ISSN 1665-2436

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa

Relime

Clame Comité Latinoamericano de Matemática Educativa

Vol. 22, Núm. 2, 2019

Publicación oficial de investigación del Comité Latinoamericano de Matemática Educativa

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa

Vol. 22, Núm. 2, julio 2019

EDITORIAL

ARTÍCULOS

RELIME 22-2

9 771665 243002 02202

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa

Departamento de Matemática Educativa – Cinvestav
AP 14-740, México 07000, CDMX
M É X I C O

Coordinación técnica: Martha Maldonado Rosales
Revisión de estilo: Rosalba Carrillo Fuentes
Formación y diseño: Emilio Serna Hernández
Portada: «Opus 1» de Oscar Reutersvärd en 1934. Reproducida con permiso de los herederos del artista.

Publicación oficial de investigación del Comité Latinoamericano de Matemática Educativa, Clame A.C. Consejo Directivo: *Presidente:* Olga Lidia Pérez González – Cuba; *Secretario:* Hugo Parra Sandoval – Venezuela; *Tesorera:* Daniela Reyes Gasperini – Argentina; *Vocal Norteamérica:* Rebeca Flores García – México; *Vocal Caribe:* Juan Mazueta Concepción – República Dominicana; *Vocal Centroamérica:* Rodolfo Fallas Soto – Costa Rica*; Vocal Sudamérica:* Marcela Parraguez González – Chile.

Publicación cuatrimestral. Se publica en los meses de marzo, julio y noviembre. Vol. 22, Núm. 2, julio, 2019. Tiraje 1,000 ejemplares. Suscripciones: suscripcion@relime.org. Contribuciones e información: relime@clame.org.mx, http://www.clame.org.mx.

Relime es una revista indizada en:
ISI Web of Knowledge, SSCI – Social Sciences Citation Index y Journal Citation Reports • ERIH – European Reference Index for the Humanities • Conacyt – Índice de Revistas Mexicanas de Investigación Científica y Tecnológica • Scopus – Elsevier Database • ZDM – Zentralblatt für Didaktik der Mathematik • IBZ – International Bibliography of Periodical Literature in the Humanities and Social Sciences • Clase – Citas Latinoamericanas en Ciencias Sociales y Humanidades • Iresie – Índice de Revistas de Educación Superior e Investigación Educativa • Latindex – Sistema Regional de Información en Línea para Revistas Científicas de América Latina, el Caribe, España y Portugal • Redalyc – Red de Revistas Científicas de América Latina y el Caribe, España y Portugal • EBSCO – Information Services • Dialnet • Scielo-México – Scientific Electronic Library Online • Thomson Gale – Gale Iberoamérica.

2019 Impreso en México

Volumen 22 – Número 2 – 2019

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa

Publicación oficial del Comité Latinoamericano de Matemática Educativa

Volumen 22 Número 2 Julio de 2019

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa

EDITORIAL

ARTÍCULOS

REVISTA LATINOAMERICANA DE INVESTIGACIÓN EN MATEMÁTICA EDUCATIVA, RELIME, es la publicación de investigación oficial del Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C. Editada por el Colegio Mexicano de Matemática Educativa, A. C., calle Av. Instituto Politécnico Nacional, 2508, Col. San Pedro Zacatenco, Delegación Gustavo A. Madero, C.P. 07360, Tel. (55) 57473819, www.relime.org, relime@clame.org.mx. Director responsable: Ricardo Cantoral.

Reservas de Derechos al Uso Exclusivo, No. 04-2016-110914351000-102, con ISSN: 1665-2436, para el formato impreso; y No. 04-2016-110413025500-203, con e-ISSN: 2007-6819, para el formato digital; otorgados por el Instituto Nacional del Derecho de Autor. Derechos Reservados © Colegio Mexicano de Matemática Educativa, A. C. RFC: CMM 040505 IC7. Publicación cuatrimestral. Se publica en los meses de marzo, julio y noviembre, con el financiamiento del Clame. El Volumen 22, Número 2, se terminó de imprimir en julio de 2019, con un tiraje de 1,000 ejemplares más sobrantes.

Impresa por Editorial Progreso, S. A. de C. V., Sabino No. 275, Col. Sta. María la Ribera, C.P. 06400, Delegación Cuauhtémoc, México, CDMX.

EDITORIAL

¿QUÉ SABEMOS DE LOS LECTORES DE RELIME?

What we know about RELIME readers?

RICARDO CANTORAL, DANIELA REYES-GASPERINI,
BENITO CASTRO PÉREZ, DIANA WENDOLYNE RÍOS JARQUÍN
Departamento de Matemática Educativa - Cinvestav, IPN México
(*Programa Interdisciplinario para el Desarrollo Profesional Docente en Matemáticas* - PIDPDM)

Compartimos en (Cantoral, Reyes Gasperini, Ríos Jarquín, & Castro Pérez, 2019), aspectos de la evolución de la *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*: construcción, desarrollo y consolidación. Estos deben considerarse aún en proceso pues *Relime*, en tanto que es producto de la comunidad y de su diálogo, crece, se legitima y consolida progresivamente.

Adicionalmente hicimos explícito que el impacto de la investigación científica tiene distintas dimensiones: institucional, disciplinar y social. Las dos primeras están profundamente documentadas en el mundo editorial debido a la influencia de indicadores como el IF - *Impact Factor* y el iH - *Índice H* que funcionan como sistemas de medición.

En *Relime* nos ha interesado desde el principio, saber quiénes nos leen, desde dónde lo hacen y en qué medida las publicaciones de la revista contribuyen a la transformación educativa en sus distintas facetas; sin embargo, no siempre han existido herramientas para recabar este tipo de información. En ese sentido, el ingreso de la revista al entorno digital (Montiel, 2017), si bien ha planteado nuevos desafíos para las revistas con "racionalidad de la publicación impresa", también provee de interesantes herramientas de medición del uso de las publicaciones más allá de la cita misma y de la información que proporcionan las bases de datos.

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (2019) *22* (2): 133 - 138.
DOI: 10.12802/relime.19.2220

De esa manera y como resultado de los fenómenos actuales en la publicación académica, y en palabras de Vitela Caraveo (2017): *Para evitar caer en la "impactolatría" se debe ampliar el panorama, por lo que es necesario armar sistemas multicriterio que consideren indicadores que combinen la recogida de evidencias cuantitativas con el análisis cualitativo.* (p.12)

Por esta razón analizamos datos provenientes exclusivamente del sitio web de *Relime,* para recolectar información del tráfico que llega al sitio, los usuarios, su comportamiento, entre otros datos, utilizando para ella un recurso de analítica web: Google Analytics.

Los resultados que se muestran en la Figura 1 abarcan el periodo del primer semestre del año actual, es decir, del 01 de enero al 30 de junio de 2019. Dentro de ellos podemos encontrar los siguientes aspectos:

La cantidad de "usuarios únicos" que visitan el sitio de *Relime* se ha incrementado casi sistemáticamente entre los meses de enero a junio, durante el mes de mayo se llegó al punto más alto que corresponde a 996 usuarios, los cuales han visitado 51,611 páginas (número actual, instrucciones para envío, suscripciones, números anteriores, entre otras). El promedio de permanencia en el sitio es de 49 segundos, mientras que el porcentaje de rebote es de 1.65%, esto quiere decir que, de cada 100 usuarios que llegan al sitio web entre 1 y 2 abandonan la página inmediatamente, ya sea porque entraron por error o simplemente porque no era lo que estaban buscando. El resto de los usuarios permanece casi un minuto navegando dentro del sitio web.

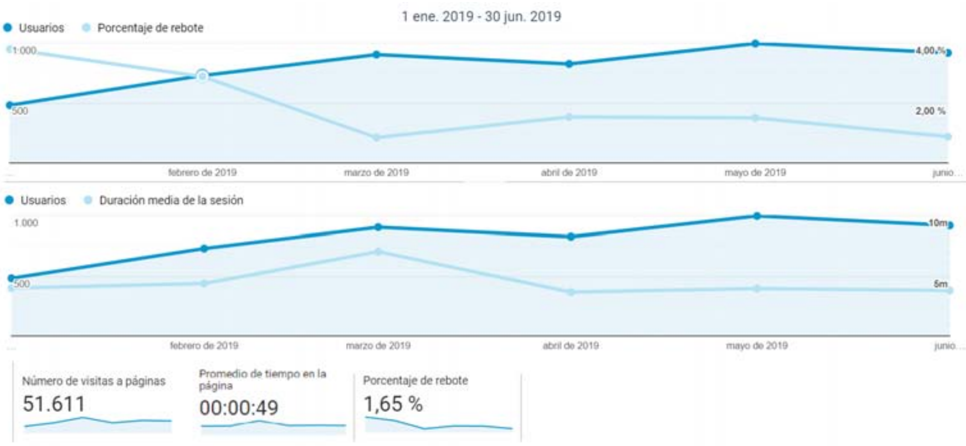


Figura 1. Reporte Google Analytics (enero-junio 2019).

En la Figura 2 se encuentra el reporte de procedencia de los 20 principales países que aportan visitantes al sitio web de *Relime*. Se identificaron usuarios de tres continentes y, con base en ello, nos preguntamos: ¿tendrá *Relime* lectores en Asia?, de ser así, la revista estaría cumpliendo con uno de sus diversos propósitos iniciales que ha sido el de ampliar la visibilidad de la investigación en Matemática Educativa que se produce en nuestra región. Asimismo, se puede observar que las consultas provienen en su mayoría del continente americano, lo cual indica que *Relime* se ha convertido en referente dentro de la disciplina en esta región del orbe.

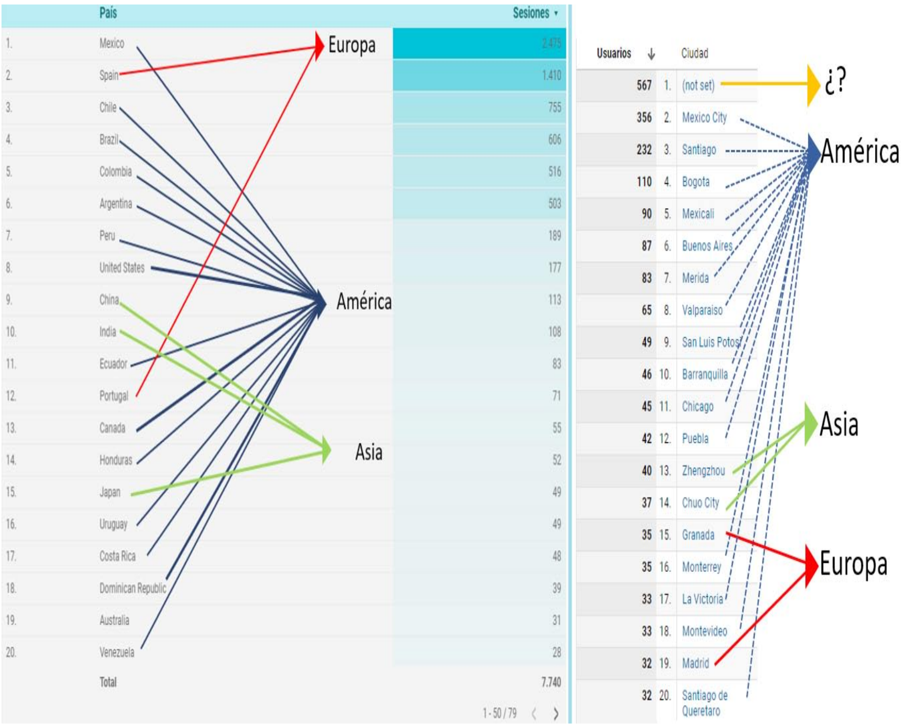


Figura 2. Procedencia de usuarios Fuente: Google Analytics

Por otro lado, Google Analytics nos permite identificar el *método de adquisición de usuarios*, que es la forma en que estos llegan al sitio web. En este sentido hemos encontrado que en su mayoría provienen directamente, es decir, escriben la URL de la revista en la barra superior de búsqueda. El segundo medio de adquisición es vía “búsqueda orgánica”, esto significa que los usuarios llegan al sitio haciendo una búsqueda en alguno de los buscadores web, acerca de un tema en particular y de alguno de los resultados, son llevados al sitio de *Relime*. Luego, se encuentran los “referidos”, que son aquellos usuarios que llegan a *Relime* vía enlace en otros sitios. En su mayoría provienen del sitio del Comité Latinoamericano de Matemática Educativa (Clame) que es el organismo oficial del cual nace *Relime*. Finalmente, vemos que un mínimo de los lectores llega vía redes sociales, en su mayoría a través de Facebook.

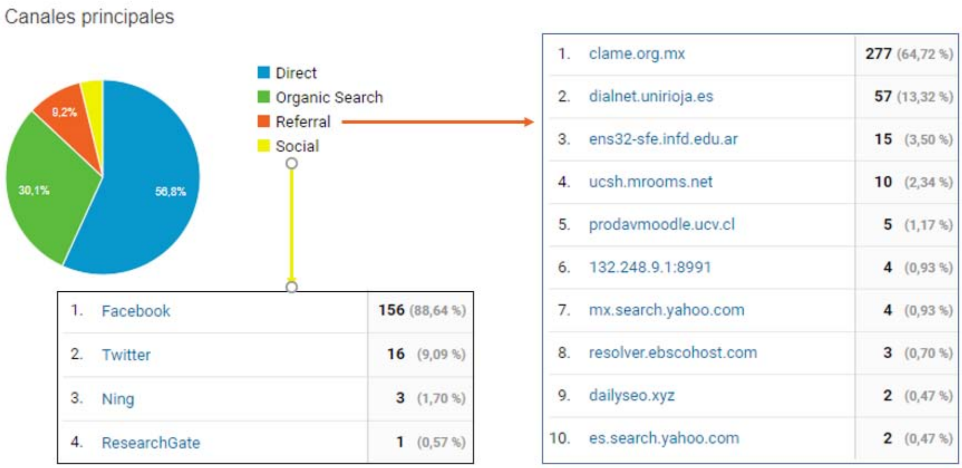


Figura 3. Reporte de adquisición de usuarios Fuente: Google Analytics.

Como parte de la metodología de búsqueda de Analítica Web hemos realizado una revisión de fuentes que mencionan a *Relime* (blogs, documentos pdf, currículums, presentaciones, entre otras), en esta búsqueda hemos descartado enlaces que tienen una relación directa con la revista o con su sitio web, como: relime.org, clame.org, scielo.org, latindex.org, redalyc.org, etc. Algunos de los resultados que hemos obtenido son:

- Materiales de organismos de gobierno en el área de educación[1].
- Grupos académicos de Tecnología, Matemáticas, Educación de diversos países[2].

[1] Ministerio de educación de Argentina
http://materiales.infd.edu.ar/plataforma/programas/Programa_Algebra%20y%20funciones.pdf
[2] Centro Nacional de Ciencia y Tecnología, Chiayi University, China
https://mostmathedu.weebly.com/journal.html

- Programas académicos universitarios[3]
- Eventos institucionales[4]
- Revistas académicas no indizadas en ISI WoS o Scopus[5]

Ahora bien, conociendo parcialmente la naturaleza de los lectores de *Relime*, nuestros esfuerzos no se limitarán a este aspecto, pues reconocemos que estos resultados y los que ofrecen las métricas y *altmetrics* tradicionales, son apenas una parte de lo que se irá conformando progresivamente como un sistema de múltiples y amplios criterios que permitirán identificar el impacto de las publicaciones.

Sin embargo, ahora tenemos un reto aún mayor pues, al reconocer al campo científico como una actividad social en sí misma (Polcuch, 2001) – y en particular en el caso de las ciencias sociales en América Latina – hemos de reconocer que la producción científica de la región no es reconocida como un instrumento necesario para la toma de decisiones acerca de las problemáticas que atañen a la sociedad en otras partes del mundo.

Con base en la consideración de que el campo científico es una actividad social en sí misma (Polcuch, 2001) es de gran importancia realizar las acciones pertinentes para que el reconocimiento de la producción científica regional aumente de manera significativa en la toma de decisiones acerca de las problemáticas que atañen a la sociedad en otras partes del mundo y, claramente, en nuestra región también. Tenemos certeza de que la producción científica que *Relime* publica tiene la fuerza académica para sustentar y poner en discusión aquellas iniciativas de transformación educativa. Para ello, continuar analizando quién cita y, también, quién usa la producción de *Relime*, es una tarea necesaria de la comunidad.

---

[3] Universidad del Cauca, Colombia
http://www.unicauca.edu.co/matematicas/ContenidosProgramaticos/ModelosTeoricosEnLaEducacionMatematica.pdf
Universidad Nacional de Ciencias Forestales, Honduras
https://dieunacifor.000webhostapp.com/die/die/DIEUNACIFOR.php

[4] III Encuentro Enseñanza de la Matemática UNED, 2010
https://www.uned.ac.cr/ecen/encuentros/2010/III%20Encuentro/ponencias/2p/19-P-2%20De%20Faria%20Edison.pdf

[5] Elementos, Colombia
https://journal.poligran.edu.co/index.php/elementos/article/view/841
Hamut'ay, Perú
http://revistas.uap.edu.pe/ojs/index.php/HAMUT/article/view/1518
RELIEVE, España
http://eprints.rclis.org/33553/1/RELIEVEv20n2_M3.pdf

Referencias bibliográficas

Cantoral, R., Reyes Gasperini, D., Ríos Jarquín, W., & Castro Pérez, B. (Eds.). (2019). *RELIME: Construcción, desarrollo y consolidación. ¿A dónde nos dirigimos?* Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, *22*(1), 5-11. https://doi.org/10.12802/relime.19.2210

Montiel, G. (2017). *Editorial: La transición de Relime al contexto editorial digital*. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, *20*(1), 5-8. http://dx.doi.org/10.12802/relime.17.2010

Polcuch, E.F. (2001). *La medición del impacto social de la ciencia y tecnología. IV Taller Iberoamericano e Interamericano de Indicadores de Ciencia y Tecnología, Ricyt. En www. ricyt.* edu. ar

Vitela Caraveo, A. D. (2017). *Propuesta de mejora del servicio de estadísticas del portal de revistas e-RACO.* Recuperado de http://diposit.ub.edu/dspace/handle/2445/117725

Verónica Molfino, Cristina Ochoviet

ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA PARA LA JUSTICIA SOCIAL EN CURSOS DE POSTGRADUACIÓN

Teaching mathematics for social justice in postgraduate courses

RESUMEN

En este trabajo reportamos las reacciones de un grupo de profesores de matemática cursando estudios de postgraduación en modalidad virtual, al solicitárseles diseñar una secuencia de enseñanza desde la perspectiva de la Enseñanza de la Matemática para la Justicia Social, para ser aplicada en la formación de profesores de matemática. Las evidencias recogidas dejan entrever las dificultades de los participantes para la comprensión de la perspectiva, así como para desarrollar diseños de enseñanza desde ella. El trabajo en foro de discusión permitió sortear algunas de estas dificultades debido a que las intervenciones de los participantes y de las docentes del curso aportaron retroalimentación que favoreció la reflexión crítica y el diseño creativo de situaciones de enseñanza.

PALABRAS CLAVE:

- *Matemáticas*
- *Enseñanza*
- *Formación de profesores*

ABSTRACT

In this article we report the reactions of a group of mathematics teachers studying postgraduate studies in virtual modality, when they were asked to design a teaching sequence from the perspective of Teaching Mathematics for Social Justice, to be applied in mathematics teacher training. The evidence collected reveals the difficulties of the participating teachers with the understanding of the perspective as well as to develop teaching designs from this perspective. The work in the discussion forum allowed them to overcome some of those difficulties because the interventions of the participants and the teachers of the course provided feedback that favored critical reflection and the creative design of teaching situations.

KEYWORDS:

- *Mathematics*
- *Teaching*
- *Teacher education*

RESUMO

Neste trabalho relatamos as reações de um grupo de professores de matemática que estão fazendo estudos de pós-graduação na modalidade virtual, ao pedir-lhes para elaborar uma sequência de ensino na perspectiva do Ensino da Matemática para a Justiça Social, a ser aplicado na formação de professores de matemática. As evidências coletadas deixam ver as dificuldades dos

PALAVRAS CHAVE:

- *Matemática*
- *Ensino*
- *Formação de professores*

Recepción: Marzo 20, 2018 / Aceptación: Julio 14, 2019. DOI: 10.12802/relime.19.2221

participantes para o entendimento das perspectivas, assim como para desenvolver projetos de ensino na mesma. O trabalho no fórum de discussão permitiu superar algumas destas dificuldades, uma vez que as intervenções dos participantes e os professores do curso contribuíram com realimentação, o que favoreceu o pensamento crítico e criativo de situações de ensino.

RÉSUMÉ

Ce travail se propose de présenter les réactions d'un groupe de professeurs de Mathématiques en formation continue en ligne, invités à créer, dans le cadre de l'Enseignement des Maths pour la Justice Sociale, une séquence pédagogique devant être appliquée au cours de la formation initiale de professeurs de Mathématiques. Les témoignages recueillis ont mis en évidence les difficultés des participants à comprendre le cadre théorique proposé et à concevoir des séquences d'enseignement dans ce cadre. Le forum de discussion a permis de contourner certaines difficultés car les interventions des participants et des responsables de la formation ont apporté un feedback favorable à la réflexion critique et à la préparation créative de situations dénseignement.

MOTS CLÉS:
- *Mathématique*
- *Enseignement*
- *Formation des enseignants*

1. Introducción

La Enseñanza de la Matemática para la Justicia Social (EMpJS) es una perspectiva que, si bien cuenta con una amplia trayectoria en algunos países de Europa, Estados Unidos e incluso algunos países de Sudamérica como Brasil, tiene un desarrollo incipiente en la mayoría de los países de Latinoamérica. Esta es una línea de trabajo que permite articular explícitamente objetivos tradicionalmente considerados en la enseñanza de conocimiento matemático con objetivos presentes en todo plan de estudios relativos a la formación de personas críticas, capaces de comprender el mundo que los rodea y de transformarlo positivamente.

Felton-Koestler (2017) señala como problemática los desafíos que implica el involucramiento de estudiantes de profesorado con la perspectiva de la EMpJS: poca o nula experiencia como estudiantes de Matemática o en sus prácticas docentes con dicha perspectiva, resistencias ideológicas y pedagógicas de los futuros profesores y la propia comprensión de la EMpJS.

En este trabajo reportamos las reacciones de un grupo de profesores de matemática con amplia experiencia en la enseñanza, cursando estudios de postgraduación en modalidad virtual, al solicitárseles diseñar una secuencia de enseñanza desde la perspectiva de la enseñanza de la matemática para la justicia social, para ser aplicada en la formación de profesores de matemática. En particular, nos propusimos como objetivos de investigación: (1) identificar las dificultades que enfrenta un grupo de profesores para la comprensión de la perspectiva y para el diseño de situaciones de enseñanza desde esa perspectiva, y (2) analizar qué características de las intervenciones entre participantes e instructoras aportan a la superación de las dificultades.

2. Antecedentes

Organizamos los antecedentes temáticos referidos a la enseñanza de la matemática para la justicia social en dos apartados. El primero aborda la problemática en la formación de profesores a nivel internacional. El segundo focaliza particularmente en los trabajos desarrollados en el Uruguay dado que es una temática de investigación reciente en este país.

2.1. *La enseñanza de la matemática para la justicia social en la formación de profesores*

La EMpJS adopta diferentes significados, con varias facetas e incluso a veces contradictorias entre sí. Aún así, Stinson, Bidwell y Powell (2012), siguiendo a McDonald (2007), afirman que el concepto de enseñanza para la justicia social está siendo cada vez más enfatizado en los programas de formación docente como parte de su preparación para la diversidad o multiculturalidad. Ello podría explicar su gran desarrollo en países cosmopolitas como Estados Unidos o Gran Bretaña.

Tanto Felton-Koestler (2017) como Stinson, Bidwell y Powell (2012) reflexionan sobre los desafíos que implica formar a profesores desde esta perspectiva para cumplir con los dos tipos de objetivos que propone Gutstein (2006): lograr promover la justicia social en la clase, atendiendo a su vez a la construcción de conocimiento matemático por parte de los estudiantes. Entre ellos, Felton-Koestler (2017, p. 50) destaca que: “los estudiantes de profesorado tienen escasa experiencia con este abordaje de la matemática, lo que incluye la conexión entre matemática y el contexto de los estudiantes (Ensign, 2005; Turner *et al*., 2012a), y la investigación en temas del mundo real (Felton y Koestler, 2012; 2015; Felton, 2010b; Koestler, 2012; Spielman, 2009)”.

Otro de los desafíos a los que se enfrenta el desarrollo de la EMpJS en la formación docente es la resistencia de los propios estudiantes de profesorado, al respecto Felton-Koestler (2017) menciona algunos trabajos: Aguirre (2009), Ensign (2005), Felton, Simic-Muller y Menéndez (2012) y Rodríguez (2005). En particular, Rodríguez (2005) identifica resistencias de los futuros profesores en dos planos: el ideológico y el pedagógico. En relación con el primero menciona la resistencia a enseñar para la diversidad, por ejemplo, atendiendo los aspectos culturales que traen los estudiantes y siendo inclusivo. En el plano pedagógico, Rodríguez hace referencia a la resistencia a enseñar haciendo énfasis en la comprensión, lo que implicaría el uso de aproximaciones constructivistas, aprendizaje basado en la indagación y el uso de enfoques intelectualmente estimulantes para los estudiantes.

Felton-Koestler (2017) también reporta investigaciones en las que se constata que el abordaje de la perspectiva de la EMpJS conduce a una mejor aceptación de la misma, o a una apreciación más profunda de la matemática: Ensign (2005), Felton y Koestler (2012; 2015) y Felton, Simic-Muller y Menéndez (2012).

En suma, los trabajos reportados sitúan la reflexión sobre el desafío que implica, tanto para estudiantes de profesorado como para formadores, establecer conexiones entre los conceptos matemáticos, el conocimiento de la comunidad y cuestiones vinculadas a la justicia social.

2.2. *Enseñanza de la matemática para la justicia social en Uruguay*

A partir de lo expuesto en el apartado anterior, entendemos entonces que es relevante que en Latinoamérica se generen los espacios para que formadores y futuros docentes puedan reflexionar sobre estas temáticas relativas a la EMpJS. En este sentido, reportamos en este apartado algunos trabajos que se vienen realizando desde 2015 en Uruguay.

López y Guerra (2017) y Guerra, Lim y López (2017) reportan una investigación en la que comparan las primeras reacciones de futuros maestros de primaria al tener una aproximación a la EMpJS en sus programas de formación docente en distintos contextos sociales y culturales.

Al comparar las reacciones de unos y otros estudiantes, descubren que los futuros maestros en Estados Unidos tienen mayor resistencia al abordaje de la EMpJS, mientras los uruguayos presentan interés y curiosidad. Los estudiantes de la Universidad Kennesaw (KSU, Estados Unidos) consideran que el tratamiento de la EMpJS en clase es *inapropiado*, que no es responsabilidad del maestro enseñar justicia social sino de los padres y manifiestan miedo a las autoridades, en particular a ser despedidos o castigados por no tratar exclusivamente los temas del currículo. Por su parte, los estudiantes de un instituto de formación docente de Uruguay "están interesados en la justicia social como una herramienta para enseñar matemática y expresan un alto grado de disposición a aprender más acerca de la EMpJS y del trabajo de Gutstein" (López y Guerra, 2017, p. 251). Pueden constatarse en la misma investigación ambos tipos de reacciones de las reportadas en Felton-Koestler (2017) de los estudiantes de formación docente frente al abordaje de la EMpJS.

Un aspecto relevante reportado en Guerra, Lim y López (2017) es que los estudiantes de KSU percibieron a su profesora (uruguaya radicada en los Estados Unidos) como alguien de "un país socialista" con "agendas poco realistas", mientras sus pares en Uruguay se sintieron orgullosos de que el marco de la EMpJS, basado en los trabajos de Paulo Freire, un sudamericano como ellos, sirviera para enseñar matemática de una manera diferente. Ello conduce a las autoras a poner atención en la necesidad de que los estudiantes de formación docente se conecten con sus formadores de manera confiable y respetuosa, especialmente cuando provienen de diferentes contextos sociales o culturales.

Por otra parte, desde 2016 se han desarrollado una serie de trabajos entre formadores y estudiantes de la carrera de Profesorado de Matemática en el Instituto de Profesores Artigas en Montevideo. En ellos se diseñaron secuencias de aprendizaje para enseñanza media que promueven la EMpJS utilizando diferentes recursos didácticos: narración oral de cuentos (Dolgay y Ochoviet, 2016; Schaffel y Ochoviet, 2016), noticias de prensa (Leirós, Ramírez y Ochoviet, 2016), datos del mercado (de León, Delgado, Molfino y Santini, 2016; Álvarez, Molfino, Pereira y Silva, 2017), situaciones personales (González, *et al.*, 2016), estudios socio - estadísticos (Galli, Montegui, Molfino y Núñez, 2017; Molfino, Perdomo, Ruiz y Villa, 2017), teatro de títeres (Bentancort *et al.*, 2017). Algunas de estas propuestas son experiencias en las que los diseños de aula fueron implementados y analizados de forma colaborativa.

Estos trabajos elaborados en forma conjunta entre estudiantes de Profesorado de Matemática y formadores se sitúan desde dos de las perspectivas de EMpJS señaladas por Felton-Koestler (2017): conectar la matemática con la comunidad e identidad cultural de los estudiantes y el uso de la matemática para desarrollar conciencia crítica y trabajar para cambiar las injusticias en nuestra sociedad. Por otra parte, en ellos se puede apreciar una estrecha relación entre los dos tipos de objetivos propuestos por Gutstein (2006): el relativo a la promoción de la justicia social y el relativo al desarrollo del pensamiento matemático.

En todos los trabajos se destaca la motivación que promueve en los estudiantes de nivel medio el abordaje de temáticas que se vinculan con la justicia social y, en mayor o menor medida, se pudo apreciar una profundización en los contenidos matemáticos a raíz precisamente de tal motivación. Además, todos ellos resultaron ser una instancia formativa para los propios estudiantes de profesorado por tratarse de un abordaje novedoso para ellos, quienes adoptaron la perspectiva propuesta con apertura y compromiso. Si bien en la formación de profesores en Uruguay hay una fuerte carga de asignaturas de Ciencias de la Educación, no es frecuente que se establezcan vínculos explícitos entre dichas asignaturas y las relacionadas con la matemática o su enseñanza. Este tipo de tareas se presenta entonces como un puente entre ambas dimensiones de su formación.

3. Perspectiva teórica

Stinson, Bidwell y Powell (2012) sitúan los inicios de la pedagogía crítica en los trabajos que Paulo Freire desarrolló desde 1970 sobre alfabetización y pedagogía de la liberación. Más específicamente, varios autores vinculan esos mismos trabajos con los fundamentos de la EMpJS (González, 2009; Gutstein, 2006; López y Guerra, 2017; Wright, 2014).

Según lo reportado por Felton-Koestler (2017), el trabajo en esta perspectiva de la EMpJS comienza incipientemente en la última década del siglo XX y tiene un florecimiento en la primera quincena del siglo XXI. Según este autor las discusiones en torno a la EMpJS y la Educación Matemática Crítica abarcan muy diversas perspectivas, las que señala ilustrando con ejemplos de publicaciones:

> Conectar la matemática con la comunidad e identidad cultural de los estudiantes (Civil y Andrade, 2002; González *et al*., 2001; Leonard, 2008); enfatizar en la naturaleza cultural de la matemática y los logros matemáticos de las personas a través del mundo y la historia (Joseph, 2010; Powell y Frankenstein, 1997); el poder formativo de la matemática (Skovsmose, 1994b); el rol del currículo matemático en la transmisión de mensajes subyacentes sobre constructos sociales tales como raza (Martin, 2006, 2007; Tate, 1994), género (Harris, 1997), clase (Walkerdine, 1990), y otros marcadores de diferencia; y el uso de la matemática para desarrollar conciencia crítica y trabajar para cambiar las injusticias en nuestra sociedad (Frankenstein, 1995, 1997; Gutstein, 2006; Skovsmose, 1994b). (Felton-Koestler, 2017, pp. 49-50)

Ahora bien, todas estas perspectivas tienen en común la consideración de dos conjuntos de objetivos pedagógicos dialécticamente relacionados: uno relativo a la justicia social y el otro a la matemática (Gutstein, 2006).

Las metas sobre justicia social que plantea Gutstein (2006) son: leer el mundo con matemática, escribir el mundo con matemática y desarrollar identidades culturales y sociales positivas. Stinson, Bidwell y Powell (2012) lo explican de la siguiente manera:

> Leer el mundo con matemática significa usarla para entender las relaciones de poder, las desigualdades de recursos y oportunidades y la discriminación explícita entre diferentes grupos sociales basada en raza, clase, género, lenguaje y otras diferencias (Gutstein, 2003). Escribir el mundo con matemática significa usarla para reescribir el mundo –para cambiar el mundo (Gutstein, 2006). Desarrollar identidades culturales y sociales positivas significa instruir matemática en el lenguaje, cultura y comunidad de los estudiantes, brindándoles el conocimiento matemático necesario para sobrevivir y prosperar en la cultura dominante. (p. 79)

Por otra parte, las metas pedagógicas relativas a la matemática consisten en leer el mundo matemático (desarrollar estrategias de generalización, resolución creativa de problemas no rutinarios, percibir a la matemática como herramienta para la crítica sociopolítica), tener éxito académico en el sentido tradicional y cambiar la concepción de estudiantes y profesores sobre la matemática (de concebirla como un conjunto de reglas desconectadas para ser memorizadas a concebirla como una herramienta poderosa de análisis para entender problemas complejos del mundo real) (Gutstein, 2006).

Como muchos autores señalan, introducir la perspectiva de la EMpJS es un gran desafío, especialmente en programas de formación de profesores (Felton-Koestler, 2017; Aguirre, 2009; Ensign, 2005).

4. Método

La investigación que reportamos es de corte cualitativo y consistió en un estudio de casos, correspondientes a ocho profesores de matemática que participaban del curso de posgrado *Aportes metodológicos para la enseñanza de la Matemática en la formación de profesores de Matemática*, dirigido al perfeccionamiento en la enseñanza de la matemática en el nivel superior. El curso fue dictado en línea en un aula Moodle.

4.1. *Los participantes*

Los ocho profesores participantes poseen título de grado de cuatro años que los habilita a ejercer la docencia en matemática en la enseñanza media y media superior. Todos son profesores experimentados en la enseñanza de la matemática en el nivel medio.

4.2. *Diseño*

La información utilizada en este estudio proviene de las siguientes instancias que fueron propuestas a los participantes:

(1) Leer tres documentos de referencia específicos de educación para la justicia social, EMpJS y educación matemática crítica (Llorente, 2012; Skovsmose, 2012; Wright, 2014).
(2) Discutir en foro sobre aspectos específicos de cada una de esas lecturas, a partir de preguntas diseñadas por las docentes del curso.
(3) Diseñar una secuencia de enseñanza para un contenido matemático en un curso de formación de profesores de Matemática y planificar su implementación, guiadas por la EMpJS.

Se presentan a continuación los propósitos de cada una de las instancias.

(1) Proporcionar documentos de referencia que permitieran a los participantes tomar conocimiento de la perspectiva adoptada.
(2) La discusión en torno a las lecturas fue orientada por las actividades que presentamos a continuación. Para cada lectura se diseñó una actividad.

> Llorente (2012) describe los procesos de exclusión de los niños/as del sistema educativo.
>
> *a.* *¿Consideras que esa descripción representa lo que ocurre en Uruguay? ¿Y en tu contexto concreto?*
> *b.* *¿Te parece que sea una problemática a atender en Enseñanza Media en la clase de Matemática o en otras asignaturas? Fundamenta tu respuesta. En caso de que consideres que puede atenderse en la clase de Matemática, ¿qué estrategias piensas que podrían implementarse desde tu rol como profesor de Matemática? ¿En qué instituciones, concretamente?*
> *c.* *¿Crees que es una problemática a atender en la formación de profesores? En caso afirmativo, ¿qué estrategias podrían implementarse desde tu rol de profesor de Matemática?*

El principal propósito de estas preguntas fue explorar si los participantes entendían que es relevante desarrollar identidades culturales y sociales positivas o si, por el contrario, rechazaban lo que la autora plantea por considerarlo no pertinente para su tratamiento en la enseñanza media.

Para abordar el documento Skovsmose (2012) diseñamos la siguiente actividad.

> Skovsmose (2012) dice que para Eric Gutstein, leer el mundo a partir de recursos matemáticos significa usar las matemáticas para:
>
> > […] comprender las relaciones de poder, las inequidades de recursos y las disparidades de oportunidades entre diferentes grupos sociales, así como entender la discriminación explícita basada en raza, clase

> social, género, lengua y otras diferencias. Además, significa disecar y deconstruir los medios y otras formas de representación y usar las matemáticas para examinar estos varios fenómenos en la vida inmediata de uno y en el mundo social más amplio e identificar las relaciones y hacer conexiones entre ellas. (Gutstein, 2003, referenciado en Skovsmose, 2012, p. 65-66)

a. *¿Coincides con esta afirmación? ¿En qué sentido?*
b. *¿En qué niveles educativos consideras que sería posible promover esta lectura del mundo a partir de recursos matemáticos? ¿La compartes? Fundamenta tu respuesta.*

Formulamos preguntas acerca de la cita extractada para explorar las dificultades relativas a la comprensión de lo que significa leer el mundo con recursos matemáticos. Pusimos atención en la aparición de resistencias dado que el fragmento propone objetivos más amplios que los puramente matemáticos para la enseñanza de la matemática.

La propuesta relativa a la tercera lectura fue la siguiente:

Wright (2014), refiriéndose a D'Ambrosio (2008), sostiene que:

> La posición privilegiada que la matemática mantiene dentro del plan de estudios se perpetúa, en parte, por los mitos de que es una disciplina neutral y libre de valores, basada únicamente en el pensamiento lógico y el razonamiento deductivo, que puede ser utilizada como una medida general de la inteligencia. (p. 2)

a. *¿Cuál concepción de la Matemática consideras que subyace en los mitos que se describen en la cita anterior?*
b. *¿Es dicha concepción concordante con la tuya? Elabora una reflexión de no más de diez renglones al respecto.*

Estas preguntas tenían por objetivo explorar los objetivos pedagógicos relativos a la matemática propuestos por Gutstein (2006). Dado que la perspectiva de la EMpJS demanda un compromiso político del docente es importante conocer si consideran a la matemática una disciplina neutra y despojada de valores.

(3) La consigna propuesta fue la siguiente:

> Diseñar una actividad y su implementación en un grupo del profesorado de matemática (en la asignatura que se considere conveniente) adoptando como enfoque *enseñar matemática para la justicia social* y teniendo como meta a lograr por parte de los estudiantes de profesorado: "leer el mundo a partir de recursos matemáticos" (Skovsmose, 2012, p. 65).

Este diseño y puesta en escena tenía por objetivo que los participantes dieran cuenta de su comprensión de la perspectiva teórica a través de un diseño que requería movilizar en los estudiantes no solo aspectos matemáticos sino promover la reflexión en torno a algún asunto de la justicia social.

4.3. *Metodología de análisis*

Para alcanzar el primer objetivo (identificar dificultades), nos basamos principalmente en las intervenciones de los docentes en el foro ya que es allí donde ellos explicitan sus impresiones iniciales frente a la perspectiva y frente a la tarea, así como las reacciones generadas a partir de la interacción entre los participantes y con las docentes. Las dificultades a identificar consideramos, a priori, que pueden referir a: (1) leer el mundo con matemática (entender las relaciones de poder, las desigualdades de recursos y oportunidades y la discriminación explícita entre diferentes grupos sociales basada en raza, clase, género, lenguaje y otras diferencias); (2) escribir el mundo con matemática (usarla para cambiar el mundo); (3) desarrollar identidades culturales y sociales positivas (brindar el conocimiento matemático necesario para sobrevivir y prosperar en la cultura dominante).

Para alcanzar el segundo objetivo (analizar qué características de las intervenciones entre participantes e instructoras aportan a la superación de las dificultades) tuvimos en cuenta el proceso que cada profesor explicita mediante las intervenciones en el foro, y, principalmente, las producciones que fueron entregando en respuesta a la tarea de diseño.

5. Análisis de los resultados

A continuación, presentamos el análisis de las intervenciones de los participantes en el foro de discusión que fue creado para ir presentando avances en relación con el diseño de la secuencia de enseñanza (solicitado en la parte 3).

Todos los participantes acuerdan, en términos generales, con las problemáticas presentadas en los cuatro documentos de referencia. No obstante manifiestan dificultades para elaborar una secuencia de enseñanza para la formación de profesores de matemática desde la perspectiva de la justicia social. Lo vemos en la siguiente respuesta:

> Profesora S: "Ya leímos a Llorente, y, si bien es claro y, personalmente acuerdo con la mayoría de las cosas que plantea, se me hace difícil pensar actividades que adopten el enfoque de enseñar para la justicia social, en formación docente".

Tres de los ocho participantes (profesores L, S y A), en principio, solo ven posible la enseñanza de temas de estadística mediante este enfoque. Una participante, expresa que:

Profesora L: "La lectura de los documentos no me ha dado insumos claros para la elaboración de la actividad 6 [refiere a lo solicitado en la parte 3], más allá de algo vinculado a la estadística".

En cuanto a la comprensión de la perspectiva de la EMpJS, observamos que una de las participantes elabora un listado con algunas características que podría tener la secuencia a diseñar:

Profesora S: "la actividad podría ser: de final abierto, ya que nos aseguraría que todos los estudiantes puedan hacer algo (distinto o en diferentes niveles), una propuesta interdisciplinar -coordinada con alguna asignatura de otro profesorado-, un debate que permite que cada uno defienda su postura y busque argumentos para hacerlo, la discusión sobre determinado contenido que permite intercambiar con otros (pares y docentes)".

Observamos que las características que registra no son exclusivas del enfoque propuesto, como puede ser el caso de una actividad de final abierto. Cuando se interroga a la Profesora S preguntándole si puede ser más concreta dado que lo que menciona no es específico del enfoque para la JS, esta responde:

Profesora S: "Me parece que la educación (matemática), tendría que intentar potenciar lo mejor de cada uno de los alumnos, atenderlos a todos por igual, es decir, educar según sus necesidades, individualidades, intereses e incluso, situaciones económicas. De esa forma podríamos ayudar a superar la percepción negativa sobre su aprendizaje".

En otra intervención del foro, clarifica lo que piensa agregando que:

Profesora S: "Para mí, luchar por la justicia social es luchar para que todos los estudiantes logren superarse, que cada día puedan hacer algo mejor que la vez anterior, cada uno a su ritmo, que cada uno se supere a sí mismo. Educar para la libertad, la autonomía y para analizar la sociedad críticamente".

En este aporte observamos que expresa la manera en que entiende su función como educadora, considera a la enseñanza de la matemática como una herramienta para desarrollar identidades sociales y culturales positivas. Ahora, solo hacia el final de su intervención introduce la expresión "*… para analizar la sociedad críticamente*", que daría lugar al uso de la matemática para leer el mundo. Es recién a partir de estas palabras que comienza a modelar lo que podría darle una dirección para el diseño de la secuencia. Esto es, la docente comienza a pensar sobre la EMpJS desde su postura como docente para luego desplazar el centro de atención hacia los alumnos y cómo promover que ellos puedan pensar en términos de justicia social, empleando a la matemática para desarrollar identidades sociales y culturales positivas, y, al menos incipientemente, considerándola para leer el mundo de manera crítica.

En el mismo foro, intentando realizar un aporte que le sea útil a la Profesora S, el Profesor M expresa que:

> Profesor M: "Yo entiendo que la justicia social tiene que ver con la igualdad social (igualdad de oportunidades, iguales derechos, ¿no?), y el respeto a las realidades y necesidades de las personas. En este sentido la educación por la justicia social debería tener en cuenta las necesidades de las personas, brindarles elementos que permitan romper con la desigualdad social, educarlos para la participación y la democracia. Una educación que muestre que se puede y no está todo dicho. Que empodere a las personas para que modifiquen su realidad".

También en este profesor observamos que concibe pertinente el propósito de la EMpJS relativo al desarrollo de identidades sociales y culturales positivas, pero tal como veremos a continuación, esta es una visión parcial del potencial de la perspectiva.

El Profesor A, con relación a lo anteriormente expuesto por los Profesores S y M, escribe:

> Profesor A: "…estoy de acuerdo que los estudiantes tienen que avanzar, pero eso no es una característica exclusiva de la justicia social. Comparto con M lo planteado acerca de que educar para la justicia social implica educar para el empoderamiento y la participación democrática. Sin embargo, lo que me parece importante destacar es el cómo, eso es lo que nos está faltando".

En síntesis, a través de las intervenciones de los profesores se revelan dificultades para poder concretar una secuencia de enseñanza desde la perspectiva solicitada. Hay acuerdo en el tercer objetivo de la EMpJS relativo a la justicia social (Gutstein, 2006) pero aún así los participantes sostienen que les faltan elementos para definir el *cómo*. Creemos que un obstáculo puede estar dado por no visualizar el potencial de la perspectiva para leer el mundo y escribirlo empleando recursos matemáticos. La explicitación de estos dos objetivos les permitió, a algunos de los docentes, diseñar tareas que se enmarcaran en la EMpJS.

Para ilustrar las elaboraciones y dificultades vividas por los participantes frente a la consigna propuesta, seleccionamos a cuatro de ellos (Profesores M, A, R y G) y presentamos en profundidad sus procesos. La selección fue realizada buscando mostrar la amplia variedad de situaciones detectadas entre los participantes.

5.1. *El caso del Profesor M*

El Profesor M manifiesta estar, en reiteradas ocasiones, muy *perdido*. Expresa que no logra elaborar una actividad que lo convenza. Aún así, al menos en la teoría tiene bastante claro qué es lo que se busca con este enfoque, tal como apreciamos en su respuesta a la profesora S en el foro analizado en la sección anterior. Sube al foro un archivo con avances de lo solicitado y en este primer intento de diseño elabora una tarea enteramente intramatemática: "Presenta una función polinómica que tenga raíz 2". El Profesor M argumenta que su diseño tiene en cuenta la perspectiva de EMpJS porque es de final abierto: "*Entiendo que esta tarea, puede ser abordada por todos los alumnos (independiente de su procedencia, y su realidad), es decir que esta tarea respeta la diversidad y las diferencias entre los estudiantes. En este sentido, la actividad promueve la igualdad de éxito, la aceptación de diferencias*". Frente a esta propuesta dos de sus compañeros (Profesores A y R) le dicen que no creen que cumpla con la consigna porque no permite "leer el mundo a partir de recursos matemáticos". Los argumentos empleados por estos docentes dan cuenta de una comprensión de la perspectiva, la consideración de ese objetivo les permite identificar con mayor precisión los aspectos que debe tener una tarea para enmarcarse en la EMpJS. En particular, el Profesor A, le comenta a M en el foro que: "*Lo que no me gustó fue la actividad. Explico por qué. Creo que no entra dentro de la categoría de "Matemática para la Justicia Social" ya que una de las características que tiene este enfoque de la matemática es sobre la realidad. Creo que deberías buscar un problema que sea sobre la realidad, ya sea de los estudiantes, tuya, o de algo concreto y concentrarte en buscar qué hay de matemática en eso. No es fácil, yo todavía no tengo ni una versión como para subir, pero tengo algunas ideas que voy a subir hoy en un rato y estoy en eso. Recuerdo aquí que la Matemática para la Justicia Social tiene el objetivo de "potenciar la formación integral de la persona, desarrollando las capacidades que le permitirán intervenir en el mundo para transformarlo*" (Llorente, 2012, p. 5). El profesor A estaría dando indicios, mediante esta intervención, de la consideración de la perspectiva para obtener el segundo objetivo planteado por Gutstein (2006), el uso de recursos matemáticos para reescribir el mundo.

Las intervenciones de sus compañeros, sin intervención explícita de las profesoras del curso, hicieron que el Profesor M cambiara su propuesta, elaborando una actividad vinculada al desempleo en Uruguay, que aborda el análisis de datos y la modelación. La presentamos a continuación:

> El Instituto Nacional de Estadística (INE) informa entre otras cosas sobre el índice de desempleo. En el enlace <http://www.ine.gub.uy/web/guest/indicadores?indicadorCategoryId=67534> se encuentran datos sobre el índice de desempleo en el último año y en años anteriores. A partir de los mismos:
>
> (1) ¿Crees que es posible predecir el desempleo en los próximos meses?
> (2) ¿Qué diferencias encuentras entre el desempleo en hombres y mujeres?

El profesor M agrega que es una actividad pensada para primer año de la formación de profesores de matemática y fundamenta que corresponde a un enfoque de EMpJS puntualizando que: "*Esta actividad permite usar las matemáticas para examinar fenómenos de la vida de los estudiantes, identificar relaciones entre estos fenómenos (como son el desempleo y la igualdad de género). Por otra parte, la búsqueda y planificación de acciones pretende formar personas que puedan participar activamente de la democracia, responsables y capaces de cambiar su realidad social y por tanto romper algunas desigualdades*" (Profesor M).

Entendemos que la instancia de foro, el ir subiendo avances y los comentarios que los participantes vertieron sobre cada uno de ellos, generó momentos de reflexión y crítica que se retroalimentaron para dar lugar a la creación que el Profesor M finalmente propone. Observamos que ahora sí utiliza un contexto *de la realidad*, tal como le sugirió su compañero, el profesor A. Aún así, la actividad presentada no verifica todas las condiciones que el propio profesor M enumerara en su intervención en el foro de discusión: "*la educación por la justicia social debería tener en cuenta las necesidades de las personas, brindarles elementos que permitan romper con la desigualdad social, educarlos para la participación y la democracia. Una educación que muestre que se puede y no está todo dicho. Que empodere a las personas para que modifiquen su realidad".* La actividad propone una temática que puede dejar entrever una situación de injusticia, pero son acotadas las preguntas que formula para invitar a la reflexión sobre esa injusticia o a una discusión sobre posibles caminos para modificar esa realidad.

Sobre el final de este proceso podríamos decir que el profesor M aún presenta dificultades para diseñar una tarea en la que explícitamente se promueva que los estudiantes lean y escriban el mundo con matemática.

5.2. *El caso de la Profesora R*

La profesora R sube un avance al foro planteando una actividad referida a los accidentes de tránsito y a los lesionados en tales accidentes. Si bien es una problemática social que merece sin duda ser atendida y que requiere del desarrollo de estrategias de prevención, una docente le señaló en el foro a la profesora R que no se apreciaba el enfoque de EMpJS. La Profesora R modificó la actividad inicial y finalmente propuso la siguiente, para la enseñanza de un contenido de Probabilidad y Estadística de un curso de tercer año de la carrera de profesorado de Matemática:

A partir de los Censos 2011 y utilizando la nueva metodología de cálculo de las necesidades básicas insatisfechas (NBI), en Uruguay se encuentran casi 1 068 000 personas y 347 700 hogares particulares con al menos una carencia crítica.

<http://www.ine.gub.uy/c/document_library/get_file?uuid=ee19f4c6-2d5e-48c8-8e98-51082bb0a2b9&groupId=10181>

Se selecciona aleatoriamente una muestra de 20 personas residentes en Uruguay.

1. La variable que expresa el número de personas con al menos una necesidad básica insatisfecha dentro de la muestra ¿sigue una distribución binomial? Justifica.
2. En caso afirmativo señala los parámetros de la distribución.
3. ¿Cuál es la probabilidad de que ninguno de los individuos de la muestra tenga al menos una necesidad básica insatisfecha? ¿Y de que todos tengan al menos una necesidad básica insatisfecha?
4. ¿Cuál es el valor esperado de individuos con al menos una necesidad básica insatisfecha?
5. Construye dos variables aleatorias, una que siga distribución binomial y otra que no, utilizando los datos que aparecen en "Atlas demográfico y de las desigualdades del Uruguay" Fascículo 1: Las necesidades básicas insatisfechas a partir de los censos del 2011.

La Profesora R fundamenta su diseño diciendo que: "*La actividad tiene como objetivo que los alumnos conozcan sobre la realidad del país con relación a una desigualdad existente: las necesidades básicas satisfechas o no. La actividad requiere trabajo matemático de los estudiantes. Por un lado, al investigar las características de una variable aleatoria discreta que sigue una distribución binomial. Por otro al calcular probabilidades*".

Entendemos que la Profesora R se esforzó en lograr una propuesta que permitiera leer el mundo utilizando recursos matemáticos pero no incluyó en su propuesta preguntas que permitan dirigir la mirada hacia la problemática en forma crítica. No es solo analizar un problema, sino ponerlo sobre la mesa para discutir sobre él y abordarlo en las discusiones en forma explícita. En este sentido, para que la actividad se encuadre en la EMpJS debería complementarse con la formulación de preguntas críticas que sitúen la mirada de los estudiantes en el problema planteado para que este no solo sea abordado matemáticamente. Esto es, que dé lugar a la lectura de los resultados matemáticos implicados.

5.3. *El caso del Profesor A*

El Profesor A sube un archivo al foro con su primer avance. Presenta una actividad referida a la instalación de una planta de celulosa en Uruguay y el análisis de los lugares en que se verterían sus desechos. Esto es, una situación vinculada al medio y al desarrollo sustentable. El Profesor M le comenta que la actividad le parece apropiada, que está contextualizada y que una manera de reflejar la realidad es a través del uso de noticias de prensa o de relatos. Este profesor sostiene que usar noticias de prensa hace que los problemas planteados sean genuinos. El profesor M también afirma en el foro que se podría usar ficción literaria dado que lo allí planteado, aún siendo ficción, manifiesta una realidad en el marco de esa ficción. El profesor A manifiesta que va a dejar de lado la idea de la planta de celulosa porque no lo convence y, en cambio, se va a enfocar en el uso de un texto literario para el planteo de un problema para ser propuesto en el curso Geometría y Álgebra Lineal. Publica una idea a partir de la novela *Un mundo feliz* de Aldous Huxley expresando que: "*Y después con la discusión de si se tiene que tomar algo de la realidad o se puede tomar algo ficticio como un cuento, se me ocurrió tomar el primer capítulo de* Un mundo feliz *de Aldous Huxley que es una novela que plantea una sociedad alternativa y plantear alguna actividad en donde se analice cómo está dividida la población en castas, los alpha, beta, epsilon, gama, etc. Pero me costó armar algo coherente*". Luego, el Profesor A sube su primer avance de una actividad basada en el libro *Un mundo feliz* para la enseñanza de un contenido matemático en segundo año de la carrera de profesorado de Matemática. Presenta en el foro la siguiente intervención: "*Se les pedirá a los estudiantes que realicen la lectura del primer capítulo del libro* Un mundo feliz *de Aldous Huxley, claro está que dicha lectura se solicitará leer la clase anterior, aunque espero que no sea un impedimento para desarrollar la actividad".*

> Actividad: En el libro Un mundo feliz, de Aldous Huxley, podemos identificar que la sociedad está dividida en tres castas o clases sociales divididas de menor a mayor categoría social, Alfa, Beta, y unas más bajas conformadas por Gammas, Deltas y Epsilones, que resumiremos en Epsilones. Es importante destacar que no se hace diferencia de sueldos por género o raza; a todos los ciudadanos se les paga mensualmente lo mismo, independientemente de la tarea realizada, \$60000 si son Alfa, \$30000 si son Beta y \$15000 en otro caso.
>
> Imagina que vas a instalar un supermercado y necesitas trabajadores. Para tener esos trabajadores los encargaremos al "Centro de Incubación y Condicionamiento de la Central de Montevideo". Para esta empresa contrataremos 100 empleados, 2 encargados generales, 19 cajeros y 79 reponedores de góndolas, limpiadores y cuida coches.

(a) ¿Qué trabajadores podemos pedir para cada tarea si disponemos de $2 400 000 para pagar sueldos?
(b) Imagina que queremos contratar la mayor cantidad de trabajadores Epsilones. ¿Nos sobra dinero para gastar?
(c) ¿Cuál es el máximo de trabajadores Alfa que se pueden contratar cubriendo todas las vacantes de trabajo?
(d) ¿Es justa esta división laboral? ¿Es similar a la sociedad en qué vivimos? Fundamenta tu respuesta.

Finalmente, el Profesor A agrega que: "*Aclaro que no está terminada, y que seguramente tenga que hacerle algunos cambios más. Igual me gusta mucho más que lo planteado de la planta de celulosa*".

El docente fundamenta el diseño anterior aludiendo a las reflexiones que podrían surgir a partir de ella: *"... tenemos que recordar que en la sociedad en la cual se encuentra enmarcado el texto todos son "felices" y todos tienen trabajo, aunque claro está que también hay exiliados en las reservas. Comparándolo con la sociedad en la que vivimos tenemos que reconocer que:*

Los procesos de globalización son brutales, y algunos grupos de personas parecen no ser necesarios para estos procesos. El crecimiento continuo de vecindades del estilo de las favelas testifica lamentablemente que el capitalismo globalizado de crecimiento libre no es una economía incluyente. En lugar de ello margina en gran medida a las personas y las convierte en desechables. (Skovsmose, 2012, p. 79).

Los "desechables", en la sociedad de Un Mundo Feliz*, ni siquiera son considerados para trabajar en el supermercado. Lo mismo pasa en nuestra sociedad, en donde las personas que no obtienen los conocimientos mínimos para terminar Ciclo Básico no son tenidas en cuenta. Por supuesto que a la empresa que se quiere instalar le vendría bien contratar todos sus empleados Alfa, pero el sistema se encarga de que no todos sean Alfa y, al igual que nuestra sociedad, los que no van a ser ciudadanos Alfa reciben una educación distinta a la que reciben los Epsilones.*

Lo peor de todo, es que la culpa de no tener posibilidades de desarrollarse como ciudadanos es depositada en los individuos que fracasan y no en el sistema, lo que genera mucha impotencia".

Consideramos que el Profesor A logró una propuesta acorde a la perspectiva de la EMpJS, que atiende específicamente dos de los propósitos relativos a la justicia social (Gutstein, 2006): leer el mundo con matemática y emplearla para desarrollar identidades sociales y culturales positivas. Además, señaló en el foro en forma explícita por qué es fundamental trabajar con este punto de vista en la formación de profesores: "*En formación docente se debería enseñar en clase algunas veces utilizando este recurso para que después los futuros profes enseñen en secundaria también utilizando la Matemática para la Justicia Social (que creo que es el objetivo)*" (Profesor A).

5.4. *El caso del Profesor G*

El Profesor G, al igual que sus compañeros, plantea en el foro sus dificultades para hacer frente a la tarea propuesta; afirma que: "*…estoy teniendo grandes problemas para diseñar una actividad para formación docente que implique educar para la justicia social*".

En el foro, el Profesor A plantea que ha encontrado en internet material sobre la Matemática Realista: "*También encontré esto que es sobre "Matemática Realista" que es, a mi entender, similar a Matemática para la Justicia Social, pero sin la parte de la intencionalidad. Es decir, busca generar un contacto con la realidad, pero no necesariamente realizar un análisis crítico de la misma*". A partir de esta intervención, el Profesor G reflexiona acerca del concepto de realidad a ser planteado a los estudiantes dado que la EMpJS está dirigida a una reflexión sobre las inequidades del mundo en que vivimos. El profesor G expresa que: "*Cuando hablamos de "su realidad" (la del estudiante), no tenemos por qué cerrarnos al contexto que lo rodea. Esa sociedad en la que vive está en contacto con el resto del mundo, y las situaciones que se viven en el resto del mundo también impactan sobre la sociedad en la que está inmerso el estudiante. Y creo que, en el contexto de educar para la justicia social, comprender situaciones globales es de gran importancia*". En estas intervenciones iniciales pero posteriores a las lecturas propuestas observamos que el docente aún no visualiza con claridad los objetivos que se propone la EMpJS.

Una de las docentes del curso interviene en el foro y le pregunta: "*¿Qué cosas que suceden en el mundo te inquietan? De todas, ¿cuál te inquieta más?*". A partir de esta intervención docente, el Profesor G sube al foro el siguiente avance de una actividad propuesta para la enseñanza de contenidos de Probabilidad y Estadística, curso del tercer año de la carrera de profesorado de Matemática:

> En los siguientes enlaces encontrarán un estudio de la evolución de la esperanza de vida al nacer en el Uruguay y en Nigeria.
>
> <https://www.bps.gub.uy/bps/file/6826/1/07_esperanza_vida_uy_siglos_xix_xx_xxi.pdf>
>
> <http://www.datosmacro.com/demografia/esperanza-vida/nigeria>

1. Diseña una función que modele la evolución de la esperanza de vida en Uruguay desde 1960 hasta la actualidad, y otra que modele la evolución en Nigeria en el mismo período de tiempo.
2. Si la tendencia se mantuviera en el tiempo, ¿en algún momento una persona tendría la misma esperanza de vida al nacer en Nigeria que al nacer en Uruguay? ¿En qué año se alcanzaría la esperanza de vida actual de Japón (83,59 años) en Uruguay? ¿Y en Nigeria?
3. Busca y analiza la esperanza de vida en distintas regiones del mundo. ¿Qué crees que genera las grandes diferencias?

Esta propuesta denota una incipiente consideración del docente de la posibilidad de proponer a estudiantes del profesorado la lectura del mundo empleando recursos matemáticos, pero la lectura es aún superficial, identificando diferencias pero sin una reflexión profunda sobre las causas que las generan.

La misma docente le hace la siguiente devolución en el foro: "*Hay una intención de reflexionar sobre inequidades pero sería bueno que profundizaras en la oportunidad de ahondar más sobre la JS para que no se quede en "Nigeria es muy atrasado", "Japón es muy avanzado", etc. Esto es, ¿cómo complejizar la mirada?, trata de ser más profundo en el tipo de reflexión a la que puede dar lugar el punto 3*".

Atendiendo la sugerencia realizada, el Profesor G modifica la parte 3 de la actividad que ahora sí propone una mirada más política hacia las inequidades presentes en el mundo que vivimos. La redacción final de la parte 3 queda formulada de la siguiente manera:

---

3. Busca y analiza la esperanza de vida en distintas regiones del mundo. ¿Observas algún patrón? ¿Qué aspectos e intereses históricos – económicos – políticos – sociales – sanitarios crees que repercuten en las grandes diferencias?

El profesor G, a través de las interacciones con sus compañeros y de la intervención docente en el foro, logró una propuesta que entendemos se encuadra en la EMpJS y que incluye contenidos matemáticos que pueden ser abordados en la formación de profesores. Entendemos que en particular logró visualizar el potencial de la perspectiva para leer el mundo a partir de recursos matemáticos.

6. Discusión

En el análisis de las intervenciones en el foro del aula virtual, identificamos dificultades iniciales en la comprensión de la perspectiva: los docentes visualizan rápidamente el potencial de la EMpJS para desarrollar identidades sociales y culturales positivas pero no perciben, inicialmente, la relevancia de emplear recursos matemáticos para leer y escribir el mundo. Constatamos que la discusión entre los propios participantes y la intervención de las docentes utilizando preguntas que favorecieran la reflexión, promovieron que esas dificultades iniciales fueran sorteadas, al menos en la mayoría de los participantes. A modo de conclusión de la discusión en el foro previo al diseño de la actividad los propios participantes afirman que, si bien ahora comprenden la perspectiva, y acuerdan con ella, "*lo que me parece importante destacar es el cómo, eso es lo que nos está faltando*" (profesor A). Es allí donde los profesores participantes visualizan el mayor desafío, que se deriva de las dificultades que consideramos a priori relativas a la comprensión de la perspectiva: diseñar actividades para la enseñanza de contenidos matemáticos en el profesorado de Matemática que se adecuen a la perspectiva de la EMpJS. Si bien no presentan explícitamente resistencias pedagógicas (Rodríguez, 2005), podemos pensar que tal dificultad se encuentra, en parte, en la concepción de la matemática que se debe enseñar a los futuros profesores: supuestamente abstracta, compleja, difícil de relacionar con *la realidad*. Esto explicaría las impresiones iniciales de los profesores participantes, quienes solo se imaginaban el diseño de actividades para la enseñanza vinculadas a tópicos de Estadística (área de la matemática que generalmente es considerada más relacionada con *la realidad*).

Identificamos dificultades en dos planos: en la comprensión de la perspectiva y en el diseño de actividades de enseñanza para la formación de profesores orientado por la perspectiva. Después de la discusión en el foro, los participantes lograron comprender la perspectiva al menos en lo que hace al tercer objetivo y parte de los otros en alguno de los docentes. Pero luego se presenta el problema de cristalizar el punto de vista adoptado en un diseño que dé cuenta del potencial del uso de la matemática para leer el mundo y (re)escribirlo. Por ejemplo, es claro que el profesor M puede enunciar en forma teórica algunos objetivos de la enseñanza de la matemática para la justicia social, pero después está el *cómo* y ese es otro paso. Así, lo que en teoría los profesores pueden enunciar, luego, no logran plasmarlo en una actividad concreta. No obstante, en mayor o menor medida todos logran un diseño algo aproximado. Ahora bien, ¿dónde radica la principal dificultad al momento de elaborar el diseño? En la formulación de preguntas o de actividades que conduzcan a la reflexión sobre aspectos de justicia social que son esenciales en la perspectiva adoptada. Esto es, no alcanza con identificar un problema de inequidad social que pueda ser analizado matemáticamente con ciertas herramientas de la disciplina; el diseño de la EMpJS requiere, además, abrir un espacio en el aula de matemática para la discusión y reflexión sobre las problemáticas sociales que la matemática, en nuestro caso, deja al descubierto.

En relación con los casos que sí lograron diseños con potencial para viabilizar en el aula este tipo de discusiones, consideramos que el trabajo en comunidad, mediante foro de discusión, favoreció el desarrollo de sucesivas reescrituras que permitieron avanzar en los diseños. En suma, la discusión en el foro en el que los participantes iban presentando sus propuestas y recibiendo las críticas constructivas de sus compañeros, mediadas por las intervenciones docentes que constituían preguntas a los docentes y comentarios que invitaban a profundizar la mirada sobre las temáticas abordadas, posibilitaron el desarrollo creativo de los participantes para diseñar actividades de enseñanza desde una perspectiva que, para ellos, era completamente nueva.

7. Conclusiones

En este trabajo reportamos las reacciones de un grupo de profesores de matemática cursando estudios de postgraduación en modalidad virtual, al solicitárseles diseñar una secuencia de enseñanza desde la perspectiva de la enseñanza de la matemática para la justicia social, para ser aplicada en la formación de profesores de matemática. Encontramos un ambiente favorable para el desarrollo de procesos de enseñanza basados en la EMpJS dado que los participantes del curso concuerdan ideológicamente con las ideas vertidas en los documentos de referencia sobre la pertinencia de este enfoque y de la matemática crítica, y además comparten, desde el punto de vista pedagógico, la pertinencia del empleo de aproximaciones constructivistas para enseñar haciendo énfasis en la comprensión, la indagación y el uso de enfoques intelectualmente estimulantes para los estudiantes. En suma, no se detectaron las resistencias ideológicas ni pedagógicas reportadas en Rodríguez (2005) o en Guerra, Lim y López (2017). Una vez que los participantes lograron comprender el enfoque teórico propuesto, la dificultad se ubicó en comprender que no solo la Estadística brinda herramientas para analizar situaciones de inequidad social sino que otras áreas de la Matemática, como el Álgebra lineal, también permiten hacerlo. Finalmente, identificamos una dificultad que no todos los participantes lograron superar aunque sí lograron aproximaciones en mayor o menor medida: el diseño de preguntas críticas que permitieran "desarrollar conciencia crítica y trabajar para cambiar las injusticias en nuestra sociedad" (Felton-Koestler, 2017, p. 50). Es decir, no solo usar la matemática para analizar problemas sino dar lugar a la discusión acerca de ellos, y si es posible y de qué manera intervenir esa realidad. Constatamos lo reportado en Felton-Koestler (2017): el abordaje de la perspectiva de la EMpJS en cursos para profesores conduce a una mejor aceptación de la misma o a una apreciación más profunda de la matemática.

Respecto a la intervención docente para favorecer procesos de diseño de tareas enmarcadas en la EMpJS, encontramos que la propuesta de foros en los que los estudiantes podían comentar abiertamente sobre los diseños de sus propios compañeros y mediados por preguntas y comentarios de las docentes que invitaban a la reflexión fue altamente positiva. En dos de los casos reportados la sola intervención de los compañeros del curso provocó un cambio en la tarea diseñada. En otro de los casos reportados, además de los comentarios de los compañeros fue decisiva la intervención docente mediante preguntas abiertas y comentarios que invitaban a complejizar la mirada sobre la problemática denunciada. Ello provocó modificaciones en la tarea para que se ajustara a la perspectiva, proponiéndose los dos tipos de objetivos que ella articula.

Referencias bibliográficas

Aguirre, J. M. (2009). Privileging mathematics and equity in teacher education: Framework, counterresistance strategies, and reflections from a Latina mathematics educator. En B. Greer, S. Mukhopadhyay, A. B. Powell y S. Nelson-Barber (Eds.), *Culturally responsive mathematics education* (pp. 295–319). New York: Routledge.

Álvarez, F., Molfino, V., Pereira, L. y Silva, F. (2017). Alimentación saludable también para los adolescentes. En G. Buendía, V. Molfino y C. Ochoviet (Comp.), *Estrechando lazos entre investigación y formación en Matemática Educativa. Volumen IV* (pp. 73-83). CFE: Montevideo. Recuperado de: < http://bit.ly/2IF0VF4>

Bentancort, C., Bentancur, Y., Bertrand, L., Fernández, R., Irazusta, F., Izquierdo, A., Pastro, M., y Ochoviet, C. (2017). El teatro de títeres como recurso didáctico para la enseñanza de la matemática. En G. Buendía, V. Molfino y C. Ochoviet (Comp.), *Estrechando lazos entre investigación y formación en Matemática Educativa. Volumen IV* (pp. 25-52). CFE: Montevideo. Recuperado de: < http://bit.ly/2IF0VF4>

de León, V., Delgado, C., Molfino, V. y Santini, B. (2016). Dime cuánto ganas y te diré dónde vives. En G. Buendía, V. Molfino y C. Ochoviet (Comps.), *Estrechando lazos entre investigación y formación en Matemática Educativa. Volumen III* (pp. 103-115). CFE: Montevideo. Recuperado de: < http://bit.ly/2USFgzy>

Dolgay, M. y Ochoviet, C. (2016). Una historia de contadores. En G. Buendía, V. Molfino y C. Ochoviet (Comps.), *Estrechando lazos entre investigación y formación en Matemática Educativa. Volumen III* (pp. 43-50). CFE: Montevideo. Recuperado de: < http://bit.ly/2USFgzy>

Ensign, J. (2005). Helping teachers use students' home cultures in mathematics lessons: Developmental stages of becoming effective teachers of diverse students. En A. J. Rodriguez y R. S. Kitchen (Eds.), *Preparing mathematics and science teachers for diverse classrooms: Promising strategies for transformative pedagogy* (pp. 225–242). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Felton, M. D. y Koestler, C. (2012). Questions and answers can mean something: Supporting critical reflection in mathematics education. En R. Flessner, G. R. Miller, K. M. Patrizio y J. R. Horwitz (Eds.), *Agency through teacher education: Reflection, community, and learning* (pp. 25–35). Lanham, MD: Rowman y Littlefield.

Felton, M. D. y Koestler, C. (2015). Math is all around us and… we can use it to help us: Teacheragency in mathematics education through critical reflection. *The New Educator, 11*(4), 260-276. doi: 10.1080/1547688X.2015.1087745

Felton, M. D., Simic-Muller, K. y Menéndez, J. M. (2012). Math isn't just numbers or algorithms: Mathematics for social justice in preservice K-8 content courses. En L. J. Jacobsen, J. Mistele y B. Sriraman (Eds.), *Mathematics teacher education in the public interest: Equity and social justice* (pp. 231–252). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Felton-Koestler, M. D. (2017). Mathematics education as sociopolitical: prospective teachers' views of the What, Who, and How. *Journal of Mathematics Teacher Education, 20*(1), 49-74. doi: 10.1007/s10857-015-9315-x

Galli, M., Molfino, V., Montegui, E. y Núñez, I. (2017). Desnaturalizando lo socialmente establecido: una discusión de género. En G. Buendía, V. Molfino y C. Ochoviet (Comp.), *Estrechando lazos entre investigación y formación en Matemática Educativa. Volumen IV* (pp. 85-96). CFE: Montevideo. Recuperado de: < http://bit.ly/2IF0VF4>

González, L. (2009). Teaching mathematics for social justice: Reflections on a community of practice for urban high school mathematics teachers. *Journal for Urban Mathematics Education, 2*(1), *22–51.* Recuperado de: <http://ed-osprey.gsu.edu/ojs/index.php/JUME/article/view/32/13>

González, S., González, V., Lepratte, F., Molfino, V. y Viera, C. (2016). Un análisis crítico sobre la ganancia en el mundo del mercado. En G. Buendía, V. Molfino y C. Ochoviet (Comps.), *Estrechando lazos entre investigación y formación en Matemática Educativa. Volumen III* (pp. 85-101). CFE: Montevideo. Recuperado de: < http://bit.ly/2USFgzy>

Guerra, P., Lim, W. y López, R. (2017). Math, social justice and prospective teachers in U.S.A. and Uruguay: learning together. En A. Chronaki (Ed.), *Mathematics Education and Life at Times of Crisis. Proceedings of the Ninth International Mathematics Education and Society Conference*. University of Thessaly Pess, Volos, Greece. Recuperado de: <http://mes9.ece.uth.gr/portal/images/proceedings/MES9_Proceedings_low_Volume1.pdf>

Gutstein, E. (2006). *Reading and writing the world with mathematics: Toward a pedagogy for social justice*. New York: Routledge. doi: 10.4324/9780203112946

Leirós, L., Ramírez, V. y Ochoviet, C. (2016). Leer el mundo a partir de recursos matemáticos: situaciones de injusticia social que afectan a niños y adolescentes. En G. Buendía, V. Molfino y C. Ochoviet (Comps.), *Estrechando lazos entre investigación y formación en Matemática Educativa. Volumen III* (pp. 51-64). CFE: Montevideo. Recuperado de: < http://bit.ly/2USFgzy>

Llorente, M. (2012). Educar para la justicia social. *Ponencia presentada en el Foro Mundial de Educación (Brasil).* Recuperado de: <http://www.concejoeducativo.org/article.php?id_article=436>

López, R. y Guerra, P. (2017). Enseñanza de la Matemática para la Justicia Social. Experiencia IFD de Pando – Universidad de Kennesaw, EEUU. *Actas del 7º Congreso Uruguayo de Educación Matemática* (pp. 245-252). Recuperado de: <http://semur.edu.uy/curem/actas/pdf/56.pdf>

McDonald, M. (2007). The joint enterprise of social justice teacher education. *Teachers College Record, 109,* 2047–2081.

Molfino, V., Perdomo, N., Ruiz, X. y Villa, S. (2017). Analfabetismo y afrodescendencia: ¿casualidad o causalidad? En G. Buendía, V. Molfino y C. Ochoviet (Comp.), *Estrechando lazos entre investigación y formación en Matemática Educativa. Volumen IV* (pp. 97-111). CFE: Montevideo. Recuperado de: < http://bit.ly/2IF0VF4>

Rodríguez, A. J. (2005). Teachers' resistance to ideological and pedagogical change: Definitions, theoretical framework, and significance. En A. J. Rodríguez y R. S. Kitchen (Eds.), *Preparing mathematics and science teachers for diverse classrooms: Promising strategies for transformative pedagogy* (pp. 1–16). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Schaffel, V. y Ochoviet, C. (2016). Consiguieron la paz en planilandia. En G. Buendía, V. Molfino y C. Ochoviet (Comps.), *Estrechando lazos entre investigación y formación en Matemática Educativa. Volumen III (*pp. 29-42). CFE: Montevideo. Recuperado de: < http://bit.ly/2USFgzy>

Skovsmose, O. (2012). Alfabetismo matemático y globalización. En P. Valero y O. Skovsmose (Eds.), *Educación matemática crítica. Una visión sociopolítica del aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas* (pp. 65-105). Bogotá: una empresa docente. Recuperado de: <http://funes.uniandes.edu.co/2003/1/Skovsmose2012Alfabetismo.pdf>

Stinson, D., Bidwell, C. y Powell, G. (2012). Critical pedagogy and teaching mathematics for social justice. *The International Journal of Critical Pedagogy, 4*(1), 76–94. Recuperado de: <http://libjournal.uncg.edu/ojs/index.php/ijcp/article/view/302/263>

Wright, P. (2014). Teacher researchers, mathematics classrooms and social justice. *Paper presented at BERA Conference 2014 (London).* Recuperado de: <http://maths-socialjustice.weebly.com/uploads/3/0/2/7/30279643/wright_2014_bera_paper.pdf>

Autoras

Verónica Molfino. Consejo de Formación en Educación, Uruguay. veromolfino@gmail.com

Cristina Ochoviet. Consejo de Formación en Educación, Uruguay. cristinaochoviet@gmail.com

Dorinda Mato - Vázquez, Rocío Chao - Fernández, Aurelio Chao - Fernández

EFECTOS DE ENSEÑAR MATEMÁTICAS A TRAVÉS DE ACTIVIDADES MUSICALES

Effects of teaching mathematics through music activities

RESUMEN

El propósito de este estudio es determinar los efectos a nivel cognitivo en dos grupos de estudiantes de Educación Infantil (49 sujetos de 5 y 6 años): al Grupo Experimental (GE) se le aplicaron actividades musicales relacionadas con contenidos de matemáticas durante dos meses, mientras que el Grupo Control (GC) ejecutó actividades matemáticas tradicionales. El instrumento utilizado fue un cuestionario que cumplimentaron las profesoras antes y después de poner en práctica las actividades, tras recoger —a través de notas de campo diarias— los aprendizajes matemáticos adquiridos por los estudiantes. Para el análisis de los datos se utilizó estadística descriptiva e inferencial. Se encontraron efectos significativos y positivos en el rendimiento del Grupo Experimental en todos los ítems. Se puede concluir que utilizar la música representa una excelente alternativa en Educación Infantil, ya que tiene un impacto positivo en el aprendizaje.

PALABRAS CLAVE:

- *Actividades musicales*
- *Matemáticas*
- *Enseñanza - Aprendizaje*
- *Educación Infantil*

ABSTRACT

The purpose of this study was to determine the effects on the cognitive level of two groups of students of Early Childhood Education (49 subjects of 5 and 6 years old), after applying in the classroom of the Experimental Group different musical activities related to mathematics for two months, while the Control Group continued being taught solely with traditional mathematical activities. The used instrument was a questionnaire that the teachers completed before and after the implementation of the activities, after collecting the mathematical learning acquired by students through daily field notes. For data analysis, descriptive and inferential statistics were used. Significant and positive effects on the performance of the Experimental Group were found in all items. It can be concluded that the use of music represents an excellent alternative in Early Childhood Education because it has a positive impact on learning.

KEYWORDS:

- *Musical activities*
- *Mathematics*
- *Teaching - Learning*
- *Early Childhood Education*

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (2019) *22* (2): 163-184.
Recepción: Marzo 19, 2018 / Aceptación: Abril 5, 2019. DOI: 10.12802/relime.19.2222

RESUMO

O objetivo deste estudo foi determinar os efeitos sobre o nível cognitivo, em dois grupos de alunos na Educação Infantil (49 indivíduos entre 5 e 6 anos), após a aplicação das atividades musicais do Grupo Experimental relacionadas com conteúdo de matemática durante dois meses, enquanto o Grupo Controle executando atividades matemáticas tradicionais. O instrumento utilizado foi um questionário que completaron os professores antes e depois da implementação das atividades, após a recolha a través do campo diária observa aprendizagem matemática adquiridos pelos alunos. Para a análise dos dados utilizou-se estatística descritiva e inferencial. Foi detectado desempenho significativo è positivo do Grupo Experimental em todos os itens. Pode-se concluir que o uso de música representa uma excelente alternativa na Educação Infantil porque tem um impacto positivo na aprendizagem das crianças.

PALAVRAS CHAVE:

- *Atividades musicais*
- *Matemática*
- *Ensino - Aprendizagem*
- *Educação Infantil*

RÉSUMÉ

L'objectif de cette étude est de déterminer les effets dans le niveau cognitif, en deux groupes d'étudiants d'Éducation Infantile (49 sujets âgés de 5 à 6 ans), après l'application des activités musicales dans un Groupe Expérimental liés au contenu des mathématiques pendant deux mois, alors que Groupe Contrôle exécute des activités mathématiques traditionnelles. L'instrument utilisé était un questionnaire qui a rempli les enseignants avant et après l'exécutions des activités, en prenant des notes sur l'apprentissage des mathématiques acquises par les étudiants. Pour l'analyse des résultats on a utilisé statistiques descriptives et déductives. On a trouvé un rendement important et positif du Groupe Expérimental dans tous les effets rubriquez. On peut conclure que l'utilisation de la musique représente une excellente alternative dans l'éducation de la petite enfance, car il a un impact positif sur l'apprentissage.

MOTS CLÉS:

- *Musique*
- *Mathématiques*
- *Enseignement et apprentissage*
- *Éducation Infantile*

1. Antecedentes

Numerosos trabajos han puesto de manifiesto las conexiones existentes entre la música y las matemáticas. Incluso se han encontrado relaciones extraordinarias en el contexto de las matemáticas aplicadas a estructuras musicales, que han conducido a problemas abiertos interesantes (Andreatta, 2012).

A pesar de que la teoría de la música matemática se remonta al pensamiento clásico, es un campo de estudio relativamente nuevo, pues hasta finales del siglo xx

–con Milton Babbitt, David Lewin, y especialmente John Clough (Yust y Fiore, 2014)– se comienza a vislumbrar como área de estudio emergente. Esta teoría se construye sobre las relaciones y las estructuras comunes de ambos componentes, pudiendo analizarse con fines orientados a la enseñanza y el aprendizaje (Montiel, 2017).

Como señala la autora, este fenómeno es lógico puesto que en todos los niveles de actividad musical se pueden encontrar modelos matemáticos; desde la composición hasta la producción de sonidos por medios tradicionales o digitales. De hecho, empiezan a haber países con experiencias y materiales didácticos que vinculan a ambas disciplinas en el medio escolar (Casals, Carrillo y González-Martin, 2014; Hughes, 2014; Sanders, 2012).

Entre los estudios realizados en este sentido destacan, entre otros, los desarrollados por Anderson (2014), Gareth (2016) y López-Rodríguez (2016), que señalan que la instrucción musical repercute de forma positiva sobre las habilidades relacionadas con las matemáticas, así como en los resultados académicos obtenidos por el alumnado (Liern y Queralt, 2008; Fernández-Carrión, 2011). Por lo tanto, al trabajar los contenidos de forma conjunta, el aprendizaje resulta más atractivo y proporciona seguridad emocional y confianza.

Lo anterior facilita un clima de ayuda, de colaboración y de respeto, además de otros beneficios para el desarrollo matemático del alumnado (Fernández Bravo, 2006; Chao, Mato-Vázquez y López-Chao, 2015). Esta afirmación cobra mayor relevancia si se comienza el trabajo interdisciplinar en la primera etapa del sistema educativo, pues cada vez hay más estudios que evidencian cuán crucial es la estimulación y el aprendizaje en los primeros años de vida (Gómez, 2012; Mato-Vázquez, Chao-Fernández y Chao-Fernández, 2017).

Así mismo, Cslovjecsek y Linneweber-Lammerskitten (2011) interrelacionan la música y las matemáticas desde una perspectiva educativa que tiene la finalidad de aportar recursos prácticos para trabajar los contenidos clave: operaciones básicas, duración, geometría, conceptos lógico-matemáticos, etcétera. Además, señalan que el trabajo interdisciplinar de estas materias beneficia considerablemente el aprendizaje de las matemáticas.

Los estudios que hablan sobre trabajar los primeros años de manera experimental, activa y alentadora, apoyados de forma interdisciplinar –y especialmente en el caso de las matemáticas y la música–, corroboran que hay similitudes con la realidad que se vive. Se acerca a la cotidianidad de la vida; se muestra más útil, práctica, dinámica y, por encima de todo, se presenta motivadora (Fernández-Carrión, 2011). Asimismo, tener mayores niveles de actividad musical estimula el funcionamiento cognitivo desde la infancia hasta la edad avanzada.

Por su parte, Pérez Adeguer y Leganés (2012) señalan que el uso de tareas musicales es de gran utilidad para el aprendizaje de todas las áreas, y hacen énfasis en las matemáticas, debido al miedo que suscitan estos contenidos conforme el alumnado avanza de curso (Mato-Vázquez, 2014). Es conveniente iniciar a los estudiantes en esta materia de un modo más lúdico y relajado a través de actividades prácticas (Noll, 2014), pues los prepararán para la adquisición de las competencias matemáticas dentro de un marco afectivo.

En el marco educativo español, el currículo de Educación Infantil está regulado por la Ley Orgánica 2/2006 (LOE, 2006), misma que se organiza en tres áreas de conocimiento y especifica que el trabajo debe realizarse de manera interdisciplinaria, no parcelada. Por lo tanto, propone crear espacios de aprendizaje que relacionen los contenidos de las diferentes áreas. Sin embargo, esto no se produce en la práctica (Chao-Fernández, Mato-Vázquez y López-Chao, 2015), pues como señala Casals *et al.* (2014) es habitual observar una desconexión casi absoluta entre las diferentes áreas curriculares.

Con base en este esquema, Vicente, Rosales, Chamoso y Múñez (2013) alegan que en el caso de la enseñanza de las matemáticas, en España acostumbran a tratar los contenidos de la materia establecidos por los currículos, y los plasman en las correspondientes programaciones anuales sin ninguna relación con otras parcelas del conocimiento, lo que acrecienta su fama de ser frías, cerradas e inútiles. No obstante las matemáticas están presentes en las actividades que hacemos a lo largo del día más de lo que imaginamos. De ahí la necesidad de que el niño las valore, las comprenda y las reconozca como imprescindibles en su quehacer diario, puesto que forman parte de sus primeras experiencias; son un instrumento básico que les permite ordenar, establecer relaciones y situar en el espacio y el tiempo los objetos que les rodean y constituyen su entorno (Fernández Bravo, 2006; Peck, 2014; Toussaint, 2013).

Además, las matemáticas representan un lenguaje que se relaciona con otras formas de expresión y con los distintos lenguajes que se emplean habitualmente en Educación Infantil, por lo que no seríamos capaces de desenvolvernos en nuestro día a día sin él (Sanders, 2012; Fernández-Carrión, 2011). Por ello, como señala Canals (2001), en esta etapa es imposible trabajar los contenidos matemáticos aislados. Deben estar relacionados con la educación sensorial y del lenguaje; con la psicomotricidad, la plástica, los cuentos, la música y el conocimiento del medio.

Así mismo, los estudios de Mato-Vázquez y Muñoz-Cantero (2010) demuestran que el interés por las matemáticas disminuye conforme los alumnos avanzan de curso, y que los primeros años son fundamentales para la adquisición del desarrollo del pensamiento matemático –principalmente la prevención de actitudes negativas– aludiendo a la metodología empleada como una de las causas por las que los alumnos no se interesan por ellas.

Por su parte, la experiencia musical activa la imaginación y la creatividad (Kochavi, 2014), construyendo el fundamento desde el que actúan los procesos de cognición: percepción, atención, memoria, inteligencia, pensamiento y lenguaje (An, Ma y Capraro, 2011; An, Capraro y Tillman, 2013). Levitin (2011) probó esta teoría y demostró que mediante la música nuestro cerebro produce un aprendizaje acelerado y significativo; en esta línea Skoe y Kraus (2012) estudiaron en adultos el efecto de la educación musical recibida cuando eran niños desde el punto de vista de los cambios neuronales (neuroplasticidad), y concluyeron que las modificaciones neuronales que genera el aprendizaje musical en la infancia permanece en la edad adulta.

Incluso las investigaciones de Anderson (2014) demuestran que recibir clases de música durante un tiempo prolongado, incide de forma aún más positiva sobre el rendimiento matemático. En este sentido, Rauscher, Shaw y Ky, en un estudio realizado en 1993 en la Universidad de Irving (California) –después de examinar a un grupo infantil que escuchaba música–, demostró que los integrantes desarrollaban los mismos circuitos cerebrales que usamos para realizar operaciones y razonamientos matemáticos.

Efectivamente la música es un poderoso vehículo de aprendizaje y de comunicación interpersonal presente en el lenguaje, en las emociones, en el movimiento (Pérez y Leganés, 2012), y su relación con la competencia matemática es directa. De hecho, las matemáticas son la base del sonido (Gómez, 2012; Casals, Carrillo y González-Martín, 2014). Además, toda la construcción armónica y parte de la melódica es pura matemática (Arbonés y Milrud, 2011).

Al trabajar la música se realizan pequeñas operaciones en el ritmo; se incrementa la concentración, la atención, e incluso fomenta la educación en valores y mejora la convivencia en la escuela (Cabedo-Mas y Díaz-Gómez, 2015). Sin embargo, la música es la gran olvidada en el sistema educativo español (Oriol de Alarcón, 2014), a pesar de que, para una gran mayoría de personas –especialmente los niños–, resulta más atractiva y motivadora que las matemáticas. Esto, unido a la escasez de investigaciones que vinculan ambas disciplinas en el medio escolar, nos llevó a afrontarla, pues consideramos que el mejor camino para llegar a las matemáticas debería ser través de la música. Además, puede ser de gran ayuda para los profesionales de la educación intentar trabajar ambas materias de manera relacionada, divertida y dinámica.

2. Objetivos

El objetivo general fue analizar los efectos en la enseñanza de las matemáticas a través de actividades musicales en la Educación Infantil. Se plantearon como objetivos específicos los siguientes:

- Diagnosticar la homogeneidad en conocimientos previos matemáticos que poseen los escolares en el último curso de Educación Infantil por grupos y sexo.
- Aplicar actividades musicales fundamentadas en el aprendizaje de las matemáticas a los estudiantes del Grupo Experimental (GE).
- Presentar los contenidos a los estudiantes del Grupo Control (GC) utilizando el método tradicional.
- Comparar los resultados para determinar el efecto de las actividades musicales en función de los grupos y del sexo de los estudiantes.

3. Método

El estudio está enmarcado en una investigación de diseño cuasi experimental –de corte cuantitativo– por la falta de control en la conformación inicial de los grupos, tal como lo sugiere Balestrini (2001). Apoyados en Arias (2006), se establecen dos grupos de referencia: el Grupo Experimental (GE), que recibió el estímulo o tratamiento; y el Grupo Control (GC), el cual sólo sirvió de comparación ya que no recibió dicho tratamiento.

Los contenidos matemáticos desarrollados con la estrategia de las actividades musicales trabajados en el aula, y con los docentes respectivos, versan sobre "Propiedades de los objetos" (PO), "Operaciones básicas con elementos concretos" (OB) y "Relaciones espacio-temporales" (RET), elaborados a partir del Decreto 330/2009, vigente en la Comunidad Autónoma de Galicia (España).

3.1. *Muestra*

Participaron 49 escolares (26 niñas y 23 niños) de Educación Infantil con edades comprendidas entre los 5 y 6 años en el curso lectivo 2014-15. Para efectos de la investigación se dividió la muestra en dos: Grupo Control (GC) formado por 24 alumnos (14 niñas y 10 niños); y Grupo Experimental (GE) con 25 (12 niñas y 13 niños). Ambos grupos desarrollaron los mismos contenidos con una maestra especialista en Educación Infantil. Al Grupo Experimental (GE) se le aplicaron recursos musicales preseleccionados en determinadas actividades dentro del aula –relacionados con contenidos de matemáticas–, mientras que el Grupo Control (GC) ejecutaba actividades matemáticas con una didáctica tradicional.

TABLA I
Distribución de la muestra

	Grupo Control	*Grupo Experimental*	*Total*
Mujeres	14	12	26
Hombres	10	13	23
Total	24	25	49

4. Instrumento

El instrumento que se utilizó para realizar la investigación fue un cuestionario de 10 ítems con seis opciones de respuesta, que van de 0 (nada) a 5 (mucho), diseñado por los investigadores para evaluar algunos contenidos fundamentales de las matemáticas basados en la LOE (2006). A continuación, fue aprobado mediante un sistema de validación interjueces formado por 4 expertos (profesoras y profesores especialistas de matemáticas y música). De esta manera se seleccionaron los ítems más pertinentes por su relevancia (debían estar relacionados con el objeto de estudio) y claridad (fácilmente comprensibles).

Los ítems del cuestionario son los siguientes:

I_1. Reconocer el círculo, triángulo, cuadrado.
I_2. Ordenar los objetos por su tamaño.
I_3. Clasificar los objetos de la vida cotidiana por su forma.
I_4. Disponer los objetos por su altura.
I_5. Agrupar elementos según la cantidad.
I_6. Realizar composiciones con las regletas de *Cuisenaire*.
I_7 Asociar el nombre numérico con la cantidad de elementos.
I_8. Identificar la mañana, tarde o noche.
I_9. Utilizar distintas unidades de medida.
I_{10}. Reconocer antes-ahora-después.

La distribución de los ítems del cuestionario respecto a los contenidos trabajados en el aula es la siguiente: PO (I_1, I_2, I_3, I_4), OB (I_5, I_6, I_7) y RET (I_8, I_9, I_{10}).

5. Procedimiento

La técnica de evaluación que se utilizó fue la observación directa; es decir, se contempló el progreso del niño y de la niña durante la realización de las actividades programadas, centrándonos sobre todo en los aprendizajes adquiridos, así como en el ritmo y características de esta adquisición. Es por ello que en este trabajo se recogió, a través de notas de campo, información descriptiva y reflexiva relevante por parte de las profesoras - tutoras en el día a día de manera procesual. Esta recogida sistemática dio lugar a un diario de clase de cada estudiante que permitió cubrir las dos pruebas: la Preprueba o *Pretest* y la Posprueba o *Postest.*

Tras la realización del *Pretest* por parte de las profesoras-tutoras (en el marco educativo español es el profesor/a tutor/a de Infantil el encargado de impartir música) y el análisis de los datos por los investigadores, se confeccionó un plan de actividades musicales relacionadas con los contenidos matemáticos citados anteriormente (PO, OB y RET), el cual sería desarrollado tres días a la semana durante dos meses con el GE, mientras que en el GC las sesiones de clase relativas a los mismos contenidos se llevaron a cabo de manera tradicional (fichas y libro de texto).

Al concluir las 8 semanas, y tras la consecución de las actividades, las profesoras –con todos los datos de la observación diaria– cubrieron la prueba *Postest* en ambos grupos (Experimental y Control) para determinar si el tratamiento había aportado algún cambio en el aprendizaje de las matemáticas. Finalmente se realizó la tabulación de los datos, el análisis estadístico y la discusión de los resultados por parte de los investigadores mediante el paquete estadístico SPSS v.21.0. Se realizaron como estadística descriptiva promedios y desviaciones estándar.

El coeficiente de fiabilidad obtenido mediante el *Alpha* de *Cronbach* (consistencia interna) –atendiendo a Domínguez-Lara y Merino-Soto (2015)– es satisfactorio con valores de .797 en el *Pretest* y .865 en el *Postest* para el Grupo Control; y para el Grupo Experimental .861 en el *Pretest* y .910 en el *Postest*; y una validez de constructo 9,34.

6. Plan de actividades musicales desarrolladas con el GE

El desarrollo de trabajo con el GE se realizó formulando una secuencia lógica de actividades estructurada en sesiones utilizando instrumentos musicales, canciones, coreografías, trabajando la duración, la altura y la intensidad, además de cualquier situación de interacción con los escolares que diera respuesta a sus preguntas.

Cada una de las sesiones constó de tres fases: *1)* en la asamblea general se realizó una actividad introductoria para comprobar los conocimientos previos, presentar los contenidos y estimular a los estudiantes. Se trató de incitarlos a la acción partiendo de lo que sabían; *2)* se llevaron a cabo las actividades de desarrollo en las que los niños y niñas demostraron lo que iban aprendiendo en las fases anteriores, y *3)*, destaca la fase de relajación en la que se llevaron a cabo tareas de distensión, pero sin perder la conexión con la temática central del programa.

Todas las actividades planteadas tuvieron un carácter lúdico, ya que en estas edades el motor del desarrollo emocional, intelectual y social es el juego. Además, influyen en las estructuras de conocimiento y en las relaciones con el entorno.

Debe destacarse que el docente se esforzó en favorecer un clima de seguridad y confianza. En todo momento se preocupó por ayudar a los estudiantes a la hora de desarrollar las actividades, recordando las reglas colectivas y orientando a los que estaban bloqueados proporcionándoles nuevas pautas de actuación.

Dado que la música es atractiva para el alumnado, más en estas edades, hemos planteado una serie de actividades musicales que les resulten motivadoras para, de manera progresiva, relacionarlas con los conceptos matemáticos. Se muestra un ejemplo de cómo se ha trabajado la cualidad del sonido "Duración" desde la música y las matemáticas interdisciplinarmente.

6.1. *La carrera musical*

Objetivos:

- Conocer algunas figuras musicales (blanca, negra, corchea y silencio de negra).
- Comprender que cada figura tiene una duración.

Grupo de trabajo: Todos juntos.

Recursos materiales: Canción *La carrera musical.*

Temporalización: 15 minutos.

Descripción: Escucharemos la canción *La carrera musical.* Tras el primer contacto, le preguntaremos al alumnado sobre las figuras: ¿corrían todas igual de rápido?, ¿cuál va más rápida?, ¿cuál va más lenta? A continuación, podremos volver a escuchar la canción imitando las figuras que participan en la carrera.

En esta actividad, a través de la escucha tenían que lograr conocer y comprender la duración de las figuras musicales blanca, negra, corchea y silencio de negra. Después, comprobamos con preguntas si esos conocimientos habían sido asimilados, y finalmente a partir del movimiento debían vincularlos con el concepto matemático "Rápido-lento", mediante la experiencia de una carrera en la que imitaron a las figuras musicales más rápidas o más lentas.

6.2. *La máquina Simón*

Objetivos:

- Seguir una secuencia de sonidos.
- Conseguir una secuencia de sonidos más rápido o menos rápido.

Grupo de trabajo: Grupos de 4 a 5 niños y niñas.

Recursos materiales: La máquina *Simón*.

Temporalización: 30 minutos.

Descripción: De forma aleatoria, la máquina va iluminando las secciones de colores, y emite un sonido propio según se ilumina. Después de esperar, el alumno debe ir introduciendo la secuencia ofrecida por la máquina, en el orden correcto, ayudándose de su memoria visual y sonora. Si lo consigue, la máquina responderá con una secuencia más larga, y así sucesivamente. Si falla, el alumno debe ceder su turno al siguiente compañero. Los distintos niveles de dificultad van aumentando la velocidad de la secuencia a repetir.

En esta actividad, además de pretender la implicación del alumno en el trabajo interdisciplinar –mediante la secuencia de sonidos "Rápido-lento"–, se pretende que mejore la memoria, la atención y concentración, aumentando la dificultad de manera progresiva.

6.3. *Dominó musical*

Objetivos:

- Entender el tiempo que ocupa cada figura.
- Saber reproducir el tiempo de las figuras con palmadas.

Grupo de trabajo: Todos juntos.

Recursos materiales: Dominó adaptado.

Temporalización: 20-25 minutos.

Descripción: El dominó consta de figuras redondas, blancas, negras, corcheas y silencio de negra, y con dos colores: rojo y negro. Cada niño y niña coge 6 fichas que están colocadas boca abajo. Empieza el que tenga la ficha doble de redondas. Tendrán que ir colocando las fichas de manera que unan, por ejemplo, negra roja-negra roja, y darán una palmada contando el tiempo que ocupa cada figura; en este caso será contar hasta uno. Cuando se trate del silencio, el niño no dará palmada, pero esperará el tiempo necesario. Ganará el que termine antes sus fichas.

Esta actividad encierra más dificultad que las anteriores, ya que añadimos la figura *redonda*, para lo cual es necesario tener muy asimilado el concepto de duración relacionado con cantidad.

6.4. *¡Vamos a bailar!*

Objetivos:

- Ser capaces de recordar una secuencia.
- Interiorizar los números ordinales.

Grupo de trabajo: Todos juntos.

Recursos materiales: Un reproductor de música.

Temporalización: 15 minutos.

Descripción: Se realizará una lluvia de ideas de los pasos que el alumnado quiera introducir en la coreografía. Una vez que los hayan propuesto, se adaptarán a una canción conocida por los niños. Ésta fue una de las coreografías:

Primero: Damos todos 1 salto.

Segundo: Giramos hacia nuestra derecha 2 veces.

Tercero: Movemos los brazos arriba en círculos 3 veces.

Cuarto: Movemos la cadera a la derecha y a la izquierda 4 veces.

Quinto: Nos tapamos la nariz y nos agachamos 5 veces.

Se repite las veces que haga falta y que los niños quieran.

Esta actividad fue una de las más atractivas para los estudiantes, ya que además de divertirse, consolidaron los conocimientos musicales y matemáticos trabajados, y se añadieron otros como lateralidad, numeración, figuras geométricas, etc.

7. Resultados

a) Promedios y desviaciones estándar del *Pretest* y *Postest* por grupos y sexo en los respectivos ítems.

I_1. Reconocer el círculo, triángulo, cuadrado.

En lo que respecta al I_1 se diagnosticó que los promedios y desviación estándar muestran que, respecto a las pruebas inicial y final, existen diferencias significativas Sig (bila) = 0,000 en el rendimiento académico del Grupo Experimental, en comparación con los resultados obtenidos por los participantes del Grupo Control atendiendo al sexo *(Tabla II)*. Se ha considerado la diferencia estadísticamente significativa en todos los casos en los que el valor *p* estuviera por debajo del nivel de significancia (α) de 0.05. (Forsyth, 1988).

En particular, se manifiesta que el rendimiento de los hombres ha experimentado una mejoría en el grupo GE, mientras que las mujeres tienen una media menor. Se debe tener en cuenta que las puntuaciones de partida eran superiores en las mujeres en GC y GE, y en la puntuación *Postest* son mayores las obtenidas por los hombres.

TABLA II

Promedios y desviaciones estándar de las puntuaciones obtenidas en I_1 por grupo y sexo

	Grupo	*Sexo*	*Promedio*	*Desviación estándar*	*n*
Pretest	GC	Mujer	2.66	±.81	14
		Hombre	2.28	±.75	10
	GE	Mujer	2.63	±.40	12
		Hombre	2.31	±.48	13
Postest	GC	Mujer	2.76	±.77	14
		Hombre	2.92	±.75	10
	GE	Mujer	3.92	±1.49	12
		Hombre	4.21	±1.12	13

I_2. Ordenar los objetos por su tamaño.

En I_2 se muestran diferencias significativas entre los grupos GC y GE, a favor de estos últimos en todos los casos Sig (bila) = 0,000. Vuelven a sobresalir los hombres, aunque todos experimentan un incremento significativo de la calificación *(Tabla III)*. En tanto que las medias del GC son homogéneas en ambos sexos y en ambas pruebas, en el GE las diferencias entre los sexos eran superiores en las mujeres al iniciar el proyecto, pero los hombres manifestaron superioridad en la segunda prueba.

TABLA III

Promedios y desviaciones estándar de las puntuaciones obtenidas en I_2 por grupo y sexo

	Grupo	*Sexo*	*Promedio*	*Desviación estándar*	*n*
Pretest	GC	Mujer	3.45	±1.46	14
		Hombre	3.41	±1.38	10
	GE	Mujer	2.91	±.48	12
		Hombre	2.85	±.37	13
Postest	GC	Mujer	3.53	±1.39	14
		Hombre	3.50	±1.16	10
	GE	Mujer	4.16	±.75	12
		Hombre	4.42	±1.13	13

I_3. Clasificar los objetos de la vida cotidiana por su forma.

Considerando el contenido I_3, los promedios y desviaciones estándar de las puntuaciones obtenidas dejan ver de nuevo que el Grupo Experimental mejoró en ambos sexos, por lo que podemos afirmar que los efectos del programa de actividades musicales recreativas, aplicadas para valorar el dominio de los estudiantes, son también significativos y positivos. En la *Tabla IV* podemos confirmar que el GE partía de valores menores que el GC en ambos sexos, sin embargo, el *Postest* manifiesta mejores calificaciones en el Grupo Experimental, mayormente en las mujeres.

TABLA IV

Promedios y desviaciones estándar de las puntuaciones obtenidas en I_3 por grupo y sexo

	Grupo	*Sexo*	*Promedio*	*Desviación estándar*	*n*
Pretest	GC	Mujer	2.84	±.45	14
		Hombre	2.94	±.63	10
	GE	Mujer	1.96	±.71	12
		Hombre	1.91	±.38	13
Postest	GC	Mujer	3.14	±.30	14
		Hombre	3.25	±.38	10
	GE	Mujer	4.85	±1.36	12
		Hombre	4.71	±1.48	13

I_4. Disponer los objetos por su altura.

Para I_4 se encontraron resultados que discrepan respecto a los ítems anteriores. De acuerdo con la *Tabla V*, la mejoría en ambos grupos es mínima, y sólo se dio en el GE y en las mujeres. En los demás casos, los resultados son menores en el *Postest* que en el *Pretest*. Esto fue analizado con las profesoras respectivas y lo justificaron diciendo que ese día un contratiempo interno enrareció el ambiente de clase, y los estudiantes se distrajeron haciendo las tareas.

TABLA V

Promedios y desviaciones estándar de las puntuaciones obtenidas en I_4 por grupo y sexo

	Grupo	*Sexo*	*Promedio*	*Desviación estándar*	*n*
Pretest	GC	Mujer	2.74	±.75	14
		Hombre	3.05	±.00	10
	GE	Mujer	2.88	±.40	12
		Hombre	2.24	±1.06	13
Postest	GC	Mujer	2.61	±.75	14
		Hombre	2.32	±.97	10
	GE	Mujer	2.93	±.40	12
		Hombre	2.76	±.75	13

I_5. Agrupar elementos según la cantidad.

Con base en la *Tabla VI*, se detectó que el GC experimentó una mejoría leve en los hombres, y apenas se percibe cambio en las mujeres. Por su parte el GE mejoró de manera significativa y de modo especial, ya que las puntuaciones del cuestionario previo daban valores superiores en el GC que en el GE para ambos sexos. Por lo que se puede inferir que las actividades musicales han sido de gran provecho para los estudiantes.

TABLA VI

Promedios y desviaciones estándar de las puntuaciones obtenidas en I_5 por grupo y sexo

	Grupo	*Sexo*	*Promedio*	*Desviación estándar*	*n*
Pretest	GC	Mujer	2.94	±.75	14
		Hombre	3.15	±.00	10
	GE	Mujer	2.68	±.40	12
		Hombre	2.34	±1.06	13
Postest	GC	Mujer	2.98	±.75	14
		Hombre	3.28	±.97	10
	GE	Mujer	4.96	±.40	12
		Hombre	4.77	±.75	13

I_6. Realizar composiciones con las regletas de *Cuisenaire*.

Se encontró que los resultados del I_6 siguen la misma línea de los anteriores en cuanto al sexo y a los dos grupos. En tanto que los valores iniciales eran homogéneos en hombres y mujeres, en el *Postest* el GE se desmarca del GC con diferencias dignas de mención; especialmente las mujeres están al borde de la puntuación máxima, aunque es verdad que partían de valores más altos que los hombres *(Tabla VII).*

TABLA VII

Promedios y desviaciones estándar de las puntuaciones obtenidas en I_6 por grupo y sexo

	Grupo	*Sexo*	*Promedio*	*Desviación estándar*	*n*
Pretest	GC	Mujer	2.11	±.75	14
		Hombre	2.12	±.77	10
	GE	Mujer	2.43	±.53	12
		Hombre	2.21	±.87	13
Postest	GC	Mujer	2.66	±.87	14
		Hombre	2.72	±.67	10
	GE	Mujer	4.92	±1.45	12
		Hombre	4.21	±1.34	13

I_7. Asociar el nombre numérico con la cantidad de elementos.

Para los promedios y desviaciones estándar del I_7 se manifiestan valores más altos en todos los casos al pasar el cuestionario por segunda vez. Se muestran diferencias significativas Sig (bila) = 0,000 entre los grupos Control y Experimental –a favor de los primeros en el *Pretest* y a favor de los segundos en el *Postest*– en ambos sexos *(Tabla VIII).*

TABLA VIII

Promedios y desviaciones estándar de las puntuaciones obtenidas en I_7 por grupo y sexo

	Grupo	*Sexo*	*Promedio*	*Desviación estándar*	*n*
Pretest	GC	Mujer	3.15	±1.56	14
		Hombre	3.21	±1.68	10
	GE	Mujer	2.81	±.58	12
		Hombre	2.75	±.27	13
Postest	GC	Mujer	3.43	±1.29	14
		Hombre	3.40	±1.36	10
	GE	Mujer	4.06	±.45	12
		Hombre	4.32	±1.23	13

I_8. Identificar la mañana, tarde o noche.

Para el caso del I_8 destaca nuevamente el GE respecto al GC en el resultado del *Postest*. Partiendo de medias en los *test* iniciales –en las que los hombres destacaban ligeramente en los dos grupos–, sobresalen los hombres en el GC del *Postest*, si bien en el GE hay una pequeña inclinación hacia las mujeres. Además, es necesario destacar que los resultados del *Pretest* eran bajos en general, en tanto que los del *Postest* del GE son muy altos, llegando las mujeres a puntuaciones muy cercanas al 5 *(Tabla IX)*.

TABLA IX

Promedios y desviaciones estándar de las puntuaciones obtenidas en I_8 por grupo y sexo

	Grupo	*Sexo*	*Promedio*	*Desviación estándar*	*n*
Pretest	GC	Mujer	1.84	±.65	14
		Hombre	1.94	±.53	10
	GE	Mujer	1.86	±.71	12
		Hombre	1.914	±.58	13
Postest	GC	Mujer	2.64	±.30	14
		Hombre	2.75	±.58	10
	GE	Mujer	4.95	±1.56	12
		Hombre	4.81	±1.48	13

I_9. Utilizar distintas unidades de medida.

Como se puede observar en la *Tabla X*, las puntuaciones obtenidas en el I_9 revelan que el GE, partiendo de notas muy bajas en el *Pretest*, ha mejorado más que el GC. Si comparamos por sexo, vemos que en el GC las mujeres tenían medias más bajas y en el *Postest* más altas. En cambio, en el GE las puntuaciones de las mujeres eran y siguen siendo más altas.

TABLA X

Promedios y desviaciones estándar de las puntuaciones obtenidas en I_9 por grupo y sexo

	Grupo	*Sexo*	*Promedio*	*Desviación estándar*	*n*
Pretest	GC	Mujer	1.94	±.88	14
		Hombre	2.15	±.10	10
	GE	Mujer	1.68	±.31	12
		Hombre	1.34	±1.05	13
Postest	GC	Mujer	2.78	±.76	14
		Hombre	2.48	±.76	10
	GE	Mujer	3.96	±.39	12
		Hombre	3.77	±.76	13

I_{10}. Reconocer antes-ahora-después.

Para el I_{10} se percibe *(Tabla XI)* que los hombres del GC tienen mejores puntuaciones en el *Pretest*, y son más bajas en el GE; una situación que se mantiene en el *Postest*. Esto significa que en general hay diferencias por sexo. En cuanto a las diferencias por grupo, es el GE el que deja entrever mejores calificaciones en los *Postest*. Por lo tanto, se puede argumentar que los hombres manifestaron mejorías menores en este ítem.

TABLA XI

Promedios y desviaciones estándar de las puntuaciones obtenidas en I_{10} por grupo y sexo

	Grupo	*Sexo*	*Promedio*	*Desviación estándar*	*n*
Pretest	GC	Mujer	1.85	±.98	14
		Hombre	2.03	±.01	10
	GE	Mujer	2.14	±.41	12
		Hombre	1.75	±1.08	13
Postest	GC	Mujer	2.79	±.74	14
		Hombre	2.98	±.98	10
	GE	Mujer	4.26	±.49	12
		Hombre	3.79	±.71	13

b) Comparativas del *Pretest* y *Postest* entre las medias obtenidas por el Grupo Experimental y el Grupo Control en cada uno de los ítems.

Se encontraron efectos significativos y positivos del programa de actividades musicales enfocado a las matemáticas, sobre el rendimiento de los y las estudiantes en todos los ítems que fueron aplicados para valorar el dominio de conceptos básicos de las matemáticas Sig (bila) = 0,000. Con respecto a I_1, I_2, I_3, I_4, I_7, I_8, I_9 se puede apreciar que partimos de valores más bajos en el GE que en el GC. Sin embargo, las puntuaciones halladas después de la prueba son más altas con diferencia reveladora. En el I_5 e I_6, se percibe mejor nota media en el *Pretest* del GE, y casi la misma en el I_8 e I_{10}. En el *Postest* es mayor el GE en todos los ítems.

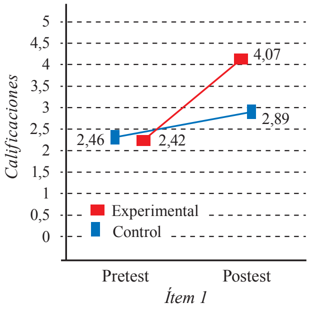


Gráfico 1
Interacción grupos I_1

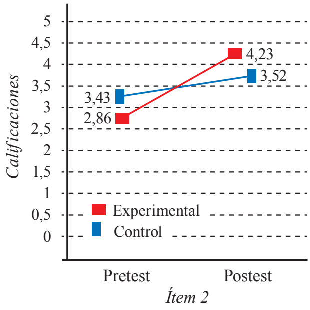


Gráfico 2
Interacción grupos I_2

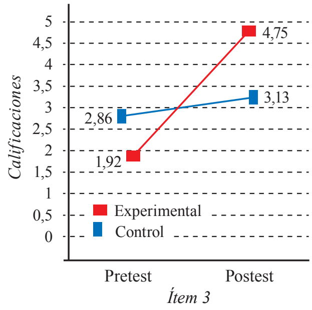


Gráfico 3
Interacción grupos I_3

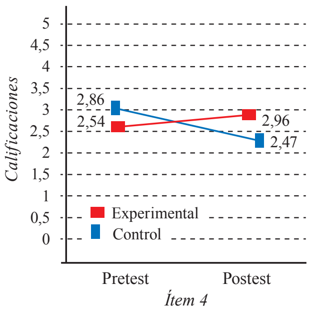


Gráfico 4
Interacción grupos I_4

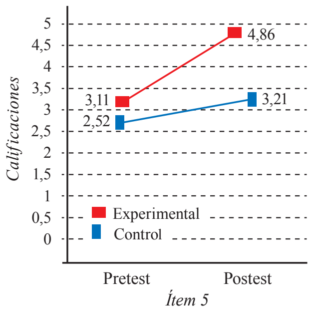


Gráfico 5
Interacción grupos I_5

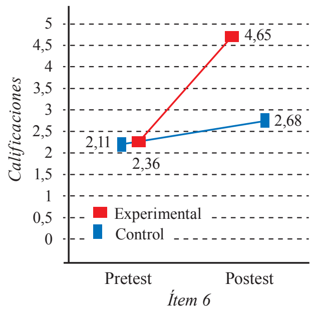


Gráfico 6
Interacción grupos I_6

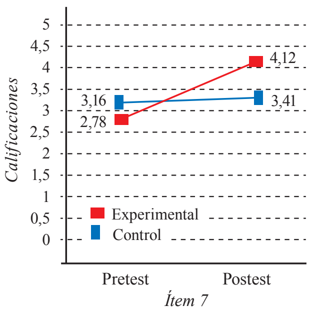


Gráfico 7
Interacción grupos I_7

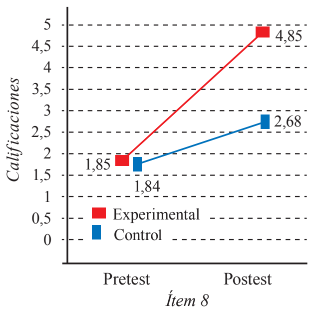


Gráfico 8
Interacción grupos I_8

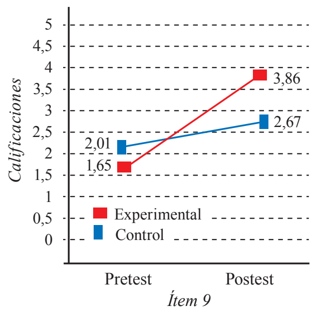


Gráfico 9
Interacción grupos I_9

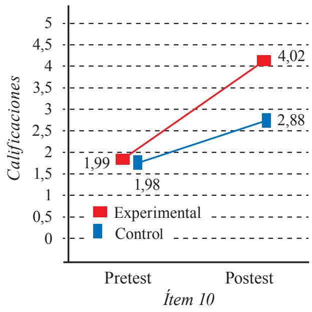


Gráfico 10
Interacción grupos I_{10}

c) Comparativas del *Pretest* y *Postest* entre las medias obtenidas por el Grupo Experimental y el Grupo Control en cada uno de los contenidos.

Atendiendo a los contenidos, los resultados evidencian que los y las integrantes del Grupo Experimental mejoraron significativamente en todos los casos al aplicar el segundo cuestionario, mientras que el Grupo Control se mantuvo estable o aumentaba poco su rendimiento. A la vista de los gráficos 11, 12 y 13, la interacción de grupos y mediciones para el rendimiento por contenidos en *Pretest* –tanto en el GC como en el GE–, demuestran que PO es el más alto, seguido de OB y por último RET.

Asimismo en el GE de *Postest* se evidencia que OB (I_5, I_6, e I_7) es el más alto, seguido de RET (I_8, I_9, e I_{10}) y después PO (I_1, I_2, I_3 e I_4), mientras que el orden de mayor a menor en el GC es OB, PO y RET.

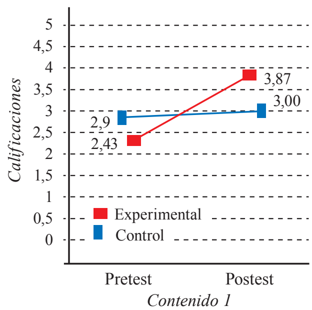


Gráfico 11
Interacción de grupos y mediciones para el rendimiento en el contenido PO

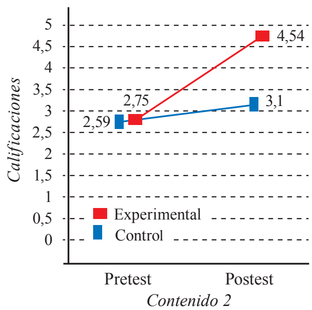


Gráfico 12
Interacción de grupos y mediciones para el rendimiento en el contenido OB

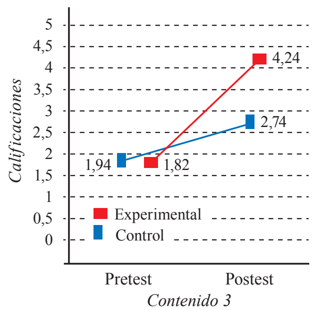


Gráfico 13
Interacción de grupos y mediciones para el rendimiento en el contenido RET

d) Comparativo de medias de los grupos experimental y control total.

Se deduce que a tenor de los resultados totales *(Gráfico 14)*, las medias totales del GC y del GE en *Pretest* eran iguales. No obstante, las puntuaciones de ambos grupos en el *Postest* difieren de 4,27 el GE y 2,95 el GC.

Por lo que el tratamiento aplicado fue positivo, lo cual va en la línea de otros estudios que han demostrado la efectividad de la música para estimular el funcionamiento cognitivo (Cslovjecsek y Linneweber - Lammerskitten, 2011; Sanders, 2012; Anderson, 2014).

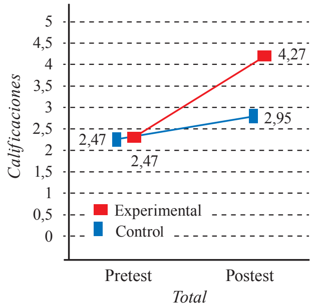


Gráfico 14. *Interacción de grupos y mediciones para el rendimiento total*

8. Discusión y conclusiones

El objetivo general de esta investigación consistente en analizar los efectos de enseñar matemáticas a través de actividades musicales en Educación Infantil se ha cumplido, y resultó una experiencia novedosa, ya que coincidiendo con Hall (2014) se han desarrollado los contenidos matemáticos a través de la música de manera interdisciplinar.

En cuanto a los objetivos específicos podemos decir que, con relación a los conocimientos previos matemáticos que poseían los escolares, la muestra es homogénea en ambos casos respecto al I_1 "Reconocer el círculo, triángulo y cuadrado", al I_2 "Ordenar objetos por su tamaño", al I_6 "Realizar composiciones de las regletas de *Cuisinaire*" y al I_9 "Utilizar distintas unidades de medida".

En cambio, se muestran diferencias respecto al grupo en el I_3 "Clasificar los objetos de la vida cotidiana por su forma" y en el I_7 "Asociar el nombre numérico con la cantidad de elementos". En relación con el sexo, hay diferencias en el I_4 "Disponer los objetos por su altura", el I_5 "Agrupar elementos según la cantidad" y el I_8 "Identificar la mañana, tarde o noche".

Con respecto a los dos grupos (Grupo Control y Grupo Experimental) y a los 10 ítems del cuestionario, se logró que el Grupo Experimental mostrara mayores aciertos en comparación a la primera aplicación del mismo, mejorando sustancialmente en comparación al Grupo Control que se mantuvo estable o aumentó mínimamente su rendimiento. En concreto, destaca la mejoría en los ítems 1, 5, 6 y 8, siendo el 6 en el que se evidenció una mayor diferencia. En los ítems 2, 3, 4, 7 y 9 el Grupo Control tuvo mejores calificaciones en el *Pretest* que el Grupo Experimental, sin embargo, en el *Postest* destacó el Grupo Experimental.

En cuanto al sexo y los ítems se aprecian, en general, efectos positivos del programa de actividades musicales sobre el rendimiento de los estudiantes en los 10 ítems. En el caso del I_4 disminuyó la media del rendimiento *Postest* en hombres y mujeres del GC, y aumentó mínimamente en el GE, pero fue por motivos que según las profesoras tenían una justificación válida y congruente.

Atendiendo a los dos grupos y contenidos, los resultados indican mejoría en el GE respecto al GC en los tres contenidos: propiedades de los objetos, operaciones básicas con elementos concretos, y relaciones espaciotemporales. Esto nos lleva a concluir que las actividades aplicadas fueron positivas, lo cual está en la línea de otros estudios que han demostrado la efectividad de los patrones rítmicos, las intensidades, las duraciones, las alturas, las velocidades, la simetría, etcétera, como mecanismos musicales eficaces en la adquisición de competencias matemáticas (Casals *et al*., 2014). La presente investigación hace eco de esos hallazgos y los extiende al mostrar evidencias de tales beneficios en la edad infantil, en la cual no son frecuentes los estudios, como los autores anteriores indican, además de advertir que es necesario realizar más investigaciones.

Tras la puesta en práctica de esta experiencia, se puede concluir que la aplicación de actividades musicales como recurso en el aprendizaje matemático representa una excelente alternativa para los docentes de Educación Infantil, que buscan satisfacer las necesidades de aprendizaje de los niños y niñas en una etapa fundamental para su desarrollo integral. De este modo se ha logrado el objetivo propuesto, lo que supone una importante aportación al avance del trabajo interdisciplinar de ambas disciplinas.

En definitiva, se lograron alcanzar los conocimientos básicos de las matemáticas –por medio de experiencias musicales guiadas y planeadas– que permitieron estimular al alumnado en un ambiente agradable y propicio, ya que se realizaron con una elevada motivación, armonizando todas sus dimensiones, tanto físicas como emocionales. Por tanto, podemos afirmar que para estas maestras la música representó una excelente alternativa, ya que tuvo un impacto positivo en el rendimiento y en la motivación de los niños y de las niñas de estas aulas. En consecuencia, confirmamos que el aprendizaje debe producirse en un contexto placentero y debe adaptarse a las necesidades que los escolares tienen para explorar y conocer su entorno. Pero también es evidente que se requieren profesionales formados en didáctica de las matemáticas y didáctica musical para acometer este desafío (Montiel y Gómez, 2014).

Referencias bibliográficas

An, S., Ma, T., y Capraro, M. M. (2011). Preservice teachers' beliefs and attitude about teaching and learning mathematics through music: An exploratory study. *School Science and Mathematics Journal, 111*(5), 235-247. https://doi.org/10.1111/j.1949-8594.2011.00082.x

An, S., Capraro, M. M. y Tillman, D. A. (2013). Elementary Teachers Integrate Music Activities into Regula Mathematics Lessons: Effects on Students' Mathematical Abilities. *Journal for Learning through the Arts: A Research Journal on Arts Integration in Schools and Communities*, *9*(1), 1-19. https://doi.org/10.21977/D99112867

Anderson, M. (2014). *A Three-Part Study in the Connections Between Music and Mathematics*. Undergraduate Honors Thesis Collection, Paper 193. Recuperado de: http://digitalcommons.butler.edu/ugtheses/193

Andreatta, M. (2012). *On two open mathematical problems in music theory: Fuglede spectral conjecture and discrete phase retrieval*. Trabajo presentado en Algebra Seminar, TU Dresden. Recuperado de: http://repmus.ircam.fr/_media/moreno/algebraseminar_dresden_andreatta_nov2012_.pdf

Arbonés, J. y Milrud, P. (2011). *La armonía es numérica: música y matemáticas* (1ª ed.) Barcelona: RBA. Libros S. A. ISBN: 9788447360012

Árias, F. (2006). *El Proyecto de Investigación. Introducción a la metodología científica* (5ª ed.). Caracas: editorial Episteme. ISBN: 980-07-8529-9

Balestrini, M. (2001). *Cómo se elabora el proyecto de investigación*. Caracas: BL Consultores asociados.

Cabedo - Mas, A. y Díaz - Gómez, M. (2015). Arte y música en la educación obligatoria, algo más que un detalle curricular de buen tono. *Multidisciplinary Journal of Educational Research, 5*(3), 268-295. http://dx.doi.org/10.17583/remie.2015.1555

Canals Tolosa, M. A. (2001). *Vivir las matemáticas*. Barcelona: Octaedro - Rosa Sensat.

Casals Ibáñez, A., Carrillo Aguilera, C., González - Martín, C. (2014). La música también cuenta: combinando matemáticas y música en el aula. *Revista Electrónica de Música en la Educación, 34*, 1-17. Recuperado de: https://ojs.uv.es/index.php/LEEME/article/view/9861

Cslovjecsek, M. y Linneweber - Lammerskitten, H. (2011). Snappings, clappings and the representation of numbers. *The New Jersey Mathematics Teacher*, *69*(1), 10-12.

Chao - Fernández, R., Mato - Vázquez, Mª D. y López - Chao, A. (2015). ¿Se trabajan de forma interdisciplinar música y matemáticas en educación infantil? *Educaçao e Pesquisa, 41*(4), 1009-1022. http://dx.doi.org/10.1590/S1517-9702201512139014

Decreto 330/2009, de 4 de Junio, por el que se establece el currículo de Educación Infantil en la Comunidad Autónoma de Galicia. (s.f.). (DOG Nº 121, 23/6/2009).

Domínguez - Lara, S. y Merino - Soto, C.M. (2015). ¿Por qué es importante reportar los intervalos de confianza alfa de Cronbach? *Revista Latinoamericana de Ciencias Sociales, Niñez y Juventud,13*(2), 1326-1328. Recuperado de: http://revistaumanizales.cinde.org.co/rlcsnj/index.php/Revista-Latinoamericana/article/view/2030

Fernández Bravo, J. A. (2006). *Didáctica de la Matemática en Educación Infantil*. Madrid: Grupo Mayéutica.

Fernández - Carrión, M. (2011). Música y matemáticas: conexiones curriculares para un mayor éxito educativo. *Revista Educativa Musical*. Recuperado de: https://bit.ly/2FZSsbH

Forsyth, R. F. (1988). *Introduction to Statistics.* Estados Unidos: Mc Graw Hill.

Gareth, R. E. (2016). *From Music to Mathematics: exploring the connections.* Baltimore (Maryland): Jonhs Hopkins University Press.

Gómez Martín, P. (2012). Matemáticas y música en niños pequeños. *RSME (Real Sociedad Matemática Española*). Recuperado de: https://bit.ly/2UMgi4c

Hall, R. (2014). Acoustics labs for a general education math and music course. *Journal of Mathematics and Music, 8*(2), 125–130. https://doi.org/10.1080/17459737.2014.930193

Hughes, J. (2014). Creative experiences in an interdisciplinary honors course on mathematics in music. *Journal of Mathematics and Music, 8*(2), 131–143. https://doi.org/10.1080/17459737.2014.936916

Kochavi, J. (2014). Musica speculativa for the twenty - first century: integrating mathematics and music in the liberal arts classroom. *Journal of Mathematics and Music, 8* (2), 117–123. https://doi.org/10.1080/17459737.2014.927013

Levitin, D. (2011). *Tu cerebro y la Música. El estudio científico de una obsesión humana.* Barcelona: RBA.

Ley Orgánica 2/2006, (LOE) de 3 de mayo, de Educación, núm. 106, Boletín Oficial del Estado, de 4 de mayo de 2006 17158-17207 (2006).

Liern Carrion, V. y Queralt Llopis, T. (2008). *Música y matemáticas: la armonía de los números.* Badajoz: FESPM, 2008. Recuperado de: https://www.fespm.es/IMG/pdf/dem2008_-_musica_y_matematicas.pdf

López Rodríguez, M. (2016). Matemáticas y música de 0 a 3. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia*, 5(1), 65-68. Recuperado de: http://www.edma0-6.es/index.php/edma0-6/article/view/14/16

Mato - Vázquez, D. (2014). *La afectividad hacia las matemáticas.* Charlston, S. C.: Netbiblo.

Mato - Vázquez, D., Chao - Fernández, R. y Chao - Fernández, A. (2017). O piano matemático. *Revista de Estudios Investigación en Psicología y Educación*. Vol. Extra. (06). https://doi.org/10.17979/reipe.2017.0.06.2123

Mato - Vázquez, D. y Muñoz - Cantero, J. M. (2010). Efectos generales de las variables actitud y ansiedad sobre el rendimiento en matemáticas en alumnos de educación segundaria obligatoria. Implicaciones para la práctica educativa. *Revista de Ciencias Psicológicas, 4* (1), 27-40. https://doi.org/10.22235/cp.v4i1.109

Montiel, M. (2017). Un experimento piloto sobre la enseñanza interdisciplinaria integrada a nivel universitario: matemáticas y música. *Foro de Educación, 15*(22), 1-30. https://doi.org/10.14516/fde.532

Montiel, M. y Gómez, F. (2014). Music in the pedagogy of mathematics. *Journal of Mathematics and Music, 8*(2), 151-166. https://doi.org/10.1080/17459737.2014.936109

Noll, T. (2014). Getting Involved with Mathematical Music Theory. *Journal of Mathematics and Music, 8*(2), 167–182. https://doi.org/10.1080/17459737.2014.943818

Oriol de Alarcón, N. (2014). Implementación de la música en la enseñanza general en España. *Música y educación: revista trimestral de pedagogía musical, 100*, 26-43.

Pérez Aldeguer, S. y Leganés Lavall, E. (2012). La Música como herramienta interdisciplinar: un análisis cuantitativo en el aula de lengua extranjera de primaria. *Revista de Investigación en Educación, 10*(1), 127-143. Recuperado de: http://reined.webs.uvigo.es/index.php/reined/article/view/139

Peck, R. (2014). Mathematical music theory pedagogy and the 'New Math'. *Journal of Mathematics and Music 8*(2), 145–150. https://doi.org/10.1080/17459737.2014.927115

Rauscher, F. H, Shaw, G. L. y Ky, C. N. (1993). Music and spatial task performance. *Nature, 365*(611), 6447. https://doi.org/10.1038/365611a0

Sanders, E. (2012). Investigating the relationship between musical training and mathematical thinking in children. *Procedia-Social and Behavioral Sciences, 55*, 1134-1143. https://doi.org/10.1016/j.sbspro.2012.09.607

Skoe, E. y Kraus, N. (2012). A little goes a long way: how the adult brain is shaped by musical training in childhood. *The Journal of Neuroscience*, *32*(34), 11507–11510. https://doi.org/10.1523/JNEUROSCI.1949-12.2012

Toussaint, G. (2013). *The Geometry of Musical Rhythm*. Boca Raton, FL: Chapman and Hall/CRC.

Vicente, S., Rosales, J., Chamoso, J. M., y Múñez, D. (2013). Análisis de la práctica educativa en clases de matemáticas españolas en educación primaria: una posible explicación para el nivel de competencia de los alumnos. *Cultura y Educación, 25*(4), 535-548. https://doi.org/10.1174/113564013808906799

Yust, J. y Fiore, T. (2014). Introduction to the special issue on pedagogies of mathematical music theory. *Journal of Mathematics and Music, 8*(2), 113-116. https://doi.org/10.1080/17459737.2014.951188

Autores

Dorinda Mato - Vázquez. Universidade da Coruña, España. m.matov@udc.es

Rocío Chao - Fernández. Universidade da Coruña, España. rocio.chao@udc.es

Aurelio Chao - Fernández. Universidade da Coruña, España. aurelio.chao@udc.es

Francisco Cordero, Tamara Del Valle, Astrid Morales

USOS DE LA OPTIMIZACIÓN DE INGENIEROS EN FORMACIÓN: EL ROL DE LA INGENIERÍA MECATRÓNICA Y DE LA OBRA DE LAGRANGE[1]

Uses of the optimization of engineers in training: the role of mechatronic engineering and the work of Lagrange

RESUMEN

La enseñanza de la optimización habitualmente se ha convertido en un proceso mecánico y desprovisto de argumentaciones: en general son ignorados sus usos en situaciones específicas de otras disciplinas, tales como la ingeniería. Con la *Teoría Socioepistemológica*, hacemos una investigación empírica donde se problematiza la epistemología de usos para valorar la justificación funcional que demandan otros dominios de conocimiento. Analizamos aspectos de la obra *Mecánica Analítica* de Lagrange y del trabajo de ingenieros mecatrónicos. Se definió a ingenieros en formación como la comunidad de estudio, y se sustenta la emergencia de una situación específica de selección así como sus usos y significados de la optimización. La metodología consistió en la técnica de análisis documental y en entrevistas semiestructuradas. Se encontró que las *situaciones de selección* generan significaciones y argumentaciones de optimización.

PALABRAS CLAVE:

- *Ingeniería*
- *Resignificación*
- *Optimización*
- *Situación de selección*
- *discurso Matemático Escolar*

ABSTRACT

The teaching of optimization, has usually become a mechanical process and devoid of arguments: in general their uses are ignored in specific situations of other disciplines, such as engineering. With the *Socio - Epistemological Theory*, we make an empirical investigation, where the epistemology of uses is problematized to value the functional justification demanded by other domains of knowledge. We analyze aspects of the Lagrange *Analytical Mechanics* work and the work of mechatronic engineers. Engineers in training were defined as the study community and the emergence of a specific selection situation is supported as its uses and meanings of optimization. The methodology consisted in the technique of documentary analysis and semi-structured interviews. It was found that *selection situations* generate optimization meanings and arguments.

KEYWORDS:

- *Engineering*
- *Resignify*
- *Optimization*
- *Selection situation*
- *School Mathematics discourse*

[1] Este artículo reporta la investigación doctoral, no publicada.

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (2019) *22* (2): 185-212.
Recepción: Noviembre 16, 2017 / Aceptación: Junio 30, 2019. DOI: 10.12802/relime.19.2223

RESUMO

O ensino da otimização, geralmente se torna um processo mecânico e desprovido de argumentos: em geral, seus usos são ignorados em situações específicas de outras disciplinas, como a engenharia. Com a *Teoria Sócio-epistemológica*, fazemos uma investigação empírica, onde a epistemologia dos usos é problematizada para avaliar a justificativa funcional exigida por outros domínios do conhecimento. Analisamos aspectos do trabalho de *Mecânica Analítica* de Lagrange e o trabalho de engenheiros mecatrônicos. Engenheiros em formação foram definidos como a comunidade de estudo e o surgimento de uma situação de seleção específica é sustentado como seus usos e significados da otimização da comunidade. A metodologia consistiu na técnica de análise documental e entrevistas semiestruturadas. Verificou-se que as *situações de seleção* geram significados e argumentos de otimização.

PALAVRAS CHAVE:

- *Engenharia*
- *Ressignificação*
- *Otimização*
- *Situação de seleção*
- *discurso de Matemática escolar*

RÉSUMÉ

L'enseignement de l'optimisation est généralement devenu un processus mécanique et dépourvu d'arguments: en général, leurs utilisations sont ignorées dans des situations spécifiques relevant d'autres disciplines, telles que l'ingénierie. Avec la *théorie socio - épistémologique*, nous réalisons une enquête empirique dans laquelle l'épistémologie des utilisations est problématisée pour évaluer la justification fonctionnelle exigée par d'autres domaines de la connaissance. Nous analysons des aspects du travail de Lagrange en *Mécanique Analytique* et des ingénieurs en mécatronique. Les ingénieurs en formation ont été définis comme la communauté d'étude et l'apparition d'une situation de sélection spécifique est prise en charge, de même que ses utilisations et son sens de l'optimisation. La méthodologie consistait en la technique de l'analyse documentaire et des entretiens semi-structurés. Il a été constaté que les *situations de sélection* génèrent des significations et des arguments d'optimisation.

MOTS CLÉS:

- *Ingénierie*
- *Resignification*
- *Optimisation*
- *Situation de sélection*
- *discours en mathématiques scolaires*

1. Introducción

En general, la optimización en la matemática escolar es explicada de la siguiente manera: existen problemas del mundo real que son no lineales y de gran dimensión; para resolver esa clase de problemas se requiere encontrar soluciones óptimas, lo cual deriva en generar herramientas para utilizar a modo de caja negra algoritmos específicos. Se enfoca la atención en el desarrollo de algoritmos de optimización, y los aspectos relevantes del método son la implementación y ejecución de distintas técnicas para la resolución de problemas de programación matemática. Tal vez por eso las investigaciones del campo sugieren instrumentos tales como la tecnología y estudian los procesos cognitivos que intervienen para mejorar las habilidades y las competencias en los estudiantes. Se trata de que aprendan el método, desde el método mismo. Sin embargo, no se formula un cuestionamiento sobre aquello que hace que suceda el método, es decir: cuál es *el entorno de relaciones recíprocas entre el conocimiento matemático y la realidad del que aprende.*

1.1. *Antecedentes*

La optimización es parte de una de las ramas de la matemática llamada Investigación de Operaciones, que consiste en la aplicación y formulación de métodos matemáticos para realizar procesos de toma de decisión. Sin embargo, en su enseñanza, en algunos cursos de matemáticas, los procesos mecánicos se han desprovisto de argumentaciones: los métodos carecen de significados de la matemática en otros dominios de conocimiento tales como la ingeniería.

En el campo disciplinar de la matemática educativa hay investigaciones al respecto, las cuales ocupan diferentes perspectivas: cada una expresa sus objetivos para la matemática, la realidad y la educación. Por ejemplo, Reaño y Malaspina (2011) reportan la poca atención dedicada al tema Programación Lineal en la etapa escolar de estudiantes universitarios, lo cual les provoca dificultades al resolver problemas contextualizados en esa área: les falta coordinación de los diferentes registros de representación y no logran obtener conclusiones al interrelacionar su intuición optimizadora con el lenguaje formal. Por su parte, Malaspina y Font (2010), con la finalidad de romper con el carácter mecanicista de la enseñanza de la optimización, hacen un estudio basado en la intuición como vector constituido por tres componentes: idealización, generalización y argumentación. Con ese vector los estudiantes logran hacer conexiones entre la intuición y la mecanización: por un lado, la intuición hace valorar algunas proposiciones de solución al problema y, por otro, la intuición juega un papel importante en el uso del razonamiento.

Camacho y López (2014) desarrollan una propuesta mediante movilidad de registros de representación para facilitar la comprensión en el manejo de variables básicas de solución de un problema de programación lineal. Y, por su parte, Hollebrands y Okumus (2017) reportan dificultades que futuros profesores experimentaron al razonar sobre la ubicación de los puntos óptimos para encontrar la distancia mínima de un punto a otro en un cubo y en prismas rectangulares. Sin embargo, encontraron sentido a las distancias óptimas y produjeron conjeturas después de arrastrar objetos y realizar mediciones, comparando y contrastando las longitudes de diferentes trayectorias al utilizar las herramientas de Cabri 3D para identificar distancias óptimas. Pero también, hay investigaciones donde la optimización es el contexto para que estudiantes den sentido a las funciones en entornos distintos. Se proponen espacios de trabajo funcionales inspirados en espacios de trabajo geométricos para analizar situaciones en el aula basada en un problema de optimización geométrica, el cual pone en juego un espacio de geometría dinámica, un espacio de medida y un espacio de álgebra (Tran Kiem y Lagrange, 2016).

Los resultados de estas investigaciones justifican la importancia de la enseñanza a través de contextos y problemas reales de los métodos de optimización para estudiar luego los procesos cognitivos de los estudiantes centrados en los objetos matemáticos que intervienen en las propuestas de investigación, pero no así los usos de la optimización en otros dominios de conocimiento; es decir, la funcionalidad[2] del conocimiento matemático no es el referente en la discusión, ni en la problemática educativa.

Entonces, el objetivo de nuestra investigación es formular una epistemología de usos para valorar la justificación funcional que demandan otros dominios de conocimiento. En particular ofrecemos un escenario de ingenieros en formación donde emergen usos de la optimización a través de *una situación de selección*; la cual expresa el entorno del conocimiento matemático y la realidad del que aprende[3].

1.2. *Problemática de la investigación*

Para los fines de la educación consideramos que la realidad es subjetiva y está ligada a las sensaciones de la humanidad, esto favorece el sentido funcional del conocimiento, cuyos usos y resignificaciones suceden en el quehacer disciplinar y en la vida (Cordero, Gómez, Silva - Crocci y Soto, 2015). Sin embargo, eso que se llama "realidad" habrá que restringirlo para tipificarlo; es decir, construir el marco de referencia que exprese los usos rutinarios. De esta manera enfocamos la atención a los usos del conocimiento matemático en los cotidianos del disciplinario, del trabajador y de la gente (Mendoza, Cordero, Solís y Gómez,

2 Matemática funcional es un conocimiento incorporado orgánicamente en el humano que lo transforma y le transforma su realidad. Todo ello en oposición al conocimiento utilitario (Cordero y Flores, 2007).

3 Cabe mencionar que la problemática está orientada al uso de la optimización, el cual se identifica en la selección y construcción de un modelo de aproximación lineal. Es por ello que la situación utilizada no se centra en identificar un máximo o un mínimo, como suele presentarse en un escenario escolar, sino en las significaciones, procedimientos y argumentaciones que emergen en la comunidad de estudio al ser ejecutada la situación.

2018). Hay otros enfoques de investigaciones similares de enorme relevancia, las cuales, para responder a esas realidades de las comunidades, identifican las prácticas sociales que norman el conocimiento matemático. Por ejemplo, se ha estudiado la emergencia del *desarrollo del pensamiento variacional* en comunidades de médicos y de estudiantes de educación media, en sus prácticas profesionales (cardiología - situación no determinista) y escolares (curos de cálculo - situación determinista), respectivamente (Cantoral, Moreno - Durazo y Caballero - Pérez, 2018). Las investigaciones se realizan con la perspectiva del Programa Socioepistemológico Pensamiento y Lenguaje Variacional (PyLV) (Cantoral, 2013). Esta es la problemática general que abordamos en esta investigación.

En particular, en este artículo la especificidad de la problemática de investigación consiste en haber identificado elementos que constituyen un entorno de significaciones y usos de la optimización que emergen en una comunidad de ingenieros en formación. Esos elementos fueron la funcionalidad, la transversalidad y la situación específica lo que conllevó una epistemología de usos de la optimización; la cual confronta las técnicas algorítmicas habituales de la matemática escolar para la resolución de problemas de optimización, y contribuye a la conformación del marco de referencia planteado en la problemática general.

2. Marco teórico

Conocer el *entorno de relaciones recíprocas entre el conocimiento matemático y la realidad del que aprende* es una tesis fundamental para favorecer los aprendizajes de los significados de la matemática.

La Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa (Cantoral, 2013) considera cuatro principios que sirven de fundamento a ese objetivo: el normativo de la práctica social, el de racionalidad contextualizada, el de relativismo epistemológico y el de significación progresiva (resignificación). Estos principios delinean una perspectiva teórica basada en la experiencia empírica de las comunidades que explica el enigma de la construcción social del conocimiento matemático y la difusión institucional. Un constructo medular es la práctica social, que se define como un sistema complejo de procesos de dimensión social en el que se problematiza el saber matemático considerando los saberes sabio, técnico y popular para sintetizarlos en la sabiduría humana.

Dentro del Marco de la Sociepistemología, el objetivo de nuestro programa de investigación (sección 1.3) consiste en revelar los usos del conocimiento matemático y sus resignificaciones en las comunidades de conocimiento matemático de la gente:

en la escuela, en el trabajo o la profesión y en sus realidad a través de dos líneas de trabajo simultáneas, la Resignificación del Conocimiento Matemático y su Impacto Educativo. En la primera se problematizan las categorías de conocimiento matemático que suceden en las comunidades entre diferentes dominios de conocimiento que entran en juego: el discurso matemático escolar, el campo disciplinar y el cotidiano de la comunidad. En la segunda se conforman los multifactores y estadios que coadyuvan a conformar programas de acompañamiento permanentes entre el profesorado de matemáticas (Cordero, 2016b).

La Teoría Socioepistemológica promueve la descentración de los objetos matemáticos y prioriza la forma en que la gente usa la matemática desde su cotidiano en una situación específica. En otras palabras, se recupera el carácter social de la matemática que ha sido soslayado y el foco de atención se dirige hacia las prácticas que norman la construcción social del conocimiento matemático, CSCM (Cantoral, Reyes - Gasperini y Montiel, 2015; Cordero et al., 2015) y que se manifiestan a través de su uso. A continuación, se delimitará el programa general para los fines de esta investigación sobre los usos de la optimización.

2.1. *Marco de referencia*

El marco de referencia (MR) es una estructura de relaciones que deberá reconocer la funcionalidad del conocimiento matemático de las comunidades en cuestión. Estas relaciones estarán compuestas por la transversalidad y la pluralidad del conocimiento matemático (los dominios multidisciplinares de conocimiento) en situaciones específicas propias de las comunidades. Así, en una dialéctica entre la matemática y la realidad, ambos conocimientos se mezclan o se convierten en una sola cosa, se transforman en una unidad de saberes, de conocimientos en uso de la gente. La transformación descentraliza al objeto y los usos son resignificados entre situaciones y entre escenarios: *el académico - escolar; la profesión - trabajo*; *y el cotidiano - ciudad* (Cordero, 2016b). Para los fines de esta investigación, la estructura estará compuesta por una situación específica (*situación de selección*) que conlleva la descentración del objeto en acciones de resignificar los usos (epistemología de usos) en una comunidad de ingenieros en formación.

2.2. *Uso del conocimiento matemático*

Los usos del conocimiento matemático U(CM) son las funciones orgánicas de las situaciones (funcionamientos), que se manifiestan por las "tareas" que componen la situación, y la forma del uso será la clase de esas "tareas". Las tareas pueden ser actividades, acciones, ejecuciones y alternancias de dominios propias del organismo de la situación (Cordero y Flores, 2007).

2.3. *Resignificaciones*

Cuando la alternancia de tareas sucede, se genera una nueva función orgánica que debate con las formas de los usos. Este "acto de uso" es la resignificación de usos del conocimiento matemático (Res(U(CM)) (Cordero y Flores, 2007). Las Res(U(CM) suceden en situaciones específicas (*Se*). Las *Se* son parte de ese entorno (relaciones recíprocas) en cada uno de los escenarios. Y cada Se_i se conforma por elementos secuenciales que construyen lo matemático: significación, procedimiento e instrumento, que derivan la argumentación de la situación (Arg (CM)). Arg(CM)_i es una Res(U(CM))_i construida en la Se_i (Cordero, 2016a).

2.4. *Categoría del Conocimiento Matemático*

La Res(U(CM)) corresponde a una epistemología de usos que en el contexto de la matemática escolar es inusual; es una matemática en forma de procesos permanentes (usos y significados) que emergen en la comunidades en contraparte de objetos terminales (conceptos y definiciones) que no necesariamente emergen en los sujetos (Cordero, Mena-Lorca y Huincahue, 2017). Con esta orientación, a la Res(U(CM)) se le denomina Categoría del Conocimiento Matemático (ζ(CM)), en ese sentido categoría significa un tipo de conocimiento matemático distinto al centrado en el objeto matemático y que favorece la descentración del objeto (Mendoza y Cordero, 2018).

2.5. *Matemática funcional*

En términos genéricos, la matemática que se va construyendo con las resignificaciones que realizan las comunidades, se le llama matemática funcional (Mendoza y Cordero, 2018; Cordero, 2016a), que, llanamente, es un conocimiento útil de las personas en situaciones de la vida mundana, del trabajo y la profesión (Arendt, 2005). Ese conocimiento útil está compuesto de usos y significados, los cuales son resignificados en el tránsito de las situaciones por las comunidades.

2.6. *Transversalidad*

Las transversalidades (T_i) son las resignificaciones de los usos del conocimiento entre escenarios o dominios de conocimiento (D_i) (por ejemplo entre la escuela y el trabajo; o entre la matemática y la ingeniería). Las transversalidades suceden en momentos (Mo_i), los cuales son fases en el proceso situacional (Mendoza y Cordero, 2018).

Con este Marco teórico se estudian los usos y las resignificaciones de la optimización cuando son problematizadas en el entorno de las relaciones recíprocas entre los escenarios. Para tal fin se plantea la hipótesis de usos y se definen los escenarios.

Hipótesis. Optimizar es proponer un comportamiento ideal o estable en una situación específica. La propuesta misma pasa por un *proceso de selección* normado por la situación: *patrones de adaptación, distinción de cualidades,* y *lo estable*. La relación de estos tres elementos genera la argumentación de lo óptimo.

Escenarios. Obra matemática de Lagrange, ingeniería mecatrónica e ingenieros en formación (ver Figura 1).

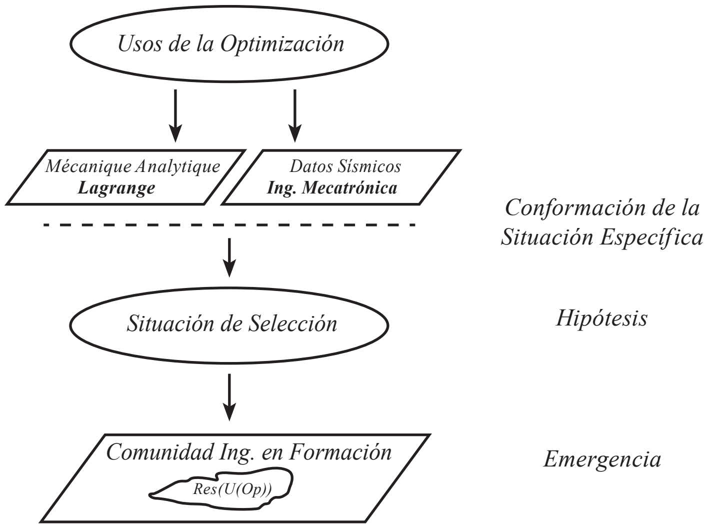


Figura 1. Corpus del Marco Teórico - Metodológico

Con este Marco Teórico revelamos los usos del conocimiento matemático que emergen en las comunidades. En particular revelamos los usos de la optimización en la mecánica analítica de Lagrange, en los datos sísmicos de la ingenieros mecatrónicos y en los ingenieros en formación. Los constructos señalados anteriormente ayudan a establecer los usos de la optimización en situaciones específicas y en diferentes escenarios (la obra matemática, la ingeniería mecatrónica y la matemática escolar). Con los funcionamientos de los usos (buscar lo estable o el comportamiento ideal) y la forma de los usos (equilibrios y reducción de tiempos de análisis) se generan las resignificaciones lo que hace que la *situación de selección* sea transversal entre los escenarios, no así el método de optimización que oferece la matemática escolar.

3. Aspectos metodológicos

3.1. *Definición de la comunidad de estudio*

Se realizaron inmersiones con comunidades de ingenieros para identificar las condiciones y escenarios ad hoc para recolectar datos sobre los usos y resignificaciones del conocimiento matemático. La selección de las comunidades consistió en la disponibilidad de sus miembros para ser video-grabados y entrevistados en los escenarios del trabajo profesional. Se seleccionó a una comunidad de ingenieros mecatrónicos. Con métodos etnográficos (Guber, 2001) y estudio de caso, se caracterizó su quehacer disciplinar; la cual consistió en identificar las situaciones rutinarias donde usan el conocimiento matemático y las problematizaciones de su saber matemático. El análisis de estas caracterizaciones se realizó a través de los constructos definidos en el Marco teórico (sección 2) y con la técnica de análisis documental[4] (Rojas, 2011) y entrevistas semi-estructuradas. Para problematizar el saber matemático se analizó la resignificación del uso de la optimización en el escenario de la obra matemática, la *Mécanique Analytique* de Lagrange y en el escenario de la ingeniería mecatrónica, interpretación de datos sísmicos. Por un lado, con la técnica de análisis documental, y por otro, con la técnica de entrevista semi - estructurada se identificaron patrones y relaciones entre ellos alusivos a la *selección de un comportamiento ideal*; organizados a través de un *instrumento* (*lo estable*) acompañado de sus *significaciones (patrones de adaptación)* y *procedimientos (distinción de cualidades*, $\nabla f(x) - \lambda \nabla g(x) = 0$) y con la unidad de análisis compuesta por los constructos, *uso, resignificación* y *transversalidad*, se conformó la situación de selección (resignificación de usos de la optimización). Los usos y resignificaciones de la optimización se distinguieron por sus funcionamientos y formas en la *Mécanique Analytique* de Lagrange (ecuaciones de equilibrio y problemas de estática expresados por ecuaciones matemáticas) y en la interpretación de datos sísmicos de la ingeniería mecatrónica (algoritmo genético y reducir los tiempos de análisis de los datos sísmicos). La transversalidad de los usos de la optimización suceden entre los escenarios, la matemática y la ingeniería mecatrónica.

El método consistió en revelar los usos que subyacen en los escenarios. Se asume una estructura situacional compuesta por un instrumento que conlleva significaciones y procedimientos que en conjunto derivan argumentaciones (resignificaciones). Estos elementos subyacen en el uso del conocimiento

[4] En esta investigación se interpretó a la técnica de análisis documental como un proceso de "inferencia" donde la información es estudiada, interpretada y sintetizada minuciosamente para dar lugar a una formulación que subyace al documento original (ver sección 4.1).

matemático en las profesiones y en las obras matemáticas, en este caso en la ingeniería mecatrónica y en la *Mécanique Analytique* de Lagrange. En ese sentido el análisis documental y la entrevista semiestructurada ayudan a encontrar relaciones y patrones que conforman aspectos de los cuatro elementos. En este caso lo estable de un comportamiento o el comportamiento ideal es el instrumento sobre el cual suceden significaciones de patrones de comportamiento que buscan adaptarse a lo estable o al ideal, en el contexto de la situación. Las significaciones derivan procedimientos que distinguen cualidades para seleccionar lo optimo del comportamiento (ver sección 4.1.). Estos elementos articulados cristalizan la situación de selección, la cual es la referencia para establecer el uso, la resignificación y transversalidad de la optimización (ver sección 4.2.).

Posteriormente, se tomó como base a la situación de selección para diseñar actividades y analizar su emergencia en una comunidad de ingenieros en formación con distintas ingenierías y semestres. Concluimos que la emergencia de los usos de la optimización se confronta con la matemática escolar habitual de la optimización: implementación y ejecución de distintas técnicas algorítmicas para resolución de problemas de programación matemática.

4. Análisis y discusión

4.1. *Los usos de la optimización en dos escenarios*

4.1.1. *Ingeniería mecatrónica. Un escenario profesional*

Seleccionar los mejores métodos y tecnologías para diseñar y desarrollar de forma integral un producto o proceso, haciéndolo más compacto, de menor costo, con valor agregado en su funcionalidad, calidad y desempeño, es la función de la ingeniería mecatrónica. Por ejemplo, la interpretación sísmica consiste en obtener información geológica significativa a partir de datos sísmicos. Orozco, Ortiz, Urrutia, Martín, Rodríguez y Villaseñor (2013) dicen que a menudo esos procesos son tediosos, consumen mucho tiempo y son muy subjetivos. Lo anterior se debe a la cantidad de información recibida por los habituales mecanismos de recolección de datos sísmicos y la subjetiva lectura e interpretación de las imágenes que provienen de sensores de sonidos (ver Figura 2); el sensor recoge la señal recibida (entrada), precede a una función de transferencia y genera una señal de salida, la cual se representa a través de imágenes.

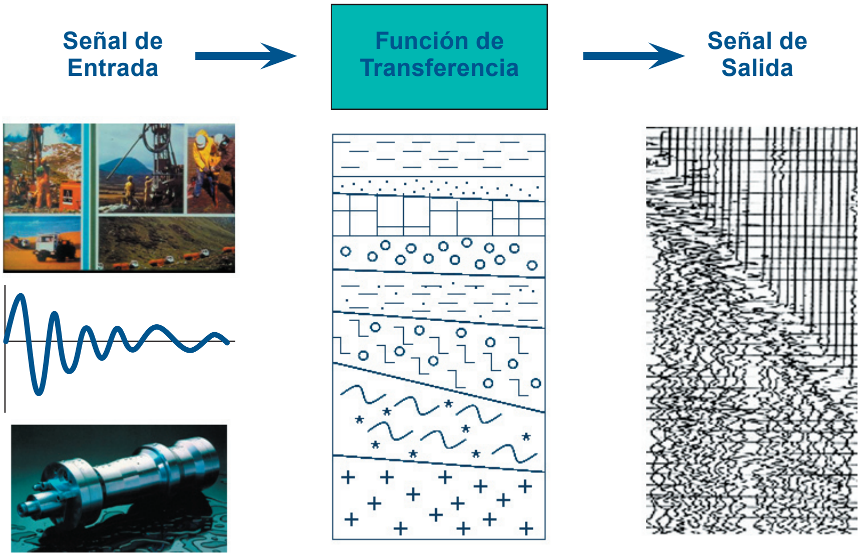


Figura 2. Procesos de información sísmicos

Cada imagen de datos sísmicos extraída debe ser procesada por un sistema llamado Escala de Grises. Cuando se tiene un objetivo de exploración, la cantidad de imágenes que podrían ser interpretadas en el cubo de datos sísmicos (ver Figura 3) es de 1 000 a 2 000, cuya lectura tomaría unos 125 años a los intérpretes. Esto implica que solo pueden interpretarse algunas de las imágenes, provocando mayor subjetividad de los resultados que arroje el intérprete.

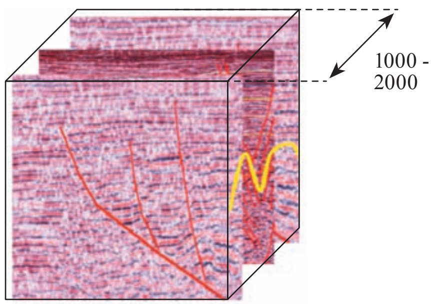


Figura 3. Cubo de datos sísmicos procesados

Problema que se resuelve. Los ingenieros mecatrónicos pretenden proporcionar a los intérpretes una herramienta computacional para reducir los tiempos de análisis de los datos sísmicos en la búsqueda de estructuras geológicas. Ayudan a los intérpretes sísmicos a detectar diapiros de sal[5] (Orozco et al., 2013).

El grupo de mecatrónicos entrevistados señaló que es posible que al aumentar visualmente (numéricamente con filtros o combinaciones) la estructura interna de la imagen de los cuerpos de sal otras áreas de interés puedan aparecer mejoradas facilitando su interpretación. Así es como proponen un nuevo método para mejorar la interpretación de datos sísmicos utilizando un algoritmo genético para optimizar un núcleo que, cuando convoluciona[6] con la imagen sísmica, parece mejorar las características internas de los organismos de sal. De esta manera, buscan reducir tiempos, costos y riesgos en el proceso de exploración e incrementar la productividad de los geocientíficos. Los algoritmos genéticos son un enfoque computacional de inspiración biológica para la optimización a través de una búsqueda simultánea en diferentes áreas del espacio de función de costos, el cual ha demostrado su utilidad como técnica de inversión o de optimización en varias áreas, incluyendo las geociencias. Frente a lo anterior, Orozco et al. (2013) proponen desarrollar un algoritmo genético (GA) como una herramienta de optimización para encontrar el núcleo que minimiza la diferencia entre la imagen filtrada y una imagen deseada. Esta última es construida manualmente para destacar las características de particular interés (Orozco et al., 2013, p. 2).

Los algoritmos genéticos emulan el proceso de evolución natural y se basan en dos premisas: la supervivencia del más fuerte y la mejora de nuevos individuos a través de la reproducción sexual. En un primer momento, una población inicial que abarca uniformemente el espacio de búsqueda se genera de forma aleatoria y cada individuo (o cromosoma) se representa como un conjunto de elementos, comúnmente conocidos como genes. La población inicial es evaluada con la función de costo para descartar aquellos individuos que no están tan bien adaptados como el resto de ellos. Los organismos autorizados para sobrevivir se emparejan y se reproducen a través de una operación de cruce, dando a luz una nueva generación. También se evalúa la nueva generación, permitiendo solo la sobrevivencia de los individuos más aptos. De esta manera, el algoritmo genético se detiene cuando se alcanza un determinado número de generaciones o cuando se ha alcanzado un cierto umbral de la función de costo.

5 Los diapiros de sal son estructuras geológicas intrusivas, formadas por masas de evaporitas (sales, anhidrita y yeso) que ascienden por las capas sedimentarias de la corteza terrestre, atravesándolas y deformándolas. Existe un gran interés por construir herramientas computacionales para ayudar a los intérpretes sísmicos a detectar diapiros de sal, ya que los objetivos de exploración petrolera pueden estar ubicados cerca o debajo de los cuerpos de sal (Orozco et al., 2013).

6 Dado de que se trabaja en pixeles, la convolución es, obviamente, una suma finita (no una integral) y, naturalmente, en forma matricial.

Regresando a nuestra materia. Tenemos un problema real en una práctica profesional donde se propone desarrollar un algoritmo genético como una herramienta de optimización para encontrar el núcleo que minimiza la diferencia entre la imagen filtrada y una imagen deseada. Para los fines de la investigación queremos destacar lo siguiente:

- Antes de seleccionar el filtro núcleo, fue necesario adaptar la imagen original aplicándole diferentes filtros –que buscan la evolución de la imagen original– hasta llegar a minimizar la diferencia entre las imágenes filtradas y la imagen deseada. Luego de la adaptación, se realiza la selección de la imagen convolucionada, la que posee el filtro que generó una imagen con menos diferencias a la imagen deseada.
- Después de adaptar la imagen original (convolucionada), fue necesario distinguir las cualidades de las imágenes convolucionadas, respecto de la deseada, para saber cuáles descartar y cuáles no. La selección de la imagen que posee una menor diferencia con la deseada dependerá exclusivamente de las cualidades que distinguen de la imagen convolucionada.

4.1.2. *La Obra matemática. Los multiplicadores de Joseph-Louis Lagrange*

La intención de Joseph-Louis Lagrange (1736-1813) en su obra *Mécanique Analytique,* publicada en 1788, fue expresar los problemas de estática mediante ecuaciones matemáticas. Para eso hizo lo siguiente:

Lagrange define las ecuaciones de condición:[7]

Sean $L = 0$, $M = 0$, $N = 0$, etc., las diferentes ecuaciones de condición dadas por la naturaleza del sistema, las cantidades L, M, N, etc. Son las funciones finitas de las variables x, y, z, x,' y,' z,' etc.; diferenciando esas ecuaciones, se tendrán las siguientes ecuaciones:

> "$dL = 0$, $dM = 0$, $dN = 0$, …, les quelles donneront la relation qui doit avoir lieu entre les différentielles des mémes variables. En général, nous représenterons par $dL = 0$, $dM = 0$, $dN = 0$, …, les équations de condition entre ces différentielles, soit que ces équations" (Lagrange, 1788/1963, p.69).[8]

[7] Las ecuaciones de condición de Lagrange actualmente corresponden a las condiciones laterales expresadas por las funciones $f(x)$ y $g(x) = 0$ con $\nabla g(x) \neq 0$ para generar la expresión $\nabla f(x) - \lambda \nabla g(x) = 0$.

[8] "$dl = 0$, $dM = 0$, $dN = 0$, ..., las cuales darán la relación que debe tener lugar entre las diferenciales de las mismas variables. En general, representaremos por $dl = 0$, $dM = 0$, $dN = 0$, ..., las ecuaciones de condición entre estas diferenciales, sean cuales sean estas ecuaciones".

Las ecuaciones, $dL=0$, $dM=0$, $dN=0$, etc., darán la relación entre las demás diferenciales de las mismas variables. Así, las ecuaciones de condición serán representadas entre estas diferenciales $dL=0$, $dM=0$, $dN=0$, etc., ya sean diferenciales exactas o no exactas, pero deben ser lineales.

Sin embargo, Lagrange formula esas ecuaciones solo para eliminar un número semejante de diferenciales en la fórmula general del equilibrio. Los coeficientes de las diferenciales restantes se igualan cada uno a cero por la teoría de la eliminación de las ecuaciones lineales. Se tendrán los mismos resultados si se añade a la fórmula las diferentes ecuaciones de condición $dL=0$, $dM=0$, $dN=0$, etc., multiplicadas cada una por un coeficiente indeterminado. Enseguida se iguala a cero la suma de todos los términos que se encuentran multiplicados por una misma diferencial, lo que dará el mismo número de ecuaciones que de diferenciales. Al final, se eliminan de esas últimas ecuaciones los coeficientes indeterminados, por los que se multiplicó las ecuaciones de condición. Esta regla permite encontrar las condiciones de equilibrio de cualquier sistema propuesto; "De lá résulte donc cette régle extrémement simple pour trouver les conditions de l'équilibre d'un systéme quelconque proposé" (Lagrange, 1788 / 1963, p. 70).[9]

Se tomará la suma de los "momentos" de todas las potencias –referidas a fuerza– que deben estar en equilibrio, y a esta se le añadirá las diferentes funciones diferenciales que han de hacerse cero por las condiciones del problema después de haber multiplicado cada una de esas funciones por un coeficiente indeterminado. Se debe igualar todo a cero y se tendrá así una ecuación diferencial que se tratará como una ecuación ordinaria de máximos y mínimos (Lagrange, 1867), de la cual desprenderá tantas ecuaciones particulares finitas como variables. Estas ecuaciones se librarán de los coeficientes indeterminados por eliminación y se proporcionará todas las ecuaciones necesarias para el equilibrio.

Lagrange (1788 / 1963) expone que "L'équation différentielle dont il s'agit sera donc de cette forme, $Pdp + Qdq + Rdr + \cdots + \lambda dL + \mu dM + \nu dN + \cdots = 0$" (p. 70). Esta ecuación diferencial, en la cual λ, μ, ν, etc., son cantidades indeterminadas, es a la que Lagrange llama ecuación general de equilibrio.

Correspondiente para cada coordenada de cada cuerpo del sistema, con una x, esta ecuación se llevaría a una de la forma:

$$P\frac{\partial p}{\partial x} + Q\frac{\partial q}{\partial x} + R\frac{\partial r}{\partial x} + \ldots + \lambda\frac{\partial L}{\partial x} + \mu\frac{\partial M}{\partial x} + \nu\frac{\partial N}{\partial x} + \ldots = 0$$

de tal suerte que el número de esas ecuaciones sea igual al número de todas las coordenadas del cuerpo. Lagrange le llama ecuación principal del equilibrio.

9 "De allí sigue, por tanto, esta regla muy fácil para encontrar las condiciones de equilibrio de un sistema propuesto cualquiera".

Lagrange concluye que cada ecuación de condición es equivalente a una o varias fuerzas aplicadas al sistema, siguiendo las direcciones dadas, o en general, tendientes a hacer variar los valores de las funciones dadas; de suerte que el estado de equilibrio del sistema será el mismo, ya sea que se emplee la consideración de esas fuerzas o que se tenga en cuenta a las ecuaciones de condición. Recíprocamente, dichas fuerzas pueden dar lugar a ecuaciones de condición resultantes de la naturaleza del sistema dado y, haciendo uso de esas fuerzas, sería posible considerar los cuerpos como enteramente libres y sin ninguna restricción. Esta sería una razón metafísica del por qué la introducción de los términos λdL, μdM, vdN, …, en la ecuación general del equilibrio, garantiza que esta ecuación pueda ser tratada como si todos los cuerpos estuvieran enteramente libres: en esto consiste el espíritu del método. Las fuerzas en cuestión dan lugar a las resistencias que los cuerpos deberían de sufrir en virtud de su relación mutua, o de la parte de los obstáculos que, por la naturaleza del sistema, podrían oponerse a su movimiento, las cuales deben ser iguales y directamente opuestas a las presiones ejercidas por los cuerpos (Lagrange, 1788/1963, p. 73).

En el planteamiento anterior de Lagrange subyacen elementos que dan sentido a la hipótesis formulada en la sección anterior: *optimizar es proponer un comportamiento ideal o estable en una situación específica*. La propuesta misma pasa por un proceso de selección normado por la situación: patrones de adaptación, distinción de cualidades, y lo estable. La relación de estos tres elementos genera la argumentación de lo óptimo.

Lagrange quiere conformar la ecuación de equilibrio para tratar los problemas de estática; para tal fin desarrolla el siguiente proceso:

- Antes de seleccionar la ecuación de condición que permite generar la relación mutua (ecuación del equilibrio), determina la diferencial de las ecuaciones que representan la fuerza de los cuerpos ($Pdp; Qdq; Rdr$...) y de las ecuaciones que representan la resistencia ($\lambda dL; \mu dM; vdN$...). En este contexto, el rol de los diferenciales de las ecuaciones, se infiere, es la adaptación a una misma naturaleza: al calcular el diferencial, Lagrange está *adaptando* un patrón para que expresen las pequeñas variaciones y así buscar una relación mutua entre dos ecuaciones que expresen lo mismo (en este caso el patrón que importa es la fuerza que ejerce y no el tipo de ecuación); y, por consiguiente, poder resolver la ecuación del equilibrio.
- Luego de haber adaptado las ecuaciones de condición y de la fuerza de los cuerpos (calculándoles la diferencial), Lagrange distingue las cualidades de las ecuaciones de condición, ya que se les debe multiplicar un coeficiente indeterminado (λ, μ *y* v) para generar una resistencia que soporte la fuerza de los cuerpos, logrando una relación mutua entre ellas.

– Se buscan comportamientos con tendencia a las de la fuerza de los cuerpos (*Pdp; Qdq; Rdr...*): se seleccionan multiplicadores (λ, μ, v...) para que las ecuaciones de condición (*dL; dM; dN...)* tiendan a las fuerzas de los cuerpos, y así dichas fuerzas y las respectivas resistencias tengan una relación mutua, conformando la ecuación del equilibrio (ver Figura 4).

Tiende a

$$\underbrace{Pdp+Qdq+Rdr+\cdots+\lambda dL+\mu dM+vdN+\cdots=0}_{\text{Relación mutua que permite conformar la ecuación}}$$

Figura 4. Búsqueda de tendencias

4.1.3. *Epílogo según los escenarios: las resignificaciones de la optimización*

La argumentación de la optimización ofrece resignificaciones de un comportamiento de “datos o información” en diferentes escenarios donde lo ideal o lo estable (el instrumento), en un contexto de la mecánica clásica se significa a través de una ecuación de equilibrio, lo que deriva el procedimiento “multiplicar un coeficiente indeterminado (λ, μ *y* v) para generar una resistencia” y en un contexto de la geociencia se significa por una imagen propuesta que deriva el procedimiento “distinguir de la imagen convolucionada”.

Las Resignificaciones suceden porque con la alternancia de tareas, por un lado, de la mecánica analítica y, por otro, de la mecatrónica, se genera una nueva función orgánica (lo ideal o lo estable) que debate con las formas expresadas con la distinción de cualidades: coeficientes indeterminados y convoluciones. Estas significaciones de usos suceden en las situaciones específicas correspondientes: reducir los tiempos de análisis de los datos sísmicos y conformar la ecuación de equilibrio para tratar los problemas de estática.

La hipótesis adquiere plausibilidad. Los métodos de optimización en la matemática escolar se centralizan en *objetos terminales* (conceptos y definiciones) sin significados y, por el contario, los escenarios analizados se centralizan en *procesos permanentes* (conocimiento en uso) con significados.

4.2. *La emergencia de las resignificaciones de la optimización en ingenieros en formación*

La resignificación de los usos de la optimización es una relación del MR que genera una categoría de conocimiento matemático para descentraliza al objeto matemático. La epistemología es organizada en la *situación de selección* (ver Tabla I).

TABLA I
Epistemología del uso de la optimización

Construcción de lo matemático	*Situación de Selección*
Significación	Patrones de adaptación
Procedimiento	Distinción de cualidades
Instrumento	Lo estable
Argumentación / Resignificación	*Optimización*

4.2.1. *Actividades*

El diseño. La resignificación de los usos: el ideal o lo estable

La situación consta de dos actividades que componen dos momentos de transversalidad. En este caso, se busca la resignificación a partir de la formulación de una función ideal que caracterice lo estable (ver figura 5).

En la actividad 1 se pide seleccionar explícitamente entre las opciones que allí aparecen; lo estable está en la búsqueda del menor margen de error entre los datos de la tabla y las funciones que representan esos datos. Para lograrlo, será necesario adaptar los datos de la tabla (expresados por puntos aislados) o de las funciones (líneas rectas, continuas) que simbolizan un comportamiento de variación uniforme de llenado, y distinguir las cualidades de cada función para seleccionar la que mejor represente los datos de la tabla.

ACTIVIDAD 1

Con un flujo constante de agua se llena un recipiente de forma desconocida. Al completar la capacidad del recipiente se obtiene la siguiente información:

Tiempo de llenado (*segundos*)	*Altura del volumen que lleva el agua dentro de la botella en milímetros* (*mm*)
0	30
5	132
15	256
30	447
45	606

¿Qué función representa de mejor manera el llenado del recipiente?

a) $f(s) = 15s + 73{,}5$
b) $f(s) = 13{,}4s + 35$
c) $f(s) = 14{,}03s + 30$
d) $f(s) = 14{,}03s + 73{,}5$

Describe el procedimiento que te permite realizar tu elección.

ACTIVIDAD 2

Con un flujo constante de agua se llena un recipiente que posee una forma desconocida. La información arrojada al llenarse el recipiente se muestra en la siguiente tabla:

Tiempo de llenado (*segundos*)	*Altura del volumen que lleva el agua dentro del recipiente* (*mm*)
1	15
3	40
6	47
8	85
9	88
...	...
40	

Si nos conviene interpretar el llenado del recipiente como un comportamiento de variación uniforme, entonces:

¿Cuál es ese comportamiento?

Si a los 40 segundos de llenado el recipiente rebasa su capacidad máxima, ¿Cuál es la altura del recipiente?

Describe el procedimiento que te permite realizar tu elección.

Figura 5. Actividades e ingenieros en formación

En la actividad 2, se solicita identificar la altura del recipiente a partir de los datos de la tabla. Para ello, tendrán que formular lo estable, es decir, un comportamiento ideal que represente ese llenado (en este caso la línea recta, dado que se sugiere un comportamiento de variación uniforme). Para su formulación, se deberán distinguir las cualidades del comportamiento de los puntos y, tales puntos se deberán adaptar en un comportamiento continuo (en este caso, en una línea recta). Una vez seleccionado el comportamiento de los datos de la tabla se podrá proponer una altura aproximada del recipiente.

4.2.2. *Puesta en escena y análisis de resultados*

Se recurrió a estudiantes de ingeniería que, de manera voluntaria, accedieran a las actividades diseñadas. Se aplicaron a tres grupos de ingenieros en formación de diferentes instituciones universitarias mexicanas; dos de ellos con cuatro integrantes y el otro con seis. El rango de semestres cursados por los estudiantes de la muestra fue de uno a siete, y las carreras de ingeniería comprometidas fueron en sistemas automotrices, mecánica, robótica, geofísica, química industrial y biotecnología (ver Tabla II).

TABLA II
Perfiles participantes en la implementación de la situación

Código	*Grupo*	*Carrera que cursa*	*Semestres cursados*
X_1	Grupo 1	Mecánica	1
X_2	Grupo 1	Mecánica	1
X_3	Grupo 1	Mecánica	1
X_4	Grupo 1	Mecánica	1
X_5	Grupo 2	Geofísica	1
X_6	Grupo 2	Sistemas automotrices	1
X_7	Grupo 2	Sistemas automotrices	1
X_8	Grupo 2	Sistemas automotrices	1
X_9	Grupo 3	Química industrial	7
X_{10}	Grupo 3	Química industrial	7
X_{11}	Grupo 3	Química industrial	7
X_{12}	Grupo 3	Biotecnología	3
X_{13}	Grupo 3	Robótica	5
X_{14}	Grupo 3	Robótica	5

En la primera actividad, en la cual debían elegir una de las expresiones algebraicas que represente de mejor manera el comportamiento de los datos de la tabla, nos encontramos con diferentes propuestas de solución. Una de ellas fue identificada como una selección visual del primer punto de la tabla (0,30), para relacionarlo con el coeficiente b en la ecuación $f(s) = as + b$, distinguían como cualidad que el recipiente tenía agua en su interior antes de ser llenado, por eso b debía ser 30. Y para determinar el parámetro a calcularon el promedio de las razones de cambio, el cual fue el patrón que se utilizó para adaptar el comportamiento de las razones de cambio, representado en 14,03 (ver Figura 6).

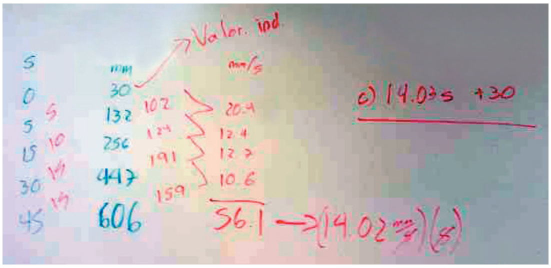


Figura 6. Promedio de las diferencias e identificación del punto de inicio presentado por los participantes X_1 y X_2

Otras propuestas depositaban la atención en la razón de cambio de los datos de la tabla y luego los comparaban con el primer término *as* de cada una de las funciones de la actividad 1, sin prestar interés al coeficiente *b*. Además, se generaron planteamientos donde los futuros ingenieros tabularon las funciones del inciso *a* al inciso *d* para distinguir cualidades antes de seleccionar. Por eso compararon y registraron el porcentaje de error respeto a los datos de la tabla, y, para tomar la solución, consideraron el menor de los porcentajes de error (ver Figura 7).

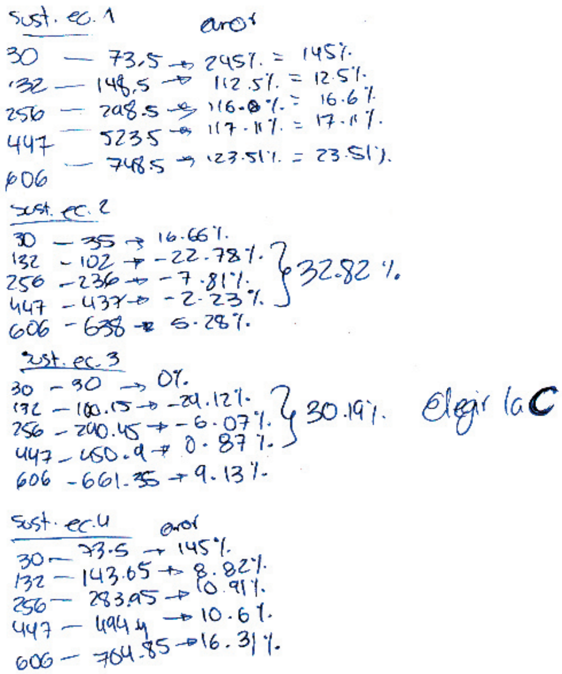
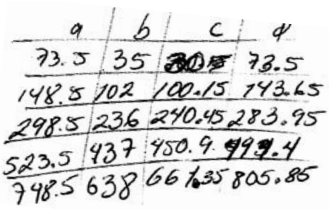


Figura 7. Porcentajes de error, presentado por los participantes X_9, X_{10} y X_{13}

Otros estudiantes de ingeniería compararon las alturas del volumen que lleva el agua dentro de la botella (datos tabulados), en relación con las alturas que arroja cada función de las que se debe seleccionar (ver Figura 8). En la comparación distinguían cualidades para buscar la menor diferencia.



a	b	c	d
73.5	35	[illegible]	73.5
148.5	102	100.15	143.65
298.5	236	240.45	283.95
523.5	437	450.9	499.4
748.5	638	661.35	805.85

Figura 8. Comparación de las alturas del volumen que lleva el agua en determinado momento, presentado por los participantes X_{11}, X_{12} y X_{14}

De las estrategias narradas anteriormente queremos destacar los elementos que componen la epistemología de la situación de selección; en ese sentido, los procedimientos que realizan los participantes para adaptar los puntos representados en la tabla en un comportamiento lineal, y los procedimientos para adaptar las $f(s)$ en un punto que les permitiera hacer una comparación con los datos de la tabla. La mayoría de los grupos adapta las $f(s)$ en solo un punto que represente la altura que lleva el recipiente en un determinado tiempo. Lo anterior se realiza para poder distinguir las cualidades de cada punto y con ello seleccionar el comportamiento que mejor lo describa, con un notorio interés en hacer tender los datos hacia la línea recta; es decir, lo estable se observa en la búsqueda de un comportamiento lineal.

Con la Actividad (2) los futuros ingenieros se enfrentaron a evidenciar un comportamiento para el tipo de llenado de un recipiente. Para responder a la pregunta ¿Cuál es la altura del recipiente? fue necesario establecer un comportamiento. Entre las propuestas de solución aparece el cálculo de variaciones para luego determinar la razón de cambio y, al igual que en la Actividad 1, calcular un promedio de las razones para seleccionar un coeficiente *a* que represente el comportamiento del llenado del recipiente. Sin embargo, como la tabla no arroja un punto de partida del llenado (su primer punto es en el segundo 1), se debate si contemplar o no líquido en el recipiente antes de comenzar el llenado.

En este procedimiento seleccionan un comportamiento lineal que les permite identificar la altura del recipiente al segundo 40 y su ideal fue la línea recta. Por eso, replantearon los datos de la tabla para adaptarlos a un comportamiento lineal. Para tal fin distinguieron cualidades tales como el punto inicial y algún valor que altere abruptamente el comportamiento, entre otros. Un aspecto importante a destacar es que la selección del comportamiento lineal está totalmente asociada a las decisiones externas que se hayan declarado dado el carácter de la situación (ver Transcripción 1).

> Participantes X_1 y X_2: Este es nuestro problema y quiero saber cómo varía. De acuerdo a esto calculamos las diferencias que hay en cada intervalo. Y en este caso, *t* tiene variación de 2 segundos, después 3, 2 y 1. Y de la altura son 25, 7, 38 y 3. Para qué sirve esto, bueno, para conocer, para sacar una relación de cuánto va a variar de acuerdo a la altura con los segundos. Y aquí ya al hacer la altura entre segundos, va ser igual a 12,5 2.33, 19 y 3, ya esto es como va variando. Esto lo podemos multiplicar por los segundos y nos va a dar este valor, que sumándolo nos va a dar 15.
>
> Entonces para llegar a un promedio y generalizarlo y conocer la altura al segundo 40, necesitamos sacar un promedio y nuestro promedio fue igual de 9.20 que con eso nos va a permitir conocer ya la altura en el segundo 40. Que simplemente sería sustituirlo y la función sería $f(x) = 9.20(s)$, que nos va a dar la altura de 368.3mm.

Transcripción 1. Consideraciones para la selección de un comportamiento lineal de llenado

En los momentos de transversalidad de la Actividad 1 a la 2, los ingenieros en formación reconocen que el comportamiento lineal es aquello a lo que deben llegar como solución. Lo estable se manifestó en la recta a la cual tienden todos los puntos del llenado del recipiente.

Podemos notar que en la primera actividad la naturaleza de los datos es diferente a la de lo estable, donde en el primer conjunto de datos son puntos dispersos y en el segundo conjunto es una recta lineal que posee un comportamiento definido por $f(s) = as + b$. En cambio, en la segunda actividad, lo estable es formulado por los ingenieros en formación. De esta manera, están resignificando los usos de la optimización frente a problemas donde se debe seleccionar un comportamiento (ver Tabla III).

TABLA III
Emergencia de la situación de selección de un grupo de ingenieros en formación

Situación de selección	*Seleccionar el comportamiento lineal que mejor describa los datos de llenado de un recipiente*
Patrones de adaptación	Se adapta el comportamiento de llenado de la botella a un comportamiento de variación uniforme
Distinción de cualidades	Se distinguen las características y el comportamiento del llenado de los recipientes
Lo estable	Es la tendencia hacia el comportamiento lineal

En otra de las actividades presentadas a los estudiantes de Ingeniería, se les solicito seleccionar una botella según su capacidad de llenado, para vaciar una cantidad determinada de líquido. Para eso, fue necesario, primero, distinguir cualidades de llenado respecto de la cantidad de líquido que se tiene para vaciar (por ejemplo, puede sobrar liquido del que se necesita verter o puede que la botella no se llene por completo); y luego, establecer la cantidad que se comporta como lo estable, ya que buscan la botella que tiene una capacidad que tienda lo más posible, por sobre, la cantidad de líquido que se tiene que vaciar. De esta manera, se identificaron diferentes maneras de seleccionar una botella a la que requerían verter 1.3489L de agua. Por ejemplo, se observaron casos donde tachaban las botellas con capacidad menor a 1.3489L, ya que asumían que debía entrar todo el líquido en la botella. Otros, por el contrario, marcaban aquellas donde si podían verter la cantidad señalada, es decir, las mayores que 1.3489L, pero solo destacaban las que más se acercaban a la cantidad que debían verter (ver Figura 9).

1.835 L	1.342 L	1.9203 L	1.1243 L	1.4221 L	1.249 L
1.0234 L	1.023 L	1.02302 L	1.92014 L	1.3451 L	1.246 L
1.0253 L	1.74 L	1.532 L	1.028 L	1.95 L	1.436 L
1.934 L	1.7245 L	1.92008 L	1.909 L	1.453 L	1.64214 L
1.4392 L	1.0302 L	1.0263 L	1.9049 L	1.8646 L	1.624 L
1.113 L	1.335 L	1.340 L	1.3452 L	1.92008 L	1.5632 L
1.356 L	1.566 L	1.344 L	1.832 L	1.3028 L	1.4017 L

Figura 9. Comparación de las alturas del volumen que lleva el agua en determinado momento presentado por el participante X_{14}

Otra propuesta de solución, dada la cantidad de valores distribuidos en la tabla, fue adaptar la capacidad de la botella truncándolo a su decimal y buscando las capacidades iguales o superiores a 1.3, pero los superiores los restringían a 1.4. Luego, volvían a revisar las capacidades que habían adaptado a 1.3 y descartaban los que eran inferiores a 1.34, una nueva adaptación, y así hasta determinar la capacidad superior, pero más cercana a 1.3489L (ver Transcripción 2).

> Participante X_{12}: Comparamos que botella rebasa el volumen a vaciar, con una diferencia menor con respecto a las otras. Busqué aquellas que tenían 34 después del punto e identifiqué un 9 después de la cifra, como no lo hubo, pasé al 35.

Transcripción 2. Truncar las botellas para adaptar su capacidad

Con estas marcas podemos observar que los futuros ingenieros están distinguiendo cualidades de las botellas, ya que descartan las que poseen una capacidad que está por debajo de la cantidad de líquido que deben vaciar; le otorgan un distintivo especial a las que se encuentran más cerca y comparan los valores de la tabla buscando las que tienden más a 1.3489L; cantidad que se convierte en lo estable. Entre los registros encontramos comentarios como “es la botella que tiene la capacidad de almacenar el volumen requerido y que está más cerca de valor”. Entonces, podemos señalar que la situación de selección está sujeta a la tendencia de lo estable (cantidad que se debe vaciar), reconociendo lo estable se adaptaba dicha cantidad que se debe vaciar para poder realizar las distinciones que permiten descartar y tomar la decisión de cual seleccionar.

4.2.3. *Epílogo. Las transversalidades* T_i

Los usos de la optimización se resignifican en las transversalidades T_i entre los escenarios: la obra matemática de Lagrange, la ingeniería mecatrónica y los ingenieros en formación. Los momentos Mo_i son: la ecuación de equilibrio, la calidad de imagen y el comportamiento estable. Cada momento está señalando una alternancia de dominios que genera una nueva función orgánica: establecer una relación mutua entre las fuerzas de los cuerpos; mejorar las características internas en las imágenes sísmicas; y establecer comportamientos lineales; cada una debaten con las formas de uso respectivamente: coeficientes indeterminados a través de multiplicadores (λ, μ *y* ν, etc.); algoritmo genético de la mutación humana para descartar y seleccionar imágenes; y expresiones lineales para lo estable. Los debates consisten en generar nuevas formas y funciones en el contexto de la nueva situación de selección.

Entonces el método convencional de la optimización en la matemática escolar se provee de significados y usos. Es decir, el método consiste en dar las funciones $f(x)$ y $g(x) = 0$ con $\nabla g(x) \neq 0$ para calcular la expresión $\nabla f(x) - \lambda \nabla g(x) = 0$, lo que genera las técnicas algorítmicas para resolución de problemas de optimización: se centraliza en objetos terminales (conceptos y definiciones) sin significados. Sin embargo la situación de selección a través de lo estable o comportamiento ideal (instrumento) se buscan patrones de adaptación $f(x)$ y $g(x) = 0$ con $\nabla g(x) \neq 0$ para distinguir cualidades $\nabla f(x) - \lambda \nabla g(x) = 0$, donde el λ es un parámetro para generar lo estable: se centraliza en procesos permanentes (conocimiento en uso) con significados.

La *situación de selección* (Del Valle, 2015) amplía lo que Cordero ha llamado Socioepistemología del Cálculo: construcción de lo matemático (2008 y 2016a). Ésta se compone de situaciones de *variación - predicción*, *transformación - tendencia*, *aproximación - analiticidad* y *selección - optimización*, según las comunidades y sus escenarios (*académico - escolar*, *profesión - trabajo* y *cotidiano - ciudad*). Actualmente podemos decir que el MR valora la transversalidad de saberes y la pluralidad epistemológica a través de las situaciones mencionadas e incluyendo la de selección (ver Figura 10). El entorno es más robusto, así como las situaciones escolares, cuyo objetivo es emprender aprendizajes de los significados de la matemática.

Las situaciones en conjunto, como Socioepistemología del Cálculo, conforman relaciones transversales y horizontales en un entorno amplio que representa una categoría de conocimiento matemático ζ(CM) descentralizada del objeto. Cada situación escolar derivada de ζ(CM) es un proceso que trastoca y transforma al dME y con esto generar rediseños del dME. La tarea es de gran dimensión, las nuevas investigaciones harán más robusta la ζ(CM), en la medida que se incursione en los escenarios *académico - escolar, profesión - trabajo* y *cotidiano - ciudad,* y en todos los niveles educativos, con la esperanza de contribuir en el cambio educativo de la matemática.

Cada situación compone un marco epistemológico del cálculo, respectivamente, con cada uno de los cuales se pueden resignificar los usos de los objetos matemáticos. Por ejemplo, la Serie de Taylor es resignificada en una situación de Modelación-Movimiento para mejorar el aprendizaje de los significados de las derivadas simultáneas en las gráficas de las funciones (Morales y Cordero, 2014; Morales, Mena, Vera y Rivera, 2012) y la estabilidad es resignificada en situaciones de reproducción de comportamientos (Mendoza y Cordero 2018; Mendoza et al., 2018).

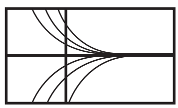
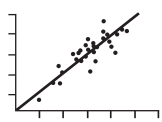
	Situaciones			
Construcción de lo matemático	*Variación*	*Transformación*	*Aproximación*	*Selección*
Significaciones	Flujo Movimiento Acumulación Estado Permanente	Patrones de comportamiento gráficos y analíticos	Límite Derivación Integración Convergencia	Patrón de adaptación
Procedimientos	Comparación de dos estados $f(x+h)-f(x)=\alpha h$ $\alpha=f'(x)$	Variación de parámetros $y=Af(Bx+C)+D$	Operaciones lógico formales (cociente) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=f'(x)$	Distinción de cualidades $\nabla f(x)-\lambda\nabla g(x)=0$
Instrumentos	Cantidad de variación continua	Instrucción que organiza comportamientos	Formas analíticas	Lo estable
Argumentación / Resignificación	Predicción $E0+variación=Ef$	Comportamiento tendencial 	Analiticidad de las funciones $f(x+h)=f(x)+f'(x)h+\cdots$	Optimización 

Figura 10. Socioepistemología del Cálculo y Análisis

5. Conclusiones

5.1. *En particular*

Los usos de la optimización y el discurso Matemático Escolar son dos contextos diferentes que conllevan enfocar la atención a la pregunta ¿por qué el tratamiento escolar no favorece el uso de las matemáticas que se aprenden en la escuela y en la vida?, contrariamente a la pregunta clásica ¿por qué el estudiantado no aprende matemáticas?. Por un lado, en un curso de matemáticas habitual, en el tema de la optimización, se plantea un modelo de variación uniforme que represente un conjunto de puntos dispersos; para tal fin se enseña el método de mínimos cuadrados (pero no se consideran los significados que subyacen al planteamiento y al método). Sin embargo, en la comunidad de ingenieros que participaron en las actividades de esa nube de puntos, *ponen su conocimiento en uso* de manera de generar patrones de adaptación para poder distinguir cualidades, las cuales dependen de la tendencia hacia lo estable (modelo lineal). De este modo, todos los procesos de adaptación y distinción que realice el estudiante en su cotidiano (realidad del que aprende) para seleccionar la recta que se comporte como lo estable, generan los significados de la optimización, o bien, en este caso, los significados del método de mínimos cuadrados. De todas las rectas que modelan el comportamiento de esos puntos, se debe *seleccionar* la que "represente de mejor manera los datos en cuestión". A este hecho, adquiere la forma de *situación de selección* (Del Valle, 2015); la cual subyace a la formulación del método de los mínimos cuadrados (la decisión de elegir una recta u otra puede depender de las variables de condición que afecten el contexto del problema). Por otro, en textos escolares de matemática, libros de cálculo para la educación superior y en los programas de estudio para tercer año medio en Chile (MINEDUC[10], 2001), en los cuales la optimización es vista desde el método de la programación lineal o por el método de los multiplicadores de Lagrange, con esta investigación se ofrecen indicativos de que aquello que subyace a esos métodos es la selección de un comportamiento (Del Valle, 2015). Previo a sus formulaciones, existe una situación que hace que se generen tales métodos. Esta fue nuestra premisa de la investigación, que conllevó a la tesis siguiente: una *situación de selección* específica genera *resignificaciones de optimización* (Del Valle, 2015).

5.2. *En general*

La resignificación de usos del conocimiento matemático es una categoría de conocimiento matemático que expresa el carácter funcional de las comunidades, pero en el ámbito educativo significa un proceso que trastoca y transforma al dME que puede desembocar en el rediseño del dME (Cantoral, 2013). En ese sentido lo

[10] Ministerio de Educación de Chile

institucional hará que la categoría de conocimiento matemático ζ(CM) se desarrolle y permanezca, se acepte como producto material social cuyo aprendizaje debemos favorecer (Cordero, 2016a). En ese sentido el marco de referencia (MR) deberá valorar la transversalidad en situaciones específicas. El conocimiento se transforma en una unidad de saberes que descentralizan al objeto y los usos son resignificados. Entonces, se quiere que con esos MR se diseñen situaciones escolares para que sucedan los aprendizajes de las resignificaciones matemáticas en procesos permanentes (usos y significados) en contraparte de objetos terminales (conceptos y definiciones).

Finalmente podríamos decir que el desarrollo teórico-metodológico que se ha presentado en esta investigación contribuye a la Matemática Educativa. Ofrece constructos ontológicos y epistemológicos que cambian la mirada de la matemática escolar, pone el acento en el conocimiento en uso que conlleva valorar la justificación funcional que demandan otros dominios de conocimiento para expresar el entorno del conocimiento matemático en la realidad del que aprende.

Referencias bibliográficas

Camacho, A. y López, J. (2014). Didáctica de la programación lineal por medio de la movilidad de registros de representación. *RECAI Revista de Estudios en Contaduría, Administración e Informática, 3*(7), 93-117. Disponible en: https://recai.uaemex.mx/article/view/8914

Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento.* Barcelona, España: Gedisa.

Cantoral, R., Moreno - Durazo, A. y Caballero - Pérez, M. (2018). Socio - epistemological research on mathematical modelling: an empirical approach to teaching and learning. *ZDM Mathematics Education* 50 (1-2), 77-89. doi: 10.1007/s11858-018-0922-8

Cantoral, R., Reyes-Gasperini, D. y Montiel, G. (2015). Socioepistemología, Matemáticas y Realidad. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática, 7*(3), 91-116. http://www.revista.etnomatematica.org/index.php/RevLatEm/article/view/149

Cordero, F. (2008). El uso de las gráficas en el discurso del cálculo escolar. Una visión socioepistemológica. En R. Cantoral, O. Covián, R. M. Farfán, J. Lezama y A. Romo (Eds.), *Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: Un reporte Iberoamericano* (pp. 285-309). México: Díaz de Santos - Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. A. C.

Cordero, F. (2016a). Modelación, Funcionalidad y Multidisciplinariedad: El Eslabón de la Matemática y el Cotidiano. En Díaz y Arrieta (Eds). *Investigaciones Latinoamericanas en Modelación Matemática Educativa*. España: Díaz de Santos.

Cordero, F. (2016b). La función social del docente de matemáticas: pluralidad, transversalidad y reciprocidad. En S. Estrella et al. (Eds.), *XX Actas de las Jornadas Nacionales de Educación Matemática* (pp. 23-30), ISSN 0719-8159. Valparaíso, Chile: SOCHIEM, Instituto de Matemática de la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso. Recuperado de http://ima.ucv.cl/congreso/xxjnem/

Cordero, F. y Flores, R. (2007). El uso de las gráficas en el discurso matemático escolar. Un estudio socioepistemológico en el nivel básico a través de los libros de texto. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 10*(1), 7-38.

Cordero, F., Gómez, K., Silva - Crocci, H. y Soto, D. (2015). *El Discurso Matemático Escolar: la Adherencia, la Exclusión y la Opacidad*. Barcelona, España: Gedisa.

Cordero, F., Mena-Lorca, J. y Huincahue, J. (2017). A category of modeling: functional mathematics of other domains of knowledge and the learning of mathematics. Enviado a publicación.

Del Valle, T. (2015). *Los Usos de la Optimización: un Marco de Referencia y la Teoría Socioepistemológica*. (Tesis de Doctorado no publicada), Instituto de Matemáticas, PUCV. Chile.

Farfán, R. (2012). *Sociepistemología y ciencia. El caso del estado estacionario y su matematización*. Barcelona, España: Gedisa.

Guber, R. (2001). *La etnografía. Método, Campo y Reflexividad*. Ed. Norma: Bogotá.

Hollebrands, K; & Okumus, S. (2017). Prospective Mathematics Teachers' Processes for Solving Optimization Problems Using Cabri 3D. *Digital Experiences in Mathematics Education*, 1-27. doi: 10.1007/s40751-017-0033-0

Lagrange, J. (1867). Méthode de Maximis et Minimis. En J. -A. Serret (Ed.), *Œuvres de Lagrange*. Vol. 1. París. Gauthier - Villars.

Lagrange, J. (1788/1963). La Statique: Manière plus simple et plus gènèrale de faire usage de la formule de L'èquilibre, donnèe dans la Section duexième. En J. Bertrand (Ed.), *Mécanique Analytique* (pp. 69-99). Ed. 3. Vol.1. México D.F.: Clásicos de la Ciencia.

Malaspina, U. y Font, V. (2010). The role of intuition in the solving of optimization problems. *Educational Studies in Mathematics, 75*(1), 107-130. doi: 10.1007/s10649-010-9243-8

Ministerio de Educación de Chile (2001). *Programa de estudio tercer año medio matemática: Álgebra y Modelos Analíticos*. Santiago, Chile. Autor

Mendoza, J. y Cordero, F. (2018). La modelación en las comunidades de conocimiento matemático. El uso de las matemáticas en ingenieros biónicos. El caso de la estabilidad. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, *11*(1), 36-61.

Mendoza, J., Cordero, F., Solís, y M. Gómez, K (2018). El Uso del Conocimiento Matemático en las Comunidades de Ingenieros. Del Objeto a la Funcionalidad Matemática. *Bolema, Rio Claro (SP), v. 32, n. 62, p. 1219-1243, dez. 2018*. doi: 10.1590/1980-4415v32n62a23

Morales, A. y Cordero, F. (2014). La Graficación-Modelación y la Serie de Taylor. Una Socioepistemología del Cálculo. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *17*(3), 319-345. doi: 10.12802/relime.13.1733

Morales, A., Mena, J., Vera, F. y Rivera, R. (2012). El Rol del tiempo en un proceso de modelación utilizando videos de experimentos físicos. *Revista Enseñanza de las Ciencias, 30*(3), 237-256. doi: 10.5565/rev/ec/v30n3.694

Orozco, M., Ortiz, C., Urrutia, J., Martin, R., Rodríguez, A. y Villaseñor, P. (2013). A genetic algorithm for filter design to enhance features in seismic images. *Journal of Geophysics and Engineering, 1*(1), 1-13. doi: 10.1111/1365-2478.12026

Reaño, C. y Malaspina, U. (2011). Introducción a la programación lineal. Una mirada desde la Teoría de Situaciones Didácticas. *Comunicación presentada en XIII CIAEM-IACME*, Recife, Brasil, 1-12.

Rojas, I. (2011). Elementos para el diseño de técnicas de investigación: Una propuesta de definiciones y procedimientos en la investigación científica. *Tiempo de Educar*, 12(24), 277-297.

Soto, D. y Cantoral, R. (2014). Discurso matemático escolar y exclusión. Una visión socioepistemológica. *Boletim de Educação Matemática*, *28*(50), 1525-1544. doi: 10.1590/1980-4415v28n50a25

Tran Kiem, M. y Lagrange, J. (2016). Connected functional working spaces: a framework for the teaching and learning of functions at upper secondary level. *ZDM: the international journal on mathematics education,* 48(6). 793-807. doi: 10.1007/s11858-016-0774-z

Autores

Francisco Cordero. Cinvestav-IPN – México. fcordero@cinvestav.mx

Tamara Del Valle. Universidad de Talca. Linares - Chile . tamaradc.mat@gmail.com

Astrid Morales. Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, Chile. astrid.morales@pucv.cl

Antonio Saorín Villa, Germán Torregrosa Gironés, Humberto Quesada Vilella

RAZONAMIENTO CONFIGURAL Y ORGANIZACIÓN DISCURSIVA EN PROCESOS DE PRUEBA EN CONTEXTO GEOMÉTRICO

Configural reasoning and discursive organization in proof processes in geometrical context

RESUMEN

En este estudio analizamos el cambio de estatus de las afirmaciones matemáticas que componen el proceso discursivo en la resolución de problemas geométricos de prueba. En particular, nos centramos en cómo se desarrolla y organiza el discurso escrito (respuesta) que comunica la solución, con el objetivo de identificar relaciones con los desenlaces del razonamiento configural. Para ello, analizamos las respuestas de estudiantes de cuarto curso de educación secundaria obligatoria a cuatro problemas geométricos de prueba. Los resultados ponen de manifiesto la necesidad de un cambio en el status de las afirmaciones matemáticas involucradas en el razonamiento que conduce a la solución y el desarrollo de una argumentación que progrese desde el modo de acumulación hasta el modo de sustitución. No obstante, la presencia de estas características del proceso de prueba, no garantiza que se dé el truncamiento del razonamiento configural que genera la prueba formal, debido, entre otros factores, a la influencia que ejerce la subconfiguración relevante identificada en el proceso de razonamiento.

PALABRAS CLAVE:

- *Razonamiento configural*
- *Prueba matemática*
- *Argumentación*
- *Geometría*

ABSTRACT

In this study, we analyze the status change of the different mathematical affirmations that compose the discursive process in solving proof problems into geometry context. In particular, we focus on the way in which it is developed and organized the written discourse (answer) which allows communicating the solution, with the aim of identifying relationships with the configural reasoning outcomes. For this, we analyze the answers of students in the four grade of compulsory secondary education to four proof problems in a geometrical context. The results highlight the necessity of a change into the status of the mathematical affirmations

KEYWORDS:

- *Configural reasoning*
- *Mathematical proof*
- *Argumentation*
- *Geometry*

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (2019) *22* (2): 213-244.
Recepción: Marzo 14, 2019 / Aceptación: Julio 4, 2019. DOI: 10.12802/relime.19.2224

involved in the reasoning leading to the solution, as well as the development of an argumentation that it should be developed from the accumulation mode to the substitution one. However, the presence of these characteristics of the proof process don't guarantee that the configural reasoning "truncation" that generates the formal proof will occur, due to, among other factors, the influence exerted by the relevant subconfiguration identified in the reasoning process.

RESUMO

Neste estudo analisamos a mudança de status das diferentes afirmações matemáticas que compõem o processo discursivo na solução de problemas de teste em um contexto geométrico. Em particular, nos concentramos em como ele se desenvolve e organiza o discurso escrito (resposta) que comunica a solução, com o objetivo de identificar relações com os resultados do raciocínio configural. Para isso, analisamos as respostas dos alunos do quarto ano do ensino médio obrigatório a quatro problemas de teste em um contexto geométrico. Os resultados mostram a necessidade de uma mudança no status das afirmações matemáticas envolvidas no raciocínio que levam à solução e o desenvolvimento de um argumento que progride do modo de acumulação para o modo de substituição. No entanto, a presença dessas características do processo de teste não garante que o "truncamento" do raciocínio configural gerado pelo teste formal seja dado, devido, entre outros fatores, à influência exercida pela subconfiguração relevante identificada no processo de raciocínio.

PALAVRAS CHAVE:

- *Raciocínio configural*
- *Teste matemático*
- *Argumentação*
- *Geometria*

RÉSUMÉ

Nous analysons le changement de statut des différents affirmations mathématiques qui composent le processus discursif dans la résolution de problèmes géométriques de preuve. En particulier, nous nous concentrons sur la manière dont le discours écrit (réponse) qui communique la solution se développe et s'organise, dans le but d'identifier les relations avec les résultats du raisonnement configurale. Pour ce faire, nous analysons les réponses d'étudiants du quatrième cours d'éducation secondaire obligatoire à quatre problèmes géométriques de preuve. Les résultats mettent en évidence la nécessité d'un changement dans l'statut des affirmations mathématiques impliqués dans le raisonnement conduisant à la solution et le développement d'un argument du mode progressera l'accumulation au mode de remplacement. La présence de ces caractéristiques du processus de preuve, ne garantit pas que le «troncature» du raisonnement configurale qui génère la preuve formelle est donnée, dû, entre autres facteurs, à l'influence qui exerce la sous-configuration identifiée dans le processus de raisonnement.

MOTS CLÉS:

- *Raisonnement configural*
- *Preuve mathématique*
- *Argumentation*
- *Géométrie*

1. Introducción

Dentro de la perspectiva de la resolución de problemas, el desarrollo de la prueba se presenta como una actividad clave en educación matemática (Hanna y de Villiers, 2008; Mariotti, 2006). Diversos estudios señalan que la construcción de la prueba no está exenta de obstáculos como, por ejemplo, la incapacidad de los estudiantes para desarrollar las estrategias de resolución apropiadas (Weber, 2001), la dificultad para dotar de sentido y coherencia a las proposiciones involucradas en el proceso de prueba (Zandieh, Roh y Knapp, 2014) o las dificultades para enlazar el proceso de argumentación con la construcción de la prueba formal (Alcock y Weber, 2010). En geometría, Duval (2016b) pone de manifiesto dificultades relacionadas con los procesos de visualización y razonamiento involucrados en la construcción de la prueba. Los procesos de visualización permiten establecer relaciones entre definiciones, propiedades o teoremas con subconfiguraciones identificadas en el proceso de argumentación conducente a la prueba. Esta acción puede desencadenarse o inhibirse en función de determinados factores como pueden ser la influencia de configuraciones prototípicas (Mesquita, 1998; Clemente, Torregrosa y Llinares, 2015; Saorín, Torregrosa y Quesada, 2017b), el conocimiento o no de las propiedades geométricas adecuadas (Reiss, Heinze, Renkl y Groß, 2008) o el modo en el que los estudiantes procesan la información (Pitta-Pantazi y Christou, 2009), poniendo de manifiesto la dificultad para conectar el proceso de argumentación con la construcción de la prueba (Duval, 2016b).

Douek (2010) señala la importancia de comprender las características organizativas que rigen el proceso de prueba para facilitar la transición argumentación - prueba. Heinze, Cheng, Ufer, Lin y Reiss (2008) indican que para desarrollar un proceso de prueba válido en geometría es necesario comprender la información dada, reconocer los elementos involucrados en la argumentación (premisas, argumentos, conclusión), construir la prueba en diferentes pasos y coordinar el proceso mediante la organización del discurso. En este sentido, Duval (2016b) pone de manifiesto la necesidad de organizar de forma adecuada los elementos del proceso de argumentación (premisas, teoremas, conclusiones) que permite construir y comunicar el proceso de prueba, en el que cada paso de razonamiento está conectado con el anterior mediante afirmaciones matemáticas que se superponen (conclusiones de un paso pueden utilizarse como premisas del siguiente). Por ello, el análisis del discurso escrito que comunica la prueba puede ayudarnos a entender el razonamiento desarrollado en el proceso de prueba y, por tanto, las dificultades antes comentadas.

Nuestra investigación se centra en el estudio de la forma en que los estudiantes desarrollan y organizan el discurso generado al comunicar el proceso de resolución de problemas geométricos de prueba en contexto de lápiz y papel. Para ello, consideramos los mecanismos de *expansión discursiva* de Duval (1999), entendidos como la forma en que se enlazan las afirmaciones matemáticas en el discurso generado, y el estatus o papel que desempeñan las afirmaciones matemáticas involucradas en cada paso de razonamiento. Así, nos planteamos las cuestiones de (1) cómo los estudiantes construyen un discurso escrito según una secuencia lógica de relaciones, en forma de afirmaciones matemáticas, establecidas a partir de los hechos geométricos identificados, y (2) cuál es el papel que desempeñan dichas afirmaciones matemáticas en el proceso de razonamiento desarrollado. La respuesta a dichas cuestiones puede aportar información sobre las características del razonamiento geométrico de los estudiantes que permiten o impiden concluir con éxito la prueba. Es aquí donde el modelo *razonamiento configural* (Torregrosa y Quesada, 2007), entendido como coordinación de procesos visualización, y su desarrollo pueden ayudarnos a comprender cómo los estudiantes asimilan las ideas que permiten generar un discurso coherente que refleje el razonamiento desarrollado.

2. Marco teórico

2.1. *Coordinación de procesos de visualización: Razonamiento Configural*

Para la resolución de problemas geométricos de probar es necesario relacionar conceptos o propiedades geométricas generales con configuraciones que representan hechos geométricos genéricos. Para ello, debe darse una interacción entre conocimientos y la configuración geométrica (o subconfiguraciones identificadas) que permita el establecimiento de afirmaciones matemáticas que generen un razonamiento lógico - deductivo que finalice con la solución al problema (tesis a demostrar). Duval (1998, 2016a) resalta la importancia de la visualización en esta interacción a partir de tres procesos cognitivos que denomina: aprehensión perceptiva, aprehensión discursiva y aprehensión operativa. La aprehensión perceptiva es la más intuitiva de los tres tipos de aprehensiones y permite la identificación simple de una configuración. La aprehensión discursiva es la acción cognitiva que permite la asociación de una configuración identificada con afirmaciones matemáticas (teoremas, definiciones, etc.), pudiendo realizarse desde la configuración hacia el discurso o viceversa, mediante un cambo de anclaje visual - discursivo o discursivo - visual. La aprehensión operativa se manifiesta al realizar modificaciones, físicas o mentales, sobre una configuración geométrica. Cuando se añaden o quitan elementos geométricos para obtener nuevas subconfiguraciones, tenemos una aprehensión operativa de cambio figural. Si las subconfiguraciones iniciales identificadas son manipuladas como las piezas de un puzzle, tenemos una aprehensión operativa de reconfiguración.

Torregrosa y Quesada (2007) y Torregrosa, Quesada y Penalva (2010) centraron su atención en la coordinación entre las aprehensiones operativas y discursivas involucradas en el proceso de resolución de problemas geométricos de probar. Este hecho, les permitió identificar características de las relaciones entre los elementos de una configuración geométrica, su asociación con diferentes afirmaciones matemáticas y el establecimiento de relaciones lógicas entre ellas que permiten el desarrollo de un razonamiento que conduce a resolver el problema. A dicho proceso lo denominaron "*razonamiento configural*", con el objeto de subrayar las relaciones interactivas entre la configuración inicial (y sus posibles modificaciones) y las afirmaciones matemáticas pertinentes que conducen a un razonamiento lógico - deductivo al resolver problemas geométricos de prueba. El proceso de razonamiento configural presenta tres desenlaces: (a) *"truncamiento",* cuando la coordinación entre las aprehensiones operativas y discursivas proporciona al resolutor la idea de cómo resolver el problema y permite generar un proceso deductivo que desemboca en el establecimiento de una solución al problema; (b) *"conjetura sin demostración"* cuando la coordinación entre aprehensiones permite establecer una solución, aunque basada en conjeturas no demostradas previamente; y (c) *"bucle",* cuando el razonamiento conduce a una situación de bloqueo del proceso de resolución debido a que se establecen afirmaciones matemáticas que no son útiles para desarrollar un razonamiento lógico, de forma que los resolutores vuelven a la situación inicial una o varias veces ante la imposibilidad de avanzar hacia la solución.

El modelo razonamiento configural ha sido utilizado para analizar las respuestas de estudiantes a problemas geométricos de probar (Prior y Torregrosa, 2013; Llinares y Clemente, 2014; Clemente y Llinares, 2015; Clemente, Torregrosa y Llinares, 2015; Saorín, Torregrosa y Quesada, 2017a) y también, tras una ampliación del modelo propuesta por Torregrosa (2017), para analizar respuestas a problemas empíricos (aquellos que involucran el registro algebraico e introducen datos numéricos) geométricos (Saorín, Torregrosa y Quesada, 2017b). Dichas investigaciones ponen de manifiesto que el análisis mediante el modelo razonamiento configural puede permitirnos identificar y comprender distintos factores que pueden favorecer (o no) el desarrollo de un razonamiento lógico - deductivo que permita finalizar con éxito el proceso de resolución de problemas geométricos.

2.2. *Razonamiento y discurso escrito*

Entendemos razonamiento como cualquier acción que permite obtener nueva información a partir de información previa (conocida), ya sea la proporcionada por un enunciado (hipótesis iniciales) o la obtenida durante la resolución del problema. En este sentido, cuando los estudiantes resuelven por escrito problemas geométricos, el razonamiento desarrollado durante el proceso de resolución puede manifestarse a través del discurso escrito generado. De este modo, el texto escrito producido, y de forma más concreta, la forma que va adoptando a medida que se va resolviendo el problema, puede proporcionarnos información relevante acerca del razonamiento que conduce a concluirlo con éxito.

Clemente y Llinares (2015) identifican dos momentos durante el proceso de resolución de problemas de probar geométricos: (1) el proceso desarrollado hasta que el estudiante es capaz de encontrar la solución al problema mediante un razonamiento, y (2) la comunicación de la resolución mediante un discurso teórico (escrito) compuesto por afirmaciones matemáticas. Puesto que el discurso teórico refleja el razonamiento que conduce a la construcción de la prueba, las afirmaciones matemáticas que lo componen deben presentar una determinada organización, es decir, para construir una prueba es necesario organizar las afirmaciones matemáticas involucradas. En dicha organización discursiva hemos de considerar la función específica, que denominaremos estatus, que desempeñan las afirmaciones matemáticas dentro del discurso (Duval, 2016b) y si se da o no un cambio en dicha función para una misma afirmación matemática en diferentes niveles de la organización discursiva. Por tanto, el estatus de una afirmación matemática determina el lugar que ocupa dentro de la organización discursiva y por tanto la función que desarrolla.

Duval (2016b) considera que, en la construcción del discurso, además del estatus, hemos de considerar también los valores epistémicos, semánticos y lógicos de las afirmaciones matemáticas involucradas. Duval (1999) asocia el valor semántico de una afirmación con el contenido de la misma. Considera el valor epistémico como el grado de certeza o convicción asociado con una afirmación matemática, es decir, si el contenido de una afirmación es evidente, cierto, probable, etc. Dicho valor epistémico se relaciona con la base de conocimiento del resolutor, estando directamente conectado con la forma en que se comprende el contenido de una proposición. Por último, el valor lógico de una afirmación matemática es verdadero o falso, no dependiendo ni del contenido (valor semántico) ni de su comprensión (valor epistémico), ya que se obtiene mediante procesos lógico - deductivos.

2.2.1. *Niveles de organización discursiva*

En el presente trabajo consideraremos dos de los tres niveles de organización discursiva propuestos por Duval (1998): nivel global y nivel local. El nivel global estaría formado por el total del discurso teórico que conforma la prueba, en el que los "pasos" de razonamiento (niveles locales) que lo componen se relacionan entre sí por su conclusión (conclusiones locales). Consideramos como nivel local cada "paso" de razonamiento en que se divide el nivel global, que permite avanzar hacia la resolución del problema y en el que al menos tres afirmaciones matemáticas son organizadas en función de su estatus: hipótesis o conclusión previa; definición, teorema, propiedad o inferencia de información extraída del contexto de resolución; y conclusión local. Por tanto, cada "paso" de razonamiento se caracteriza por la organización de las afirmaciones matemáticas involucradas en función de sus estatus, pudiendo considerar como razonamiento el "paso" de premisa a conclusión a través de la aplicación de reglas (normas) del sistema lógico - deductivo dentro de cada nivel local de organización deductiva. Entendemos, por tanto, que un razonamiento deductivo conducente a probar un hecho geométrico involucra dos niveles diferenciados de organización discursiva: cómo se organizan las afirmaciones matemáticas dentro de cada "paso" deductivo y como se organización los diferentes "pasos" durante la resolución de problemas de probar.

2.2.2. *Modos de expansión discursiva*

Por otro lado, hemos de destacar la forma en que los estudiantes son capaces de desarrollar un proceso de argumentación que apoya la construcción de la prueba. Entendemos argumentación como el proceso utilizado para convencer, de forma razonada, a otros de la validez de las afirmaciones matemáticas establecidas que se tienen como verdaderas, y argumento como todo aquello (definiciones, teoremas, etc.) que permite validar o refutar una afirmación matemática dentro del proceso argumentativo (Duval, 1999). Por ello, podemos considerar el proceso discursivo como una forma de argumentación habitual. En particular, para el contexto en el que se desarrolla el presente trabajo, entendemos proceso discursivo como la construcción de un discurso argumentativo compuesto por afirmaciones matemáticas enlazadas entre sí de diferentes formas y que transmite el proceso de resolución del problema poniendo de relieve el razonamiento desarrollado que conduce al establecimiento de una solución. Duval (1999) denomina "modos de expansión" a las formas en que se van enlazando las afirmaciones a medida que se construye el discurso argumentativo (proceso discursivo). Considera dos modos de expansión discursiva: (1) acumulación y (2) sustitución. En la expansión por acumulación se genera un discurso a partir de información acumulada y expresada en forma de afirmaciones que no están, necesariamente, conectadas de forma lógica. Las relaciones establecidas por acumulación se relacionan entre sí sólo a nivel de contenido debido a que pertenecen al mismo contexto de resolución, pudiendo establecerse, por tanto, sin un orden lógico. Por ejemplo, tomando como referencia la figura 1, afirmaciones matemáticas del tipo "*los lados PM y PN son iguales*" o "*el segmento PQ es la altura del triángulo MPN*", sólo representan información extraída de un mismo contexto de resolución que pueden establecerse en cualquier orden, siendo afirmaciones totalmente independientes entre sí, aunque relacionadas a nivel del contenido al que hacen referencia.

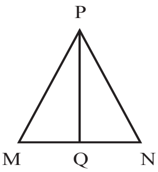


Figura 1. Configuración geométrica utilizada para ilustrar los modos de acumulación y sustitución

Por otro lado, el discurso generado por sustitución corresponde a una secuencia de afirmaciones matemáticas obtenidas, de forma progresiva y con un orden determinado y no modificable, a partir de inferencias lógicas, en el que las nuevas afirmaciones matemáticas obtenidas sustituyen a las anteriores en el razonamiento. Al ser cada afirmación consecuencia lógica de la anterior, su relación no depende de su contenido como en el caso de acumulación, sino de su estatus. Este hecho, conlleva que el discurso se organice y progrese en base a las diferencias de estatus de las afirmaciones implicadas, como por ejemplo al tomar como hipótesis de un paso de razonamiento la conclusión obtenida en otro paso deductivo anterior. Por ejemplo y utilizando la figura 1 como referencia, si establecemos afirmaciones matemáticas del tipo "*si los lados PM y PN son iguales, el triángulo es isósceles*" o "*si el triángulo es isósceles y el segmento PQ es bisectriz del ángulo* $\hat{P}$*, corta al segmento MN en su punto medio*", observamos que cada una es consecuencia de la anterior a la que sustituye en el proceso de razonamiento, determinando que el discurso se construya como una secuencia lógica de afirmaciones establecidas siguiendo un determinado orden (y no otro).

De este modo, con base en el marco teórico expuesto y a partir de las cuestiones inicialmente planteadas, el objetivo del presente trabajo es identificar relaciones entre la forma en que los estudiantes construyen el discurso escrito (respuesta), el estatus de las afirmaciones matemáticas establecidas que lo componen y los desenlaces del razonamiento configural desarrollado que permite resolver con éxito problemas de probar en contexto geométrico.

3. Método

3.1. *Participantes y contexto*

En el estudio participaron 15 alumnos de 4º curso de Educación Secundaria Obligatoria (E.S.O.), con edades comprendidas entre 15 y 16 años. Puesto que los estudiantes de este nivel no estaban familiarizados con la resolución de problemas de probar geométricos, fueron agrupados en cinco grupos de tres alumnos con el objetivo de facilitarles, en la medida de lo posible, la resolución de los problemas propuestos. Además, se dedicó una sesión de 55 minutos al repaso de conceptos geométricos elementales que debían conocer de cursos anteriores en relación con las características, propiedades, clasificación y criterios de congruencia y semejanza de triángulos. Los grupos fueron identificados como G01, G02, G03, G04 y G05.

3.2. *Instrumento*

Los estudiantes debían resolver cuatro problemas en los que se presentaba una configuración geométrica asociada a un enunciado y se les solicitaba probar un hecho geométrico. El objetivo de los problemas era determinar cómo los estudiantes iban desarrollando procesos coordinados de aprehensiones discursivas y operativas, identificando subconfiguraciones que guiasen su razonamiento y les permitiese establecer una cadena o secuencia de argumentaciones que concluyese con la tesis a probar.

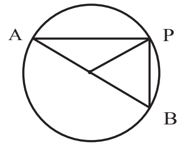
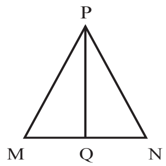
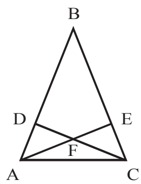
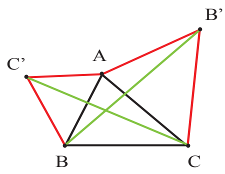
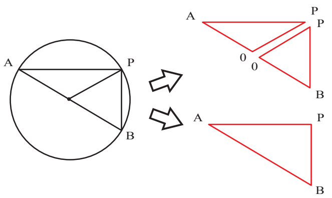
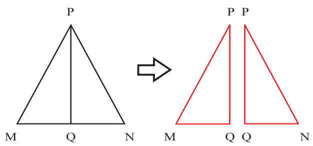
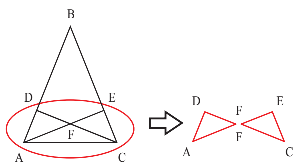
Problema 1 (P1)	Demuestra que el ángulo APB ($\hat{P}$) es recto.	
Problema 2 (P2)	Sabiendo que el segmento $\overline{PQ}$ es bisectriz del ángulo $\hat{P}$, y que es perpendicular al segmento $\overline{MN}$, demuestra que los ángulos $\hat{M}$ y $\hat{N}$ son iguales.	
Problema 3 (P3)	Los segmentos $\overline{AE}$ y $\overline{DC}$ son dos alturas del triángulo ΔABC y los segmentos $\overline{AD}$ y $\overline{CE}$ son iguales. Demuestre que los segmentos $\overline{AF}$ y $\overline{CF}$ son iguales.	
Problema 4 (P4)	Sobre los lados $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ del triángulo ΔABC se construyen los triángulos equiláteros ΔABC' y ΔAB'C. Demuestre que los segmentos $\overline{BB'}$ y $\overline{CC'}$ son iguales.	

Figura 2. Problemas que componen el cuestionario

Los problemas fueron seleccionados considerando que los participantes tuviesen los conocimientos geométricos necesarios para resolverlos y la existencia de al menos una subconfiguración relevante que pudiera generar ideas para guiar el proceso de argumentación, teniendo en cuenta, además, que las posibles subconfiguraciones formasen parte de la configuración inicial, no siendo necesario la introducción de nuevos elementos (Figura 3).

	Conocimientos geométricos	*Posibles subconfiguraciones a considerar*	*Posible solución*
P1	- Perpendicularidad - Propiedades triángulos isósceles - Suma ángulos interiores triángulos		- Considerando que ΔOPA y ΔOPB son isósceles, tendrán dos ángulos iguales. El $\hat{A}$ y parte del $\hat{P}$, y $\hat{B}$, y otra parte del $\hat{P}$. Por tanto, $\hat{P} = \hat{A} + \hat{B}$. - Considerando el triángulo ΔAPB y que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180º, tenemos que $\hat{A} + \hat{P} + \hat{B} = 180º \rightarrow \hat{A} + (\hat{A} + \hat{B}) + \hat{B} = 180º \rightarrow (\hat{A} + \hat{B}) = 90º$. - Como $\hat{P} = \hat{A} + \hat{B}$ y $(\hat{A} + \hat{B}) = 90º$, tenemos que $\hat{P} = 90º$.
P2	- Perpendicularidad - Bisectriz de un ángulo - Propiedad reflexiva segmentos - Criterio congruencia triángulos ALA (ángulo, lado, ángulo)		- Considerando ΔPQM y ΔPQN y que $\overline{PQ}$ es bisectriz de $\hat{P}$ y perpendicular a $\overline{MN}$, tendremos que ambos ángulos poseen dos ángulos congruentes, uno en P otro en Q. Además tenemos que $\overline{PQ} \cong \overline{PQ}$ (Propiedad reflexiva). - Por el criterio ALA ambos triángulos son congruentes. - Por tanto $\hat{M} \cong \hat{N}$.
P3	- Altura de triángulos - Ángulos opuestos por el vértice - Criterios congruencia triángulos, concretamente el criterio ALA (ángulo, lado, ángulo)		- Considerando ΔDFA y ΔEFC y que $\overline{AE}$ y $\overline{DC}$ son alturas del triángulo ΔABC, ambos triángulos tendrán un ángulo recto (congruente) en D y E, además de los lados dados por el enunciado ($\overline{AD} \cong \overline{CE}$). - En el punto F tenemos ángulos opuestos por el vértice, por lo que son congruentes. Como conocemos dos ángulos, el tercero también puede ser conocido. - Por el criterio ALA, los triángulos ΔDFA y ΔEFC son congruentes, siendo también congruentes los segmentos $\overline{AF}$ y $\overline{CF}$.

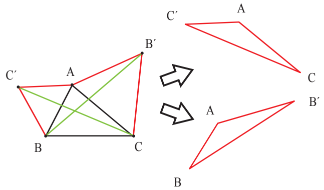
P4	- Propiedades triángulos equiláteros - Criterios congruencia de triángulos, concretamente el criterio LAL (lado, ángulo, lado)		- Considerando ΔAC´C y ΔAB´B. Por ser ΔAC´B y ΔACB´ equiláteros tendremos que $\overline{AC}\cong\overline{AB'}$ y $\overline{AC}\cong\overline{AB}$. Por tanto ΔAC´C y ΔAB´B tienen dos lados congruentes. - Por otro lado, el ángulo $\widehat{C'AC}$ es congruente con el $\widehat{BAB'}$ ya que ambos miden 60º (por ser ΔAC´C y ΔAB´B equiláteros) más el ángulo $\widehat{BAC}$. Por tanto ΔAC´C y ΔAB´B tienen un ángulo congruente. - Por el criterio de congruencia LAL, los triángulos ΔAC´C y ΔAB´B son congruentes, y por ello, los segmentos $\overline{BB}$ y $\overline{CC'}$ también.

Figura 3. Conocimientos, subconfiguraciones relevantes y posible solución a los problemas

Es necesario señalar que en P4 se da un solapamiento entre las subconfiguraciones relevantes a identificar, hecho que requiere acciones cognitivas más complejas para poder visualizarlas por separado. Por este motivo, se mostraron los diferentes elementos geométricos indicados en el enunciado en distintos colores, con el objetivo de “facilitar” su identificación. Entendemos, por tanto, que las configuraciones desempeñan un papel descriptivo, ya que, junto con el enunciado del problema, ayudan a contextualizar la situación geométrica planteada en cada caso y un papel heurístico al proporcionar diferentes estrategias de resolución en función de las subconfiguraciones identificadas.

3.3. *Análisis*

El análisis de las respuestas a los problemas se llevó a cabo en tres fases.

En la primera fase, realizamos la transcripción y segmentación de las respuestas escritas dadas por los estudiantes a los problemas propuestos en unidades de análisis, con el fin de identificar ciclos coordinados de aprehensiones operativas y discursivas desarrolladas durante el proceso de prueba. Consideramos como unidad de análisis cada una de las partes que componen el discurso escrito (incluidos dibujos, etiquetas o marcas en la configuración inicial, etc.) que ponen de manifiesto la identificación o utilización de propiedades, relaciones, definiciones, etc., por parte de los estudiantes durante la resolución del problema. La figura 4 muestra la respuesta dada por G03 a P3 junto con las unidades de análisis consideradas. Dichas unidades han sido identificadas y numeradas sobre la propia respuesta de los estudiantes para facilitar su comprensión.

Los segmentos $\overline{AE}$ y $\overline{DC}$ son dos alturas del triángulo ΔABC y los segmentos $\overline{AD}$ y $\overline{CE}$ son iguales. *Demuestre que los segmentos $\overline{AF}$ y $\overline{CF}$ son iguales.*

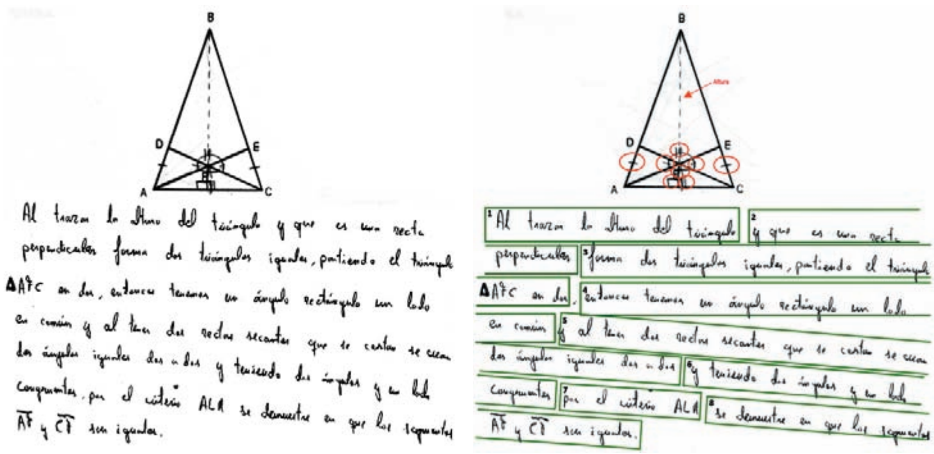


Figura 4. Respuesta dada por G03 a P3 y unidades de análisis consideradas (Fase I)

En la segunda fase, identificamos los desenlaces del razonamiento configural a partir de las unidades de análisis extraídas mediante el estudio de los ciclos coordinados de aprehensiones operativas y discursivas. Esta fase implica la identificación de los ciclos de reconocimiento de subconfiguraciones relevantes en el proceso de resolución y la posterior asociación de afirmaciones matemáticas que van formando el discurso escrito. En la figura 5 se muestra, de forma esquemática, los diferentes ciclos de aprehensiones operativa/discursiva del razonamiento configural desarrollados por G03 al resolver P3. En este caso, consideramos que el razonamiento configural desemboca en conjetura sin demostración, ya que el razonamiento que permite a los estudiantes dar una solución al problema, se sustenta en dos conjeturas no demostradas con anterioridad. Es decir, deducen información nueva sobre la subconfiguración identificada (hecho geométrico a probar) a partir de afirmaciones matemáticas que no han sido demostradas previamente.

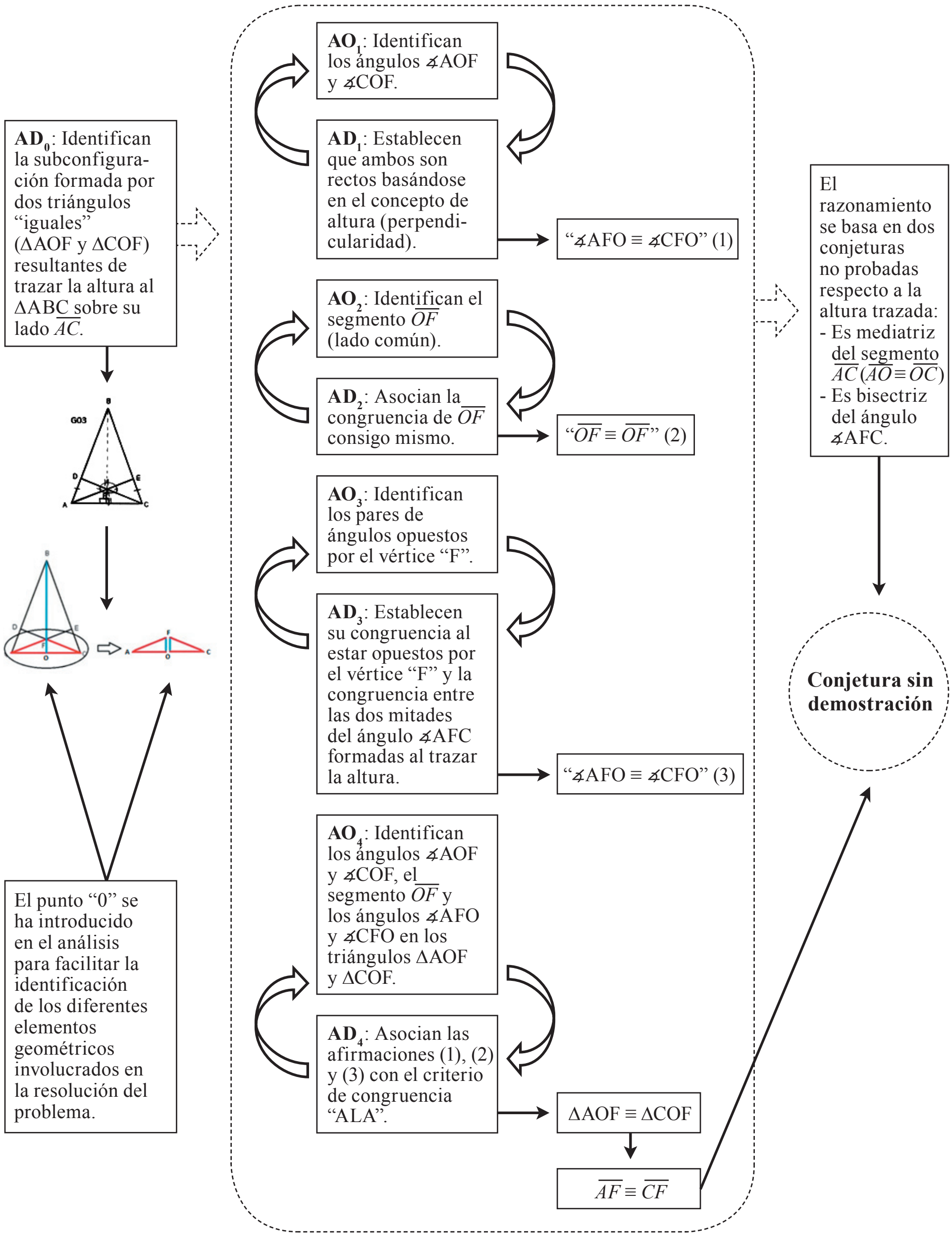


Figura 5. Razonamiento configural desarrollado por G03 al resolver P3 (Fase II)
AOi: Aprehensión operativa "i"; ADi: Aprehensión discursiva "i".
Las dobles flechas representan coordinaciones entre aprehensiones

En la tercera fase identificamos los modos de expansión del discurso puestos de manifiesto a partir de la organización del discurso escrito (respuesta) de los estudiantes. Además, consideramos el estatus otorgado a las diferentes afirmaciones matemáticas involucradas en el razonamiento que permite el establecimiento de la prueba, con el propósito de establecer relaciones entre el desarrollo del discurso, el cambio o no de estatus de las afirmaciones matemáticas implicadas (Duval, 2016b) y los desenlaces del razonamiento configural identificados.

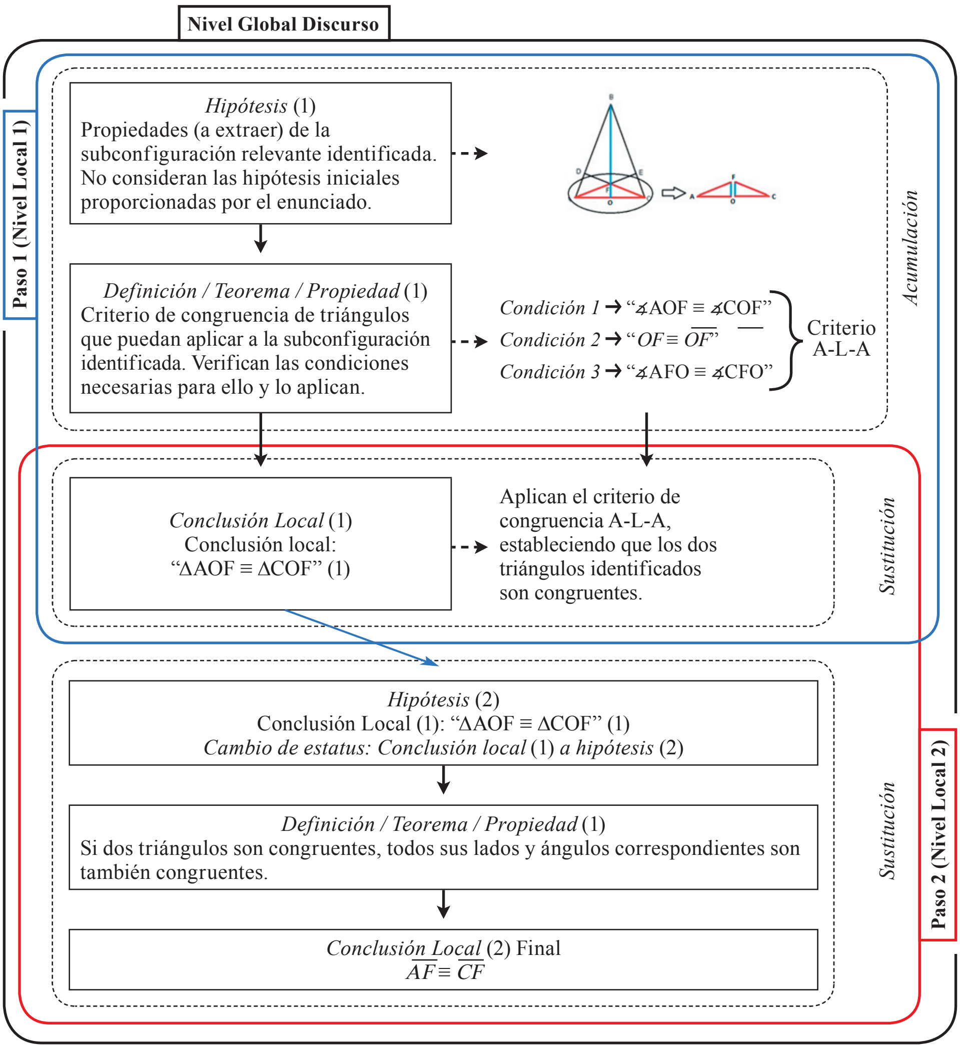


Figura 6. Organización del discurso generado por G03 al resolver P3 (Fase III)

En la figura 6 se muestra, de forma esquemática, la organización del discurso, los modos de expansión del mismo y el estatus de las afirmaciones matemáticas involucradas en el desarrollo de la prueba para la respuesta de G03 a P3. En dicha figura podemos observar que el nivel global del discurso se compone de dos niveles locales o "pasos" de razonamiento, y que cada "paso" o nivel local está formado, a su vez, por tres afirmaciones matemáticas que se encuentran relacionadas directamente por su estatus: hipótesis (inicial) de cada "paso" de razonamiento; definición, teorema o propiedad a aplicar a la hipótesis inicial de cada "paso"; y una conclusión local establecida a partir de las dos anteriores afirmaciones.

4. Resultados

Los resultados los presentamos en función de los desenlaces del razonamiento configural identificados (Figura 7) indicando las características de los procesos discursivos desarrollados durante la resolución de los problemas asociados a dichos desenlaces. Por ello, dividiremos los resultados en tres apartados: "Truncamiento y organización discursiva", "Conjetura sin demostración y organización discursiva" y "Bucle y organización discursiva".

	G01	*G02*	*G03*	*G04*	*G05*
P1	Truncamiento	Truncamiento	Conjetura sin demostración	En blanco	En blanco
P2	En blanco	Truncamiento	Truncamiento	En blanco	Conjetura sin demostración
P3	En blanco	Truncamiento	Conjetura sin demostración	Conjetura sin demostración	En blanco
P4	Bucle	Truncamiento	Truncamiento	En blanco	En blanco

Figura 7. Desenlaces del razonamiento configural identificados

4.1. *Truncamiento y organización discursiva*

La figura 8 muestra la respuesta dada a P4 por G02 cuyo razonamiento configural desemboca en truncamiento.

Sobre los lados $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ del triángulo ΔABC se construyen los triángulos equiláteros ΔABC’ y ΔAB’C. Demuestre que los segmentos $\overline{BB'}$ y $\overline{CC'}$ son iguales.

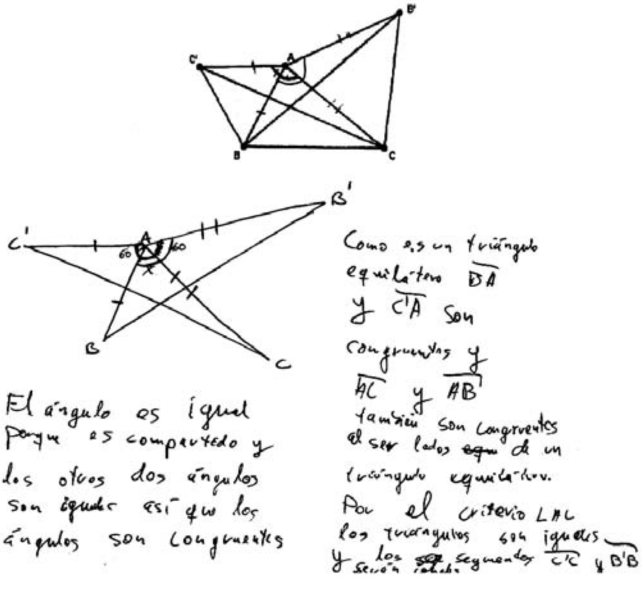


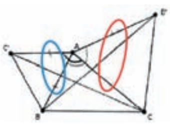
Figura 8. Respuesta de G02 a P4

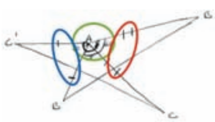
En este caso, los estudiantes comienzan los ciclos de aprehensiones operativa / discursiva (Figura 9) considerando la subconfiguración formada por el triángulo ΔABC’ (AO_0), a la que asocian el concepto de triángulo equilátero (AD_0). Ese hecho les permite establecer la congruencia de los lados del triángulo indicado, en particular, de los lados formados por los segmentos $\overline{BA}$ y $\overline{C'A}$. De forma análoga, consideran el triángulo ΔAB’C (AO_1) al que asocian el concepto de triángulo equilátero (AD_1) para establecer la congruencia de dos de sus lados (los formados por los segmentos $\overline{AB'}$ y $\overline{AC}$).

Continúan identificando la subconfiguración formada por los triángulos ΔABB’ y ΔACC’ (AO_2) para centrar su atención en los ángulos con vértice en el punto “*A*” que se forman en ambos triángulos por separado, es decir, en los ángulos *∡CAC’* y *∡BAB’.* Consideran (AD_2) que ambos ángulos están formados por: (a) uno de los ángulos de 60º pertenecientes a los triángulos considerados al inicio del razonamiento configural (ΔABC’ y ΔAB’C) a los que asocian el concepto de triángulo equilátero, y (b) por el ángulo *∡BAC* común a ambos, que denotan con la variable “*x”* en el dibujo mostrado en la figura 7, lo que les lleva a establecer la congruencia de los ángulos *∡CAC’* y *∡BAB’,* al medir ambos “$60^o + x$”. Tras ello, vuelven a considerar los triángulos ΔABB’ y ΔACC’ (AO_3) junto con las afirmaciones matemáticas obtenidas anteriormente (AD_3) (tal y como indican las marcas mostradas en la figura 8), estableciendo que ambos triángulos tienen dos lados y un ángulo congruentes ($\overline{BA} \equiv \overline{C'A}$, $\overline{AB'} \equiv \overline{AC}$ y *∡CAC’* y *∡BAB’*), lo que les permite aplicar el criterio de congruencia “*L-A-L*” (lado-ángulo-lado), establecer la congruencia de los triángulos ΔABB’ y ΔACC’ y, por tanto, de los segmentos $\overline{BB'}$ y $\overline{CC'}$, quedando demostrada así la tesis planteada.

Entendemos que el razonamiento configural desemboca en truncamiento cuando los ciclos de aprehensiones operativa/discursiva proporcionan la “idea” de cómo se resuelve el problema a los estudiantes, conduciéndoles a establecer una solución válida. En este sentido, los estudiantes son conscientes que, si demuestran la congruencia de los triángulos ΔABB’ y ΔACC’, de forma implícita queda demostrada la tesis del problema, finalizando por tanto el razonamiento configural una vez establecen la congruencia de los triángulos implicados en el razonamiento. Por ello, el razonamiento configural desemboca en truncamiento, ya que ha proporcionado la “idea” que permite a los estudiantes resolver el problema.

* Marcas de congruencia entre los segmentos indicados en (1) y (2).





Congruencia entre los ángulos indicados en (3): ambos medirían “60º + *x*”.

Los estudiantes dibujan la subconfiguración formada por los triángulos ΔABB’ y ΔACC’ y vuelven a indicar los segmentos congruentes.

AO$_0$: Identifican el triángulo ΔABC’.

AD$_0$: Asocian el ABC’ con el concepto de triángulo equilátero, estableciendo la congruencia de dos de sus lados, en particular, los segmentos “$\overline{BA'}$” y “$\overline{C'A}$”. (*) → $\overline{BA'} \equiv \overline{C'A}$ (1) (*)

AO$_1$: Identifican el triángulo ΔAB’C.

AD$_1$: Asocian el ΔAB’C con el concepto de triángulo equilátero, estableciendo la congruencia de los segmentos “$\overline{AB'}$” y “$\overline{AC}$”. (*) → $\overline{AB'} \equiv \overline{AC}$ (2) (*)

AO$_2$: Identifican la subconfiguración formada por los triángulos ΔABB’ y ΔACC’.

AD$_2$: Establecen la congruencia de los ángulos ∡*CAC’* y ∡*BAB’* al estar compuestos ambos por el ∡*BAC* y un ángulo de 60º (valor desprendido del concepto de triángulo equilátero). (**) → ∡C’AC ≡ ∡BAB’ (3) (**)

AO$_3$: Identifican los segmentos “$\overline{BA'}$” y “$\overline{C'A}$”, los segmentos “$\overline{AB'}$” y “$\overline{AC}$” y ángulos ∡*CAC’* y ∡*BAB’*.

AD$_3$: Asocian las afirmaciones (1), (2) y (3) con el criterio de congruencia “L-A-L”. → ΔABB’ ≡ ΔACC’ (4) → $\overline{BB'} \equiv \overline{CC'}$

Truncamiento

Figura 9. Razonamiento configural desarrollado por G02 al resolver P4

En relación a la organización del discurso (Figura 10), observamos que el nivel global se compone de cinco niveles o pasos locales.

Los estudiantes desarrollan los dos primeros pasos del razonamiento de forma análoga: consideran como hipótesis iniciales (hipótesis (1) e hipótesis (2)) los datos proporcionados por el enunciado: "*los triángulos ΔABC' y ΔAB'C son equiláteros*". Tras esto, los identifican en la configuración inicial para aplicarles la definición de triángulo equilátero (los lados y los ángulos de los triángulos equiláteros son congruentes) y concluyen cada paso (conclusión local (1) y conclusión local (2)) estableciendo la congruencia de dos de los lados de los triángulos identificados.

En el tercer paso consideran como hipótesis inicial (hipótesis (3)) la información desprendida de la subconfiguración relevante identificada con el objetivo de encontrar condiciones que permitan obtener el valor de los ángulos ∡*CAC'* y ∡*BAB'* (pertenecientes a los triángulos ΔABB' *y* ΔACC'). Para ello, vuelven a considerar el concepto de triángulo equilátero (dato proporcionado por el enunciado) y lo aplican a la subconfiguración para obtener que los ángulos ∡*CAC'* y ∡*BAB'* miden 60º más el espacio que comparten (que denominan "*x*"). Este hecho, les permite establecer la congruencia de los ángulos indicados (conclusión local (3)).

En el cuarto paso, las hipótesis iniciales consideradas son las congruencias de los segmentos $\overline{BA}$ y $\overline{C'A}$, de los segmentos $\overline{AC'}$ y $\overline{AB}$ y de los ángulos ∡*CAC'* y ∡*BAB'*. Estas afirmaciones matemáticas que desempeñan el papel de conclusiones locales de los "pasos 1, 2 y 3" del razonamiento, pasan a ser hipótesis iniciales (hipótesis (4)) de un nuevo paso de razonamiento (paso 4), produciéndose por ello, un cambio en el estatus (de conclusión local a hipótesis) de las mismas que permite conectar los pasos de razonamiento considerados al superponerse en la organización discursiva. Entendemos que las hipótesis (4) son afirmaciones matemáticas validadas previamente, ya que han sido obtenidas como resultado (conclusiones locales) de "pasos" de razonamiento anteriores. Por tanto, se trata de condiciones válidas que verifican la aplicación de un criterio de congruencia de triángulos. En consecuencia, son consideradas como "adecuadas" para aplicar el criterio de congruencia de triángulos L-A-L (lado - ángulo - lado), hecho que permite al grupo concluir de forma local (conclusión local (4)) que los triángulos ΔABB' y ΔACC' son congruentes.

En el quinto paso, la hipótesis inicial (hipótesis (5)) es la congruencia de los triángulos ΔABB' y ΔACC' (conclusión local (4)). Al considerar que ambos triángulos son congruentes, "infieren" que tienen todos sus lados y ángulos correspondientes son también congruentes, hecho que les permite concluir que los segmentos $\overline{BB'}$ y $\overline{CC'}$ son congruentes (conclusión local (5)), probando así la tesis planteada. En este "paso" de razonamiento, la conclusión local del "paso 4" pasa a desempeñar el papel de hipótesis del "paso 5", dándose un cambio de estatus que permite a los estudiantes establecer la conclusión final (conclusión local (5)).

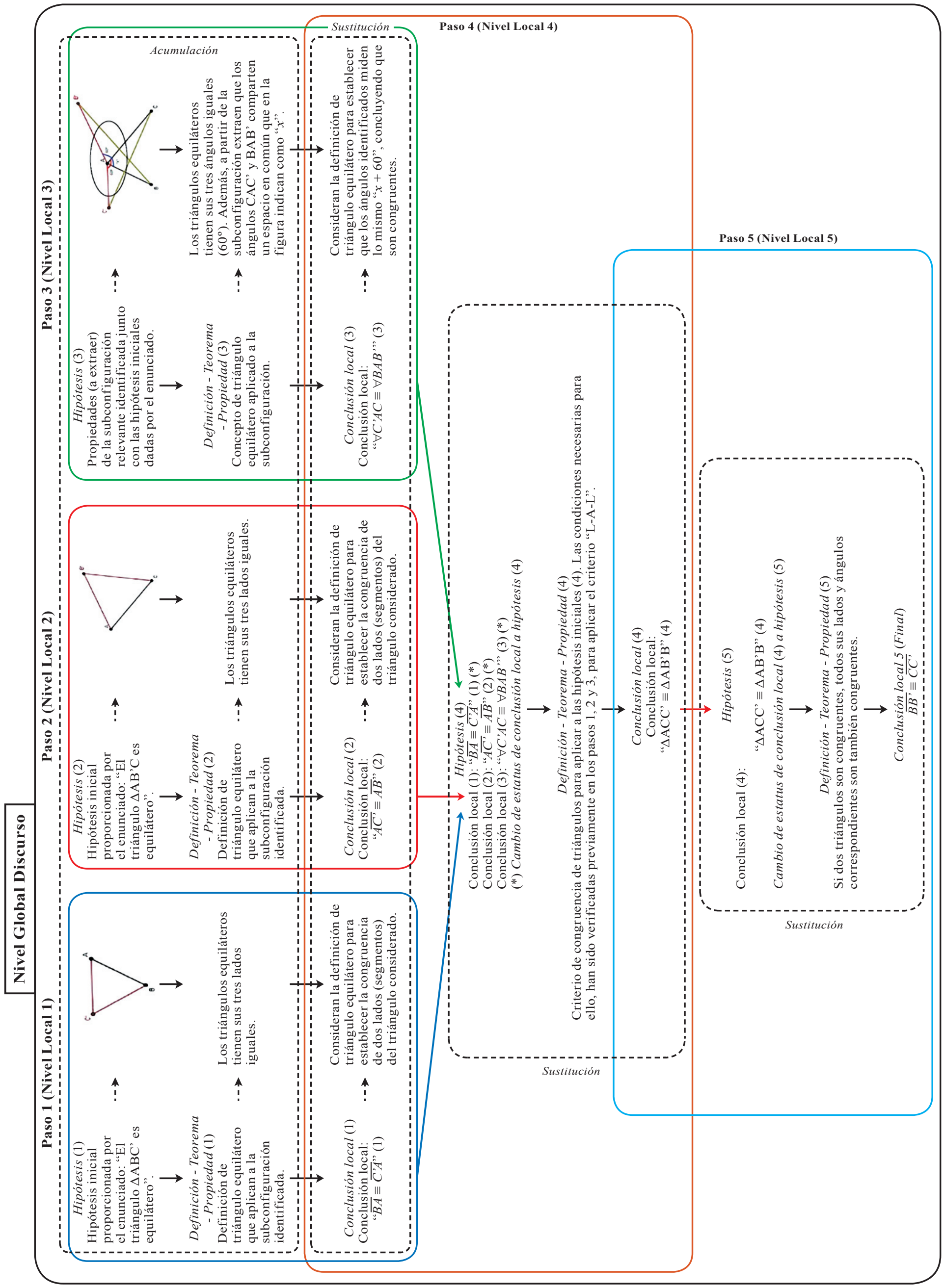


Figura 10. Organización del discurso generado por G02 al resolver P4

La manera de proceder de los estudiantes respecto a los modos de expansión discursiva en este caso, muestra que los tres primeros “pasos” del razonamiento se desarrollan de forma similar. Al inicio del “paso 1” consideran los datos (hipótesis iniciales) proporcionados por el enunciado, por lo que comienzan identificando el triángulo ∆ABC’ al que asocian el concepto de triángulo equilátero. Este hecho les permite “acumular” información (de forma implícita) referente al triángulo considerado, en particular, que tiene todos sus lados iguales. Una vez disponen de dicha información, la congruencia de dos de sus lados en particular, es consecuencia lógica del hecho geométrico considerado (triángulo ∆ABC’ es equilátero). Por ello, entendemos que en el “paso 1” se dan los modos de “acumulación” (a partir de las hipótesis iniciales) y “sustitución” (que permite establecer la conclusión local).

De forma análoga, en el “paso 2”, identifican el triángulo ∆AB’C al que aplican el concepto de triángulo equilátero (al considerar los datos proporcionados por el enunciado) que les permite establecer (de forma implícita) la congruencia de sus lados, que les permite concluir el “paso” considerando la congruencia de dos de sus lados en particular. Por tanto, en el “paso 2” se dan la “acumulación” y la “sustitución”.

En el “paso 3” los estudiantes comienzan extrayendo información a partir de la subconfiguración relevante identificada (formada por los triángulos ∆ABB’ y ∆ACC’) con el fin de obtener el valor de los ángulos ∡*CAC’* y ∡*BAB’*. Una vez consiguen “acumular” la información suficiente para ello, la utilizan de forma lógica para establecer la congruencia de ambos ángulos y establecer la conclusión del “paso 3”, dándose, por tanto, los modos de “acumulación” y “sustitución”.

En el “paso 4”, los estudiantes no comienzan “acumulando” información extraída del enunciado o de alguna subconfiguración identificada, sino que “reutilizan” y “ordenan” la información generada en los pasos anteriores (conclusiones locales (1), (2) y (3)), cambiando su estatus (y por ello su valor lógico) al considerarlas como hipótesis del criterio de congruencia de triángulos a aplicar. Así, establecen la congruencia de los triángulos ∆ABB’ y ∆ACC’ tras aplicar el criterio L-A-L, por lo que la conclusión es consecuencia lógica de los hechos geométricos generados previamente en otros pasos del razonamiento y la aplicación de un criterio de congruencia de triángulos en particular. Por ello, en el “paso 4” se da únicamente el modo de sustitución.

El “paso 5” se desarrolla de forma similar al “paso 4”. Los estudiantes vuelven a establecer relaciones lógicas a partir de la conclusión local (4) (congruencia de los triángulos ∆ABB’ y ∆ACC’), cambiando su estatus al de hipótesis (5) para finalizar en una afirmación matemática con estatus de conclusión local (5), y, además, en este caso, de conclusión final. De esta manera, en los “pasos 4 y 5” se da únicamente el modo de sustitución, ya que el discurso sigue un orden lógico, en el que cada afirmación es consecuencia lógica de la anterior y que desemboca en la tesis solicitada.

4.2. *Conjetura sin demostración y organización discursiva*

Para ilustrar los resultados obtenidos para el desenlace conjetura sin demostración, reutilizaremos el ejemplo mostrado en el apartado de análisis (Figura 4).

Los estudiantes comienzan el razonamiento configural (Figura 5) dibujando la altura del triángulo ΔABC sobre el segmento $\overline{AC}$, hecho que les lleva a considerar dos triángulos rectángulos (ΔAOF y ΔCOF) con un lado en común ($\overline{OF}$). Consideran que la altura trazada divide el segmento $\overline{AC}$ en dos partes iguales (mediatriz) y el ángulo $\measuredangle AFC$ en dos ángulos iguales (bisectriz), lo que les lleva a establecer que los triángulos identificados (ΔAOF y ΔCOF) tienen dos ángulos congruentes ($\measuredangle AOF \equiv \measuredangle COF$ y $\measuredangle AFO \equiv \measuredangle CFO$) y un lado en común ($\overline{OF}$). Este hecho, les permite considerar y aplicar el criterio de congruencia "*A-L-A*" (ángulo - lado - ángulo), estableciendo la congruencia de ambos triángulos y por tanto de los segmentos $\overline{AF}$ y $\overline{CF}$, demostrando así la tesis planteada.

Para el caso descrito, aunque los estudiantes son capaces de probar el hecho geométrico que se les solicitaba en el problema, fundamentan el razonamiento desarrollado en dos conjeturas no demostradas previamente: (1) suponen que la altura es mediatriz del segmento $\overline{AC}$ y (2) también bisectriz del ángulo ∡AFC. Estas afirmaciones tampoco se desprenden de las hipótesis iniciales, ya que, en ningún momento, se indica que el triángulo ΔABC es isósceles, caso para el que las conjeturas detectadas serían válidas. Por tanto, concluimos que el razonamiento configural desemboca en "conjetura sin demostración".

Respecto al discurso escrito (Figura 6), identificamos que el nivel global del proceso discursivo se compone de dos niveles locales (pasos). Los estudiantes no consideran en ningún momento los datos (hipótesis) proporcionados por el enunciado. Comienzan el primer paso extrayendo información de la subconfiguración relevante identificada con el fin de encontrar condiciones a verificar que les permita aplicar un criterio de congruencia de triángulos. Esta información extraída es utilizada en forma de tres afirmaciones matemáticas o condiciones que serán utilizadas para aplicar un criterio de congruencia de triángulo (definición / teorema / propiedad (1)). Dichas condiciones, debido al trazado inicial de la altura del triángulo ΔABC en la configuración inicial, se hacen relativamente "evidentes" y fácilmente verificables considerando las dos conjeturas anteriormente descritas. Este hecho les permite aplicar el criterio de congruencia "*A-L-A*" (ángulo - lado - ángulo), que posibilita al grupo concluir (localmente), que los dos triángulos considerados al inicio del paso son congruentes.

En el segundo paso de razonamiento, la conclusión local (1) (congruencia de los triángulos ΔAOF y ΔCOF) pasa a desempeñar el papel de hipótesis inicial (2), a partir de la que "infieren" que en dos triángulos congruentes, todos sus lados y ángulos correspondientes, son congruentes también, concluyendo que los segmentos $\overline{AF}$ y $\overline{CF}$ son congruentes (conclusión local (2)). Por tanto, se produce un cambio de estatus: la conclusión (local) del "paso 1" pasa a desempeñar el rol de hipótesis del "paso 2", permitiendo a los estudiantes finalizar el "paso 2" estableciendo otra conclusión local (2), que es, además, la "conclusión final" del razonamiento llevado a cabo (tesis a demostrar).

La manera de proceder de los estudiantes en este caso, pone de manifiesto que los alumnos "acumulan" información al inicio del "paso 1", ya que extraen información (condiciones a verificar) a partir de la subconfiguración identificada, sin un orden lógico, únicamente con el objeto de poder aplicar un criterio de congruencia (aunque fundamentado en conjeturas no demostradas). Tras esto, los estudiantes ordenan la información obtenida y consideran aquella información que les permite aplicar el criterio de congruencia de triángulos identificado (condiciones verificadas), por lo que se da un cambio del estatus lógico de la información utilizada para aplicar dicho criterio de congruencia, dándose el modo de sustitución. Esto es así ya que establecen la congruencia de los triángulos identificados a partir de la aplicación del criterio A-L-A, es decir, la conclusión establecida es consecuencia lógica de los hechos geométricos (condiciones verificadas) generados previamente (aunque basados en conjeturas no demostradas previamente) y el criterio de congruencia aplicado, dándose un orden lógico y secuencial del discurso. Por ello, en el "paso 1" se dan los modos de acumulación y sustitución.

En el "paso 2", únicamente se da el modo de sustitución, ya que sólo se establecen relaciones lógicas a partir de la información generada en el "paso 1" (congruencia de triángulos) para finalizar en una afirmación con status de conclusión local (2) (lados congruentes). De esta forma, la expansión del discurso por sustitución, se realiza con un orden lógico, donde cada afirmación involucrada es consecuencia de la anterior, concluyendo en la tesis solicitada.

4.3. *Bucle y organización discursiva*

En la figura 11 mostramos la respuesta de G01 a P4 cuyo razonamiento configural desemboca en "bucle".

Sobre los lados $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ del triángulo ΔABC se construyen los triángulos equiláteros $\Delta ABC'$ y $\Delta AB'C$. Demuestre que los segmentos $\overline{BB'}$ y $\overline{CC'}$ son iguales.

Respuesta:

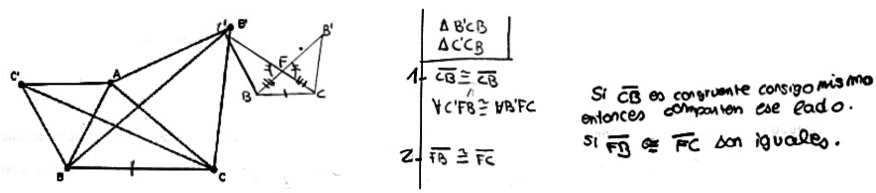


Figura 11. Respuesta a P4 dada por G01

Los estudiantes inician el razonamiento configural identificando y dibujando la subconfiguración formada por los triángulos $\Delta B'CB$ y $\Delta\ C'CB$ (AO_0) (Figura 12). A partir de la subconfiguración detectada, realizan tres ciclos coordinados de aprehensiones operativa / discursiva con la finalidad de extraer información de la misma.

En el primer ciclo (Figura 12) (AO_1 / AD_1), consideran el segmento $\overline{CB}$ como lado común de los triángulos identificados, asociando este hecho geométrico (de forma implícita) con la propiedad reflexiva, que les permite establecer la congruencia de dicho segmento *"consigo mismo"*.

En el segundo ciclo (AO_2/AD_2), consideran los ángulos $\measuredangle C'FB$ *y* $\measuredangle B'FC$ opuestos por el vértice "*F*", asociándolos con la propiedad de que ángulos opuestos por el vértice son congruentes, estableciendo la congruencia de los ángulos considerados.

Respecto al tercer ciclo (AO_3/AD_3), consideran los segmentos $\overline{FB}$ y $\overline{FC}$ a los que asocian (de forma errónea) su congruencia.

Una vez establecen las tres afirmaciones matemáticas indicadas, no continúan con la resolución del problema, entrando en una situación de bloqueo, por lo que el razonamiento configural desemboca en "bucle". Los estudiantes establecen una afirmación matemática errónea ("$\overline{FB} \cong \overline{FC}$") y otra que carece de sentido, de utilidad, ($\measuredangle C'FB$ *y* $\measuredangle B'FC$) si consideramos la subconfiguración inicial identificada. Este hecho indica que el grupo ha intentado asociar algún criterio de congruencia de triángulos con la subconfiguración inicial identificada (triángulos $\Delta C'FB$ y $\Delta B'FC$), que les permitiría demostrar la tesis planteada, ya que ambos triángulos contienen los segmentos $\overline{BB'}$ y $\overline{CC'}$ de los que se debe demostrar su congruencia. Para ello, han pretendido verificar condiciones en la subconfiguración inicial identificada para aplicar un criterio de congruencia, lo que les ha conducido a realizar tres ciclos coordinados de aprehensiones operativa / discursiva. Sin embargo, las condiciones extraídas, no verifican ningún criterio de congruencia para la subconfiguración identificada, por lo que entran en un estado de bloqueo.

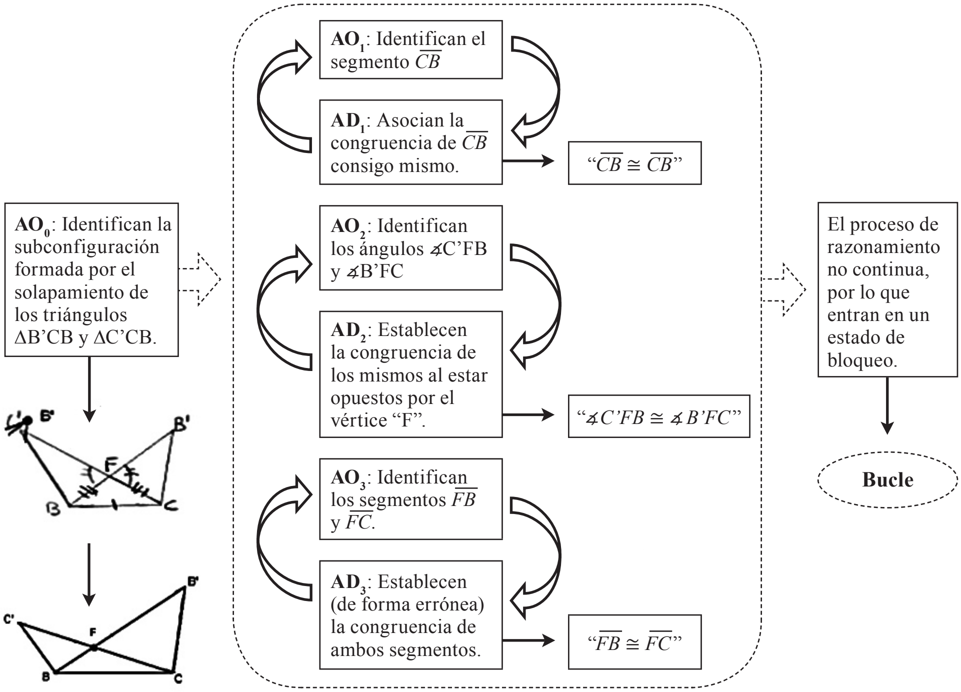


Figura 12. Razonamiento configural desarrollado por G01 al resolver P4

Por otro lado, el nivel global de la organización del discurso (Figura 13) se solapa con el nivel local, ya que encontramos un único "paso" en el discurso generado.

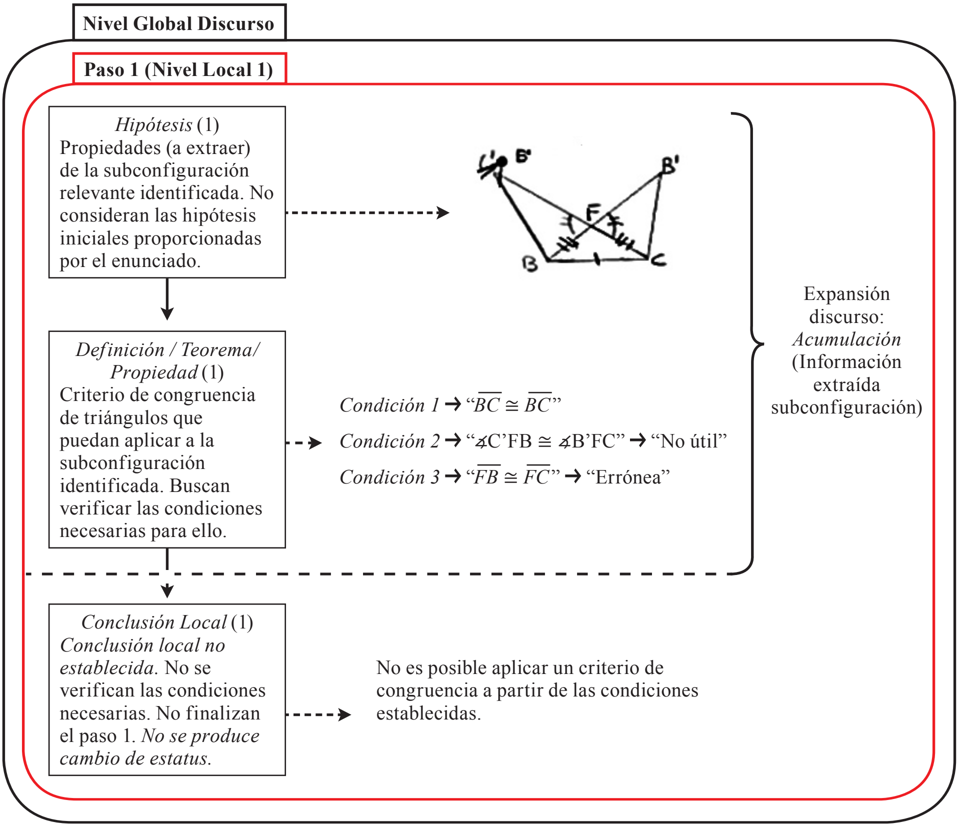


Figura 13. Organización del discurso generado por G01 al resolver P4

Esto se debe a que las afirmaciones matemáticas establecidas se sitúan dentro del mismo nivel local de organización del discurso. Como estas afirmaciones no verifican ningún criterio de congruencia que puedan aplicar a la subconfiguración identificada, los estudiantes no concluyen el "paso" iniciado, no generando más discurso escrito. Por tanto, no se produce un cambio en el estatus operativo de las afirmaciones involucradas, ya que no son capaces de finalizar el "paso" analizado con una afirmación matemática con estatus de "conclusión local" a partir de las afirmaciones con estatus de "hipótesis".

Respecto al modo de expansión del discurso, encontramos que solo se da el modo de acumulación, ya que los estudiantes extraen información de la subconfiguración identificada sin importar la que sea, con el objeto de aplicar un criterio de congruencia. De hecho, de esa información “acumulada” en forma de condiciones a verificar, una de ellas es errónea y la otra no es útil, por lo que no pueden aplicarse a ningún criterio de congruencia.

5. Discusión y conclusiones

Nuestro objetivo es analizar el cambio de estatus de las diferentes afirmaciones matemáticas que componen el proceso discursivo en la resolución de problemas geométricos de probar. En particular, cómo se desarrolla y organiza el discurso escrito (respuesta) que permite comunicar la solución al problema con el fin de identificar relaciones con los desenlaces del razonamiento configural.

El razonamiento configural desemboca en truncamiento cuando los ciclos coordinados de aprehensiones operativas y discursivas permiten a los estudiantes “acceder” a la forma en que se resuelve el problema de forma lógico - deductiva. Los resultados ponen de manifiesto que una vez cesan estos ciclos, los estudiantes han establecido las afirmaciones matemáticas que permiten resolver el problema. En ese momento, los estudiantes dejan de considerar la/s configuración/es geométrica/s identificada/s para finalizar el problema estableciendo relaciones lógicas entre las afirmaciones matemáticas involucradas, desarrollando, por tanto, en la parte final del discurso escrito, un razonamiento independiente de cualquier subconfiguración geométrica identificada (Duval, 2016a), que permite a los estudiantes probar la tesis planteada. Por este motivo, consideramos que el papel de la configuración inicial va cambiando, desempeñando una función heurística (proporcionar estrategias de resolución en función de las subconfiguraciones identificadas) durante el razonamiento configural, para pasar a un papel sinóptico (mostrar elementos geométricos relacionados entre sí de forma conjunta) una vez cesan los ciclos entre aprehensiones.

A pesar de lo anterior, se nos plantea cierta ambigüedad para detectar con precisión el momento en el que se produce el truncamiento. En el caso mostrado en la figura 9, los estudiantes una vez han establecido las tres afirmaciones que permiten resolver el problema, los ciclos del razonamiento configural cesan, puesto que las afirmaciones matemáticas establecidas son suficientes para probar el hecho geométrico solicitado en el problema. Sin embargo, el momento en el que los estudiantes son “conscientes” de cómo resolver el problema podría darse, por ejemplo, en el tercer ciclo del razonamiento configural, ya que el hecho de establecer las afirmaciones matemáticas (1) y (2) (Figura 9) a partir de las subconfiguraciones identificadas puede, de forma implícita o indirecta, hacer "visible" la forma de resolver el problema antes de establecer la afirmación matemática (3) (Figura 9) necesaria para aplicar el criterio de congruencia de triángulos. Por tanto, los ciclos coordinados de aprehensiones operativas y discursivas, pueden proporcionar a los estudiantes "la idea" que permite resolver el problema de forma lógico-deductiva, incluso antes de establecer todas las condiciones o relaciones necesarias que permitan finalizar el proceso de prueba. Este hecho hace menos evidente y claro el momento en el que se da el truncamiento en problemas geométricos de probar que en problemas geométricos empíricos (Saorín, Torregrosa y Quesada, 2017b).

Para los desenlaces conjetura sin demostración y bucle mostrados, observamos que los estudiantes no consideran las hipótesis iniciales proporcionadas por el enunciado. Este hecho parece estar relacionado con la subconfiguración relevante considerada en el proceso de resolución del problema. En el desenlace "bucle" (Figura 12) los estudiantes consideran la subconfiguración complementaria a la subconfiguración relevante necesaria para resolver el problema, que les lleva a establecer una afirmación matemática errónea "$FB \cong FC$" y otra sin utilidad "$\measuredangle C'FB$ y $\measuredangle B'FC$", que les conduce a una situación de bloqueo (bucle) del razonamiento configural al no poder aplicar ningún criterio de congruencia de triángulos. En este caso, la subconfiguración está formada por dos triángulos que presentan características más "familiares" para los estudiantes que los que componen la subconfiguración relevante que permiten solucionar el problema. En el desenlace conjetura sin demostración (Figura 5) los estudiantes trazan la altura al triángulo inicial, que les permite identificar los triángulos ΔAOF y ΔCOF y establecer dos conjeturas sobre las que basan su razonamiento. Aquí, es evidente que asocian el triángulo inicial con la representación "estándar" de triángulo isósceles, que les lleva a trazar su altura y establecer dos conjeturas válidas para este tipo de triángulos, aunque no hayan sido demostradas previamente. Por tanto, se hace patente la influencia de las configuraciones "familiares" o "prototípicas" (Clemente, Torregrosa y Llinares, 2015; Saorín, Torregrosa y Quesada, 2017b) en la identificación de subconfiguraciones relevantes, que puede conducir a un razonamiento no basado en las condiciones (datos) impuestas por el enunciado y, por tanto, desembocar en una solución no válida (o errónea) o en una situación de bloqueo. Este hecho pone de manifiesto que los estudiantes serán capaces de iniciar el razonamiento configural con mayor facilidad al identificar configuraciones relacionadas con los conocimientos geométricos previamente adquiridos (Gal, Linchevski, 2010).

5.1. *La necesidad del cambio de estatus en el proceso de prueba*

Los resultados sugieren que cuando se produce un cambio de status de las afirmaciones matemáticas que componen el razonamiento, el razonamiento configural desemboca en “truncamiento” o “conjetura sin demostración”. Este hecho permite a los estudiantes dar una solución al problema, independientemente de si ésta es válida, basada en conjeturas sin demostrar o errónea. Por contra, cuando el cambio de estatus de las afirmaciones matemáticas no se da, el razonamiento desarrollado entra en una situación de bloqueo (bucle), no permitiendo a los estudiantes emitir solución alguna al problema.

En el caso del truncamiento mostrado, tenemos que en los “pasos 1, 2 y 3” (Figura 10) del razonamiento, los estudiantes establecen tres afirmaciones matemáticas válidas con estatus de conclusión local. Tras esto, otorgan a las conclusiones locales (1), (2) y (3) el rol de hipótesis iniciales del “paso 4” (Figura 10) del razonamiento. Este cambio de estatus de conclusión local (1), (2) y (3) a hipótesis (4) iniciales, les permite iniciar un nuevo paso de razonamiento que finaliza con otra afirmación con estatus de conclusión local (4). Nuevamente, generan otro “paso” de razonamiento (“paso 5”) a partir de un nuevo cambio de estatus de la afirmación con estatus de conclusión local (4), que les permite establecer una nueva afirmación con estatus de conclusión local (5), que además es la solución (válida) al problema.

Para el caso de conjetura sin demostración (Figura 6), observamos que el “paso 1” de razonamiento comienza con la identificación de una subconfiguración geométrica que permite a los estudiantes inferir tres hechos geométricos (dos de ellos no demostrados previamente) que son utilizados como hipótesis iniciales (1). Esta información extraída es utilizada en forma de tres afirmaciones matemáticas o condiciones que serán utilizadas para aplicar un criterio de congruencia de triángulos que finaliza con una afirmación con estatus de conclusión local (1). Tras esto, otorgan a la conclusión local (1) el papel de hipótesis del “paso 2”, dotando a dicha afirmación de un estatus diferente a la inicial. Este cambio de conclusión local a hipótesis, les permite generar un nuevo paso de razonamiento que finaliza con otra afirmación con estatus de conclusión local (2), que además es la conclusión final (no válida) al problema.

Por ello, el lugar que ocupan las afirmaciones matemáticas en la organización discursiva, viene determinado por sus estatus (hipótesis, definición / teorema / propiedad y conclusión), es decir, por el papel particular que desempeñan en cada “paso” del razonamiento. Esto implica que, para construir una prueba, es necesario organizar las afirmaciones matemáticas dentro de cada paso deductivo según la secuencia indicada. Es decir, en cada "paso" de razonamiento se articulan las diferentes afirmaciones matemáticas implicadas atendiendo a su estatus, hecho que lleva a la "transformación" de las hipótesis iniciales de cada "paso" de razonamiento en conclusiones locales con valor lógico mediante un cambio de estatus, realizado a partir de la consideración de propiedades, definiciones, teoremas o inferencia de información (en el contexto del problema).

Por otro lado, el cambio de estatus de las afirmaciones involucradas en el proceso de prueba es una condición necesaria para que el razonamiento configural permita establecer una solución válida. Sin embargo, no es una condición suficiente, tal y como se refleja en el caso de la conjetura sin demostración (Figura 6), en el que las afirmaciones establecidas a partir de las subconfiguraciones identificadas permiten la construcción de un proceso deductivo que desemboca en una conclusión, aunque no válida, ya que se basa en afirmaciones no demostradas previamente. Por tanto, el cambio de estatus de las afirmaciones involucradas en el desarrollo de la prueba es una condición necesaria, pero no suficiente, para que el razonamiento configural desemboque en una solución válida, no basada en conjeturas sin demostrar. Se hace patente de nuevo, la influencia ejercida por la subconfiguración relevante identificada (Clemente y Llinares, 2015) en el proceso de prueba. Lo que sí está directamente relacionado con el cambio de estatus, es que permite el desarrollo de un proceso lógico-deductivo en el que los estudiantes son capaces de dotar de diferentes roles a los hechos geométricos involucrados en el proceso de prueba, aunque pueda estar fundamentado en afirmaciones anteriores erróneas o no válidas en el contexto del problema.

5.2. *Construcción del discurso que comunica la prueba*

Los resultados evidencian que las afirmaciones establecidas mediante el modo de "acumulación" son enunciadas con el objetivo de extraer información relacionada con el problema a resolver, ya sea a partir del enunciado (hipótesis iniciales) o inferida de la subconfiguración identificada. Estas afirmaciones no siguen un orden preestablecido, pudiendo ser establecidas en cualquier orden al estar relacionadas solo por su contenido, por lo que no influyen en el desenlace del razonamiento desarrollado a posteriori, presentando únicamente valores epistémicos y semánticos. Son afirmaciones matemáticas utilizadas como argumentos dentro del "contexto" de resolución de los problemas. De esta forma, podríamos asociar el desenlace bucle del razonamiento configural con el hecho de que se manifieste únicamente el modo de acumulación en un razonamiento, ya que las características descritas para las afirmaciones enunciadas mediante este modo discursivo, describen a la perfección las de las afirmaciones establecidas en la resolución de P4 por parte de G01 (Figura 13), cuyo razonamiento configural finaliza en bucle.

Por otro lado, el modo de "sustitución" muestra la utilización de afirmaciones matemáticas que forman parte de un proceso de razonamiento lógico - deductivo que conduce a los estudiantes a dar una solución al problema (correcta o no), manifestándose en los desenlaces truncamiento (Figuras 10) y conjetura sin demostración del razonamiento configural (Figura 6). En ambos casos, el proceso de construcción del discurso sucede de forma análoga, a pesar de que en el caso del desenlace conjetura sin demostración presentado, el razonamiento desarrollado se basa en conjeturas no demostradas previamente. Cada "paso" de razonamiento se inicia mediante una "fase de acumulación" de información que permite establecer afirmaciones con valores epistémicos y semánticos, para concluirlo con una "fase de sustitución", en el que las afirmaciones adquieren, además, un valor lógico. En aquellos "pasos" en los que se dan ambos modos de expansión discursiva, los estudiantes siguen considerando la subconfiguración identificada, a pesar de que las conclusiones locales se obtienen mediante procesos lógico - deductivos. Una vez los estudiantes, poseen toda la información necesaria (en forma de conclusiones locales) para resolver el problema, inician "pasos" de razonamiento en los que se manifiesta únicamente el modo de sustitución. En estos "pasos", las hipótesis iniciales no provienen de la "acumulación" de información inferida de la subconfiguración relevante identificada, sino que son afirmaciones matemáticas dotadas de un valor lógico en "pasos" anteriores, en las que se produce un cambio de estatus que permite continuar con el razonamiento conducente a obtener una solución al problema. Tal y como indica Duval (1999), se da un proceso de *encadenamiento por reutilización* de afirmaciones matemáticas, hecho que garantiza la continuidad entre dos pasos de un razonamiento lógico - deductivo. Por ello, consideramos que los valores semánticos y epistémicos de las afirmaciones matemáticas establecidas pueden vincularse al modo de acumulación, del mismo modo que el valor lógico puede vincularse al modo de sustitución, en consonancia con los resultados de Robotti (2012).

Por tanto, y como respuesta a las cuestiones planteadas al inicio del estudio, consideramos que para generar un razonamiento lógico - deductivo que finalice en una solución válida a problemas de prueba en contexto geométrico, es necesario que:

(1) Cesen los ciclos de aprehensiones operativas y discursivas (finalice el razonamiento configural) para dar paso a un razonamiento lógico-deductivo que permite finalizar el razonamiento desarrollado con la prueba requerida, generando un razonamiento independiente de

cualquier proceso de visualización. Este hecho indica, además, que el papel de la configuración inicial cambia, ya que inicialmente desempeña un papel heurístico y cuando finaliza el razonamiento configural pasa a desempeñar un papel sinóptico.

(2) Se produzca un cambio en el estatus de las afirmaciones matemáticas involucradas en el razonamiento conducente a la prueba que permita, a una afirmación matemática, desempeñar diferentes roles en el proceso de razonamiento, independientemente de si es obtenida como resultado del proceso de coordinación entre aprehensiones (razonamiento configural) o bien, de forma lógico-deductiva a partir de otras afirmaciones anteriormente demostradas.

(3) El discurso escrito (entendido como proceso argumentativo) que permite comunicar la solución al problema, se desarrolle desde el modo de acumulación al modo de sustitución. En los primeros niveles locales encontramos ciclos de acumulación-sustitución que permiten establecer afirmaciones matemáticas a partir del contexto de resolución. Una vez se obtienen las afirmaciones necesarias para resolver el problema, los siguientes niveles locales se desarrollan por sustitución, ya que los estudiantes "reutilizan" dichas afirmaciones para concluir el problema mediante un proceso lógico-deductivo. Así, el nivel global de la organización discursiva, comienza con la acumulación de información (inicio del primer nivel local del discurso) que desencadena el proceso de razonamiento para finalizar con la comunicación de la solución (conclusión del último nivel local del discurso) mediante el modo de sustitución.

Sin embargo, éstas condiciones pueden no ser suficientes, ya que la influencia de la subconfiguración relevante identificada se hace patente en el proceso de razonamiento desarrollado. En este sentido, la argumentación desempeña un papel importante como enlace entre los diferentes ciclos de aprehensiones del razonamiento configural y el discurso escrito generado al resolver problemas geométricos de prueba, hecho que sería interesante desarrollar en trabajos posteriores.

Referencias bibliográficas

Alcock, L., y Weber, K. (2010). Referential and syntactic approaches to proving: Case studies from a transition-to-proof course. *Research in Collegiate Mathematics Education, 7,* 101-123.

Clemente, F. y Llinares, S. (2015). Formas de discurso y razonamiento configural de estudiantes para maestro en la resolución de problemas de geometría. *Enseñanza de las Ciencias, 33*(1), 9-27. doi:10.5565/rev/ensciencias.1332

Clemente, F., Torregrosa, G. y Llinares, S. (2015). La identificación de figuras prototípicas en el desarrollo del razonamiento configural. XIV CIAEM-IACME. Chiapas, México, 2015.

Clemente, F., Llinares, S., y Torregrosa, G. (2017). Visualization and Configural Reasoning. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, *31*(57), 497-516. doi: 10.1590/1980-4415v31n57a24

Douek, N. (2010). Approaching proof in school: From guided conjecturing and proving to a story of proof construction. *CERME6* (pp. 332-342).

Duval, R. (1998). Geometry from a cognitive point a view. In C. Mammana & V. Villani (Eds.), *Perspective on the Teaching of Geometry for the 21st Century*, 37-51. Dordrecht / Boston: Kluwer Academic Publishers.

Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano.* Cali, Colombia: Artes gráficas Univalle.

Duval, R. (2016a). Las condiciones cognitivas del aprendizaje de la geometría. Desarrollo de la visualización, diferenciaciones de los razonamientos, coordinación de sus funcionamientos. En L. Radford y B. D'Amore (Eds.), *Comprensión y aprendizaje en matemáticas: perspectivas semióticas seleccionadas* (pp 13-61). Bogotá, Colombia: Editorial Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Duval, R (2016b). El funcionamiento cognitivo y la comprensión de los procesos matemáticos de la prueba. En L. Radford y B. D'Amore (Eds.), *Comprensión y aprendizaje en matemáticas: perspectivas semióticas seleccionadas* (pp. 95-125). Bogotá, Colombia: Editorial Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Gal, H., y Linchevski, L. (2010). To see or not to see: analyzing difficulties in geometry from the perspective of visual perception. *Educational studies in mathematics*, *74*(2), 163-183.

Hanna, G., y de Villiers, M. (2008). ICMI Study 19: Proof and proving in mathematics education. *ZDM: International Journal on Mathematics Education, 40*(2), 329-336.

Heinze, A., Cheng, Y. H., Ufer, S., Lin, F. L., y Reiss, K. (2008). Strategies to foster students' competencies in constructing multi-steps geometric proofs: Teaching experiments in Taiwan and Germany. *ZDM: International Journal on Mathematics Education, 40*(3), 443-453.

Llinares, S. y Clemente, F. (2014). Characteristics of pre-service primary school teachers' configural reasoning. *Mathematical Thinking and Learning*, *16*(3), 234-250. doi: 10.1080/10986065.2014.921133

Mariotti, M. A. (2006). Proof and proving in mathematics education. En A. Gutiérrez y P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education* (pp. 173-204). Rotterdam: Sense Publishers.

Mesquita, A. L. (1998). On conceptual obstacles linked with external representation in geometry. *Journal of Mathematical Behavior, 17*(2), 183-195.

Pitta-Pantazi, D., y Christou, C. (2009). Cognitive styles, dynamic geometry and measurement performance. *Educational Studies in Mathematics*, *70*1, 5-26.

Prior, J. y Torregrosa, G. (2013). Razonamiento configural y procedimientos de verificación en contexto geométrico. *RELIME. Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, *16*(3), 339-368.

Reiss, K., Heinze, A., Renkl, A. & Groß, C. (2008). Reasoning and proof in geometry: Effects of a learning environment based on heuristic worked-out examples. *ZDM*, *40*(3), 455-467. doi: 10.1007/s11858-008-0105-0

Robotti, E. (2012). Natural language as a tool for analyzing the proving process: the case of plane geometry proof. *Educational Studies in Mathematics, 80*(3), 433-450.

Saorín, A., Torregrosa, G. y Quesada, H. (2017a). Razonamiento configural y argumentación en procesos de prueba en contexto geométrico. En J. M. Muñoz-Escolano, A. Arnal - Bailera, P, Beltrán - Pellicer, M. L. Callejo y J. Carrillo (Eds), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 467-476). Zaragoza: SEIEM.

Saorín, A., Torregrosa, G. y Quesada, H. (2017b). Razonamiento configural extendido: coordinación de procesos cognitivos en la resolución de problemas geométricos empíricos. II CEMACYC. Cali, Colombia, 2017.

Torregrosa, G. y Quesada, H. (2007). Coordinación de procesos cognitivos en geometría. *RELIME. Revista Latinoamericana de investigación en Matemática Educativa,10*(2), 275-300.

Torregrosa, G., Quesada, H. y Penalva M. C. (2010). Razonamiento configural como coordinación de procesos de visualización. *Enseñanza de las Ciencias, 28*(3), 327-340. doi: https://doi.org/10.5565/rev/ec/v28n3.187

Torregrosa, G. (2017). Coordinación de procesos cognitivos en la resolución de problemas: relación entre geometría y álgebra. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 12*, 1 -17.

Weber, K. (2001). Student difficulty in constructing proofs: The need for strategic knowledge. *Educational Studies in Mathematics, 48*(1), 101-119.

Zandieh, M., Roh, K.H., y Knapp, J. (2014). Conceptual blending: Student reasoning when proving “conditional implies conditional” statements. *The Journal of Mathematical Behavior, 33*, 209-229.

Autores

Antonio Saorín Villa. Universidad de Alicante, España. ansaovi@gmail.com

Germán Torregrosa Gironés. Universidad de Alicante, España. german.torregrosa@ua.es

Humberto Quesada Vilella. Universidad de Alicante, España. humberto.quesada@ua.es

La Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (*Relime*) es la publicación oficial de investigación del Comité Latinoamericano de Matemática Educativa (Clame AC). Se edita tres veces por año. Acepta artículos en español, portugués, inglés y francés. Está dirigida a investigadores en Matemática Educativa, a profesores de matemáticas y ciencias, y estudiantes de licenciatura y posgrado interesados en conocer los resultados recientes de las investigaciones y en profundizar en el conocimiento de un tema en particular.

Objetivos:

1. *Relime* pretende ser un foro abierto a las diversas escuelas del pensamiento (paradigmas, teorías, metodologías, métodos, enfoques) en nuestra disciplina, la Matemática Educativa, sin definir perspectivas únicas y con un profundo respeto a las tradiciones educativas y los contextos de los diversos sistemas educativos de nuestra región.
2. Dar a conocer resultados de investigación original en Matemática Educativa que se realizan en América Latina y el Caribe y en el resto del mundo.
3. Contribuir al proceso de profesionalización de la Matemática Educativa en nuestra región.
4. Fomentar una cultura de divulgación e investigación entre los distintos grupos de investigación en nuestra región.
5. Propiciar el debate y la reflexión profunda sobre problemas de investigación que fortalezca la disciplina en nuestra área geográfica.
6. Fortalecer la calidad de la investigación en Matemática Educativa y la vinculación entre comunidades nacionales e internacionales.

INSTRUCCIONES TÉCNICAS PARA AUTORES

LAS CONTRIBUCIONES

Toda contribución propuesta a Relime se somete a un estricto proceso de arbitraje. Las contribuciones deberán ser resultado de investigaciones teóricas o experimentales, estudios de caso, etnográficos, etc., en formato de artículo. Estas contribuciones deberán ser trabajos inéditos de investigación, no estar en arbitraje en otra revista ni tratarse de traducciones previamente publicadas en su lengua original.

CARACTERÍSTICAS DE LOS MANUSCRITOS

Relime publica artículos en castellano, portugués, inglés y francés. Acepta ensayos teóricos originales así como propuestas que sean resultado de estudios experimentales, de casos, de observación, etnográficos, etc.

Los artículos deberán tener un máximo de nueve mil palabras, incluyendo referencias, figuras, cuadros y anexos. En caso de que su propuesta exceda esta extensión, el Comité de Redacción decide si considera la posibilidad de publicarlo siempre que tal propuesta no ocupe todo el espacio disponible en un número de la revista.

En el caso de reportes de estudios experimentales, de casos, de observación, etnográficos, etcétera, recomendamos que los escritos contengan:

1) Resumen del trabajo, deberá tener un máximo de 10 renglones escrito en español, portugués, inglés y francés y de 5 palabras clave en las cuatro lenguas. Resumen, título y palabras clave deben ser escritos en los cuatro idiomas.
2) Una exposición del problema de investigación (su pertinencia y relevancia en el tema que se aborda).
3) Indicaciones globales acerca de la estructura teórica del reporte.
4) Justificación de la metodología usada.
5) Desarrollo de algunos ejemplos y análisis de resultados.
6) Referencias bibliográficas.

Si se trata de ensayos teóricos y filosóficos, nuestra recomendación es la siguiente:

1) Iniciar con una exposición del problema de investigación (su pertinencia y relevancia en el tema que se aborda).
2) Revisión de la literatura que incluya trabajos importantes que sustenten la investigación, en el que se refleje una variedad de resultados actuales. Esta revisión debe incluir investigaciones internacionales pertinentes y no limitarse a estudios de un solo país.
3) Ofrecer indicaciones sobre la estructura teórica o filosófica en la cual se desarrolla el tema del artículo.
4) Exposición detallada de la posición del autor dentro del tema o los temas de exposición. Esto debe reflejarse a través del desarrollo de ideas, más que de una lista de reflexiones.

5) Implicaciones o consecuencias de la investigación en el área.
6) Referencias bibliográficas.

PROCESO DE EVALUACIÓN EN RELIME

Los artículos propuestos a Relime serán leídos por dos miembros del Comité de Redacción, y si el contenido atiende a la originalidad y satisface los criterios anteriores, así como a la claridad de la presentación e interés para la comunidad de matemática educativa, serán evaluados en forma "ciega" por dos investigadores reconocidos y con experiencia dentro del área. En el proceso de evaluación se garantizará el anonimato de autores y evaluadores.

El resultado del dictamen puede ser:

A. Sugerencia de publicar el artículo sin modificaciones.
B. Sugerencia de publicar el artículo bajo reserva de hacer ligeras modificaciones.
C. Sugerencia de reestructurar el artículo atendiendo a los comentarios, lo que precisaría una nueva revisión.
D. Sugerencia de rechazo del artículo.

FORMATO DE LAS CONTRIBUCIONES

Todas las contribuciones deberán estar escritas en procesador de texto Word 6.0 o superior, tipo de letra Times New Roman, tamaño 11 y utilizar un espacio anterior y posterior de 4 pt, lo que significa que no se requiere dar espacio entre un párrafo y otro. Los cuatro márgenes de la página deberán ser de 2.5 cm. Para las expresiones matemáticas debe usarse el editor de ecuaciones.

ENCABEZADOS PRINCIPALES

El estilo de letra para los encabezados principales es tipo VERSALES en formato minúsculas, utilizando un espacio anterior de 36pt y el posterior de 12pt, lo que significa que no se requiere dar espacio entre un encabezado y los párrafos subsecuentes. Enumerar las secciones de los encabezados principales (usando 1, 2, 3, etc.) y utilizar el estilo de alineación centrada.

Subtítulos

El estilo de letra para los subtítulos del artículo es tipo Times New Roman, tamaño 11 y cursiva. La primera letra debe escribirse con mayúsculas. Utilizar un espacio anterior de 24 pt y el posterior de 10 pt, lo que significa que no se requiere dar espacio entre un subtítulo y los párrafos subsecuentes. Los subtítulos deberán enumerarse 1.1., 1.2, 1.3, etc., según corresponda en estilo tipo Normal. Los subtítulos posteriores a un encabezado principal deben tener un espacio anterior y posterior de 6 pts.

Estilo para las tablas

Las tablas deben tener una alineación centrada. El estilo de letra del texto en el interior de la tabla debe ser tipo Times New Roman, Normal, tamaño 10 y con un espacio anterior y posterior de 2 pto. Enumerar las tablas, usando tipo de letra VERSALES tamaño 10, en formato minúscula: TABLA I, TABLA II, TABLA III, etc., utilizando un espacio anterior de 6 pto y posterior de 0 pto. El número de la tabla debe escribirse en la parte superior y su título debajo, utilizando un estilo de alineación centrada y tipo de letra normal tamaño 10.

Estilo para las figuras e imágenes

Las figuras e imágenes deben tener una alineación centrada. El estilo de letra debe ser tipo Times New Roman, tamaño 10 y tipo Cursiva y Normal. Escribir el número de la figura o imagen en formato tipo cursiva y el título en formato tipo normal. Utilizar un espacio anterior de 2 pt y el posterior de 4 pt. Las imágenes y figuras deberán adjuntarse en un archivo independiente al manuscrito en formato de alta resolución.

Transcripciones

Para las transcripciones usar el estilo de letra normal, tipo Times New Roman tamaño 10. Utilizar un interlineado sencillo.

Usar estilos de transcripción como los siguientes:

Estudiante: Para graficar utilicé uno de los métodos que vimos en clase. Me pareció que era el más simple para resolverlo
Profesor: ¿Por qué consideras que ese método es más simple?

Si las líneas de la transcripción requieren ser numerados, entonces usar el estilo de transcripción enumerada como sigue:

[122] Entrevistador: En la primera actividad se te propuso determinar la función velocidad ¿Podrías explicar cómo la hallaste?
[123] Alumno: Hum... pues...

En el caso de que no se requiera hacer referencia a los números, se sugiere usar el primer estilo de transcripción (indicada párrafos arriba).

Reconocimientos

Los reconocimientos a personas, fondos, asociaciones, etc. deberán colocarse en una sección separada antes de las referencias bibliográficas. Los nombres de organizaciones financieras deberán escribirse completos.

Bibliografía, referencias y notas

Solicitamos emplear el estilo de la APA (Publication Manual of the American Psychological Association, 6th ed., 2009) para las citas de pie, notas, referencias textuales y bibliografía. (Pueden apoyarse en el siguiente link: http://www.apastyle.org/learn/tutorials/basics-tutorial.aspx; o bien, consultar el Manual).

La bibliografía deberá escribirse en forma de lista sin enumerar y en orden cronológico. El estilo de letra debe ser Times New Roman 9. Para escribir una referencia debe usarse alineación justificada para el primer renglón. A partir del segundo renglón deberán establecer una sangría especial de 0.63 cm.

Las notas deberán escribirse al final de cada página del documento. El estilo de letra que deberá usarse es Times New Roman 9 en formato normal.

Información complementaria

1) No se devolverán los artículos originales.
2) El editor se reserva el derecho de hacer algunas modificaciones necesarias para mantener el estilo de la publicación.
3) Los textos pueden ser publicados en otro órgano editorial previo permiso expreso, por escrito, y haciendo referencia explícita de la fuente.
4) Los autores recibirán gratuitamente dos ejemplares del número en que se haya publicado su artículo.
5) No se realizarán pagos a los autores por los artículos que se publiquen en *RELIME*. Para mayores informes, puede visitar la página web: http://www.clame.org.mx/relime.htm o bien el correo electrónico:

relime@clame.org.mx

Suscripción a Relime

Costo del volumen 22 (tres números)

Suscripción Institucional:
Volumen US$ 120
Cada número US$ 50

Suscripción Individual:
Volumen US$ 50
Cada número US$ 20

Suscripción Miembros Clame:
Volumen US$ 20
Cada número US$ 10

Estos costos NO aplican a *números especiales*,
NO incluyen gastos de envío, NI comisión bancaria por transferencias
o depósitos de cheques emitidos fuera de México

Las suscripciones deberán solicitarse al correo electrónico
suscripcion@relime.org

Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa

Volumen 22, Número 2

Diseño y Web: Emilio Serna Hernández
Servicios Editoriales Recrea
(Miembro CANIEM - 3663)
sernandem@yahoo.com.mx

Se imprimió en los talleres de
Editorial Progreso S.A. de C.V.
Sabino # 275
Col. Santa María la Ribera
Delegación Cuauhtémoc
06400, México, CDMX

Julio de 2019
Tiraje: 1000 ejemplares más sobrantes