de Málaga, España. gallardoromero@uma.es

Verónica Aurora Quintanilla Batallanos. Universidad de Málaga, España. veronicaquintanilla@uma.es

La Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (*Relime*) es la publicación oficial de investigación del Comité Latinoamericano de Matemática Educativa (Clame AC). Se edita tres veces por año. Acepta artículos en español, portugués, inglés y francés. Está dirigida a investigadores en Matemática Educativa, a profesores de matemáticas y ciencias, y estudiantes de licenciatura y posgrado interesados en conocer los resultados recientes de las investigaciones y en profundizar en el conocimiento de un tema en particular.

Objetivos:

1. *Relime* pretende ser un foro abierto a las diversas escuelas del pensamiento (paradigmas, teorías, metodologías, métodos, enfoques) en nuestra disciplina, la Matemática Educativa, sin definir perspectivas únicas y con un profundo respeto a las tradiciones educativas y los contextos de los diversos sistemas educativos de nuestra región.
2. Dar a conocer resultados de investigación original en Matemática Educativa que se realizan en América Latina y el Caribe y en el resto del mundo.
3. Contribuir al proceso de profesionalización de la Matemática Educativa en nuestra región.
4. Fomentar una cultura de divulgación e investigación entre los distintos grupos de investigación en nuestra región.
5. Propiciar el debate y la reflexión profunda sobre problemas de investigación que fortalezca la disciplina en nuestra área geográfica.
6. Fortalecer la calidad de la investigación en Matemática Educativa y la vinculación entre comunidades nacionales e internacionales.

INSTRUCCIONES TÉCNICAS PARA AUTORES

LAS CONTRIBUCIONES

Toda contribución propuesta a Relime se somete a un estricto proceso de arbitraje. Las contribuciones deberán ser resultado de investigaciones teóricas o experimentales, estudios de caso, etnográficos, etc., en formato de artículo. Estas contribuciones deberán ser trabajos inéditos de investigación, no estar en arbitraje en otra revista ni tratarse de traducciones previamente publicadas en su lengua original.

Características de los manuscritos

Relime publica artículos en castellano, portugués, inglés y francés. Acepta ensayos teóricos originales así como propuestas que sean resultado de estudios experimentales, de casos, de observación, etnográficos, etc.

Los artículos deberán tener un máximo de nueve mil palabras, incluyendo referencias, figuras, cuadros y anexos. En caso de que su propuesta exceda esta extensión, el Comité de Redacción decide si considera la posibilidad de publicarlo siempre que tal propuesta no ocupe todo el espacio disponible en un número de la revista.

En el caso de reportes de estudios experimentales, de casos, de observación, etnográficos, etcétera, recomendamos que los escritos contengan:

1) Resumen del trabajo, deberá tener un máximo de 10 renglones escrito en español, portugués, inglés y francés y de 5 palabras clave en las cuatro lenguas. Resumen, título y palabras clave deben ser escritos en los cuatro idiomas.
2) Una exposición del problema de investigación (su pertinencia y relevancia en el tema que se aborda).
3) Indicaciones globales acerca de la estructura teórica del reporte.
4) Justificación de la metodología usada.
5) Desarrollo de algunos ejemplos y análisis de resultados.
6) Referencias bibliográficas.

Si se trata de ensayos teóricos y filosóficos, nuestra recomendación es la siguiente:

1) Iniciar con una exposición del problema de investigación (su pertinencia y relevancia en el tema que se aborda).
2) Revisión de la literatura que incluya trabajos importantes que sustenten la investigación, en el que se refleje una variedad de resultados actuales. Esta revisión debe incluir investigaciones internacionales pertinentes y no limitarse a estudios de un solo país.
3) Ofrecer indicaciones sobre la estructura teórica o filosófica en la cual se desarrolla el tema del artículo.
4) Exposición detallada de la posición del autor dentro del tema o los temas de exposición. Esto debe reflejarse a través del desarrollo de ideas, más que de una lista de reflexiones.

5) Implicaciones o consecuencias de la investigación en el área.
6) Referencias bibliográficas.

PROCESO DE EVALUACIÓN EN RELIME

Los artículos propuestos a Relime serán leídos por dos miembros del Comité de Redacción, y si el contenido atiende a la originalidad y satisface los criterios anteriores, así como a la claridad de la presentación e interés para la comunidad de matemática educativa, serán evaluados en forma "ciega" por dos investigadores reconocidos y con experiencia dentro del área. En el proceso de evaluación se garantizará el anonimato de autores y evaluadores.

El resultado del dictamen puede ser:

A. Sugerencia de publicar el artículo sin modificaciones.
B. Sugerencia de publicar el artículo bajo reserva de hacer ligeras modificaciones.
C. Sugerencia de reestructurar el artículo atendiendo a los comentarios, lo que precisaría una nueva revisión.
D. Sugerencia de rechazo del artículo.

FORMATO DE LAS CONTRIBUCIONES

Todas las contribuciones deberán estar escritas en procesador de texto Word 6.0 o superior, tipo de letra Times New Roman, tamaño 11 y utilizar un espacio anterior y posterior de 4 pt, lo que significa que no se requiere dar espacio entre un párrafo y otro. Los cuatro márgenes de la página deberán ser de 2.5 cm. Para las expresiones matemáticas debe usarse el editor de ecuaciones.

ENCABEZADOS PRINCIPALES

El estilo de letra para los encabezados principales es tipo VERSALES en formato minúsculas, utilizando un espacio anterior de 36pt y el posterior de 12pt, lo que significa que no se requiere dar espacio entre un encabezado y los párrafos subsecuentes. Enumerar las secciones de los encabezados principales (usando 1, 2, 3, etc.) y utilizar el estilo de alineación centrada.

Subtítulos

El estilo de letra para los subtítulos del artículo es tipo Times New Roman, tamaño 11 y cursiva. La primera letra debe escribirse con mayúsculas. Utilizar un espacio anterior de 24 pt y el posterior de 10 pt, lo que significa que no se requiere dar espacio entre un subtítulo y los párrafos subsecuentes. Los subtítulos deberán enumerarse 1.1., 1.2, 1.3, etc., según corresponda en estilo tipo Normal. Los subtítulos posteriores a un encabezado principal deben tener un espacio anterior y posterior de 6 pts.

Estilo para las tablas

Las tablas deben tener una alineación centrada. El estilo de letra del texto en el interior de la tabla debe ser tipo Times New Roman, Normal, tamaño 10 y con un espacio anterior y posterior de 2 pto. Enumerar las tablas, usando tipo de letra VERSALES tamaño 10, en formato minúscula: TABLA I, TABLA II, TABLA III, etc., utilizando un espacio anterior de 6 pto y posterior de 0 pto. El número de la tabla debe escribirse en la parte superior y su título debajo, utilizando un estilo de alineación centrada y tipo de letra normal tamaño 10.

Estilo para las figuras e imágenes

Las figuras e imágenes deben tener una alineación centrada. El estilo de letra debe ser tipo Times New Roman, tamaño 10 y tipo Cursiva y Normal. Escribir el número de la figura o imagen en formato tipo cursiva y el título en formato tipo normal. Utilizar un espacio anterior de 2 pt y el posterior de 4 pt. Las imágenes y figuras deberán adjuntarse en un archivo independiente al manuscrito en formato de alta resolución.

Transcripciones

Para las transcripciones usar el estilo de letra normal, tipo Times New Roman tamaño 10. Utilizar un interlineado sencillo.

Usar estilos de transcripción como los siguientes:

Estudiante: Para graficar utilicé uno de los métodos que vimos en clase. Me pareció que era el más simple para resolverlo

Profesor: ¿Por qué consideras que ese método es más simple?

Si las líneas de la transcripción requieren ser numerados, entonces usar el estilo de transcripción enumerada como sigue:

[122] Entrevistador: En la primera actividad se te propuso determinar la función velocidad ¿Podrías explicar cómo la hallaste?

[123] Alumno: Hum... pues...

En el caso de que no se requiera hacer referencia a los números, se sugiere usar el primer estilo de transcripción (indicada párrafos arriba).

Reconocimientos

Los reconocimientos a personas, fondos, asociaciones, etc. deberán colocarse en una sección separada antes de las referencias bibliográficas. Los nombres de organizaciones financieras deberán escribirse completos.

Bibliografía, referencias y notas

Solicitamos emplear el estilo de la APA (Publication Manual of the American Psychological Association, 6th ed., 2009) para las citas de pie, notas, referencias textuales y bibliografía. (Pueden apoyarse en el siguiente link: http://www.apastyle.org/learn/tutorials/basics-tutorial.aspx; o bien, consultar el Manual).

La bibliografía deberá escribirse en forma de lista sin enumerar y en orden cronológico. El estilo de letra debe ser Times New Roman 9. Para escribir una referencia debe usarse alineación justificada para el primer renglón. A partir del segundo renglón deberán establecer una sangría especial de 0.63 cm.

Las notas deberán escribirse al final de cada página del documento. El estilo de letra que deberá usarse es Times New Roman 9 en formato normal.

Información complementaria

1) No se devolverán los artículos originales.
2) El editor se reserva el derecho de hacer algunas modificaciones necesarias para mantener el estilo de la publicación.
3) Los textos pueden ser publicados en otro órgano editorial previo permiso expreso, por escrito, y haciendo referencia explícita de la fuente.
4) Los autores recibirán gratuitamente dos ejemplares del número en que se haya publicado su artículo.
5) No se realizarán pagos a los autores por los artículos que se publiquen en *RELIME*. Para mayores informes, puede visitar la página web: http://www.clame.org.mx/relime.htm o bien el correo electrónico:

relime@clame.org.mx

Suscripción a Relime

Costo del volumen 22 (tres números)

Suscripción Institucional:
Volumen US$ 120
Cada número US$ 50

Suscripción Individual:
Volumen US$ 50
Cada número US$ 20

Suscripción Miembros Clame:
Volumen US$ 20
Cada número US$ 10

Estos costos NO aplican a *números especiales*,
NO incluyen gastos de envío, NI comisión bancaria por transferencias
o depósitos de cheques emitidos fuera de México

Las suscripciones deberán solicitarse al correo electrónico
suscripcion@relime.org

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa

Volumen 22, Número 1

Diseño y Web: Emilio Serna Hernández
Servicios Editoriales Recrea
(Miembro CANIEM - 3663)
sernandem@yahoo.com.mx

Se imprimió en los talleres de
Editorial Progreso S.A. de C.V.
Sabino # 275
Col. Santa María la Ribera
Delegación Cuauhtémoc
06400, México, CDMX

Marzo de 2019
Tiraje: 1000 ejemplares más sobrantes